

На правах рукописи



Лемза Александр Олегович

**БОЛЬШИЕ НЕОБРАТИМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛЗУЧЕСТИ
В УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ**

Специальность: 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Комсомольск-на-Амуре – 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Дальневосточный федеральный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Российской академии наук
Ковтанюк Лариса Валентиновна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник, заведующий отделом
ФГБУН Институт проблем машиноведения
Российской академии наук, г. Санкт-Петербург
Фрейдин Александр Борисович

кандидат физико-математических наук, старший
научный сотрудник ФГБУН Институт машиноведения
и металлургии Дальневосточного отделения
Российской академии наук, г. Комсомольск-на-Амуре
Ткачева Анастасия Валерьевна

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Самарский государственный
технический университет», г. Самара

Защита состоится «23» мая 2019 г. в 13:00 на заседании диссертационного совета Д 212.092.07, созданного на базе ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет», по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет» и на сайте <https://sovet.knastu.ru>

Автореферат разослан «___» _____ 2019 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент



Григорьева А.Л.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Современные технологии при изготовлении деталей сложной геометрии предъявляют к технологическим процессам и режимам повышенные требования к размерной точности и ресурсу эксплуатации готовых изделий. Разработка адекватных технологическим процессам новых средств и методов математического моделирования таких процессов является наиболее эффективным способом соблюдения указанных требований.

Диссертация посвящена изучению процессов интенсивного деформирования материалов, когда накапливаемые ими необратимые деформации могут быть как деформациями ползучести, так и пластичности. Примером такого технологического процесса может служить холодная формовка, когда необратимые деформации накапливаются за счёт медленного процесса ползучести, однако это не исключает возникновения локальных областей пластического течения, обычно в местах контакта оснастки и деформируемого материала. Наличие таких областей приводит к значительному перераспределению полей напряжений и, следовательно, влияет на процесс ползучести. Таким образом, при моделировании подобных процессов необходимо использовать теорию ползучести при одновременном учёте возможностей возникновения и развития зон пластического течения. Учёт упругих деформаций позволяет при этом рассчитывать упругий отклик при разгрузке, в том числе остаточные напряжения и их релаксацию после полной разгрузки.

В целом ряде промышленных технологий обработки материалов давлением (прокатка, волочение, штамповка и др.) материалы значительно изменяют форму, следовательно, приобретают большие деформации. Значит, математической моделью для описания таких процессов должна быть модель больших деформаций материалов, комплексно учитывающая их упругие, вязкие и пластические свойства.

Здесь рассмотрен класс задач теории больших деформаций о вискозиметрическом деформировании материала, учитывающем его ползучесть на начальном этапе и последующее пластическое течение и, наоборот, при торможении течения в условиях разгрузки.

Степень разработанности темы исследования. Использованию свойства ползучести для формоизменения материалов в процессах их обработки давлением посвящён ряд классических работ, в частности Н. Х. Арутюняна, В. Л. Колмогорова, Н. Н. Малинина, А. Ф. Никитенко, Ю. Н. Работнова, С. А. Шестерикова, О. В. Соснина. Из современных исследований, относящихся к производству изделий за счёт значительного формоизменения материалов в условиях ползучести, отметим работы К. С. Бормотина, А. А. Кривенка, И. С. Куликова, А. М. Локощенко, Б. В. Горева, А. И. Олейникова, В. П. Радченко, И. Ю. Цвелодуба, А. В. Чигарева.

Процессы приобретения деформируемыми телами больших необратимых деформаций в присутствии обратимых изучались с использованием различных подходов. Это одно из основных направлений современной механики деформирования. Весомый вклад в развитие теории внесли отечественные авторы Г. Л. Бровко, А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Р. А. Васин, Ю. И. Димитриенко, В. И. Кондауров, В. И. Левитас, А. А. Маркин, В. П. Мясников, А. А. Роговой, П. В. Трусов, А. В. Шитиков, А. В. Шутов. Анализ зарубежных работ и достижений

в развитии теории представлен в обзоре Р. М. Naghdi. Решения краевых задач теории получили В. П. Багмутов, А. С. Бегун, В. В. Глаголев, А. И. Голованов, Д. С. Денисевич, Ф. У. Еникеев, И. Н. Захаров, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко, М. В. Полоник, Ю. Н. Радаев, Г. М. Севастьянов, Л. У. Султанов. Коллективом авторов (А. С. Бегун, С. В. Белых, К. С. Бормотин, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. Н. Прокудин) была предложена математическая модель больших деформаций, не различающая необратимые деформации ползучести и такие же пластические деформации. Отличие их сказывалось только в механизме их производства. При таком подходе были поставлены и решены первые краевые задачи с последовательными процессами накопления необратимых деформаций (А. А. Бажин, А. С. Бегун, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Е. В. Мурашкин, Г. Л. Панченко, А. Н. Прокудин, С. В. Фирсов).

В настоящей диссертации при таком же способе производства больших деформаций в материалах с упругими, пластическими и вязкими свойствами рассмотрено вискозиметрическое деформирование.

Целью работы является постановка и решение краевых задач о вискозиметрическом деформировании материала цилиндрического слоя при различных видах воздействия в условиях последовательного накопления деформаций ползучести и пластического течения, разработка численных алгоритмов и программ, позволяющих выполнять расчёт напряжённо-деформированного состояния среды.

Достижение поставленной цели осуществлялось при решении **задач**:

1. Постановка и решение краевой задачи о деформировании упруговязкопластического материала, расположенного между двумя жёсткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, при повороте внутреннего жёсткого цилиндра вокруг своей оси за счёт приложенного к нему изменяющегося момента закручивания. Приобретаемые материалом необратимые деформации в зависимости от уровня напряжённого состояния среды могут быть и деформациями ползучести, и деформациями пластического течения в условиях соответствия напряжённого состояния поверхности нагружения.

2. Постановка и решение краевых задач о вискозиметрическом деформировании материала, проявляющего упругие, вязкие и пластические свойства и помещённого в зазор между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями, при заданной переменной скорости поворота одного из цилиндров в условиях прилипания материала на жёстких стенках. Исследование возникновения, развития и торможения пластического течения в материале с накопленными деформациями ползучести при возрастающей, постоянной, убывающей и нулевой скорости поворота, определение продвигающейся упругопластической границы, вычисление деформаций, перемещений, напряжений на всех этапах процесса деформирования, включая релаксацию напряжений после полной остановки вращающегося цилиндра.

3. Постановка и решение аналогичных задач при учёте сухого и вязкого трения в окрестности жёстких стенок при вискозиметрическом деформировании материала.

4. Разработка алгоритмов и программ расчётов напряжённо-деформированных

состояний материалов в указанных случаях.

Научная новизна. В рамках нового подхода последовательного учёта накопления необратимых деформаций ползучести и пластичности поставлены и решены новые краевые задачи теории больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами. Разработаны соответствующие методы решения.

Практическая значимость. Результаты решения задач имеют большое значение для описания и совершенствования методов прогнозирования явлений, связанных с холодной формовкой – наиболее предпочтительным способом значительного формоизменения ряда материалов, а также формированием полей остаточных напряжений. Появляется возможность оценки упругого последствия разгрузки и соответствующей оптимизации технологических приёмов снятия остаточных напряжений.

К **основным научным результатам** выполненной работы относятся:

1. Постановки и решения краевых задач о вискозиметрическом деформировании материалов в условиях последовательного накопления ими деформаций ползучести и пластичности при увеличивающейся и постоянной скорости поворота одного из жёстких цилиндров или за счёт приложенного переменного момента закручивания.

2. Решения задач о торможении вязкопластического течения и разгрузке в условиях равнозамедленного движения одной из жёстких поверхностей или уменьшающегося момента закручивания.

3. Указанные закономерности продвижения упругопластических границ по деформируемому цилиндрическому слою как в условиях возрастающих нагрузок, так и при разгрузке.

4. Вычисление деформаций (обратимых и необратимых), перемещений, напряжений в процессах нагружения и разгрузки, в том числе остаточных. Исследование релаксации остаточных напряжений после полной остановки цилиндрических поверхностей.

5. Постановки и решения задач о вискозиметрическом деформировании материала в зазоре между двумя жёсткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, когда на каждой из поверхностей заданы условия сухого и вязкого трения.

6. Разработанные алгоритмы и программы расчётов напряжённо-деформированного состояния материала и определения неизвестных продвигающихся упругопластических границ.

Достоверность результатов работы обеспечивается использованием классических подходов неравновесной термодинамики и механики сплошных сред, достаточно апробированной теории больших упруговязкопластических деформаций, корректными математическими постановками исследуемых задач, стандартными методами построения конечно-разностных схем, применением известной системы компьютерной математики.

Апробация результатов. Основные результаты работы обсуждались на следующих научных конференциях:

– XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и

прикладной механики (г. Казань, 2015);

– III Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (г. Москва, 2016);

– 64-я и 65-я международные молодёжные научно-технические конференции «Молодёжь. Наука. Инновации» (г. Владивосток, 2016, 2017);

– XLIV и XLV Международные летние школы-конференции “Advanced Problems in Mechanics” (г. Санкт-Петербург, 2016, 2017);

– молодёжная научная школа по математическому моделированию и компьютерным технологиям в рамках 2-й Российско-Тихоокеанской конференции по компьютерным технологиям и приложениям (г. Владивосток, 2017);

– Региональная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам (г. Владивосток, 2018).

Личный вклад автора. Все основные результаты, составившие диссертацию, получены автором лично. Соавторы научных публикаций по теме диссертации участвовали в постановке задач, обсуждении результатов, а все необходимые вычисления были проведены автором. Автор выражает благодарность А. А. Буренину за постоянное внимание к работе, ценные советы и замечания.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав основной части, заключения и списка литературы из 197 источников. Работа изложена на 123 страницах, содержит 40 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** проведён краткий литературный обзор, обосновывается актуальность темы исследования, формулируются цель и задачи диссертации, описано содержание работы по главам.

В **первой главе** представлены основные соотношения теории больших упругопластических деформаций, предложенной А. А. Бурениным, Г. И. Быковцевым, Л. В. Ковтанюк, В. П. Мясниковым и А. В. Шитиковым и выбранной в качестве основы для математической модели исследуемых задач. В § 1.1 строится кинематика больших упругопластических деформаций. В декартовой системе координат в пространственных переменных Эйлера x_i обратимая e_{ij} и необратимая p_{ij} составляющие тензора деформаций Альманси d_{ij} определяются дифференциальными уравнениями изменения (переноса) в форме:

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2} [(\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{jk} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \gamma_{kj} - z_{kj})], \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ki}p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \quad r_{ij} = \omega_{ij} + z_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,k}v_k, \quad u_{i,k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}), \\ z_{ij} &= A^{-1} [(\varepsilon_{im}e_{mj} - e_{im}\varepsilon_{mj})B^2 + B(\varepsilon_{im}e_{mn}e_{nj} - e_{im}e_{mn}\varepsilon_{nj}) + e_{im}\varepsilon_{mn}e_{nk}e_{kj} - e_{im}e_{mn}\varepsilon_{nk}e_{kj}], \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3, \quad B = 2 - E_1, \quad E_1 = e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}. \end{aligned} \quad (1)$$

В соотношениях (1) ε_{ij} и γ_{ij} – компоненты тензоров скоростей полных и необратимых деформаций соответственно, Dn_{ij}/Dt – оператор используемой объективной производной произвольного тензора n_{ij} по времени, v_i и u_i – компоненты векторов скорости и перемещений точек среды соответственно, ω_{ij} – кососимметричный тензор вихря скорости, а r_{ij} – тензор вращений, имеющий своей нелинейной составляющей тензор z_{ij} . Когда источник необратимых деформаций γ_{ij} равен нулю, всё изменение компонент тензора необратимых деформаций p_{ij} связано с жёстким перемещением тела. Разделение тензора деформаций Альманси на обратимую и необратимую составляющие представляется зависимостью:

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj} - e_{ik} p_{kj} - p_{ik} e_{kj} + e_{ik} p_{km} e_{mj}. \quad (2)$$

В § 1.2, следуя формализму неравновесной термодинамики, приводятся соотношения между тензором напряжений Эйлера – Коши σ_{ij} и деформациями в областях с накапливающимися необратимыми деформациями и уравнение баланса энтропии. Принимая гипотезу о независимости свободной энергии от необратимых деформаций, в случае несжимаемой изотропной среды получаем соотношение, являющееся аналогом формулы Мурнагана из нелинейной теории упругости:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}), \quad (3)$$

где p – добавочное гидростатическое давление, $W(I_1, I_2)$ – упругий потенциал.

В § 1.3 проводится конкретизация определяющих зависимостей. В качестве упругого потенциала $W(I_1, I_2)$ принимается разложение в ряд Тейлора относительно свободного состояния по компонентам тензора обратимых деформаций:

$$W = -2\mu I_1 - \mu I_2 + bI_1^2 + (b - \mu)I_1 I_2 - \chi I_1^3 + \dots, \quad (4)$$

$$I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2} e_{km} e_{mk}, \quad I_2 = e_{km} e_{mk} - e_{km} e_{ms} e_{sk} + \frac{1}{4} e_{km} e_{ms} e_{st} e_{tk},$$

где μ – модуль сдвига, b, χ – упругие постоянные высшего порядка.

Диссипативный механизм деформирования определяется реологическими и пластическими свойствами среды. Необратимые деформации и скорости их накопления при этом не разделяются на свои составляющие. Компоненты тензора p_{ij} являются как деформациями ползучести, так и пластическими деформациями. Различие таких составляющих необратимых деформаций заключается в механизмах их накопления.

Если процесс накопления необратимых деформаций связан с ползучестью материала, источник γ_{ij} необратимых деформаций конкретизируется с помощью степенного закона ползучести Нортона:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad V(\Sigma) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max|\sigma_i - \sigma_j|, \quad (5)$$

где ε_{ij}^v – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести, $V(\Sigma)$ –

термодинамический потенциал, B и n – параметры ползучести материала, σ_k – главные значения тензора напряжений. Выбор инварианта Σ и закона Нортон в (5) является лишь одним из возможных вариантов.

При дальнейшем росте напряжённое состояние в материале может достичь поверхности нагружения. В качестве такой поверхности можно принять одно из условий пластичности, например, условие пластичности максимального касательного напряжения, обобщённое на случай учёта вязких свойств среды:

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\beta_k|, \quad (6)$$

где k – предел текучести материала, η – вязкость.

Выбор условия пластичности произволен и связан с дополнительными предпочтениями при решении конкретной задачи. При смене диссипативного механизма в областях пластического течения скорости пластических деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p, \quad \beta_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \beta_{ij}) = 0, \quad \lambda > 0, \quad \beta_{ij} = \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{v_0}. \quad (7)$$

В (6), (7) $\varepsilon_{ij}^{v_0}$ – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения, β_k – главные значения тензора β_{ij} .

При учёте свойств ползучести среды на стадии, предшествующей пластическому течению, и вязких свойств материала при последующем течении следует, не разделяя необратимые деформации на составляющие, использовать накопленные в соответствии с (5) к началу пластического течения деформации ползучести в качестве начальных условий для пластических деформаций.

Во второй главе получено решение задачи о деформировании несжимаемого материала, занимающего слой между двумя коаксиальными цилиндрическими недеформируемыми стенками радиусов $r = r_0$ и $r = R$ ($r_0 < R$), при повороте внутреннего жёсткого цилиндра за счёт приложенного к нему изменяющегося момента закручивания, в то время как внешний цилиндр является неподвижным. Считая, что все точки среды движутся по окружностям, в цилиндрических координатах r, φ, z кинематику среды определяем следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} u_r &= r(1 - \cos\theta), \quad u_\varphi = r \sin\theta, \quad d_{rr} = -\frac{1}{2}g^2, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2}g, \quad g = r \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\ v_\varphi &= r \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t}, \quad \omega_{r\varphi} = -\varepsilon_{r\varphi} - \frac{\partial \theta}{\partial t}, \\ r_{\varphi r} &= \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{2\varepsilon_{r\varphi}(e_{\varphi\varphi} - 1)}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2}, \quad z_{\varphi r} = \frac{\varepsilon_{r\varphi}(e_{\varphi\varphi} - e_{rr})}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\theta(r, t)$ – центральный угол закручивания.

На жёстких цилиндрических поверхностях выполняются условия прилипания, деформации и напряжения в среде до деформирования отсутствуют. Начальные и граничные условия задачи имеют вид:

$$\theta(R, t) = 0, \quad e_{ij}(r, 0) = 0, \quad p_{ij}(r, 0) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(r_0, t) = \frac{c(t)}{r_0^2}, \quad c(0) = 0, \quad \sigma_{rr}(R, t) = \sigma_0, \quad (9)$$

где $c(t)$ и σ_0 – задаваемые функции. Уравнения равновесия (квазистатическое приближение) записываются в форме:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{r} = \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} \frac{e_{\varphi\varphi} - e_{rr}}{e_{r\varphi}}, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} = -2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r}. \quad (10)$$

Согласно второму уравнению (10)

$$\sigma_{r\varphi}(r, t) = \frac{c(t)}{r^2}, \quad (11)$$

т.е. если компонента $\sigma_{r\varphi}$ тензора напряжений задана на внутренней цилиндрической поверхности, то её распределение будет известно во всей области деформирования.

Первоначально в § 2.1 было рассмотрено деформирование материала на стадии, предшествующей пластическому течению, т.е. полагалось, что при увеличении закручивающего момента необратимые деформации накапливаются за счёт медленного процесса ползучести. При расчётах в формулах (3), (4) учитывались слагаемые до шестого порядка по компонентам обратимых деформаций. Используя закон ползучести (5), получаем

$$V = B \left[(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{r\varphi}\sigma_{\varphi r} \right]^{\frac{n}{2}},$$

$$\varepsilon_{r\varphi}^v = 2Bn \frac{c(t)}{r^2} Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad \varepsilon_{rr}^v = -\varepsilon_{\varphi\varphi}^v = Bn \frac{c(t)}{r^2} \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}} Q^{\frac{n}{2}-1} = \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}} \cdot \frac{\varepsilon_{r\varphi}^v}{2}, \quad (12)$$

$$Q = \frac{c^2(t)}{r^4} \left(4 + \left(\frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}} \right)^2 \right).$$

Согласно (1) получаем систему уравнений для ненулевых компонент тензоров деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{rr}}{\partial t} &= \gamma_{rr}(e_{rr} - 1) + e_{r\varphi} \left(\gamma_{r\varphi} - 2\varepsilon_{r\varphi} \left(1 + \frac{e_{\varphi\varphi} - 1}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} \right) \right), \\ \frac{\partial e_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= \gamma_{\varphi\varphi}(e_{\varphi\varphi} - 1) + e_{r\varphi} \left(\gamma_{r\varphi} + 2\varepsilon_{r\varphi} \frac{e_{\varphi\varphi} - 1}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} \right), \\ \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} &= \frac{1}{2} e_{r\varphi} (\gamma_{rr} + \gamma_{\varphi\varphi}) + \gamma_{r\varphi} \frac{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2}{2} - 2\varepsilon_{r\varphi} \frac{(e_{\varphi\varphi} - 1)^2}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2}, \\ \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} &= \gamma_{rr}(1 - 2p_{rr}) - 2p_{r\varphi} \left(\gamma_{r\varphi} + \frac{2\varepsilon_{r\varphi}(e_{\varphi\varphi} - 1)}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} \right), \\ \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= \gamma_{\varphi\varphi}(1 - 2p_{\varphi\varphi}) + 2p_{r\varphi} \left(-\gamma_{r\varphi} + \frac{2\varepsilon_{r\varphi}(e_{\varphi\varphi} - 1)}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} \right), \\ \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t} &= \gamma_{r\varphi}(1 - p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) + 2\varepsilon_{r\varphi} \frac{(e_{\varphi\varphi} - 1)(p_{rr} - p_{\varphi\varphi})}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} - p_{r\varphi}(\gamma_{rr} + \gamma_{\varphi\varphi}). \end{aligned} \quad (13)$$

Добавляя к соотношениям (13) уравнение (11), получаем систему из семи дифференциальных уравнений в частных производных с неизвестными

компонентами необратимых и обратимых деформаций $p_{r\varphi}, p_{rr}, p_{\varphi\varphi}, e_{r\varphi}, e_{rr}, e_{\varphi\varphi}$ и углом поворота θ . Система при соответствующих краевых условиях и нулевых начальных интегрируется численно с использованием конечно-разностной схемы.

С ростом внешних усилий в момент времени $t = t_0$ на границе $r = r_0$ напряжённое состояние достигает поверхности нагружения (6), начинает развиваться область пластического течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$. При этом $r_1(t) \leq r \leq R$ остаётся областью, где растут обратимые деформации и деформации ползучести, а отделяет её от области течения движущаяся граница $r_1(t)$. В слое $r_1(t) \leq r \leq R$ справедлива система уравнений (13), где в качестве источников $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v$ использованы значения (12). В области течения механизм деформирования меняется; система уравнений в частных производных следует из уравнений (1), условия пластичности (6) и ассоциированного закона (7), согласно которому

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = 2H\sigma_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^v(r, t_\xi(r)), \quad \varepsilon_{rr}^p = H\sigma_{r\varphi} \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}} + \varepsilon_{rr}^v(r, t_\xi(r)), \quad H = \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\sqrt{Q}} \right),$$

где $\varepsilon_{ij}^v(r, t_\xi(r))$ – скорости деформаций ползучести в момент $t_\xi(r)$ начала пластического течения на радиусе r .

Компоненты обратимых e_{ij} и необратимых p_{ij} деформаций, угол поворота θ и положение упругопластической границы $r_1(t)$ находятся интегрированием систем дифференциальных уравнений в двух рассматриваемых областях с использованием граничных условий и условий непрерывности деформаций и угла поворота на границе $r = r_1(t)$.

Полагалось, что до некоторого момента времени $t = t_1$ ($t_1 > t_0$) нагружающее усилие увеличивается; при этом растёт и область течения. Затем, начиная с момента времени $t = t_1$, нагружающее усилие уменьшается. Это приводит к уменьшению области течения (с момента времени $t = t_1$ граница $r_1(t)$ движется к поверхности $r = r_0$). Теперь и в области $r_1(t_1) \leq r \leq R$, где пластическое течение не начиналось, и в области $r_1(t) \leq r \leq r_1(t_1)$, где было пластическое течение, изменяются необратимые деформации ползучести. В момент времени $t = t_z$ поверхности $r_1(t)$ и r_0 совпадут, и пластическое течение прекратится во всём цилиндрическом слое. С момента времени $t = t_2$ ($t_2 > t_z$) закручивающий момент полагался постоянным. Функция $c(t)$ задавалась в виде:

$$c(t) = \begin{cases} -\mu^2 t(2t_1 - t)/\rho, & 0 \leq t \leq t_2, \\ -\mu^2 t_2(2t_1 - t_2)/\rho, & t \geq t_2, \end{cases}$$

где ρ – плотность среды.

На рисунке 1 представлено распределение угла θ по радиусам $\tilde{r} = r/R$ рассматриваемого цилиндрического слоя в моменты времени τ_0 и τ_z начала и окончания пластического течения во всей области соответственно, τ_1 (момент максимального значения нагружающего усилия) и τ_2 . Здесь $\tau = t\sqrt{\mu/\rho}/R$.

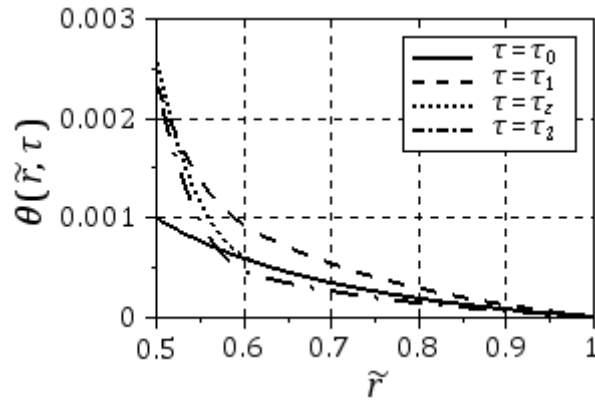


Рисунок 1 – Угол поворота θ в разные моменты времени

На рисунке 2 показана зависимость необратимых деформаций от времени в точках поверхности $\tilde{r} = \tilde{r}_0$.

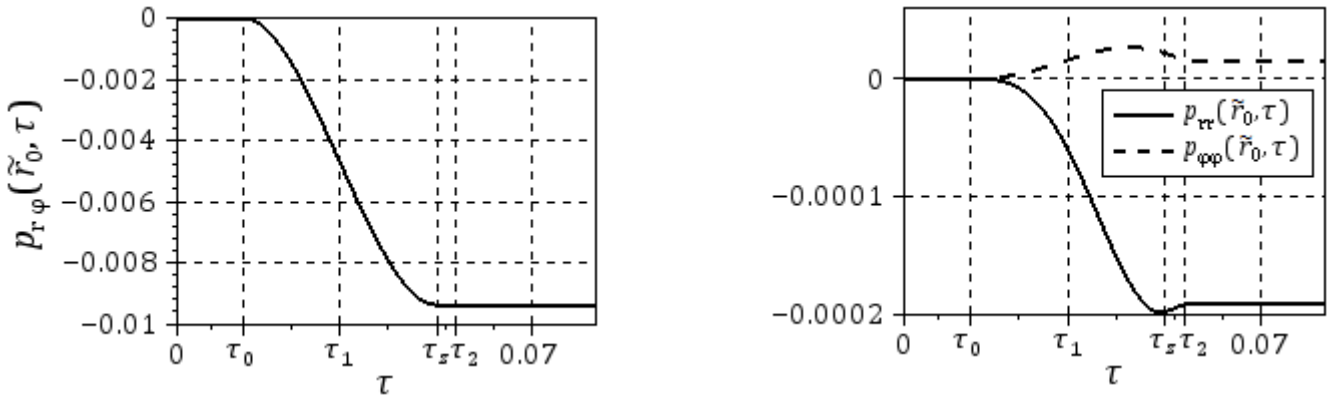


Рисунок 2 – Изменение необратимых деформаций

Результаты на графиках приведены при значениях постоянных:

$$k/\mu \approx 0.00263, \quad b/\mu = 4, \quad \chi/\mu = 80, \quad \tilde{r}_0 = 0.5, \quad BR\mu^{n-1}\sqrt{\rho/\mu} = 3.5, \\ n = 3, \quad \alpha\eta/\mu = 0.004, \quad \tau_1 = 0.032, \quad \tau_2 = 0.055.$$

В **третьей** главе получено решение задач аналогичной геометрии, когда в качестве краевого условия используется заданная переменная скорость вращения одного из цилиндров. В § 3.1 рассмотрена постановка задачи и деформирование в процессе ползучести несжимаемого материала, занимающего цилиндрический слой $r_0 \leq r \leq R$, при неподвижности внутренней граничной поверхности и повороте внешнего цилиндра с заданной угловой скоростью. Полагаем, что скорость движения внешней цилиндрической поверхности сначала увеличивается ($0 \leq t \leq t_1$), затем становится постоянной ($t_1 \leq t \leq t_2$), потом уменьшается до нуля ($t_2 \leq t \leq t_3$) и далее равна нулю ($t \geq t_3$). Тогда значение $w_R(t)$ выберем таким:

$$w_R(t) = \begin{cases} \alpha^2 t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \alpha^2 t_1, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ \alpha^2 t_1 - \beta^2 (t - t_2), & t_2 \leq t \leq t_3, \\ 0, & t \geq t_3, \end{cases} \quad (14)$$

где $\alpha, \beta = const$. Граничные условия имеют вид:

$$\bar{u}|_{r=r_0} = \bar{v}|_{r=r_0} = 0, \quad w(R,t) = w_R(t), \quad \theta(R,t) = \theta_R(t) = \int_0^t w_R(\xi) d\xi, \quad \sigma_{rr}(r_0,t) = \sigma_0, \quad (15)$$

где σ_0 – задаваемая функция.

Учитывая, что в задачах данного класса диагональные компоненты тензоров деформаций принимают значения более высокого порядка малости по сравнению с недиагональными компонентами, далее ограничимся слагаемыми первого порядка по диагональным компонентам тензоров обратимых и необратимых деформаций и второго – по недиагональным. Такое ограничение не оказывает значительного влияния на численные распределения деформаций и напряжений в среде, поэтому не является принципиальным, но существенно упрощает последующие вычисления. Тогда из формул (3) и (4) найдём напряжения в среде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p - 2\mu + 2(b + \mu)e_{rr} + 2be_{\varphi\varphi} + \mu e_{r\varphi}^2, & \sigma_{zz} &= -p - 2\mu + 2b(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) - 2\mu e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p - 2\mu + 2(b + \mu)e_{\varphi\varphi} + 2be_{rr} + \mu e_{r\varphi}^2, & \sigma_{r\varphi} &= 2\mu e_{r\varphi}, & \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_{r\varphi}} &= \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}}. \end{aligned} \quad (16)$$

В рассматриваемом приближении при деформировании материала до его пластического течения при возрастающей скорости поворота для компонент тензора скоростей деформаций ползучести и деформации $p_{r\varphi}$, согласно (5), получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^v(r,t) &= Bn2^{n-1} \frac{c^{n-1}(t)}{r^{2n-2}}, & \varepsilon_{rr}^v &= -\varepsilon_{\varphi\varphi}^v = \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}} \frac{\varepsilon_{r\varphi}^v}{2}, & p_{r\varphi}(r,t) &= Bn2^{n-1} \frac{c_1(t)}{r^{2n-2}}, \\ c_1(t) &= \int_0^t c^{n-1}(\xi) d\xi, & \dot{c}_1(t) &= c^{n-1}(t), & c_1(0) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (1) и (2) получим соотношения, справедливые в течение всего процесса деформирования независимо от типа накапливаемой необратимой деформации:

$$\begin{aligned} d_{r\varphi} &= e_{r\varphi} + p_{r\varphi}, & \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= \gamma_{\varphi\varphi} - 2\gamma_{r\varphi} p_{r\varphi} + \frac{4\varepsilon_{r\varphi} p_{r\varphi} (e_{\varphi\varphi} - 1)}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t} = \varepsilon_{r\varphi}^e + \gamma_{r\varphi}, & \sigma_{r\varphi}(r,t) &= \frac{c(t)}{r^2}, & e_{r\varphi}(r,t) &= \frac{c(t)}{2\mu r^2}, \\ e_{rr} + e_{\varphi\varphi} &= -e_{r\varphi}^2, & p_{rr} + p_{\varphi\varphi} &= -2p_{r\varphi}^2, & e_{rr} &= p_{\varphi\varphi} - \frac{3}{2}e_{r\varphi}^2 - 2e_{r\varphi} p_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (18)$$

В (17) и (18) $c(t) \geq 0$ – неизвестная функция.

Используя соотношения (8), (17), (18) и краевые условия (15), получим зависимости для угла поворота и угловой скорости:

$$\begin{aligned} \theta(r,t) &= \theta_R(t) - \frac{c(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) - \frac{Bn2^{n-1}}{n-1} c_1(t) \left(\frac{1}{r^{2n-2}} - \frac{1}{R^{2n-2}} \right), \\ w(r,t) &= w_R(t) - \frac{\dot{c}(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) - \frac{Bn2^{n-1}}{n-1} \dot{c}^{n-1}(t) \left(\frac{1}{r^{2n-2}} - \frac{1}{R^{2n-2}} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

С учётом граничных условий (15) на внутренней поверхности $r = r_0$, из (19) следует дифференциальное уравнение для неизвестной функции $c(t)$:

$$\dot{c}(t) = \frac{2\mu w_R(t)}{r_0^{-2} - R^{-2}} - \frac{\mu B n 2^n}{n-1} c^{n-1}(t) \cdot \frac{r_0^{2-2n} - R^{2-2n}}{r_0^{-2} - R^{-2}}, \quad c(0) = 0. \quad (20)$$

Согласно (17) и (18) компонента $p_{\varphi\varphi}$ определяется дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = & -Bn2^{n-1} \frac{c^{n-1}(t)}{r^{2n-2}} \cdot \frac{p_{\varphi\varphi} - e_{r\varphi}^2}{e_{r\varphi}} + \\ & + \frac{4p_{r\varphi}}{e_{r\varphi}^2 + 2} \left(1 + p_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2} e_{r\varphi}^2 - 2e_{r\varphi} p_{r\varphi} \right) \left(\frac{\dot{c}(t)}{2\mu r^2} + Bn2^{n-1} \frac{c^{n-1}(t)}{r^{2n-2}} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение (21) интегрируется численно. Компонента напряжений σ_{rr} находится из первого уравнения равновесия (10) с использованием краевого условия из (15). Затем из зависимостей (16) определяются гидростатическое давление p , компоненты напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ и σ_{zz} , а из системы (18) – остальные компоненты деформаций. Полученное решение справедливо до момента времени $t = t_0$, в который на границе $r = r_0$ впервые выполняется условие пластичности, которое в рассматриваемом приближении имеет вид $\sigma_{r\varphi} = k$.

Развивающееся в области $r_0 \leq r \leq m(t)$ цилиндрического слоя с момента времени $t = t_0$ при дальнейшем равноускоренном движении внешней жёсткой поверхности пластическое течение рассмотрено в § 3.2. В области $m(t) \leq r \leq R$ продолжают накапливаться необратимые деформации ползучести. Функция $m(t)$ определяет в момент времени t радиус упругопластической границы, разделяющей данные области. В них параметры напряжённо-деформированного состояния среды определяются разными уравнениями.

С момента времени $t = t_0$ для функции $c(t)$ введём новое обозначение $c_2(t)$, полагая $c_2(t_0) = c(t_0)$. Тогда в обеих рассматриваемых областях для компонент $\sigma_{r\varphi}$ и $e_{r\varphi}$ используются соотношения (18) с функцией $c_2(t)$ вместо $c(t)$. В области $m(t) \leq r \leq R$, где пластическое течение отсутствует, для компонент ε_{ij}^v выполняются первые два соотношения (17), для компоненты $p_{\varphi\varphi}$ используется (21), в которых также $c(t)$ следует заменить функцией $c_2(t)$. В областях $m(t) \leq r \leq M$ и $M \leq r \leq R$, где пластическое течение ещё не появилось или не начнётся вовсе, для компоненты $p_{r\varphi}$ справедливо третье соотношение (17), в котором функция $c_1(t)$ заменяется её последующим значением $c_3(t) = c_1(t_0) + \int_{t_0}^t c_2^{n-1}(\xi) d\xi$. Здесь M является радиусом максимального продвижения упругопластической границы. Для скоростей точек среды в области $m(t) \leq r \leq R$ используется второе уравнение (19), в котором также необходимо провести указанную замену функции $c(t)$ функцией $c_2(t)$.

В области пластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$ в соответствии с (6) и (7)

$$\varepsilon_{r\varphi}^p(r,t) = \frac{1}{\eta} \left[\frac{c_2(t)}{r^2} - k \right] + Bn2^{n-1} k^{n-1}. \quad (22)$$

Учитывая условие равенства скоростей необратимых деформаций (17) и (22) на упругопластической границе при смене диссипативного механизма, подставим в третье уравнение (18) значения компонент тензоров скоростей полных (8) и необратимых (22) деформаций. Интегрируя получившийся результат при условии $w(r_0, t) = 0$, определим угловые скорости точек среды в области пластического течения, а также зависимость между функциями $c_2(t)$ и $m(t)$:

$$w(r,t) = \frac{\dot{c}_2(t)}{2\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2}{\eta} \left[\frac{c_2(t)}{2} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - k \ln \frac{r}{r_0} \right] + Bn2^n k^{n-1} \ln \frac{r}{r_0}, \quad (23)$$

$$c_2(t) = km^2(t), \quad \dot{c}_2(t) = 2km(t)\dot{m}(t).$$

Условие равенства угловых скоростей точек среды (19) и (23) при $r = m(t)$ приводит к дифференциальной задаче определения упругопластической границы:

$$\dot{m}(t) = \frac{1}{m(t) \cdot (r_0^{-2} - R^{-2})} \left[\frac{\mu w_R(t)}{k} - \frac{\mu}{\eta} \left(\frac{m^2(t)}{r_0^2} - 1 - 2 \ln \frac{m(t)}{r_0} \right) - \frac{\mu Bn2^{n-1} k^{n-2}}{n-1} \left(1 - \frac{m^{2n-2}(t)}{R^{2n-2}} \right) - \mu Bn2^n k^{n-2} \ln \frac{m(t)}{r_0} \right], \quad m(t_0) = r_0.$$

Из (18) и (22) получаем уравнения для компонент $p_{r\varphi}$ и $p_{\varphi\varphi}$ в области пластического течения:

$$p_{r\varphi}(r,t) = Bn2^{n-1} \frac{c_3(t_\xi(r))}{r^{2n-2}} + \frac{c_4(r,t)}{\eta r^2} + \left(Bn2^{n-1} k^{n-1} - \frac{k}{\eta} \right) (t - t_\xi(r)), \quad c_4(r,t) = \int_{t_\xi(r)}^t c_2(\xi) d\xi,$$

$$\frac{\partial p_{\varphi\varphi}(r,t)}{\partial t} = \left(\frac{k}{\eta} - \frac{c_2(t)}{\eta r^2} \right) \frac{p_{\varphi\varphi}(r,t) - e_{r\varphi}^2(r,t)}{e_{r\varphi}(r,t)} + \left(\frac{\dot{c}_2(t)}{2\mu r^2} + \frac{c_2(t)}{\eta r^2} - \frac{k}{\eta} + Bn2^{n-1} k^{n-1} \right) \times$$

$$\times \frac{4p_{r\varphi}(r,t) \left(p_{\varphi\varphi}(r,t) - \frac{1}{2} e_{r\varphi}^2(r,t) - 2e_{r\varphi}(r,t)p_{r\varphi}(r,t) + 1 \right)}{e_{r\varphi}^2(r,t) + 2} +$$

$$+ Bn2^{n-1} k^{n-1} \left(e_{r\varphi}(r, t_\xi(r)) + 2p_{r\varphi}(r, t_\xi(r)) - \frac{p_{\varphi\varphi}(r, t_\xi(r))}{e_{r\varphi}(r, t_\xi(r))} - 2p_{r\varphi}(r, t) \right). \quad (24)$$

При постоянной скорости вращения внешнего цилиндра с момента времени $t = t_1$ область пластического течения продолжает своё развитие, однако в значительно меньшей степени, чем при равноускоренном движении поверхности $r = R$.

С момента времени $t = t_2$, в который вращение внешнего цилиндра становится равнозамедленным, область пластического течения начинает сокращаться до тех пор, пока в некоторый момент времени $t = t_z$ упругопластическая граница не достигнет поверхности $r = r_0$. В области $m(t) \leq r \leq M$, где пластическое течение было, но прекратилось, для компоненты $p_{r\varphi}$ справедливо соотношение, являющееся

результатом интегрирования первого уравнения (17) (с функцией $c_2(t)$ вместо $c(t)$) при начальном условии $p_{r\varphi}(r, t_\zeta(r))$, определяемом из (24), где $t_\zeta(r)$ – момент времени, в который упругопластическая граница, двигаясь в направлении к поверхности r_0 , занимает радиус r :

$$p_{r\varphi}(r, t) = \frac{c_4(r, t_\zeta(r))}{\eta r^2} + \left(Bn2^{n-1}k^{n-1} - \frac{k}{\eta} \right) (t_\zeta(r) - t_\xi(r)) + Bn2^{n-1} \frac{c_5(r, t)}{r^{2n-2}},$$

$$c_5(r, t) = c_3(t_\xi(r)) + \int_{t_\zeta(r)}^t c_2^{n-1}(\xi) d\xi.$$

При $t \geq t_z$ необратимые деформации во всём цилиндрическом слое вновь, как и на начальной стадии задачи, накапливаются только за счёт процесса ползучести. Для функции $c_2(t)$ вводится обозначение $c_6(t)$, причём $c_6(t_z) = c_2(t_z)$ – начальное условие для решения уравнения (20) относительно новой функции, где вместо $c(t)$ используется функция $c_6(t)$.

Различие предыстории накопления необратимых деформаций в областях $r \geq M$ и $r < M$ приводит к формированию пары уравнений, определяющих компоненту $p_{r\varphi}$ тензора необратимых деформаций, начиная с момента времени $t = t_z$. При $r \geq M$ значения данной компоненты следует вычислять с помощью третьего соотношения (17), в котором функция $c_1(t)$ заменяется функцией $c_7(t) = c_3(t_z) + \int_{t_z}^t c_6^{n-1}(\xi) d\xi$. При $r < M$ для такой цели используется следующее соотношение:

$$p_{r\varphi}(r, t) = \frac{c_4(r, t_\zeta(r))}{\eta r^2} + \left(Bn2^{n-1}k^{n-1} - \frac{k}{\eta} \right) (t_\zeta(r) - t_\xi(r)) + Bn2^{n-1} \frac{c_8(r, t)}{r^{2n-2}},$$

$$c_8(r, t) = c_5(r, t_z) + \int_{t_z}^t c_6^{n-1}(\xi) d\xi.$$

Поиск компоненты $p_{\varphi\varphi}$ ведётся с использованием (21), где вместо $c(t)$ используется $c_6(t)$, при начальных условиях, соответствующих радиусам решения.

Расчёты с использованием вычислительных средств системы Scilab были проведены отдельно для случая, когда необратимые деформации в материале накапливаются только за счёт процесса ползучести, и в случае развития и торможения пластического течения. Изменение упругопластической границы $\tilde{m}(\tau) = m(t)/R$ со временем $\tau = \alpha t$, полученное при константах

$$\begin{aligned} k/\mu &\approx 0.00245, \quad \tilde{r}_0 = 0.3, \quad b/\mu = 4, \quad \alpha/\beta = 3, \\ B\mu^{n-1}/\alpha &= 3.5, \quad n = 3, \quad \alpha\eta/\mu = 0.05, \quad \sigma_0/\mu \approx 0.0004, \\ \tau_1 &= 0.08, \quad \tau_2 = 0.3, \quad \tau_{fin} = 20\tau_3, \end{aligned} \quad (25)$$

показано на рисунке 3.

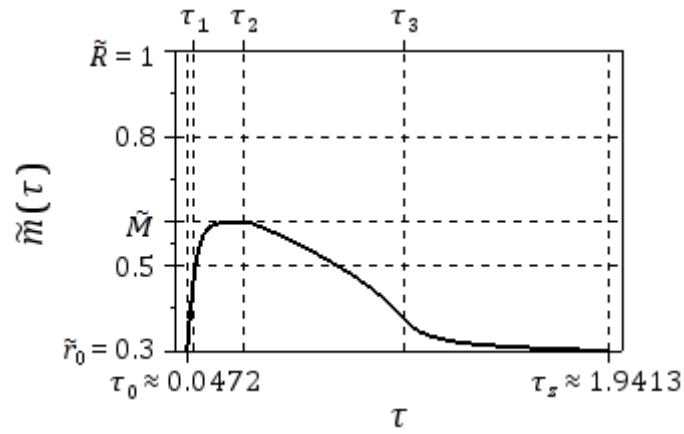


Рисунок 3 – Изменение размера области пластического течения

На рисунке 4 проиллюстрировано накопление необратимых деформаций.

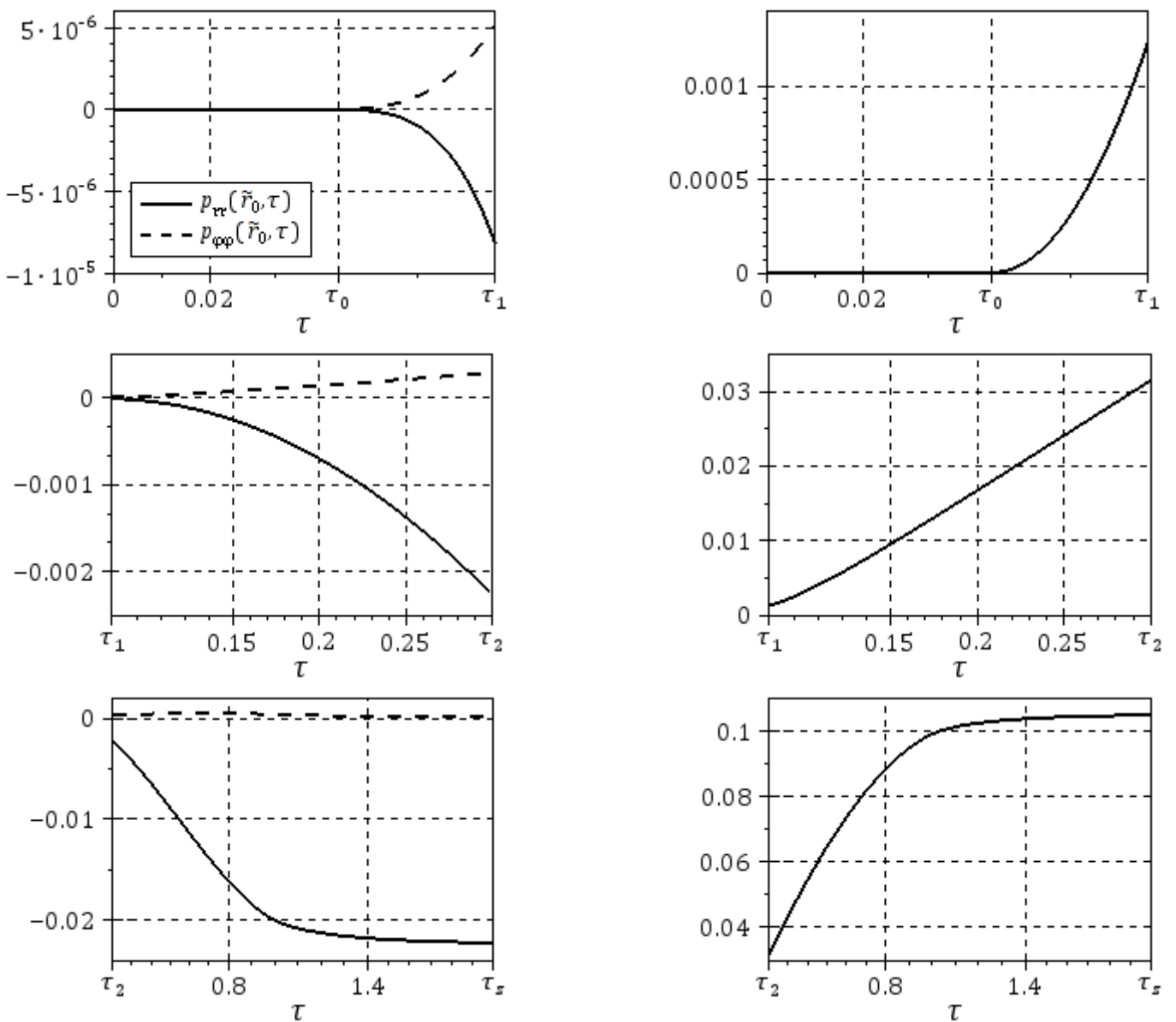


Рисунок 4 – Детализация роста необратимых деформаций при $\tilde{r} = \tilde{r}_0$ (слева – p_{rr} и $p_{\phi\phi}$ в соответствии с легендой первого графика, справа – $p_{r\phi}$)

На рисунке 5 представлено изменение угла поворота по радиусам цилиндрического слоя в разные моменты времени.

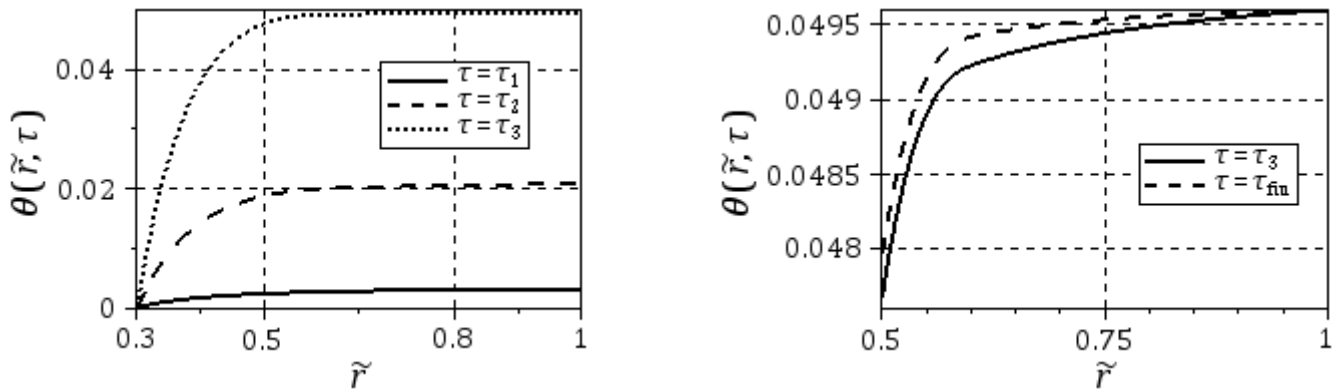


Рисунок 5 – Изменение угла поворота θ в разные моменты времени

После прекращения движения внешнего цилиндра наблюдается снижение уровня напряжений $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / \mu$, что отражено на рисунке 6.

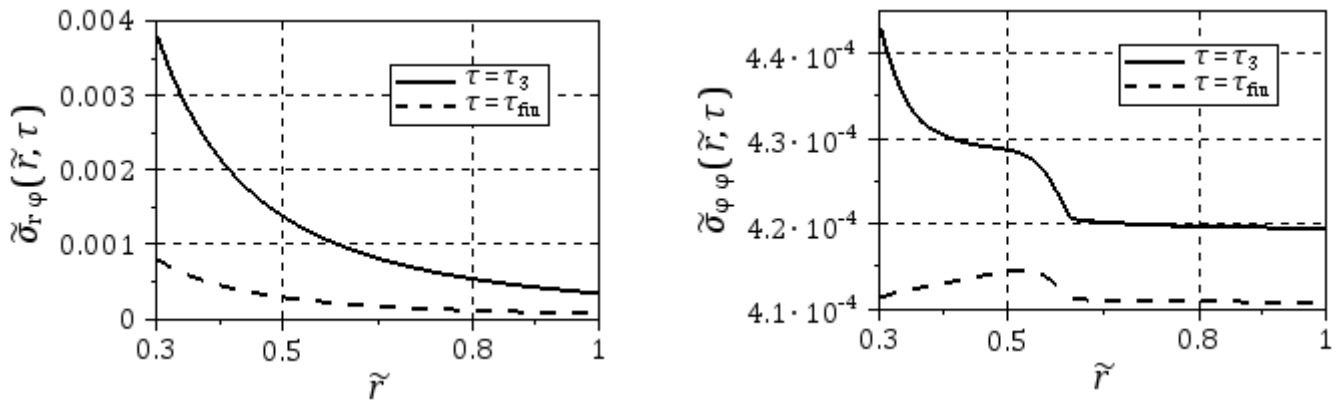


Рисунок 6 – Релаксация напряжений после остановки внешнего цилиндра

В § 3.5 решена аналогичная задача в случае, когда в качестве вращающейся поверхности выбран внутренний цилиндр, тогда как внешний остаётся неподвижным. По сравнению с предыдущей задачей изменяются следующие краевые условия:

$$\bar{u}|_{r=R} = \bar{v}|_{r=R} = 0, \quad w(r_0, t) = w_{r_0}(t), \quad \theta(r_0, t) = \theta_{r_0}(t) = \int_0^t w_{r_0}(\xi) d\xi,$$

где скорость $w_{r_0}(t)$ вращения внутреннего цилиндра задаётся так же, как и в (14).

Следствиями интегрирования второго уравнения (10) являются соотношения

$$\sigma_{r\phi}(r, t) = -\frac{c(t)}{r^2}, \quad e_{r\phi}(r, t) = -\frac{c(t)}{2\mu r^2}, \quad \varepsilon_{r\phi}^v(r, t) = -Bn2^{n-1} \frac{c^{n-1}(t)}{r^{2n-2}}, \quad p_{r\phi}(r, t) = -Bn2^{n-1} \frac{c_1(t)}{r^{2n-2}},$$

отличающиеся от аналогичных в случае вращения внешнего цилиндра равенством знаком перед слагаемыми компонент напряжений, деформаций и их скоростей. Сам же процесс математического моделирования данного варианта задачи целиком повторяет представленную выше процедуру формирования системы соотношений в задаче с вращающимся внешним цилиндром.

Несмотря на противоположные по знаку определения компонент деформаций $e_{r\varphi}$ и $p_{r\varphi}$ при вращении внешней и внутренней цилиндрических поверхностей, ряд величин в обоих случаях при одинаковых заданных константах совпадает. Это можно сказать, например, о компонентах необратимых деформаций p_{rr} и $p_{\varphi\varphi}$. Причиной этому служит вхождение указанных недиагональных компонент в некоторые моделирующие соотношения во второй степени или в первой, но в виде произведений, что нивелирует разницу в знаках.

Проведённые расчёты, как и ранее в случае вращения внешнего цилиндра, показали высокую степень роста необратимых деформаций на стадии пластического течения. Ниже приведены результаты решения при константах (25). На рисунке 7 показано соотношение величин угла поворота θ при $\tau = \tau_1, \tau_2, \tau_3$ и $\tau = \tau_{fin}$.

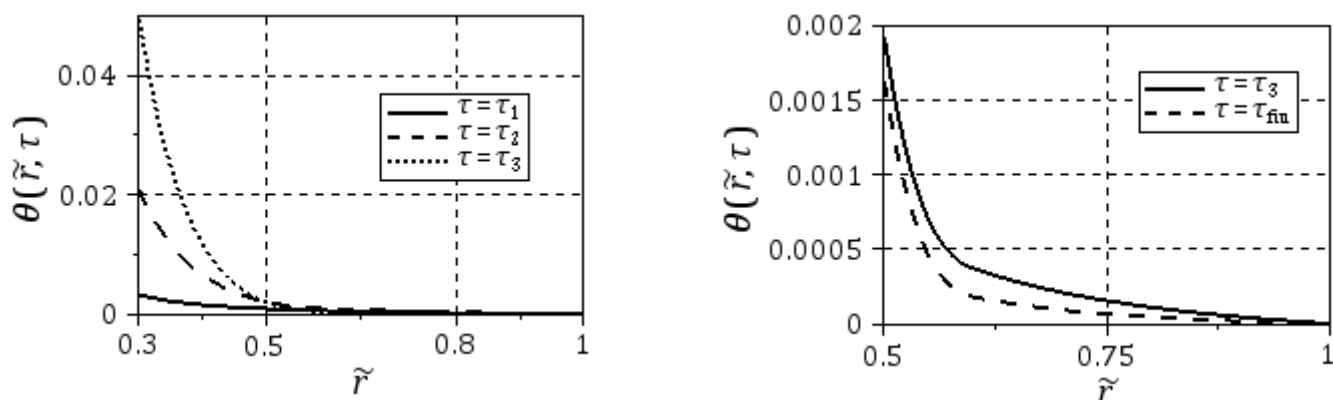


Рисунок 7 – Изменение угла поворота θ с течением времени

Рисунок 8 позволяет проследить за снижением уровня напряжённого состояния среды после прекращения кинематического воздействия на неё.

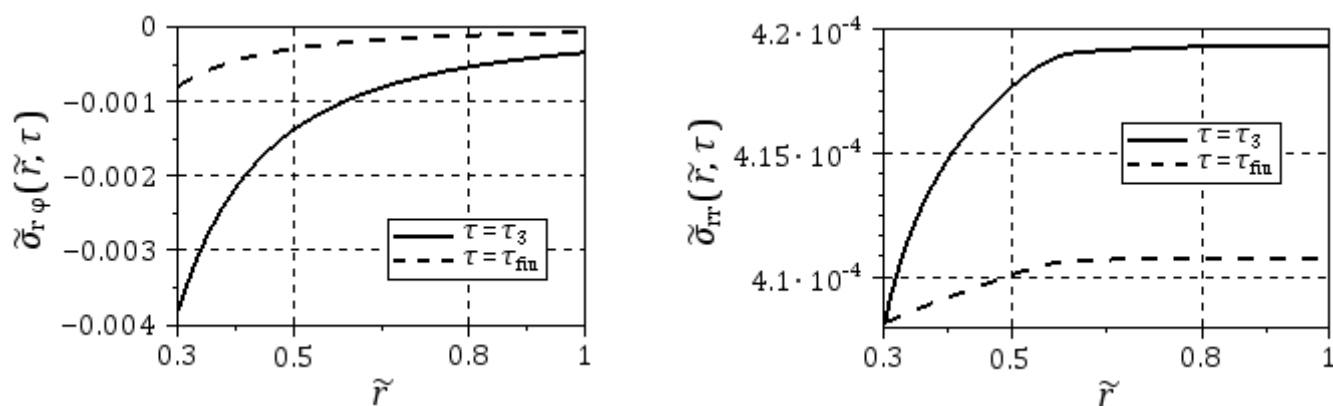


Рисунок 8 – Релаксация напряжений после остановки поверхности $\tilde{r} = \tilde{r}_0$

В **четвёртой** главе получены решения задач о деформировании за счёт поворота одной из цилиндрических поверхностей упруговязкопластического материала, расположенного между ними, в случае его проскальзывания вдоль внутренней цилиндрической поверхности. В § 4.1 решение получено для случая вращения внешнего цилиндра с переменной скоростью (14), когда накапливаемые необратимые деформации являются только деформациями ползучести. В качестве

начальных условий задаётся отсутствие напряжений и деформаций при $t = 0$, в качестве краевых – соотношения (15). Считаем, что напряжённое состояние в материале не достигает поверхности нагружения. Контакт материала с жёсткими стенками осуществляется в условиях прилипания за счёт сухого трения:

$$|\sigma_{r\phi}| < \gamma |\sigma_{rr}|, \quad (26)$$

где γ – коэффициент трения покоя. С ростом напряжённого состояния в некоторый момент времени $t = t_s$ неравенство (26) обращается в равенство при $r = r_0$ и начинается проскальзывание материала, что приводит к замене краевого условия (26) на условие

$$|\sigma_{r\phi}(r_0, t)| = \gamma |\sigma_{rr}(r_0, t)| + \xi w(r_0, t),$$

где ξ – постоянная вязкого трения, $w(r_0, t)$ – скорость движения точек среды в окрестности $r = r_0$, отличающаяся от нулевой скорости самого цилиндра, или $w(r_0, t) \neq w_0(t)$. Предполагается, что напряжённое состояние не достигает уровня, при котором проскальзывание материала может произойти и в окрестности внешнего цилиндра. Смена граничного условия приводит к изменению функции $c(t)$, ранее определяемой уравнением (20):

$$\dot{c}(t) = \frac{2\mu}{r_0^{-2} - R^{-2}} \left(\frac{\gamma |\sigma_0|}{\xi} - \frac{c(t)}{\xi r_0^2} + w_R(t) \right) - \frac{\mu B n 2^n}{n-1} c^{n-1}(t) \frac{r_0^{2-2n} - R^{2-2n}}{r_0^{-2} - R^{-2}}, \quad (27)$$

где начальным условием служит значение $c(t_s)$, вычисленное согласно (20). Уравнение (27) используется до некоторого момента времени t_a , когда снижение напряжённого состояния в среде снова приводит к выполнению равенства в (26) в окрестности внутреннего цилиндра. При $t \geq t_a$ вновь применяется уравнение (20), решаемое при начальном условии $c(t_a)$, полученном из (27).

В § 4.2 решение аналогичной задачи осуществлено в случае, когда рост напряжённого состояния приводит к развитию пластического течения. С учётом смены краевого условия при $r = r_0$ для вычисления изменения функции $m(t)$ упругопластической границы получено уравнение

$$\dot{m}(t) = \left[\frac{\mu}{k} \left(w_R(t) - \frac{k}{\xi} \frac{m^2(t)}{r_0^2} + \frac{\gamma |\sigma_0|}{\xi} \right) + \frac{\mu}{\eta} \left(2 \ln \frac{m(t)}{r_0} - \frac{m^2(t)}{r_0^2} + 1 \right) - \frac{\mu B n 2^{n-1} k^{n-2}}{n-1} \left(1 - \frac{m^{2n-2}(t)}{R^{2n-2}} + 2(n-1) \ln \frac{m(t)}{r_0} \right) \right] / \left(m(t) \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{R^2} \right) \right), \quad m(t_0) = r_0.$$

Проведён ряд численных экспериментов. В частности, реализация рассматриваемой задачи, выполненная при значениях констант

$$\begin{aligned} k/\mu &\approx 0.00245, \quad \tilde{r}_0 = 0.3, \quad b/\mu = 4, \quad \alpha/\beta = 3, \\ B\mu^{n-1}/\alpha &= 3.5, \quad n = 3, \quad \alpha\eta/\mu = 0.05, \quad \sigma_0/\mu \approx 0.0021, \quad \gamma = 1.15, \\ \alpha\xi/\mu &= 0.01, \quad \tau_1 = 0.08, \quad \tau_2 = 0.3, \quad \tau_{fin} = 20\tau_3, \end{aligned} \quad (28)$$

при которых пластическое течение и проскальзывание материала вдоль внутреннего цилиндра начинаются и завершаются одновременно, позволила рассчитать параметры напряжённо-деформированного состояния среды и получить следующие

графические результаты. Область пластического течения достигает максимальных размеров при $\tilde{r} \approx 0.3443501$ (рисунок 9).

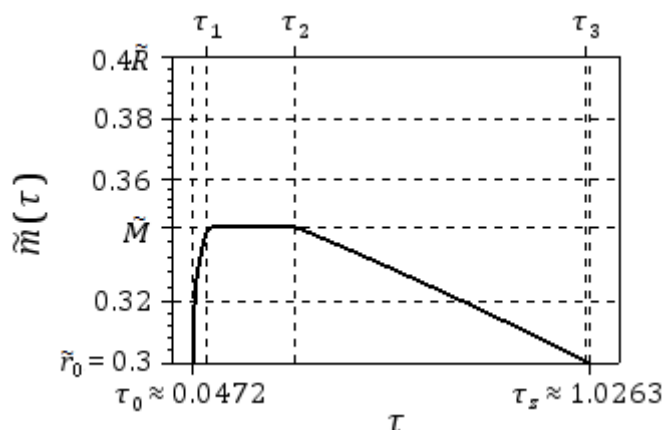


Рисунок 9 – Продвижение упругопластической границы

Движение точек среды можно охарактеризовать значениями угла поворота в некоторые фиксированные моменты времени (рисунок 10). На рисунке 11 изображены графики изменения недиагональной компоненты тензора напряжений в момент остановки внешнего цилиндра, а также спустя значительное время, что позволяет проследить за релаксацией напряжений.

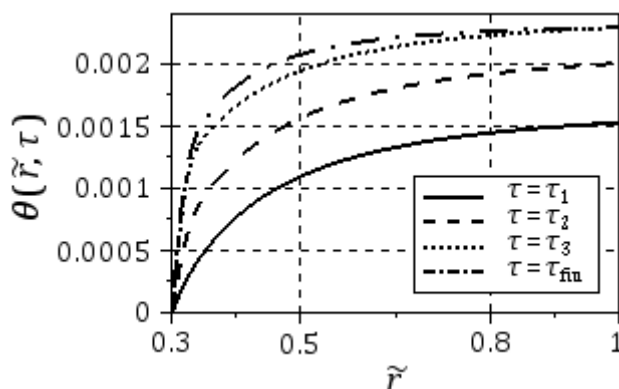


Рисунок 10 – Угол поворота точек среды при одновременном проскальзывании и пластическом течении

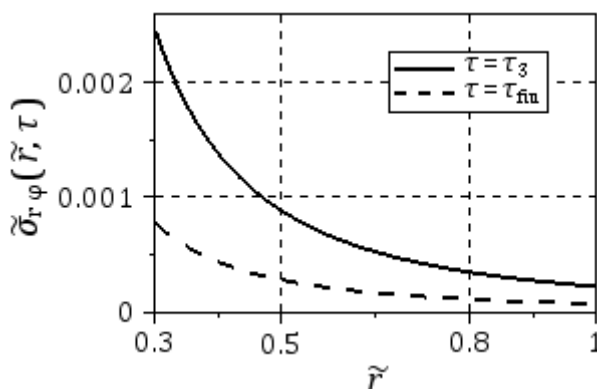


Рисунок 11 – Релаксация напряжений в период $\tau_3 \leq \tau \leq \tau_{fin}$

На рисунке 12 приведены графики, иллюстрирующие процесс накопления

необратимых деформаций со временем при $\tilde{r} = \tilde{r}_0$.

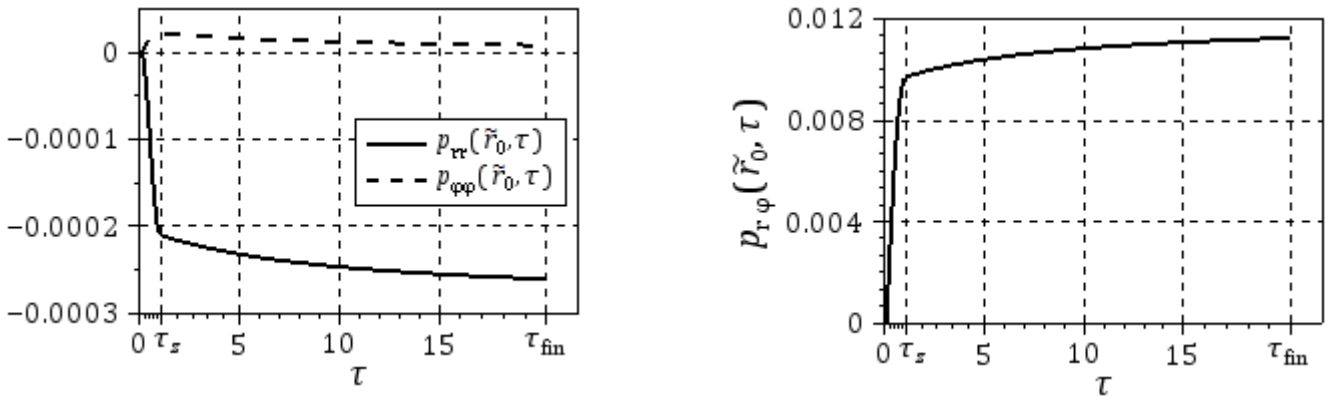


Рисунок 12 – Компоненты тензора необратимых деформаций при $\tilde{r} = \tilde{r}_0$

В § 4.5 решена задача, когда с переменной скоростью вращается внутренний цилиндр, а в его окрестности происходит проскальзывание материала. До выполнения равенства в (26) решение ведётся аналогично решению § 3.5; с момента его выполнения при $t_s \leq t \leq t_a$ на границе $r = r_0$ будет применяться краевое условие

$$|\sigma_{r\phi}(r_0, t)| = \gamma |\sigma_{rr}(r_0, t)| + \xi \langle w \rangle, \quad \langle w \rangle = w_{r_0}(t) - w(r_0, t).$$

Тогда дифференциальные уравнения для функций $c(t)$, $m(t)$ приобретают вид:

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \frac{2\mu}{r_0^{-2} - R^{-2}} \left(\frac{\gamma |\sigma_0|}{\xi} - \frac{c(t)}{\xi r_0^2} + w_{r_0}(t) \right) - \frac{\mu B n 2^n}{n-1} c^{n-1}(t) \frac{r_0^{2-2n} - R^{2-2n}}{r_0^{-2} - R^{-2}}, \\ \dot{m}(t) &= \left[\frac{\mu}{k} \left(w_{r_0}(t) + \frac{\gamma |\sigma_0|}{\xi} - \frac{k m^2(t)}{\xi r_0^2} \right) + \frac{\mu}{\eta} \left(2 \ln \frac{m(t)}{r_0} - \frac{m^2(t)}{r_0^2} + 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu B n 2^{n-1} k^{n-2}}{n-1} \left(1 - \frac{m^{2n-2}(t)}{R^{2n-2}} + 2(n-1) \ln \frac{m(t)}{r_0} \right) \right] / \left(m(t) \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{R^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Результаты расчёта задачи приведены при параметрах (28), допускающих одновременное проявление эффекта проскальзывания и пластического течения. На рисунке 13 отображены распределения величины угла θ в моменты изменения характера функции $w_{r_0}(t)$. Возрастание уровня необратимых деформаций на примере компоненты $p_{r\phi}$ показано на рисунке 14.

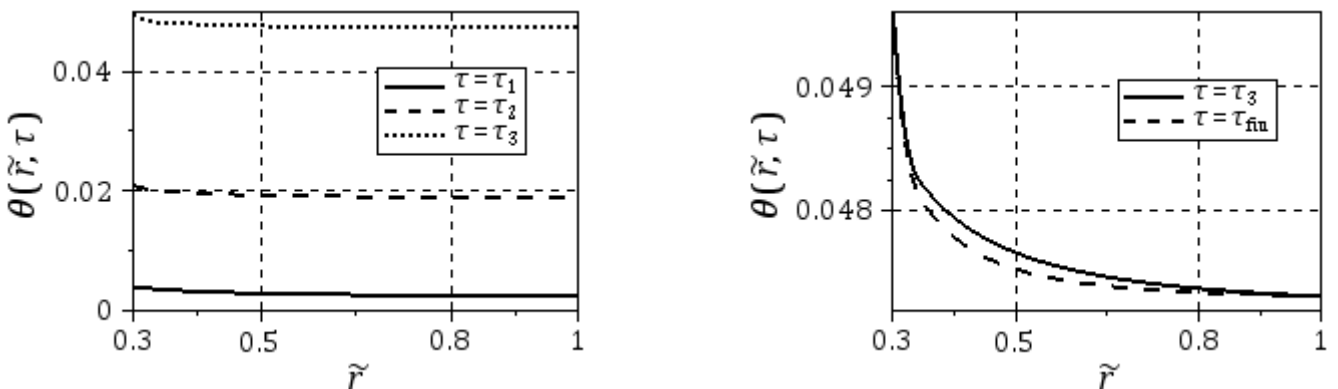


Рисунок 13 – Изменение радиального распределения θ с течением времени

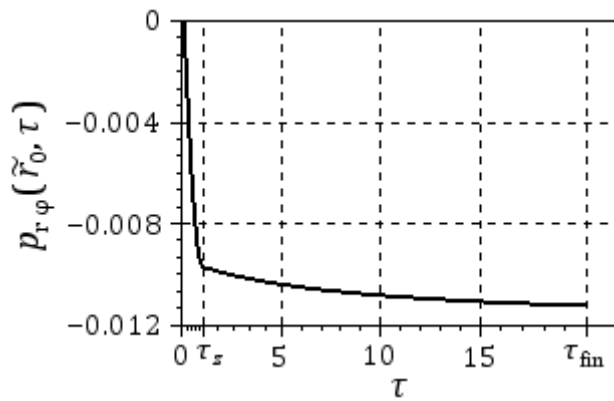


Рисунок 14 – Рост необратимых деформаций

Релаксация напряжений с течением времени после остановки вращения внутреннего цилиндра проиллюстрирована на рисунке 15.

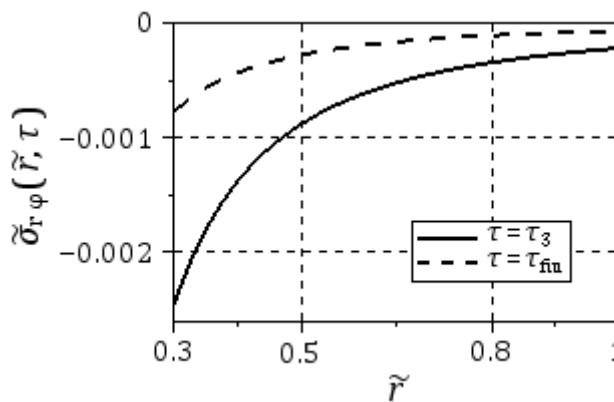


Рисунок 15 – Релаксация напряжений

В **заключении** приведены основные результаты выполненной работы:

1. В рамках теории больших деформаций решена задача о деформировании материала, проявляющего упругие, вязкие и пластические свойства и помещённого в зазор между двумя соосными цилиндрами, при приложении к внутренней граничной поверхности цилиндрического слоя силовой нагрузки. На жёстких стенках заданы условия прилипания. Необратимые деформации накапливаются последовательно в процессах ползучести и пластического течения. Рассчитаны поля распределения деформаций и напряжений при увеличивающемся, уменьшающемся и постоянном моменте закручивания.

2. Поставлены и решены краевые задачи о деформировании упруговязкопластического материала цилиндрического слоя, происходящем при последовательно возрастающей, постоянной, убывающей и нулевой скорости поворота одной из граничных поверхностей и неподвижности другой. Контакт материала на границах слоя осуществляется в условиях прилипания. Рассмотрены случаи, когда накапливаемые необратимые деформации являются только деформациями ползучести, и случаи, когда они могут быть деформациями и ползучести, и пластичности.

Исследовано продвижение упругопластической границы как при развитии, так и при торможении течения. Рассчитаны параметры напряжённо-деформированного состояния среды, проведено исследование релаксации напряжений, происходящей

после остановки вращения выбранного жёсткого цилиндра.

3. Исследовано влияние возможного одностороннего проскальзывания материала в окрестности внутреннего цилиндра на деформирование материала при заданном кинематическом краевом условии. Построены поля деформаций и напряжений, исследована релаксация последних.

4. Разработаны алгоритмы и программы расчётов напряжённо-деформированного состояния материала и определения неизвестных продвигающихся упругопластических границ.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, индексируемых в Web of Science и Scopus:

1. Begun, A. S. Change of accumulation mechanisms of irreversible deformations of materials in an example of viscometric deformation / A. S. Begun, L. V. Kovtanyuk, **A. O. Lemza** // Mechanics of Solids. – 2018. – Vol. 53, No. 1. – P. 85-92.

Бегун, А. С. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, **А. О. Лемза** // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2018. – № 1. – С. 103-112.

2. Begun, A. S. On modelling of creep and plasticity in a problem of viscosimetric flow of a material / A. S. Begun, L. V. Kovtanyuk, **A. O. Lemza** // Key Engineering Materials. – 2016. – Vol. 685. – P. 230-234.

Публикации в рецензируемых научных изданиях, рекомендуемых ВАК:

3. Бегун, А. С. Необратимое деформирование материала между жёсткими коаксиальными цилиндрами в условиях ползучести / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, **А. О. Лемза** // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 3 (21). – С. 14-21.

4. Бегун, А. С. Ползучесть и релаксация напряжений в материале цилиндрического слоя при его ротационном движении / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, **А. О. Лемза** // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2016. – № 4 (30). – С. 3-11.

5. Бегун, А. С. Моделирование процесса производства больших вискозиметрических деформаций вязкоупругого материала при его одностороннем проскальзывании / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, **А. О. Лемза** // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2018. – № IV–1(36). – С. 64-74.

Публикации в других изданиях:

6. Бегун, А. С. Деформирование материала в условиях неустановившейся ползучести и развивающегося пластического течения / А. С. Бегун, **А. О. Лемза** // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015), 24-31 мая 2015 г., Алушта. – М. : Изд-во МАИ, 2015. – С. 216-218.

7. Бегун, А. С. Ползучесть и пластическое течение материала

цилиндрического слоя в условиях скручивающего воздействия / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, **А. О. Лемза** // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20-24 августа 2015 г.) / Сост. Д. Ю. Ахметов, А. Н. Герасимов, Ш. М. Хайдаров, под ред. Д. А. Губайдуллина, А. М. Елизарова, Е. К. Липачёва. – Казань : Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. – С. 403-405.

8. Ковтанюк, Л. В. Ползучесть и пластическое течение материала цилиндрического слоя при изменяющейся скорости вращения граничной поверхности / Л. В. Ковтанюк, **А. О. Лемза** // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016), 25-31 мая 2016 г., Алушта. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – С. 339-341.

9. Begun, A. S. Creep and plastic flow of the cylindrical layer of a material at changing rotation velocity of a boundary surface / A. S. Begun, L. V. Kovtanyuk, **A. O. Lemza** // XLIV International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”, June 27 – July 02, 2016, St. Petersburg, Russia. Book of abstracts. – Saint Petersburg : Polytechnic University Publishing House, 2016. – P. 73-74.

10. Ковтанюк, Л. В. Деформации упругости и ползучести в материале цилиндрического слоя при переменной скорости вращения граничной поверхности / Л. В. Ковтанюк, **А. О. Лемза** // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования: Тез. докл. / Под редакцией В. И. Васильева. – М. : Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2016. – С. 39.

11. Ковтанюк, Л. В. О моделировании процессов ползучести и последующего вязкопластического течения в материале цилиндрического слоя / Л. В. Ковтанюк, **А. О. Лемза** // Молодёжь. Наука. Инновации : Сборник докладов 64-й международной молодёжной научно-технической конференции, г. Владивосток, 21-25 ноября 2016 г. В 2 т. – Владивосток : Мор. гос. ун-т, 2016. – Т. 1. – С. 107-111.

12. Ковтанюк, Л. В. Ползучесть и вязкопластическое течение материала цилиндрического слоя при неравномерном вращательном движении граничной поверхности / Л. В. Ковтанюк, **А. О. Лемза** // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017), 24-31 мая 2017 г., Алушта. – М. : Изд-во МАИ, 2017. – С. 253-255.

13. Begun, A. S. Creep and viscoplastic flow in the cylindrical layer of a material at nonuniform rotation of an internal boundary surface / A. S. Begun, L. V. Kovtanyuk, **A. O. Lemza** // XLV International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”, June 22-27, 2017, St. Petersburg, Russia. Book of abstracts. – Saint Petersburg : Polytechnic University Publishing House, 2017. – P. 57-58.

14. **Lemza, A.** Stress relaxation in the cylindrical layer of a material at the process of creep, subsequent plastic flow and unloading / A. Lemza, L. Kovtanyuk // Математическое моделирование и компьютерные технологии: молодёжная конференция-школа, Владивосток, 25-29 сентября 2017 г.: сборник материалов / отв. ред. И. Л. Артемьева. – Владивосток : Изд-во Дальневосточного федерального университета, 2017. – С. 75-80.

15. Ковтанюк, Л. В. О математической модели и численной реализации процесса деформирования материала цилиндрического слоя при вращении внешней

граничной поверхности / Л. В. Ковтанюк, **А. О. Лемза** // Молодёжь. Наука. Инновации: Сборник докладов 65-й международной молодежной научно-технической конференции, 27-30 ноября 2017 г. – г. Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2017. – С. 205-210.

16. Бегун, А. С. Математическая модель и программный комплекс для решения задач о проскальзывании материала в цилиндрическом слое в режиме ползучести / А. С. Бегун, **А. О. Лемза** // Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, Владивосток, 16-30 апреля 2018 г. / Отв. ред. А. В. Малюгин. – Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т, 2018. – С. 271-273.

17. Бегун, А. С. Моделирование и численное решение задачи о деформировании материала цилиндрического слоя с учётом его проскальзывания в режиме ползучести / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, **А. О. Лемза** // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твёрдого тела и прогрессивные технологии в машиностроении: материалы V Дальневосточной конференции с международным участием, Комсомольск-на-Амуре, 18-21 сентября 2018 г. / редкол.: А. И. Евстигнеев (отв. ред.) [и др.]. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2018. – С. 137-139.