

Институт машиноведения и металлургии
Дальневосточного отделения Российской академии наук
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Хабаровского Федерального исследовательского центра
Дальневосточного отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Севастьянов Георгий Мамиевич

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ, ДОПУСКАЮЩИХ БОЛЬШИЕ
ДЕФОРМАЦИИ**

1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант
член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н.
Буренин Анатолий Александрович

Комсомольск-на-Амуре – 2025

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbf{X}, \mathbf{x}$	радиус-вектор точки сплошной среды в недеформированном и деформированном состоянии
$\mathbf{F} = (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{x})^T$	градиент деформации
$\mathbf{F}^{-1} = (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{X})^T$	обратный градиент деформации (spatial deformation gradient)
∇	набла-оператор (Гамильтониан); индексы «X», «x» означают отнесение ∇ к исходному или актуальному базису; для краткости далее в тексте ∇ без индекса – в актуальном базисе
$\mathbf{F}^e, \mathbf{F}^i$	упругая и неупругая (пластическая $\mathbf{F}^p$ или связанная с процессом ползучести $\mathbf{F}^c$) часть градиента деформации
$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$	полярное разложение (polar decomposition)
$\mathbf{U} = \mathbf{U}^T, \mathbf{V} = \mathbf{V}^T$	правый / левый тензор растяжений (right / left stretch tensor)
$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-T}, \det \mathbf{R} = 1$	ортогональный тензор (proper orthogonal tensor)
$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \mathbf{B} = \mathbf{B}^T$	левый тензор деформации Коши – Грина (left Cauchy – Green deformation tensor)
$\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}, \mathbf{c} = \mathbf{c}^T$	тензор деформации Фингера (eulerian Finger deformation tensor)
$\mathbf{h} = \ln \mathbf{V} = (1/2)\ln \mathbf{B} = -(1/2)\ln \mathbf{c}, \mathbf{h} = \mathbf{h}^T$	логарифмический тензор деформации (Hencky strain tensor)
$\mathbf{l} = (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{v})^T$	градиент скорости (spatial velocity gradient)
$\frac{D(\quad)}{Dt} = \left(\dot{\quad} \right) = \partial(\quad)/\partial t + (\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{x}})(\quad)$	полная производная по времени
t	время

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla_x) \mathbf{u}$	вектор скорости
$\mathbf{u}$	вектор перемещения
$\mathbf{W} = (\mathbf{I})_a = (1/2)(\mathbf{I} - \mathbf{I}^T), \mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$	тензор спина
$\mathbf{D} = (\mathbf{I})_s = (1/2)(\mathbf{I} + \mathbf{I}^T), \mathbf{D} = \mathbf{D}^T$	тензор скорости деформации
$\mathbf{D}^i = (\mathbf{D}^i)^T, \mathbf{D}^p = (\mathbf{D}^p)^T, \mathbf{D}^c = (\mathbf{D}^c)^T$	тензор скорости неупругой (индекс «i») деформации, а именно пластической (индекс «p») или деформации ползучести (индекс «c»)
$\frac{D_{Old} \mathbf{A}}{Dt} \stackrel{def}{=} \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{I} \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{I}^T$ $\frac{D_{CR} \mathbf{A}}{Dt} \stackrel{def}{=} \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{I}^T \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{I}$ $\frac{D_J \mathbf{A}}{Dt} \stackrel{def}{=} \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{W} = \frac{1}{2} \left(\frac{D_{Old} \mathbf{A}}{Dt} + \frac{D_{CR} \mathbf{A}}{Dt} \right)$	коротационные производные Олдройда, Коттер – Ривлина и Яуманна
Ψ	изотропный упругий потенциал
Φ	потенциал ползучести
$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0, g(\boldsymbol{\sigma})$	условие пластического течения и пластический потенциал; для ассоциированных с условием пластического течения моделей $f \equiv g$
$\mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$	ассоциированный закон пластического течения (plastic flow rule); Λ – неопределенный скалярный множитель
$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$	тензор напряжений Коши
$\mathbf{s} = \text{dev} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \text{tr} \boldsymbol{\sigma} / 3 \mathbf{I}, \mathbf{s} = \mathbf{s}^T$	девиатор напряжений
$\mathbf{I}$	единичный тензор
$I_1^A = I_1(\mathbf{A}) = \text{tr} \mathbf{A}$ $I_2^A = I_2(\mathbf{A}) = (1/2)(\text{tr}^2 \mathbf{A} - \text{tr} \mathbf{A}^2)$ $I_3^A = I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$	линейный, квадратичный и кубический инварианты тензора
$\sigma_{eq} = \sqrt{J_2}, J_2 = -I_2(\mathbf{s}) = (1/2) \text{tr} \mathbf{s}^2$	эквивалентное напряжение по Мизесу
$\sigma_{eq} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$	эквивалентное напряжение по Треска

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	главные напряжения (упорядоченные по убыванию)
T	температура
τ_y, σ_y	предел текучести на сдвиг / растяжение
$q, \dot{q} = \sqrt{(2/3) \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p}$	накопленная пластическая деформация
μ, E	нелинейные аналоги модуля сдвига и модуля Юнга
$\text{tr } \mathbf{A}$ – след тензора; $\det \mathbf{A}$ – определитель тензора; $\text{dev } \mathbf{A} = \mathbf{A} - \frac{\text{tr } \mathbf{A}}{3} \mathbf{I}$ – девиатор тензора; $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T)$ – свертка тензоров	
$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{A}^k)}{\partial \mathbf{A}} = k(\mathbf{A}^{k-1})^T,$ $\frac{\partial I_1(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_2(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \{ \text{tr}^2 \mathbf{A} - \text{tr } \mathbf{A}^2 \} = \mathbf{I} \text{tr } \mathbf{A} - \mathbf{A}^T$	
Формула Гамильтона – Кейли $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^{-1} \det \mathbf{A} + \mathbf{A} I_1(\mathbf{A}) - I_2(\mathbf{A})$	

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ КОНЕЧНОГО УПРУГО-НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ	11
1.1. Разделение полной деформации на обратимую и необратимую составляющие.....	13
1.2. Альтернативное построение.....	19
1.3. Законы необратимого деформирования.....	25
ГЛАВА 2. ЗАДАЧИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ.....	28
2.1. Эффект адиабатического нагрева при упруго-пластическом сжатии / расширении сферической полости в изотропном несжимаемом материале под действием удаленной гидростатической нагрузки	28
2.2. Новая модель расширяющейся полости для описания конической индентации и её приложение для определения внутреннего параметра градиентной теории пластичности полимерных материалов	51
2.3. Упруго-пластическое кручение кругового цилиндра	90
2.4. Аналитическое решение для кручения под высоким давлением в рамках геометрически-нелинейной неассоциированной пластичности	131
2.5. Упруго-пластический анализ круговой трубы, вывернутой наизнанку.....	167
2.6. Антиплоский осесимметричный упруго-пластический сдвиг в изотропно упрочняющемся материале.....	186
2.7. Круговой сдвиг в упруго-пластическом изотропно упрочняющемся материале.....	206
2.8. Предельная величина эффекта Свифта в гиперупруго-пластических материалах с насыщением предела текучести.....	236
ГЛАВА 3. ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ И ВЯЗКОУПРУГОЙ РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ	256
3.1. Релаксация напряжений в нелинейно вязкоупругом закрученном круговом стержне	256
3.2. Релаксация напряжений в изогнутой вязкоупругой разносопротивляющейся пластине	279
3.3. Гиперупругая модель композита, армированного короткими волокнами.....	302
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	323
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	329

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Механика деформируемого твердого тела (МДТТ) как дисциплина начиналась с задач упругого нагружения тел и прогнозирования разрушения различных (в основном строительных) конструкций. Развитие методов обработки и упрочнения металлических изделий потребовало создания математического аппарата теории пластичности. В первой половине XX века были получены решения многих важных прикладных задач, в основном в рамках модели жестко-пластического тела. Здесь можно упомянуть работы, которые выполнили Н. Hencky, R. Hill, P. Naghdi, W. Prager, Д.Д. Ивлев, А.А. Ильюшин, А.Ю. Ишлинский, А.А. Поздеев, В.В. Соколовский, Л.А. Толоконников и многие другие выдающиеся учёные-механики. Учёт упругой деформации материалов наряду с пластическим течением, как правило, сильно усложняет задачи механики, точные решения таких задач достаточно редки (в их числе, например, работы Б.Д. Аннина, Л.А. Галина, Г.П. Черепанова).

Одновременно с развитием теории пластичности (начиная с идеально-пластических тел с условиями текучести Мизеса, Треска, Шмидта – Ишлинского, Ивлева и др.) развивается теория нелинейной упругости. Возникают вопросы о том, как и на каких основаниях полная деформация сплошной среды может быть разделена на обратимую (упругую) и необратимую (пластическую деформацию, деформацию ползучести) составляющие (в теории малых деформаций тензор полной деформации есть сумма тензоров упругой и пластической деформации; в геометрически нелинейных теориях от этого положения приходится отказаться).

Параллельно с этим усложняются физические уравнения теории упруго-пластических задач. Условия пластического течения обобщаются на случаи изотропного, кинематического, комбинированного упрочнения; на случаи, когда по тем или иным причинам необходим учет влияния скорости деформирования на механические характеристики материалов; разрабатывают-

ся модели, которые учитывают несимметричное поведение материалов при сжатии – растяжении (Н. Altenbach, F. Barlat, O. Cazacu, A. Zolochovsky, И.А. Банщикова, В.П. Мясников, А.И. Олейников, И.Ю. Цвелодуб и др.); модели, учитывающие влияние высоких давлений на характеристики материалов, а также совместное действие высокого давления и пластической деформации на фазовые превращения в материалах, которые меняют их свойства (V.I. Levitas).

Начиная с последней четверти XX века интенсивно развиваются программные комплексы на базе МКЭ, которые становятся основным инженерным инструментом МДТТ. Развитию моделей МДТТ, методов решения задач (как аналитических, так и численных) посвящены работы, которые выполнили E.C. Aifantis, Н. Altenbach, O. Bruhns, D. Durban, N. Fleck, X.-L. Gao, E. van der Giessen, J.W. Hutchinson, J.-B. Leblond, A.I. Leonov, V.I. Levitas, V. Lubarda, A. Needleman, S. Nemat-Nasser, G. Perrin, J.C. Simo, V. Tvergaard, G. Voyiadjis, Н. Xiao, А. Zolochovsky, С.Е. Александров, Б.Д. Аннин, К.С. Бормотин, Г.Л. Бровко, А.А. Буренин, Г.П. Быковцев, А.И. Голованов, П.А. Жилин, Д.Д. Ивлев, Л.В. Ковтанюк, В.И. Кондауров, С.Н. Коробейников, В.А. Левин, В.П. Мясников, Ю.Н. Радаев, А.А. Роговой, В.М. Садовский, Л.И. Седов, П.В. Трусков, А.В. Шутов и многие другие.

Вместе с тем, аналитические решения нетривиальных задач МДТТ, которые бы включали геометрическую нелинейность соотношений (конечные деформации) и приближенные к реальности физические соотношения (деформационное упрочнение, температурное разупрочнение, нелинейность упругих свойств, масштабные эффекты и др.) до сих пор очень мало.

Такие решения могли бы использоваться для тестирования алгоритмов численного интегрирования задач, для построения усложненных моделей материалов, для нахождения функциональных зависимостей характеристик материалов (например, законов упрочнения) на основе механических тестов.

Цель работы: построение новых аналитических решений нелинейной механики деформирования. **Задачи работы** – физически корректная поста-

новка ряда проблем и построение их точных и приближенных аналитических решений, верификация этих решений и анализ результатов.

Научная новизна работы. В работе получены новые аналитические решения ряда проблем нелинейной механики деформирования.

Положения, выносимые на защиту:

- 1) аналитическое решение задачи об упруго-пластическом деформировании материала в окрестности одиночной сферической полости под действием удаленной гидростатической нагрузки (как сжатия, так и растяжения); материал несжимаемый, гиперупругий с произвольным законом, изотропно упрочняющийся и температурно разупрочняющийся в пластике по произвольному закону, в том числе материал с асимметрией отклика на сжатие / растяжение; решение может учитывать динамические эффекты;
- 2) новая модель индентации коническим индентором, включающая произвольное деформационное упрочнение материала, а также масштабные эффекты; модель является комбинацией модели расширяющейся полости и жестко-пластического решения о сдвиге тороидального клина;
- 3) аналитическое решение задачи упруго-пластического кручения кругового цилиндра с закрепленными торцами; сравнение моделей Треска (решение получено для материала с упругой моделью Муни – Ривлина) и Мизеса (здесь решение получено для упругой модели обобщенного неогуковского материала), в обоих случаях рассматривается материал с изотропным упрочнением и температурным разупрочнением в пластическом диапазоне по произвольным законам;
- 4) аналитическое решение для предельного состояния материала с ограниченным упрочнением при интенсивном упруго-пластическом кручении, включающее крутящий момент и осевое напряжение (эффект Свифта); решение получено для общей гиперупруго-пластической модели, включающей произвольный упругий потенциал несжимаемого тела, условие пластичности и пластический потенциал в виде произвольных гладких функций инвариантов девиатора J_2 и J_3 ;

- 5) приближенное аналитическое решение для упруго-пластического кручения при высоком давлении, которое включает неассоциированную модель пластического течения с зависимостью предела текучести от гидростатического давления;
- 6) аналитическое решение для упруго-пластической деформации полой круговой трубы, вывернутой наизнанку; это решение обобщает известное универсальное решение нелинейной теории упругости и включает произвольное изотропное деформационное упрочнение материала;
- 7) аналитические решения для кругового и антиплоского сдвига изотропно упрочняемого материала в упруго-пластической постановке;
- 8) аналитическое решение о релаксации напряжений в нелинейном вязкоупругом закрученном стержне для широкого класса моделей вязкоупругости;
- 9) аналитические решения о релаксации напряжений в изогнутой пластине, обладающей свойством разнсопротивляемости вязкой деформации;
- 10) новая микромеханическая модель волокнистого композита с гиперупругой матрицей.

Все решения получены без ограничения на величину деформаций.

Методология и методы исследования. Использованы уравнения и положения механики деформируемого твердого тела (нелинейной теории упругости, вязкоупругости и пластичности), аналитические методы теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Достоверность результатов основана на использовании точных математических методов и физически корректных постановок задач; на совпадении полученных результатов при предельном переходе с известными решениями для модели малых деформаций; на соответствии аналитических результатов известным результатам МКЭ-моделирования и экспериментальным данным.

Теоретическая значимость работы заключается в получении точных и приближенных аналитических решений ряда ключевых проблем нелинейной механики деформирования, где такие решения достаточно редки. **Прак-**

тическая значимость работы заключается в получении аналитической связи между параметрами материалов, кинематическими и силовыми характеристиками процессов деформирования. Эта связь дает удобный способ для установления механических параметров материалов (в частности, законов упрочнения) по результатам простых тестов. Кроме того, аналитические решения ряда рассмотренных задач дают более глубокое понимание относительно неоднородного напряженно-деформированного состояния материалов при нагружении.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертации докладывались на III Дальневосточной школе-семинаре «Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций» (Комсомольск-на-Амуре, 2018); 6-ой Дальневосточной конференции с международным участием «Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении» (Комсомольск-на-Амуре, 2022); а также на регулярных семинарах ИМиМ ДВО РАН (Комсомольск-на-Амуре) с 2018 по 2025 годы.

Участие в научно-исследовательских проектах. Часть результатов диссертации получена при выполнении соискателем проектов РФФИ 21-11-00165, 22-11-00163 в качестве основного исполнителя.

Публикации. Результаты диссертационной работы опубликованы в 15 статьях в ведущих рецензируемых журналах, входящих в базы цитирования Web of Science и Scopus. Работы [1–9] выполнены в единоавторстве; в работах [10–15] автор диссертации ответственен за концептуализацию, методологию и формальный анализ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 312 наименования. Диссертация содержит 364 листа машинописного текста, в том числе 71 рисунок и 6 таблиц.

ГЛАВА 1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ КОНЕЧНО-УПРУГО-НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Пусть положение точки сплошной среды в трехмерном пространстве в недеформированном состоянии описывается радиус-вектором

$$\mathbf{X} = X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2 + X_3 \mathbf{E}_3;$$

положение этой же точки в деформированном состоянии радиус-вектором

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

Координатные системы с ортонормированными базисами $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ и $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ имеют общее начало координат (рис. 1.1).

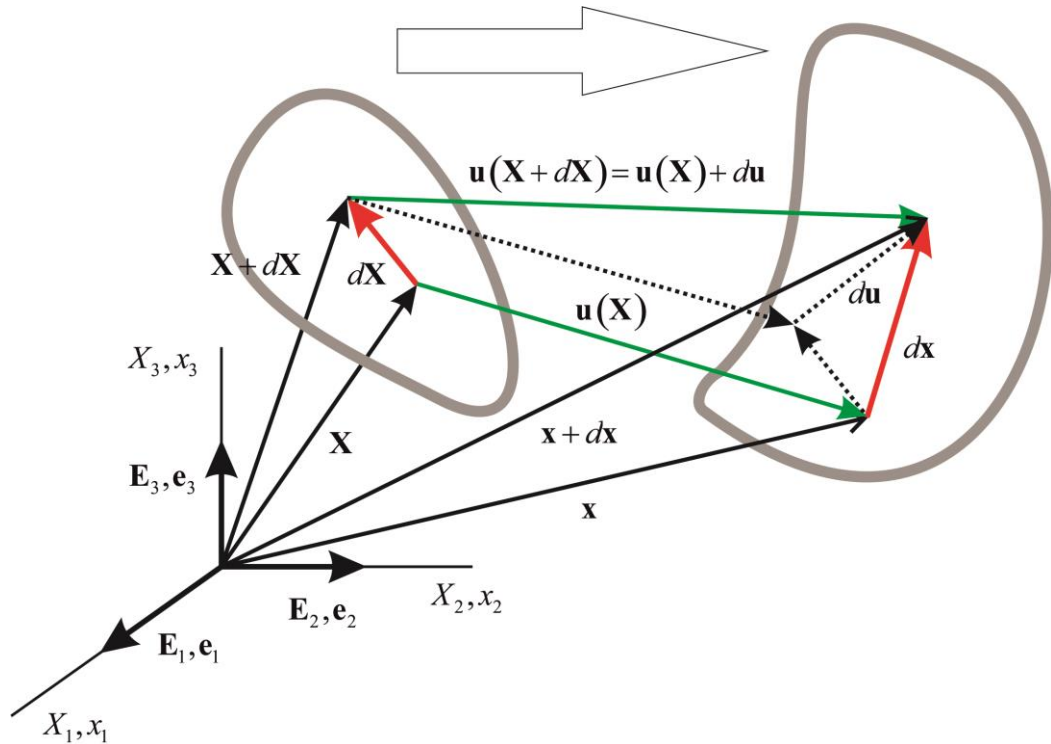


Рисунок 1.1 – Деформация тела из исходной конфигурации в актуальную (деформированную)

Двухточечные тензора $\mathbf{F}$ (материальный градиент деформации) и $\mathbf{F}^{-1}$ (пространственный градиент деформации) определяются как

$$\mathbf{F} = (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{x})^T \text{ и } \mathbf{F}^{-1} = (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{X})^T$$

Здесь $\nabla_{\mathbf{x}}$ есть оператор Гамильтона в актуальном базисе, $\nabla_{\mathbf{x}}$ – в исходном.

Для $\mathbf{F}$, как и для любого обратимого тензора второго ранга, справедливо полярное разложение

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$$

Здесь $\mathbf{R}$ ортогональный тензор (proper orthogonal tensor), представляющий вращение, $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\det \mathbf{R} = 1$; $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \text{sym}$ соответственно правый и левый тензоры растяжений (right/left stretch tensors).

Далее будут использоваться следующие симметричные эйлеровы тензоры деформации.

Левый тензор деформации Коши – Грина (left Cauchy – Green deformation tensor):

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$$

Тензор деформации Фингера (Finger deformation tensor):

$$\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}^{-2}$$

Логарифмический тензор деформации (Hencky strain tensor):

$$\mathbf{h} = \ln \mathbf{V} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B} = -\frac{1}{2} \ln \mathbf{c}$$

1.1. Разделение полной деформации на обратимую и необратимую составляющие

Кинематика конечного упруго-неупругого деформирования может быть построена на основе мультипликативного разложения тензора деформации Фингера $\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}^{-2}$ на обратимую и необратимую составляющие [16–18]:

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{c}^i (\mathbf{c}^e)^{1/2} \quad (1.1.1)$$

Здесь и далее индексом «e» (elastic) обозначены упругие составляющие, индексом «i» (inelastic) – необратимые (неупругие) составляющие, появление которых обусловлено диссипативными процессами (пластическое течение или вязкая деформация). Упругие составляющие тензоров деформации вводятся равенствами $\mathbf{B}^e = \mathbf{F}^e (\mathbf{F}^e)^T$, $\mathbf{c}^e = (\mathbf{B}^e)^{-1} = (\mathbf{F}^e)^{-T} (\mathbf{F}^e)^{-1}$. Если тело деформируется чисто упруго, то $\mathbf{c}^e = \mathbf{c}$, $\mathbf{c}^i = \mathbf{I}$; если упругие деформации пренебрежимо малы, то $\mathbf{c}^i \approx \mathbf{c}$, $\mathbf{c}^e \approx \mathbf{I}$.

Далее будет кратко изложен этот подход на основе [18]. Предлагается следующее представление обратного градиента деформации:

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{Y} (\mathbf{c}^e)^{1/2} \quad (1.1.2)$$

где $\mathbf{Y}$ есть некоторый тензор второго ранга, не обязательно ортогональный, поэтому (1.1.2) не есть полярное разложение.

Используя известное равенство для обратного градиента деформации

$$\frac{D\mathbf{F}^{-1}}{Dt} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{l} = \mathbf{0}$$

где $\mathbf{l} = (\nabla_x \otimes \mathbf{v})^T$, можно получить с учетом (1.1.2)

$$\frac{D(\mathbf{c}^e)^{1/2}}{Dt} = \mathbf{Q} (\mathbf{c}^e)^{1/2} - (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{l}, \quad \mathbf{Q} = -\mathbf{Y}^{-1} \dot{\mathbf{Y}} \quad (1.1.3)$$

Здесь и далее точка над символом, равно как и оператор D/Dt означают полную производную по времени t , т.е. $\dot{(\quad)} = D(\quad)/Dt = \partial(\quad)/\partial t + \mathbf{v}\nabla_x(\quad)$; $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla_x)\mathbf{u}$ есть вектор скорости; $\mathbf{u}$ есть вектор перемещения.

Далее, возвращаясь к представлению (1.1.1) можно записать

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} (\mathbf{c}^e)^{1/2} = (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{c}^i (\mathbf{c}^e)^{1/2}$$

откуда $\mathbf{c}^i = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$.

Находя полную производную по времени от последнего равенства, имеем

$$\frac{D\mathbf{c}^i}{Dt} = \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{Y}} + (\dot{\mathbf{Y}})^T \mathbf{Y} = -\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = -\mathbf{c}^i \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{c}^i \quad (1.1.4)$$

Условие симметрии правой части равенства (1.1.3) (т.е. условие симметрии тензора $\mathbf{c}^e$ и, следовательно, его полной производной) дает

$$\mathbf{Q}(\mathbf{c}^e)^{1/2} - (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{I} = (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{Q}^T - \mathbf{I}^T (\mathbf{c}^e)^{1/2} \quad (1.1.5)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W} + \mathbf{A} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{T} \quad (1.1.6)$$

где $\mathbf{W} = (\mathbf{I})_a$ есть тензор спина, индексом «а» обозначена антисимметричная часть тензора, $2(\quad)_a = (\quad) - (\quad)^T$; $\mathbf{T}$ есть некоторый симметричный тензор, $\mathbf{A}$ есть некоторый антисимметричный тензор. Подставляя (1.1.6) в (1.1.5), имеем

$$(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{A} + \mathbf{A}(\mathbf{c}^e)^{1/2} = (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D} - \mathbf{D}(\mathbf{c}^e)^{1/2} \quad (1.1.7)$$

где $\mathbf{D} = (\mathbf{I})_s$ есть тензор скорости деформации, индексом «s» обозначена симметричная часть тензора, $2(\quad)_s = (\quad) + (\quad)^T$. Это равенство не содержит

тензор $\mathbf{T}$, который, следовательно, может быть произвольным. Последнее тензорное уравнение относительно $\mathbf{A}$ имеет следующее решение [19]:

$$\mathbf{A} = \frac{\left\{ I_1^2 \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D} - \mathbf{D} (\mathbf{c}^e)^{1/2} \right] - I_1 \left[\mathbf{c}^e \mathbf{D} - \mathbf{D} \mathbf{c}^e \right] + \right.}{I_1 I_2 - I_3} \left. + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D} - \mathbf{D} (\mathbf{c}^e)^{1/2} \right] (\mathbf{c}^e)^{1/2} \right\}$$

здесь $I_1 = \text{tr}(\mathbf{c}^e)^{1/2}$, $2I_2 = \text{tr}^2(\mathbf{c}^e)^{1/2} - \text{tr} \mathbf{c}^e$, $I_3 = \det(\mathbf{c}^e)^{1/2}$.

Кратко это равенство может быть записано в виде [11]

$$\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{D} \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{D}) \boldsymbol{\Sigma}}{\det \boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D} - \mathbf{D} (\mathbf{c}^e)^{1/2} \right] \boldsymbol{\Sigma}}{\det \boldsymbol{\Sigma}},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \text{tr}(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{I} - (\mathbf{c}^e)^{1/2}$$

Далее можно получить уравнение эволюции тензора упругой деформации. Воспользовавшись (1.1.3), (1.1.6) и (1.1.7):

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{c}^e}{Dt} &= \frac{D(\mathbf{c}^e)^{1/2}}{Dt} (\mathbf{c}^e)^{1/2} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \frac{D(\mathbf{c}^e)^{1/2}}{Dt} = \\ &= \mathbf{Q} \mathbf{c}^e - \mathbf{c}^e \mathbf{l} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} (\mathbf{Q} - \mathbf{l}) (\mathbf{c}^e)^{1/2} = \\ &= \left[\mathbf{W} + 2\mathbf{A} + \left\{ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{T} - \mathbf{A} \right\} \right] \mathbf{c}^e - \mathbf{c}^e \mathbf{l} + \\ &+ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \left[-\mathbf{D} + 2\mathbf{A} + \left\{ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{T} - \mathbf{A} \right\} \right] (\mathbf{c}^e)^{1/2} = \\ &= -\mathbf{l}^T \mathbf{c}^e - \mathbf{c}^e \mathbf{l} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D} (\mathbf{c}^e)^{1/2} - \mathbf{D} \mathbf{c}^e + \\ &+ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{T} - \mathbf{A} \right] (\mathbf{c}^e)^{1/2} + \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{T} - \mathbf{A} \right] \mathbf{c}^e \end{aligned}$$

Или с учетом (1.1.7)

$$\begin{aligned}
\frac{D_{CR}\mathbf{c}^e}{Dt} &\stackrel{def}{=} \frac{D\mathbf{c}^e}{Dt} + \mathbf{l}^T \mathbf{c}^e + \mathbf{c}^e \mathbf{l} = \\
&= (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D} (\mathbf{c}^e)^{1/2} - \mathbf{D} \mathbf{c}^e + \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{T} - \mathbf{A} \right] \mathbf{c}^e + \\
&+ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{T} - \mathbf{A} \right] (\mathbf{c}^e)^{1/2} = \\
&= \mathbf{c}^e \mathbf{T} (\mathbf{c}^e)^{1/2} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{T} \mathbf{c}^e
\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

По (1.1.4), (1.1.6) имеем

$$\frac{D\mathbf{c}^i}{Dt} = -\mathbf{c}^i \left[\mathbf{W} + \mathbf{A} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{T} \right] + \left[\mathbf{W} + \mathbf{A} - \mathbf{T} (\mathbf{c}^e)^{1/2} \right] \mathbf{c}^i \tag{1.1.9}$$

Далее следует определить симметричный тензор $\mathbf{T}$.

Определяющие упругие соотношения. Второй закон термодинамики в виде неравенства Планка есть

$$\wp = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - J^{-1} \dot{\Psi} \geq 0, \quad J = \det \mathbf{F} = \rho_0 / \rho$$

Здесь $\wp$ есть удельная (на единицу деформированного объема) скорость диссипации; ρ и ρ_0 есть массовые плотности материала в актуальной и исходной конфигурации; Ψ есть удельная (на единицу недеформированного объема) свободная энергия Гельмгольца (упругий потенциал).

Если упругий потенциал Ψ изотропной среды есть функция только упругой деформации, $\Psi = \Psi(\mathbf{c}^e)$, то можно записать

$$\wp = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - J^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} : \frac{D\mathbf{c}^e}{Dt} \geq 0$$

Исходя из (1.1.8)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} : \frac{D\mathbf{c}^e}{Dt} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} : \left[-\mathbf{l}^T \mathbf{c}^e - \mathbf{c}^e \mathbf{l} + \mathbf{c}^e \mathbf{T} (\mathbf{c}^e)^{1/2} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{T} \mathbf{c}^e \right] = \\
&= -2 \left(\mathbf{c}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} \right) : \mathbf{D} + 2 \left(\mathbf{c}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} \right) : \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{T} \right]
\end{aligned}$$

Здесь учтена соосность тензоров $\mathbf{c}^e$ и $\partial\Psi/\partial\mathbf{c}^e$, а также инвариантность оператора tr относительно кругового сдвига.

Тогда неравенство Планка может быть записано в виде

$$\wp = \left[\boldsymbol{\sigma} + 2J^{-1}\mathbf{c}^e \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e} \right] : \mathbf{D} - 2J^{-1} \left(\mathbf{c}^e \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e} \right) : \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{T} \right] \geq 0$$

и может быть удовлетворено следующим образом:

$$\text{- гиперупругий закон } \boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} -2J^{-1}\mathbf{c}^e \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e}, & \det \mathbf{c}^e \neq 1 \\ -p\mathbf{I} - 2J^{-1}\mathbf{c}^e \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e}, & \det \mathbf{c}^e = 1 \end{cases}$$

$$\text{- остаточное диссипативное неравенство } \wp = \boldsymbol{\sigma} : \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{T} \right] \geq 0$$

Требуя, чтобы остаточное диссипативное неравенство принимало тот же вид, что и в классической теории малых деформаций, а именно

$$\wp = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i \geq 0, \text{ определим симметричный тензор } \mathbf{T} \text{ как } \mathbf{T} = (\mathbf{c}^e)^{-1/2} \mathbf{D}^i.$$

Возвращаясь теперь к формулам (1.1.8) и (1.1.9), учитывая $\mathbf{c}^e \mathbf{D}^i = \mathbf{D}^i \mathbf{c}^e$,¹ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{D_J \mathbf{c}^i}{Dt} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{D\mathbf{c}^i}{Dt} - \mathbf{W}\mathbf{c}^i + \mathbf{c}^i \mathbf{W} = (\mathbf{A} - \mathbf{D}^i) \mathbf{c}^i - \mathbf{c}^i (\mathbf{A} + \mathbf{D}^i) = \\ &= -2\mathbf{c}^i \mathbf{D}^i + \mathbf{A} \mathbf{c}^i - \mathbf{c}^i \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\frac{D_{CR} \mathbf{c}^e}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D\mathbf{c}^e}{Dt} + \mathbf{I}^T \mathbf{c}^e + \mathbf{c}^e \mathbf{I} = (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D}^i (\mathbf{c}^e)^{1/2} + \mathbf{D}^i \mathbf{c}^e = 2\mathbf{c}^e \mathbf{D}^i \quad (1.1.10)$$

Если теперь задана связь между тензором скорости необратимой деформации и тензором напряжений Коши (например, в форме ассоциированного закона пластического течения или закона ползучести), а также задан

¹ Везде далее будут рассматриваться изотропные материалы, для которых тензор действительных напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$, тензора упругой деформации и тензор скорости необратимой деформации $\mathbf{D}^i$ соосны и коммутируют в скалярном произведении (в частности, это обеспечивается принятием потенциальных соотношений нелинейной упругости и ассоциированного закона пластического течения или закона ползучести в потенциальной форме).

упругий закон, связывающий тензор напряжений Коши с тензором упругой деформации $\mathbf{c}^e$, то система уравнений (1.1.10) становится замкнутой относительно компонент $\mathbf{c}^e$ с начальными условиями, следующими из решения соответствующей упругой задачи.

Замечание. Согласно уравнению (1.1.10) и формуле Якоби

$$\frac{D}{Dt} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \cdot \operatorname{tr} \left(\mathbf{A}^{-1} \frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right)$$

принимая во внимание ассоциативность и коммутативность оператора следа тензора, для тензора $\mathbf{c}^e$ можно получить

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \det \mathbf{c}^e &= \det \mathbf{c}^e \cdot \operatorname{tr} \left\{ \left(\mathbf{c}^e \right)^{-1} \frac{D\mathbf{c}^e}{Dt} \right\} = \\ &= \det \mathbf{c}^e \cdot \operatorname{tr} \left\{ 2\mathbf{D}^i - \left(\mathbf{c}^e \right)^{-1} \mathbf{I}^T \mathbf{c}^e - \mathbf{I} \right\} = -2 \det \mathbf{c}^e \cdot \operatorname{tr} (\mathbf{D} - \mathbf{D}^i) \end{aligned}$$

Таким образом, если материал несжимаем при чисто упругом деформировании и $\operatorname{tr} \mathbf{D} = \operatorname{tr} \mathbf{D}^i = 0$, то при необратимом деформировании $\det \mathbf{c}^e = 1$.

1.2. Альтернативное построение

Будем использовать известное мультипликативное разделение тензора градиента деформации на обратимую (упругую) и необратимую составляющие [20–24]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^i \quad (1.2.1)$$

Если, следуя [25] предположить, что $\mathbf{F}^i \in \text{sym}$ (это означает, что пластическая деформация осуществляется без вращения, см. также [26, 27]), то есть $\mathbf{F}^i = \mathbf{R}^i \mathbf{U}^i = \mathbf{U}^i$, $\mathbf{R}^i = \mathbf{I}$, то можно продифференцировать по времени (1.2.1) и получить

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{D}{Dt}(\mathbf{V}^e \mathbf{R}^e \mathbf{U}^i) = \dot{\mathbf{V}}^e \mathbf{R}^e \mathbf{U}^i + \mathbf{V}^e \dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{U}^i + \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e \dot{\mathbf{U}}^i$$

Запишем следующее:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}} (\mathbf{V}^e \mathbf{R}^e \mathbf{U}^i)^{-1} = \dot{\mathbf{F}} (\mathbf{U}^i)^{-1} (\mathbf{R}^e)^{-1} (\mathbf{V}^e)^{-1} = \\ &= \dot{\mathbf{V}}^e (\mathbf{V}^e)^{-1} + \mathbf{V}^e \dot{\mathbf{R}}^e (\mathbf{R}^e)^T (\mathbf{V}^e)^{-1} + \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e \dot{\mathbf{U}}^i (\mathbf{U}^i)^{-1} (\mathbf{R}^e)^T (\mathbf{V}^e)^{-1} \end{aligned}$$

после чего можно получить три вспомогательных равенства:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{c}}^e &= \left(\frac{D}{Dt} (\mathbf{V}^e)^{-1} \right) (\mathbf{V}^e)^{-1} + (\mathbf{V}^e)^{-1} \left(\frac{D}{Dt} (\mathbf{V}^e)^{-1} \right) = \\ &= -(\mathbf{V}^e)^{-1} \dot{\mathbf{V}}^e (\mathbf{V}^e)^{-2} - (\mathbf{V}^e)^{-2} \dot{\mathbf{V}}^e (\mathbf{V}^e)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^e \mathbf{I} &= (\mathbf{V}^e)^{-2} \mathbf{I} = (\mathbf{V}^e)^{-2} \dot{\mathbf{V}}^e (\mathbf{V}^e)^{-1} + (\mathbf{V}^e)^{-1} \dot{\mathbf{R}}^e (\mathbf{R}^e)^T (\mathbf{V}^e)^{-1} + \\ &+ (\mathbf{V}^e)^{-1} \mathbf{R}^e \dot{\mathbf{U}}^i (\mathbf{U}^i)^{-1} (\mathbf{R}^e)^T (\mathbf{V}^e)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^T \mathbf{c}^e &= (\mathbf{c}^e \mathbf{I})^T = (\mathbf{V}^e)^{-1} \dot{\mathbf{V}}^e (\mathbf{V}^e)^{-2} + (\mathbf{V}^e)^{-1} \mathbf{R}^e (\dot{\mathbf{R}}^e)^T (\mathbf{V}^e)^{-1} + \\ &+ (\mathbf{V}^e)^{-1} \mathbf{R}^e (\mathbf{U}^i)^T \dot{\mathbf{U}}^i (\mathbf{R}^e)^{-1} (\mathbf{V}^e)^{-1} \end{aligned}$$

первое из которых получено с использованием известной формулы для дифференцирования обратного тензора по времени

$$D(\mathbf{V}^e)^{-1}/Dt = -(\mathbf{V}^e)^{-1} \dot{\mathbf{V}}^e (\mathbf{V}^e)^{-1}.$$

Из последних равенств, приводя подобные, можно получить выражение для производной Коттер – Ривлина тензора упругой деформации $\mathbf{c}^e$

$$\begin{aligned} \frac{D_{CR} \mathbf{c}^e}{Dt} &\stackrel{def}{=} \\ &= \dot{\mathbf{c}}^e + \mathbf{L}^T \mathbf{c}^e + \mathbf{c}^e \mathbf{L} = \\ &= -(\mathbf{V}^e)^{-1} \dot{\mathbf{V}}^e (\mathbf{V}^e)^{-2} - (\mathbf{V}^e)^{-2} \dot{\mathbf{V}}^e (\mathbf{V}^e)^{-1} + \\ &+ (\mathbf{V}^e)^{-2} \dot{\mathbf{V}}^e (\mathbf{V}^e)^{-1} + (\mathbf{V}^e)^{-1} \dot{\mathbf{R}}^e (\mathbf{R}^e)^T (\mathbf{V}^e)^{-1} + \\ &+ (\mathbf{V}^e)^{-1} \mathbf{R}^e \dot{\mathbf{U}}^i (\mathbf{U}^i)^{-1} (\mathbf{R}^e)^T (\mathbf{V}^e)^{-1} + \\ &+ (\mathbf{V}^e)^{-1} \dot{\mathbf{V}}^e (\mathbf{V}^e)^{-2} + (\mathbf{V}^e)^{-1} \mathbf{R}^e (\dot{\mathbf{R}}^e)^T (\mathbf{V}^e)^{-1} + \\ &+ (\mathbf{V}^e)^{-1} \mathbf{R}^e (\mathbf{U}^i)^{-1} \dot{\mathbf{U}}^i (\mathbf{R}^e)^T (\mathbf{V}^e)^{-1} = \\ &= (\mathbf{V}^e)^{-1} (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^T + 2\mathbf{D}^i) (\mathbf{V}^e)^{-1} = 2(\mathbf{V}^e)^{-1} \mathbf{D}^i (\mathbf{V}^e)^{-1} = 2(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D}^i (\mathbf{c}^e)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^T = \dot{\mathbf{R}}^e (\mathbf{R}^e)^T$; тензор скорости необратимой деформации $\mathbf{D}^i$ задается равенством $2\mathbf{D}^i = \mathbf{R}^e \left[\dot{\mathbf{U}}^i (\mathbf{U}^i)^{-1} + (\mathbf{U}^i)^{-1} \dot{\mathbf{U}}^i \right] (\mathbf{R}^e)^T$.

При чисто упругом деформировании $\mathbf{D}^i = \mathbf{0}$, упругая деформация совпадает с полной и формула (1.2.2) переходит в известное равенство $D_{CR} \mathbf{c}/Dt = \mathbf{0}$.

Аналогично (1.2.2) можно получить производную Олдройда тензора $\mathbf{B}^e$

$$\frac{D_{Old} \mathbf{B}^e}{Dt} \stackrel{def}{=} \dot{\mathbf{B}}^e - \mathbf{I} \mathbf{B}^e - \mathbf{B}^e \mathbf{I}^T = -2\mathbf{V}^e \mathbf{D}^i \mathbf{V}^e = -2(\mathbf{B}^e)^{1/2} \mathbf{D}^i (\mathbf{B}^e)^{1/2} \quad (1.2.3)$$

В силу соосности тензоров формулы (1.2.2) и (1.2.3) могут быть записаны в виде

$$\frac{D_{CR}\mathbf{c}^e}{Dt} \stackrel{def}{=} \dot{\mathbf{c}}^e + \mathbf{l}^T \mathbf{c}^e + \mathbf{c}^e \mathbf{l} = 2\mathbf{c}^e \mathbf{D}^i \quad (1.2.4)$$

$$\frac{D_{Old}\mathbf{B}^e}{Dt} \stackrel{def}{=} \dot{\mathbf{B}}^e - \mathbf{l}\mathbf{B}^e - \mathbf{B}^e \mathbf{l}^T = -2\mathbf{B}^e \mathbf{D}^i \quad (1.2.5)$$

Уравнение (1.2.4) совпадает по форме с (1.1.10).

Определяющие *упругие соотношения*. Сделаем некоторые предварительные преобразования с использованием (1.2.5):

$$\left(\dot{\mathbf{B}}^e - 2\mathbf{l}\mathbf{B}^e + 2\mathbf{D}^i \mathbf{B}^e \right)_s = \left(\mathbf{l}\mathbf{B}^e + \mathbf{B}^e \mathbf{l}^T - 2\mathbf{l}\mathbf{B}^e \right)_s = \mathbf{0}$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{B}}^e - 2\mathbf{l}\mathbf{B}^e + 2\mathbf{D}^i \mathbf{B}^e = \mathbf{A}$$

где $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ антисимметричный тензор (из условий симметрии $\mathbf{B}^e$ можно найти $\mathbf{A} = \mathbf{B}^e \mathbf{l}^T - \mathbf{l}\mathbf{B}^e$).

Тогда

$$\mathbf{l} = \mathbf{D}^i + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{B}}^e (\mathbf{B}^e)^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{A} (\mathbf{B}^e)^{-1}$$

а тензор скорости деформации $\mathbf{D} = (\mathbf{l})_s$ может быть записан в виде

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^i + \frac{1}{4} \left[(\mathbf{B}^e)^{-1} \dot{\mathbf{B}}^e + \dot{\mathbf{B}}^e (\mathbf{B}^e)^{-1} \right] + \frac{1}{4} \left[(\mathbf{B}^e)^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{A} (\mathbf{B}^e)^{-1} \right] \quad (1.2.6)$$

Второй закон термодинамики в виде неравенства Планка есть

$$\wp = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - J^{-1} \dot{\Psi} \geq 0, \quad J = \det \mathbf{F} = \rho_0 / \rho. \quad (1.2.7)$$

С учетом (1.2.6):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i + \frac{1}{4} \boldsymbol{\sigma} : \left[(\mathbf{B}^e)^{-1} \dot{\mathbf{B}}^e + \dot{\mathbf{B}}^e (\mathbf{B}^e)^{-1} \right] + \\
&+ \frac{1}{4} \boldsymbol{\sigma} : \left[(\mathbf{B}^e)^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{A} (\mathbf{B}^e)^{-1} \right] = \\
&= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i + \frac{1}{4} \operatorname{tr} \left\{ \boldsymbol{\sigma} \left[(\mathbf{B}^e)^{-1} \dot{\mathbf{B}}^e \right]^T \right\} + \frac{1}{4} \operatorname{tr} \left\{ \boldsymbol{\sigma} \left[\dot{\mathbf{B}}^e (\mathbf{B}^e)^{-1} \right]^T \right\} + \\
&+ \frac{1}{4} \operatorname{tr} \left[\boldsymbol{\sigma} \left[(\mathbf{B}^e)^{-1} \mathbf{A} \right]^T \right] - \frac{1}{4} \operatorname{tr} \left[\boldsymbol{\sigma} \left[\mathbf{A} (\mathbf{B}^e)^{-1} \right]^T \right] = \\
&= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i + \frac{1}{4} \operatorname{tr} \left[\boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{B}}^e (\mathbf{B}^e)^{-1} \right] + \frac{1}{4} \operatorname{tr} \left[\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{B}^e)^{-1} \dot{\mathbf{B}}^e \right] + \\
&\frac{1}{4} \operatorname{tr} \left[\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{B}^e)^{-1} \mathbf{A} \right] - \frac{1}{4} \operatorname{tr} \left[\boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} (\mathbf{B}^e)^{-1} \right] = \\
&= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[(\mathbf{B}^e)^{-1} \boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{B}}^e \right] + \underbrace{\frac{1}{4} \operatorname{tr} \left[\boldsymbol{\sigma} (\mathbf{B}^e)^{-1} \mathbf{A} \right] - \frac{1}{4} \operatorname{tr} \left[(\mathbf{B}^e)^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} \right]}_0 = \\
&= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{B}^e)^{-1} \boldsymbol{\sigma} \right] : \dot{\mathbf{B}}^e
\end{aligned}$$

Здесь использована соосность тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{B}^e$, а также инвариантность оператора tr относительно кругового сдвига.

Теперь, если упругий потенциал Ψ изотропной среды есть функция только упругой деформации, $\Psi = \Psi(\mathbf{B}^e)$, то (1.2.7) с учетом равенства выше может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
\wp &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{B}^e)^{-1} \boldsymbol{\sigma} \right] : \dot{\mathbf{B}}^e - J^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e} : \dot{\mathbf{B}}^e = \\
&= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i + \left[\frac{1}{2} (\mathbf{B}^e)^{-1} \boldsymbol{\sigma} - J^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e} \right] : \dot{\mathbf{B}}^e \geq 0
\end{aligned}$$

Это неравенство может быть выполнено следующим образом:

- нелинейный упругий закон

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} 2J^{-1} \mathbf{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e}, & \det \mathbf{B}^e \neq 1 \\ -p \mathbf{I} + 2J^{-1} \mathbf{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e}, & \det \mathbf{B}^e = 1 \end{cases} \quad (1.2.8)$$

- остаточное диссипативное неравенство $\wp = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i \geq 0$, или (для пластически несжимаемого материала) $\wp = \mathbf{s} : \mathbf{D}^i \geq 0$, где $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - (\text{tr} \boldsymbol{\sigma} / 3) \mathbf{I}$ есть девиатор напряжений Коши.

Для упруго несжимаемой среды уместно дать следующие пояснения.

При $\det \mathbf{B}^e = 1$ и $\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2J^{-1} \mathbf{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e}$, где J может отличаться от единицы, если пластическая деформация неизохорна, неравенство Планка принимает вид

$$\begin{aligned} \wp &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i + \left[\frac{1}{2} (\mathbf{B}^e)^{-1} \boldsymbol{\sigma} - J^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e} \right] : \dot{\mathbf{B}}^e = \\ &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i - \frac{p}{2} (\mathbf{B}^e)^{-1} : \dot{\mathbf{B}}^e = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i - \frac{p}{2} \text{tr} \left[(\mathbf{B}^e)^{-1} \dot{\mathbf{B}}^e \right] \stackrel{(1.5)}{=} \\ &\stackrel{(1.5)}{=} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i - p \text{tr} (\mathbf{D} - \mathbf{D}^i) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i - \frac{p}{2} \frac{D}{Dt} (\ln \det \mathbf{B}^e) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^i \end{aligned}$$

Последнее равенство в силу формулы Якоби

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\det \mathbf{B}^e) &= \det \mathbf{B}^e \text{tr} \left[(\mathbf{B}^e)^{-1} \dot{\mathbf{B}}^e \right] = \\ &= \det \mathbf{B}^e \text{tr} \left[(\mathbf{B}^e)^{-1} \left(\mathbf{B}^e \mathbf{I}^T + \mathbf{I} \mathbf{B}^e - 2 (\mathbf{B}^e)^{1/2} \mathbf{D}^i (\mathbf{B}^e)^{1/2} \right) \right] = \\ &= 2 \det \mathbf{B}^e \text{tr} (\mathbf{D} - \mathbf{D}^i) \end{aligned}$$

Если материал несжимаем при чисто упругом деформировании, несжимаем в целом ($\text{tr} \mathbf{D} = 0$) и необратимая деформация изохорна ($\text{tr} \mathbf{D}^i = 0$), то при необратимом деформировании выполняется равенство $\det \mathbf{B}^e = 1$. Это свойство тензора $\mathbf{B}^e$ естественно, но неочевидно, поскольку, вообще говоря, как $\mathbf{F}^e$, так и $\mathbf{F}^i$ в разложении (1.2.1) не обязаны являться градиентами какого бы то ни было векторного поля. Формула выше получена из (1.2.3) без предположения соосности тензоров.

Наравне с (1.2.8) могут использоваться законы

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} -2J^{-1}\mathbf{c}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e}, & \det \mathbf{c}^e \neq 1 \\ -p\mathbf{I} - 2J^{-1}\mathbf{c}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e}, & \det \mathbf{c}^e = 1 \end{cases} \quad (1.2.9)$$

для упругого потенциала $\Psi = \Psi(\mathbf{c}^e)$ на основе инвариантов тензора упругой деформации Фингера, и

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} J^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{h}^e}, & \text{tr } \mathbf{h}^e \neq 0 \\ -p\mathbf{I} + J^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{h}^e}, & \text{tr } \mathbf{h}^e = 0 \end{cases} \quad (1.2.10)$$

для упругого потенциала $\Psi = \Psi(\mathbf{h}^e)$ на основе инвариантов логарифмического тензора упругой деформации Генки $\mathbf{h}^e = \ln \mathbf{V}^e = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B}^e = -\frac{1}{2} \ln \mathbf{c}^e$.

1.3. Законы необратимого деформирования

1.3.1. Вязкоупругий закон. В представленном исследовании будет использоваться вязкоупругая формулировка, основанная на совокупности упругого закона (1.2.8) (или (1.2.9), (1.2.10)) и закона изохорной ползучести вида

$$\mathbf{D}^c = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

где Φ потенциал ползучести, $\mathbf{D}^c$ тензор скорости деформации ползучести.

В качестве эквивалентного напряжения может быть выбрано, например, эквивалентное напряжение по Мизесу $\sigma_{eq} = \sqrt{J_2}$, где $J_2 = (1/2) \text{tr} \mathbf{s}^2$ есть второй инвариант девиатора напряжений $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}/3) \mathbf{I}$, или по Треска $\sigma_{eq} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, где σ_1 и σ_3 есть наибольшее и наименьшее главное напряжение. Другие варианты задания эквивалентного напряжения, в том числе те, что позволяют строить теории вязкого деформирования с несимметричным откликом материала на сжатие и растяжение, будут приведены в соответствующих разделах далее.

1.3.2. Пластическое течение. Мы не рассматриваем вязкие эффекты в пластичности, адресуя своё исследование только тому кругу проблем, где такие эффекты не являются доминирующими. В рассматриваемых задачах используется теория изохорного пластического течения, которая состоит из условия текучести вида

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (1.3.1)$$

и закона пластического течения для пластического потенциала $g(\boldsymbol{\sigma})$

$$\mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.3.2)$$

Функция f содержит механические характеристики материала, в частности предел текучести, который может быть функцией температуры T , а также накопленной пластической деформации q , описывающей температурное разупрочнение и/или изотропное деформационное упрочнение; Λ есть неопределенный скалярный множитель Лагранжа. Накопленная пластическая деформация определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{q} = \sqrt{(2/3) \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p}$$

Функция g может быть как гладкой функцией инвариантов девиатора напряжений J_2 и J_3 , так и кусочно-линейной в терминах главных напряжений. Для большинства изложенных в диссертации задач полагается выполнение ассоциированного с условием пластичности закона, т.е. пластический потенциал $g(\boldsymbol{\sigma})$ совпадает с условием текучести $f(\boldsymbol{\sigma})$. Однако для ряда задач использованы неассоциированные модели пластичности.

Так, для задачи раздела 2.4, связанной с деформированием материала при высоких давлениях, используется неассоциированная постановка в виде условия текучести Мора – Кулона

$$f = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \mathcal{G} \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \tau_{y0} = 0$$

и пластического потенциала

$$g = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

Здесь τ_{y0} и $\mathcal{G}$ константы материала. Такой подход позволяет учесть зависимость предела текучести материала от давления и при этом остаться в рамках изохорной пластичности.

Задача раздела 2.8 решена в обобщенной формулировке (1.3.1), (1.3.2), в которой пластический потенциал и условие текучести могут не совпадать, являясь при этом произвольными гладкими функциями инвариантов J_2 и J_3 .

Мы не рассматриваем совместное действие пластического течения и ползучести, поскольку эти процессы имеют различающиеся на несколько порядков характерные времена, поэтому в формулах (1.2.3)–(1.2.5) либо $\mathbf{D}^i = \mathbf{D}^p$, либо $\mathbf{D}^i = \mathbf{D}^c$.

Для пластических течений в ряде задач рассмотрен нагрев материала за счет рассеянного тепла необратимого деформирования. В этих случаях используется адиабатическое приближение и соответствующее уравнение Фурье – Кирхгофа:

$$\rho C \dot{T} = \beta_{TQ} \operatorname{tr}(\mathbf{D}^p \boldsymbol{\sigma})$$

где ρ и C – соответственно плотность и теплоемкость материала; коэффициент Тейлора – Куинни β_{TQ} определяет долю пластической работы, преобразованной в тепло. Этот коэффициент можно рассматривать как функцию накопленной пластической деформации [28–30]. В то же время существуют аргументы, основанные на экспериментальных данных по монотонному и циклическому нагружению, за то, что механизм изотропного упрочнения является строго диссипативным, то есть вся пластическая работа преобразуется в тепло и $\beta \approx 1$ [31].

ГЛАВА 2. ЗАДАЧИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕ- ФОРМИРОВАНИЯ

2.1. Эффект адиабатического нагрева при упруго-пластическом сжатии / расширении сферической полости в изотропном не- сжимаемом материале под действием удаленной гидростатиче- ской нагрузки

Задача о радиальном упруго-пластическом деформировании сферического слоя является классической задачей механики твердого тела. Если материал пластически несжимаем и его свойства однородны, то распределение напряжений в пластической области может быть найдено элементарно. В тех же условиях хорошо известно упругопластическое решение для малых деформаций (см. [32]).

Решение этой задачи в различных постановках широко используется для построения определяющих соотношений для пористых твердых тел, порошков [33–35], а также для анализа процессов уплотнения [36, 37]. Кроме того, расширение сферической полости является типичным механизмом разрушения для ряда материалов [38–40]. Известны применения решений о расширении сферической полости для оценки устойчивости подземных сооружений [41], а также для моделирования индентации и пенетрации [42–47], включая индентирование полимерных материалов при конечных деформациях [48]. Неизотермические решения, учитывающие нагрев материала из-за пластической диссипации, находят применение в задачах детонации взрывчатых веществ (в частности, газов) в полостях [49].

Известно большое количество аналитических решений задачи радиальной деформации упругопластического сферического слоя [50–55]. Некоторые из этих решений основаны на моделях неассоциированной пластичности и учитывают зависимость предела текучести материала от давления. В большинстве исследований используется модель Мизеса пластически несжимаемого материала и линейные упругие модели (закон Гука или его несжимаемые версии). Кроме того, представлены численные и аналитические решения

для кавитации в материалах с нелинейным [56–58] и немонотонным деформационным упрочнением (например, деформационное разупрочнение и повторное упрочнение полимерных материалов в [59]). Температурные эффекты рассматривались в ряде публикаций, однако в большинстве случаев учитывалась только внешняя термомеханическая нагрузка [60–65].

В этом разделе мы обсуждаем важный аспект этой проблемы, а именно нагрев материала, вызванный пластической диссипацией. Нагрев материала может существенно повлиять на процесс кавитации [66]. Далее используется модель конечных упруго-пластических деформаций, описанная в главе 1. Пренебрегается тепловым расширением, так как обычно оно вызывает только малые деформации. При этом упругие и пластические характеристики материала могут зависеть от температуры. Эволюционное уравнение для тензора упругой деформации, справедливое в области упруго-пластического деформирования, имеет вид

$$D_{CR}(\mathbf{c}^e) \equiv \dot{\mathbf{c}}^e + \mathbf{c}^e \mathbf{l} + \mathbf{l}^T \mathbf{c}^e = 2\mathbf{c}^e \mathbf{D}^p \quad (2.1.1)$$

Будем рассматривать два варианта гиперупругих соотношений для тензора напряжений Коши:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} - 2\frac{\partial \Psi^c}{\partial \mathbf{c}^e} \mathbf{c}^e = -p\mathbf{I} - 2\left(\frac{\partial \Psi^c}{\partial I_1^{c^e}} + \frac{\partial \Psi^c}{\partial I_2^{c^e}} \text{tr} \mathbf{c}^e\right) \mathbf{c}^e + 2\frac{\partial \Psi^c}{\partial I_2^{c^e}} (\mathbf{c}^e)^2 \quad (2.1.2a)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{I} + \frac{\partial \Psi^h}{\partial \mathbf{h}^e} = \\ &= -p\mathbf{I} + \frac{\partial \Psi^h}{\partial I_2^{h^e}} \frac{\partial I_2^{h^e}}{\partial \mathbf{h}^e} + \frac{\partial \Psi^h}{\partial I_3^{h^e}} \frac{\partial I_3^{h^e}}{\partial \mathbf{h}^e} = \\ &= -p\mathbf{I} - \frac{\partial \Psi^h}{\partial I_2^{h^e}} \mathbf{h}^e + \frac{\partial \Psi^h}{\partial I_3^{h^e}} \left[(\mathbf{h}^e)^2 - \frac{1}{2} \mathbf{I} \text{tr} (\mathbf{h}^e)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.1.2b)$$

Упругие модули могут зависеть от температуры, но в (2.1.2a)/(2.1.2b) пренебрегается температурным расширением.

Уравнение равновесия (решение может учитывать и динамические эффекты, если это необходимо)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \quad (2.1.3)$$

Принимается условие пластичности (1.3.1) и ассоциированный с ним закон вида

$$\mathbf{f}(J_2, J_3) = 0, \quad \mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.1.4)$$

здесь J_2 и J_3 – квадратичный и кубический инварианты девиатора напряжений. Функция $\mathbf{f}$ содержит механические характеристики материала, в частности предел текучести, который может быть функцией температуры T , а также накопленной пластической деформации q .

Мы используем адиабатическое приближение, предполагая, что процесс деформации и процесс тепловыделения, вызванный пластической диссипацией, происходят намного быстрее, чем процесс теплопроводности. Таким образом, уравнение тепломассопереноса Фурье – Кирхгофа принимает вид [67]

$$\rho C \dot{T} = \beta_{TQ} \operatorname{tr}(\mathbf{D}^p \boldsymbol{\sigma}) \quad (2.1.5)$$

коэффициент Тейлора – Куинни β_{TQ} определяет долю пластической работы, преобразованной в тепло.

2.1.1. Радиальная деформация температурно разупрочняющегося и деформационно упрочняющегося изотропного сферического слоя. Пусть сферический слой с начальным внутренним радиусом $r_0 \geq 0$ и внешним радиусом, который может быть конечным или бесконечным, нагружен внешней силой, так что материальные точки движутся радиально в сферической системе координат; радиальные компоненты векторов перемещений и скорости есть u_r и v_r . Исходная температура недеформированного слоя составляет T_0 . При определенном значении внешней нагрузки у внутренней поверхности

слоя появляется зона пластической деформации. В упругой зоне напряжение и деформация определяются известным универсальным решением [68, 69].²

Кинематика. В силу сферической симметрии ненулевые компоненты тензора деформации равны

$$c_{rr} = (1 - \partial u_r / \partial r)^2, \quad c_{\theta\theta} = c_{\varphi\varphi} = (1 - u_r / r)^2$$

Для несжимаемого материала имеем $\det \mathbf{c} = 1$ и, следовательно $u_r = r - (r^3 + \omega^3)^{1/3}$. Здесь параметр нагружения $\omega(t) > 0$ соответствует сжатию ($u_r < 0$), а $\omega < 0$ соответствует расширению ($u_r > 0$) полости. Единственная ненулевая компонента вектора скорости есть

$$v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} \left(1 - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^{-1} = - \left(\frac{\omega}{r} \right)^2 \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

Введем переменную $\xi = (\omega/r)^3$. Тогда $c_{rr} = (1 + \xi)^{-4/3}$, $c_{\varphi\varphi} = c_{\theta\theta} = (1 + \xi)^{2/3}$. Компоненты пространственного градиента скорости есть

$$l_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{2}{3} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad l_{\theta\theta} = l_{\varphi\varphi} = \frac{v_r}{r} = -\frac{1}{3} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (2.1.6)$$

Упругие деформации в области пластического течения. Поскольку $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$ для сферически-симметричного напряженного состояния и компоненты девиатора напряжений равны

$$s_{rr} = 2\Delta/3, \quad s_{\theta\theta} = s_{\varphi\varphi} = -\Delta/3, \quad \Delta = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \quad (2.1.7)$$

то выражения для инвариантов девиатора напряжений имеют вид

$$J_2 = (\text{tr} \mathbf{s}^2 - \text{tr}^2 \mathbf{s})/2 = \Delta^2/3, \quad J_3 = \det \mathbf{s} = 2(\Delta/3)^3 \quad (2.1.8)$$

Тогда из условия текучести (2.1.4) можно выразить разницу $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ как функцию температуры и накопленной пластической деформации:

² Нужно упомянуть, что здесь не рассмотрены такие нелинейно-упругие эффекты, как неоднозначность или несуществование решения, которые характерны для некоторых вариантов упругих потенциалов; подробнее см. [70, 71].

$$\Delta = \Delta(T, q) \quad (2.1.9)$$

С учетом равенства $\det \mathbf{c}^e = 1$ справедливы следующие соотношения для компонент тензора упругих деформаций в области пластического течения

$$c_{rr}^e = \left(c_{\theta\theta}^e\right)^{-2}, \quad c_{\varphi\varphi}^e = c_{\theta\theta}^e,$$

инварианты тензоров упругих деформаций $\mathbf{c}^e$ и $\mathbf{h}^e$ имеют выражения

$$I_1^{\mathbf{c}^e} = \left(c_{\theta\theta}^e\right)^{-2} + 2c_{\theta\theta}^e, \quad I_2^{\mathbf{c}^e} = \left(c_{\theta\theta}^e\right)^2 + 2\left(c_{\theta\theta}^e\right)^{-1}; \quad (2.1.10)$$

$$I_2^{\mathbf{h}^e} = -\frac{3}{4}\ln^2 c_{\theta\theta}^e, \quad I_3^{\mathbf{h}^e} = \frac{1}{4}\ln^3 c_{\theta\theta}^e$$

Тогда из закона упругости (2.1.2a) / (2.1.2b) следует, что

$$\Delta = 2\left(\psi_1^c + \psi_2^c c_{\theta\theta}^e\right)\left[c_{\theta\theta}^e - \left(c_{\theta\theta}^e\right)^{-2}\right], \quad \psi_1^c = \frac{\partial \Psi^c}{\partial I_1^{\mathbf{c}^e}}, \quad \psi_2^c = \frac{\partial \Psi^c}{\partial I_2^{\mathbf{c}^e}} \quad (2.1.11a)$$

$$\Delta = -\frac{3}{2}\left(\psi_2^h - \frac{1}{2}\psi_3^h \ln c_{\theta\theta}^e\right)\ln c_{\theta\theta}^e, \quad \psi_2^h = \frac{\partial \Psi^h}{\partial I_2^{\mathbf{h}^e}}, \quad \psi_3^h = \frac{\partial \Psi^h}{\partial I_3^{\mathbf{h}^e}} \quad (2.1.11b)$$

Здесь ψ_1^c , ψ_2^c и ψ_2^h , ψ_3^h – функции инвариантов $I_1^{\mathbf{c}^e}$, $I_2^{\mathbf{c}^e}$ и $I_2^{\mathbf{h}^e}$, $I_3^{\mathbf{h}^e}$. Эти функции включают модули упругости материала, которые могут зависеть от температуры. Указанные инварианты тензора упругих деформаций согласно (2.1.10) выражаются через $c_{\theta\theta}^e$. Таким образом, согласно (2.1.11a) / (2.1.11b) и (2.1.9), компоненты тензора упругой деформации в пластической области могут быть выражены как функции температуры и накопленной пластической деформации.

Уравнение для температурного поля. Во-первых, выразим скорость диссипации пластической энергии $\text{tr}(\mathbf{D}^p \boldsymbol{\sigma})$. Тензор скорости пластической деформации равен

$$\mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \Lambda \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = \Lambda \left[f_2 \mathbf{s} + f_3 (\mathbf{s}^2 - 2J_2 \mathbf{I}/3) \right] \quad (2.1.12)$$

где $f_2 = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial J_2}$, $f_3 = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial J_3}$

Поскольку $\text{tr} \mathbf{D}^p = 0$ и $\text{tr} \mathbf{s} = 0$, то согласно (2.1.7)

$$\text{tr}(\mathbf{D}^p \boldsymbol{\sigma}) = \text{tr}(\mathbf{D}^p \mathbf{s}) = \Lambda \text{tr} \left(f_2 \mathbf{s}^2 + f_3 \mathbf{s}^3 \right) = \Lambda \frac{2\Delta^2}{3} \left(f_2 + f_3 \frac{\Delta}{3} \right) \quad (2.1.13)$$

Аналогично [11], мы будем рассматривать температуру как монотонный параметр для упругой деформации с учетом уравнения (2.1.5):

$$\dot{c}_{\theta\theta}^e = \frac{\partial c_{\theta\theta}^e}{\partial T} \dot{T} = \frac{\partial c_{\theta\theta}^e}{\partial T} \frac{\beta_{TQ} \text{tr}(\mathbf{D}^p \boldsymbol{\sigma})}{\rho C} = \frac{\partial c_{\theta\theta}^e}{\partial T} \frac{\beta_{TQ} \Lambda}{\rho C} \frac{2\Delta^2}{3} \left(f_2 + f_3 \frac{\Delta}{3} \right)$$

С другой стороны, из (2.1.1) с учетом (2.1.6), (2.1.7) и (2.1.12) можно заключить, что

$$\dot{c}_{\theta\theta}^e = -\frac{2}{3} c_{\theta\theta}^e \left[\Lambda \left(f_2 + f_3 \frac{\Delta}{3} \right) \Delta - \frac{\partial \xi}{\partial t} \right]$$

Из двух последних уравнений следует выражение для пластического множителя:

$$\Lambda = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{\Lambda} \left(f_2 + f_3 \frac{\Delta}{3} \right)^{-1} \left(1 + \frac{\partial \ln c_{\theta\theta}^e}{\partial T} \frac{\beta_{TQ} \Delta}{\rho C} \right)^{-1} \quad (2.1.14)$$

Подставляя (2.1.13) и (2.1.14) в (2.1.5)

$$\dot{T} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{r}{3} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{2}{3} \frac{\beta_{TQ} \Delta}{\rho C} \frac{\partial \xi}{\partial t} \left(1 + \frac{\partial \ln c_{\theta\theta}^e}{\partial T} \frac{\beta_{TQ} \Delta}{\rho C} \right)^{-1} \quad (2.1.15)$$

Компоненты тензора скорости пластической деформации (2.1.12) с учетом (2.1.7) и (2.1.14) равны

$$D_{rr}^p = -2D_{\theta\theta}^p = -2D_{\varphi\varphi}^p = \frac{2}{3} \frac{\partial \xi}{\partial t} \left(1 + \frac{\partial \ln c_{\theta\theta}^e}{\partial T} \frac{\beta_{TQ} \Delta}{\rho C} \right)^{-1} \quad (2.1.16)$$

Из (2.1.16) с учетом (2.1.15) следует, что

$$\dot{q} = \left[\frac{2}{3} \text{tr}(\mathbf{D}^p)^2 \right]^{1/2} = |D_{rr}^p| = \frac{\rho C}{\beta_{TQ} |\Delta|} \dot{T}$$

С другой стороны $\dot{q} = (\partial q / \partial T) \dot{T}$, откуда

$$\frac{\partial q}{\partial T} = \frac{\rho C}{\beta_{TQ} \delta \Delta} \quad (2.1.17)$$

Здесь значение $\delta = 1$ соответствует сжатию полости ($\Delta > 0$), а значение $\delta = -1$ соответствует расширению полости ($\Delta < 0$).

Предполагая, что температура является функцией автомодельной переменной $\xi = (\omega/r)^3$, мы интегрируем уравнение (2.1.15) с граничным условием $c_{\theta\theta}^e = c_{\theta\theta}$ на упругопластической границе с учетом (2.1.17):

$$\ln c_{\theta\theta}^e + \delta q = \ln(1 + \xi)^{2/3} \quad (2.1.18)$$

Система уравнений (2.1.9), (2.1.11a) / (2.1.11b), (2.1.17), (2.1.18) определяет решение температурной задачи. Выражения, обратные (2.1.11a) / (2.1.11b), определяют упругую деформацию $c_{\theta\theta}^e$ как функцию Δ , а также упругих параметров материала, которые могут быть произвольно заданными функциями температуры. В свою очередь, выражение (2.1.9) задает зависимость Δ от температуры T и накопленной пластической деформации q (если материал проявляет свойство изотропного деформационного упрочнения). Коэффициент Тейлора – Куинни β может быть произвольной функцией q . Выражение для накопленной пластической деформации $q(T)$ представляет собой решение ОДУ первого порядка (2.1.17), не содержащее упругих параметров материала. Уравнение (2.1.18) неявно определяет распределение тем-

пературы $T(\xi)$ в пластической области.

Напряженное состояние. Напряжение в упругой области определяется известным универсальным решением [68, 69]. В пластической области по найденному распределению температуры $T(\xi)$ и накопленной пластической деформации $q(T)$ можно найти пространственное распределение локального предела текучести и других пластических параметров, если они зависят от T и q . И далее, по (2.1.9) также можно найти распределение Δ . Радиальное напряжение σ_{rr} в пластической области можно найти, вычислив интеграл в уравнении равновесия (2.1.3):

$$r \frac{\partial \Sigma_{rr}}{\partial r} + 2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad \text{или} \quad \xi \frac{\partial \Sigma_{rr}}{\partial \xi} = \frac{2}{3} \Delta \quad (2.1.19)$$

здесь $\Sigma_{rr} = \sigma_{rr}$ для квазистатического приближения или $\Sigma_{rr} = \sigma_{rr} - \rho \int a_r dr$, если рассматривается сила инерции, $a_r = (\partial v_r / \partial t) + v_r (\partial v_r / \partial r)$. Найденные Δ и σ_{rr} используются для определения составляющих напряжений $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$. Таким образом, сила инерции влияет только на напряжение, но не на распределение температуры.

**2.1.2. Примеры решений для конкретных моделей материалов. Оди-
ночная полость в бесконечном теле.** Рассмотрим радиальную деформацию сферической полости в бесконечной среде со следующими граничными условиями в актуальной конфигурации

$$\sigma_{rr} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_a \quad \text{и} \quad \sigma_{rr} \rightarrow \sigma_{rr}^{\infty} \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty$$

Здесь r_a расстояние от внутренней поверхности деформируемой полости до начала координат. При удаленном растяжении ($\sigma_{rr}^{\infty} > 0$) полость расширяется, при удаленном сжатии ($\sigma_{rr}^{\infty} < 0$) полость сжимается. В первом случае, когда внешняя нагрузка достигает критического значения $\sigma_{rr}^{\infty} = \sigma_{cr}^+$, процесс

становится стационарным, полость неограниченно расширяется под действием постоянной внешней нагрузки [56–58, 72], что влечет за собой разрушение материала. Параметр нагрузки $\omega \rightarrow -r_a$ соответствует этому случаю. Во втором случае при внешней нагрузке $\sigma_{rr}^{\infty} = \sigma_{cr}^-$ полость полностью закрывается ($r_a = 0$ при параметре нагружения $\omega = r_0$). Отметим, что при изотермической деформации полное закрытие полости не происходит при конечном значении внешней нагрузки. Далее мы будем рассматривать именно эти предельные состояния. Условия на упруго-пластической границе $r = r_{ep}$: $q(r_{ep}) = 0$, $T(r_{ep}) = T_0$.

Линейный термопластичный материал без деформационного упрочнения. Мы используем условие текучести [73]

$$f = \left[(J_2)^{3/2} - (3\sqrt{3}/2)\alpha J_3 \right]^{1/3} - \tau_y = 0 \quad (2.1.20)$$

Здесь τ_y есть предел текучести материала на сдвиг; параметр $\alpha \in (-1, 1)$ описывает асимметрию растяжения – сжатия при текучести, $\alpha = (\sigma_t^3 - \sigma_c^3)(\sigma_t^3 + \sigma_c^3)^{-1}$, где σ_t – предел текучести при одноосном растяжении, σ_c – предел текучести при одноосном сжатии; $\alpha = 0$ соответствует материалу Мизеса. Пусть предел текучести линейно зависит от температуры

$$\tau_y(\tilde{T}) = \tau_{y0} \tilde{T}, \quad \tilde{T} = (T_g - T)(T_g - T_0)^{-1} \quad (2.1.21)$$

где τ_{y0} – предел текучести на сдвиг при температуре $T = T_0$, предел текучести равен нулю при температуре T_g . Предполагается, что параметр α не зависит от температуры и накопленной пластической деформации; также предполагается, что вся пластическая работа превращается в тепло, а значит $\beta = 1$.

Примем упругий потенциал, основанный на логарифмической деформации Генки [74] $\Psi^h = -2\mu I_2^{h^e}$. Для указанной модели $\psi_2^h = \partial \Psi^h / \partial I_2^{h^e} = -2\mu$,

$\psi_3^h = \partial \Psi^h / \partial I_3^h = 0$. Предполагается, что параметр упругости (модуль сдвига) μ не зависит от температуры, $\mu(\tilde{T}) = \mu_0 = \text{const}$, поскольку влияние температуры на предел текучести материала намного более значимо, чем влияние температуры на упругие свойства [75, 76]. Согласно (2.1.11b)

$$\ln c_{\theta\theta}^e = \Delta / (3\mu_0) \quad (2.1.22)$$

В области пластической деформации согласно (2.1.8) и (2.1.20) уравнение (2.1.9) имеет следующий вид:

$$\Delta = \frac{\tau_y \sqrt{3}}{\delta(1-\delta\alpha)^{1/3}} \quad (2.1.23)$$

Интегрирование уравнения (2.1.17) с $q(T_0) = 0$ приводит к

$$\delta q = -\frac{2}{3} B \ln \tilde{T}, \quad B = \delta(1-\delta\alpha)^{1/3} \frac{\sqrt{3} \rho C (T_g - T_0)}{2 \tau_{y0}} \quad (2.1.24)$$

и распределение температуры (2.1.18) с учетом (2.1.21)–(2.1.24) имеет вид

$$A\tilde{T} - B \ln \tilde{T} = \ln(1 + \xi), \quad A = \frac{\sqrt{3} \tau_{y0}}{2 \mu_0} \frac{1}{\delta(1-\delta\alpha)^{1/3}} \quad (2.1.25)$$

Здесь полагается, что $\beta_{TQ} = 1$, то есть вся пластическая работа переходит в тепло.

Из (2.1.25), в частности, следует, что при полном закрытии сферической полости при сжатии температура в начале координат $r = 0$ становится равной T_g . Для установившегося расширения полости ($\omega \rightarrow -r_a$) температура внутренней поверхности равна T_g .

Из (2.1.13), (2.1.14), (2.1.21)–(2.1.23) и (2.1.25) следует, что скорость пластической диссипации при $T = T_g$ есть

$$\text{tr}(\mathbf{D}^p \boldsymbol{\sigma}) \Big|_{\tilde{T}=0} = \frac{4AB\mu_0}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \lim_{\tilde{T} \rightarrow 0} \frac{e^{A\tilde{T}} \tilde{T}^{1-B} - \tilde{T}}{B - A\tilde{T}} = \frac{4A\mu_0}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \lim_{\tilde{T} \rightarrow 0} \tilde{T}^{1-B}$$

Тогда источниковый член в уравнении Фурье – Кирхгофа (2.1.5) стремится к бесконечности при $r \rightarrow 0$ при сжатии полости, если $B > 1$, т.е. $(1 - \alpha)^{1/3} (\sqrt{3}/2) (\rho C / \tau_{y0}) (T_g - T_0) > 1$. По этой причине численный анализ этой проблемы может быть довольно трудным.

На рисунках 2.1.1 и 2.1.2 показано распределение температуры в области пластического течения (в упругой зоне рост температуры равен нулю, так как принято адиабатическое приближение) для различных значений параметра асимметрии α . Были использованы следующие комплексы параметров материалов $\rho C (\tau_{y0})^{-1} = 0.02 (\text{°C})^{-1}$, $\tau_{y0} / \mu_0 = 0.1$ и значения характеристических температур $T_0 = 20 \text{ °C}$, $T_g = 120 \text{ °C}$ и модуля сдвига $\mu_0 = 750 \text{ МПа}$. Значение параметра α существенно влияет на распределение температуры для сжатия полости, а также на размер пластической области, но если только $\alpha > 0$. Однако для большинства материалов предел текучести при сжатии выше, чем предел текучести при растяжении, и, следовательно $\alpha < 0$. В задаче о расширении полости ситуация обратная, а именно параметр α существенно влияет на процесс, если $\alpha > 0$.

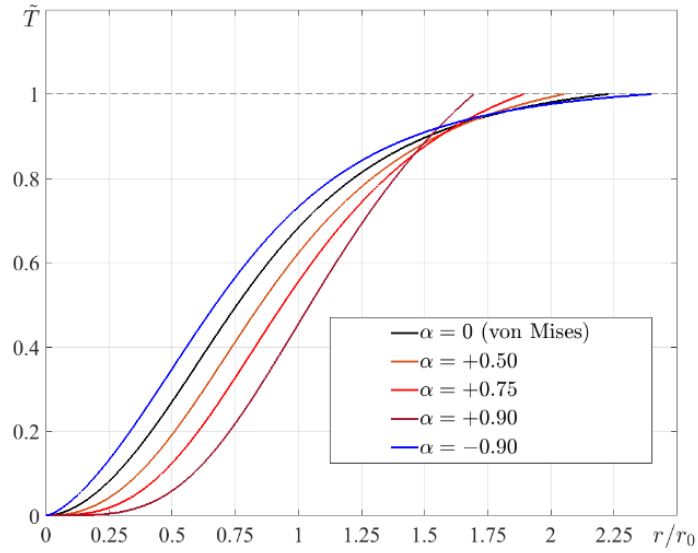


Рисунок 2.1.1 – Безразмерная температура $\tilde{T} = (T_g - T)(T_g - T_0)^{-1}$ в пластической области в момент, когда сферическая полость начальным радиусом r_0 полностью закроется при сжатии

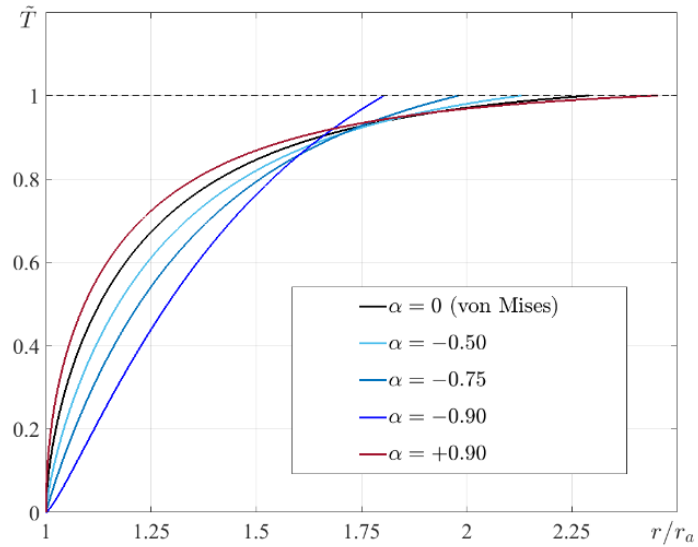


Рисунок 2.1.2 – Безразмерная температура $\tilde{T} = (T_g - T)(T_g - T_0)^{-1}$ в пластической области при установившемся расширении полости (r_a актуальный радиус полости)

В упругой области $\Delta = 3\mu_0 \ln c_{\theta\theta}^e = 3\mu_0 \ln c_{\theta\theta} = 2\mu_0 \ln(1 + \xi)$, радиальное напряжение определяется из уравнения равновесия (2.1.19)

$$\xi \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \xi} = \frac{4}{3} \mu_0 \ln(1 + \xi), \quad \frac{\sigma_{rr}}{\mu_0} = \frac{\sigma_{rr}^\infty}{\mu_0} - \frac{4}{3} \text{Li}_2(-\xi) \quad (2.1.26)$$

Здесь $\text{Li}_2(z) = -\int_0^z \tau^{-1} \ln(1 - \tau) d\tau$ есть дилогарифм.

В пластической области уравнение равновесия (2.1.19) с учетом (2.1.21), (2.1.23), (2.1.25) принимает вид

$$\xi \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \xi} = \xi \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \tilde{T}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} = \tilde{T} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \tilde{T}} \frac{1 - e^{-A\tilde{T}} \tilde{T}^B}{A\tilde{T} - B} = \frac{4\mu_0 A}{3} \tilde{T}$$

и поскольку поверхность полости свободна от напряжений, радиальное напряжение есть

$$\frac{\sigma_{rr}}{\mu_0} = \frac{4A}{3} \int_{\tilde{T}(r_a)}^{\tilde{T}} \frac{A\tau - B}{1 - e^{-A\tau} \tau^B} d\tau \quad (2.1.27)$$

Используя условие непрерывности радиального напряжения на упругопластической границе, из (2.1.26) и (2.1.27) можно определить критические значения радиального напряжения на бесконечном расстоянии от полости:

$$\frac{\sigma_{cr}^+}{\mu_0}, \frac{\sigma_{cr}^-}{\mu_0} = \frac{4}{3} \text{Li}_2(1 - e^A) + \frac{4A}{3} \int_0^1 \frac{A\tau - B}{1 - e^{-A\tau} \tau^B} d\tau \quad (2.1.28)$$

Величины σ_{cr}^+ и σ_{cr}^- в (2.1.28) различаются знаком параметров A и B (опять же, $A < 0$, $B < 0$ для расширения полости и $A > 0$, $B > 0$ для сжатия полости). При этом учитывается, что согласно (2.1.25) значение автомодельной переменной $\xi_{ep} = e^A - 1$ соответствует упругопластической границе, а также $\tilde{T}(r_a) = 0$ для установившейся кавитации и полностью закрытой полости.

Для сравнения мы приводим решение для стационарного расширения полости в изотермическом приближении. В области пластической деформации $\sigma_{rr}/\mu_0 = 4A \ln(r_a/r)$. Положение упругопластической границы определя-

ется как $r_{ep} = -\omega(1-e^A)^{-1/3} = r_a(1-e^A)^{-1/3}$ и не отличается от результата для линейного температурно разупрочняющегося материала. Радиальное напряжение на упругопластической границе есть $\sigma_{rr}/\mu_0 = 4/3 A \ln(1-e^A)$. В области упругой деформации $\sigma_{rr}/\mu_0 = \sigma_{cr}^+/\mu_0 - 4/3 \text{Li}_2(-\xi)$. Значение σ_{cr}^+ определяется из непрерывности σ_{rr} на упругопластической границе: $\sigma_{cr}^+/\mu_0 = 4/3 \text{Li}_2(1-e^A) + 4/3 A \ln(1-e^A)$. Это значение отличается от (2.1.28) последним членом. Далее, используя известное равенство, можно сделать вывод

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{cr}^+}{\mu_0} &= \frac{4}{3} \text{Li}_2(1-e^A) + \frac{4}{3} A \ln(1-e^A) = \\ &= \frac{4}{3} \text{Li}_2(1) - \frac{4}{3} \text{Li}_2(e^A) = \frac{4A}{3} \int_0^1 \ln(1-e^{A\tau}) d\tau \end{aligned}$$

Последнее выражение с $A = -(\sqrt{3}\tau_{y0})/(2\mu_0)$ (для условия текучести Мизеса) совпадает с аналитическим решением [56] для критической нагрузки при кавитации в несжимаемом упруго-пластическом неупрочняющемся теле.

На рис. 2.1.3 показана зависимость критической нагрузки на бесконечном расстоянии от полости σ_{cr}^+ и $|\sigma_{cr}^-|$ от параметра асимметрии растяжения – сжатия α . Величины этой нагрузки довольно велики, сравнимы по модулю сдвига материала. Нагрузка $|\sigma_{cr}^-|$, необходимая для полного закрытия полости, выше, чем нагрузка для установившегося расширения полости σ_{cr}^+ , почти при всех значениях α . Рост температуры материала, вызванный пластической диссипацией, сильно влияет на величину нагрузки σ_{cr}^+ .

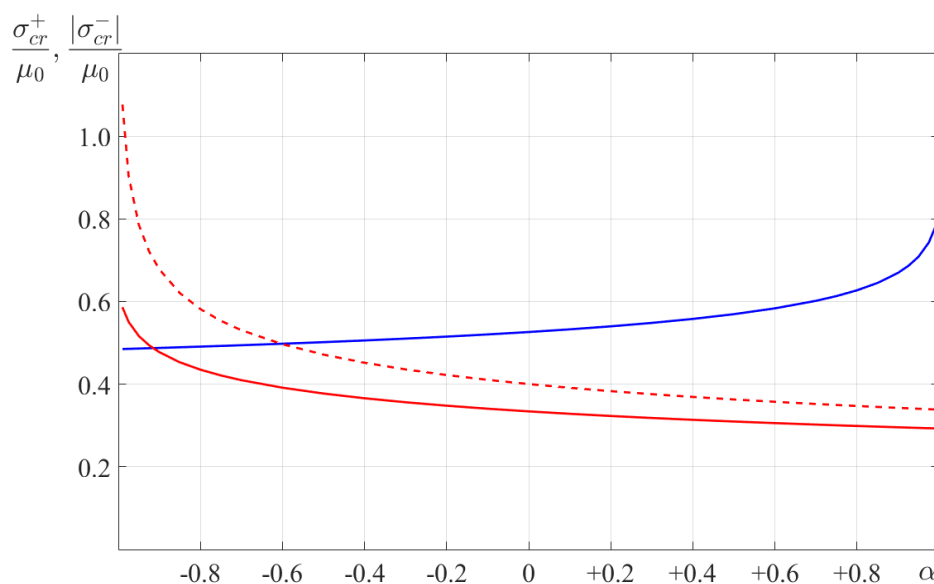


Рисунок 2.1.3 – Безразмерные критические нагрузки σ_{cr}^+ (красная линия) и $|\sigma_{cr}^-|$ (синяя линия) в зависимости от параметра материала α ; штриховая линия соответствует изотермическому приближению для σ_{cr}^+

На рисунке 2.1.4 показаны напряжения в пластической и упругой областях для модели Мизеса. Напряженное состояние на бесконечном расстоянии от полости близко к гидростатическому нагружению (растяжению или сжатию). Все компоненты напряжения отрицательны для сжатия полости и положительны для расширения полости.

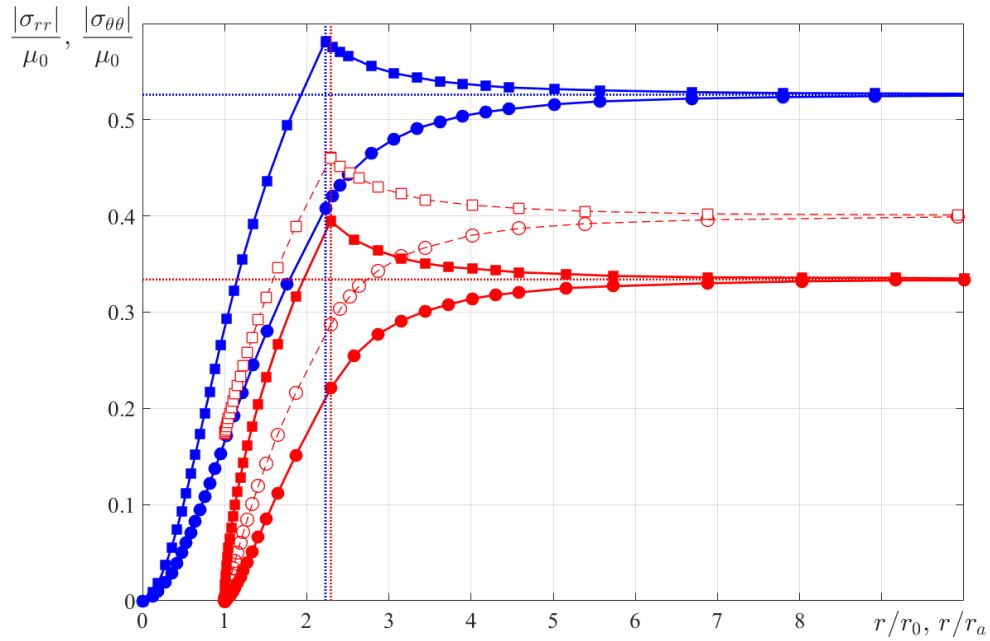


Рисунок 2.1.4 – Распределение напряжений (модель Мизеса): красная линия соответствует установившейся кавитации при растяжении материала, голубая линия соответствует полностью закрывшейся полости при сжатии; штриховая линия соответствует изотермическому приближению; квадратный маркер означает кривые $|\sigma_{\theta\theta}/\mu_0|$, круговой маркер означает кривые $|\sigma_{rr}/\mu_0|$; вертикальные линии соответствуют позиции упруго-пластической границы

Линейное температурное разупрочнение с комбинацией линейного деформационного упрочнения и идеальной (без упрочнения) пластичности в качестве предельного состояния. Мы используем ту же модель материала, что и в предыдущем подразделе, но теперь для предела текучести при сдвиге вместо (2.1.21) мы принимаем следующее

$$\tau_y(\tilde{T}, q) = \begin{cases} \tau_{y0}(1 + \chi q)\tilde{T}, & q \leq q_* \\ \tau_{y0}(1 + \chi q_*)\tilde{T}, & q \geq q_* \end{cases} \quad (2.1.29)$$

где q_* есть уровень накопленной пластической деформации, требующийся для перехода материала в идеально-пластическое состояние, χ есть безразмерный параметр упрочнения (наклон кривой "напряжение – деформация"). Похожая кусочная модель использовалась для анализа процессов интенсивной пластической деформации в [77, 78].

В этом случае пластическая область состоит из двух подобластей: в той, которая прилегает к внутренней поверхности полости, поведение материала идеально пластическое без деформационного упрочнения, во второй подобласти материал демонстрирует линейное деформационное упрочнение.

Для рассматриваемой модели (2.1.29) в подобласти упрочнения уравнение (2.1.17) с $q(T_0)=0$ интегрируется в замкнутой форме с учетом (2.1.23):

$$\frac{\partial q}{\partial \tilde{T}}(1 + \chi q) = -\frac{2}{3} \frac{\delta B}{\tilde{T}}, \quad (1 + \chi q)^2 = 1 - \frac{4\delta\chi B}{3} \ln \tilde{T}, \quad \tilde{T} \geq \tilde{T}_* \quad (2.1.30)$$

Параметр B определяется идентично (2.1.24); температура $\tilde{T}_*$ на границе между подобластями определяется выражением

$$\ln \tilde{T}_* = -\frac{3q_*(2 + \chi q_*)}{4\delta B}$$

Тогда с учетом (2.1.22), (2.1.23) и (2.1.29) уравнение (2.1.18) задает распределение температуры в подобласти упрочнения

$$\left(\frac{3}{2} \frac{\delta}{\chi} + A\tilde{T} \right) \left(1 - \frac{4\delta\chi B}{3} \ln \tilde{T} \right)^{1/2} - \frac{3}{2} \frac{\delta}{\chi} = \ln(1 + \xi), \quad \tilde{T} \geq \tilde{T}_*, \quad (2.1.31)$$

параметр A определяется идентично (2.1.25).

В подобласти идеального течения решение уравнения (2.1.17) с граничным условием $q(\tilde{T}_*) = q_*$ есть

$$q = q_* + \frac{2}{3} \delta B_\chi \ln \frac{\tilde{T}_*}{\tilde{T}}, \quad \tilde{T} \leq \tilde{T}_*$$

и распределение температуры согласно (2.1.18)

$$A_\chi \tilde{T} + B_\chi \ln \frac{\tilde{T}_*}{\tilde{T}} = \ln(1 + \xi) - \frac{3}{2} \delta q_*, \quad \tilde{T} \leq \tilde{T}_*$$

где $A_\chi = A(1 + \chi q_*)$, $B_\chi = B(1 + \chi q_*)^{-1}$.

Тогда переходя к переменной $\tilde{T}$ в уравнении равновесия (2.1.19) как это сделано в предыдущем подразделе, получим распределение радиального напряжения в подобласти идеального течения:

$$\frac{\sigma_{rr}}{\mu_0} = \frac{4A_\chi}{3} \int_{\tilde{T}(r_a)}^{\tilde{T}} \frac{A_\chi \tau - B_\chi}{1 - e^{-A_\chi \tau - (3/2)\delta q_*} \left(\tau/\tilde{T}_*\right)^{B_\chi}} d\tau, \quad \tilde{T} \leq \tilde{T}_*$$

В подобласти упрочнения уравнение (2.1.19) с учетом (2.1.23), (2.1.29), (2.1.30), (2.1.31) определяет σ_{rr} в виде

$$\frac{\sigma_{rr}}{\mu_0} = \frac{4A_\chi}{3} \int_{\tilde{T}(r_a)}^{\tilde{T}_*} \frac{A_\chi \tau - B_\chi}{1 - e^{-A_\chi \tau - (3/2)\delta q_*} \left(\tau/\tilde{T}_*\right)^{B_\chi}} d\tau + \frac{4A}{3} \int_{\tilde{T}_*}^{\tilde{T}} \frac{N(\tau)A\tau - B}{1 - e^{M(\tau)}} d\tau, \quad \tilde{T} \geq \tilde{T}_*$$

$$N(\tau) = 1 - \frac{2\delta\chi B}{3}(1 + 2\ln \tau),$$

$$M(\tau) = \frac{3}{2} \frac{\delta}{\chi} - \left(\frac{3}{2} \frac{\delta}{\chi} + A\tau \right) \left(1 - \frac{4\delta\chi B}{3} \ln \tau \right)^{1/2}$$

В упругой области согласно (2.1.26)

$$\frac{\sigma_{rr}}{\mu_0} = \frac{\sigma_{rr}^\infty}{\mu_0} - \frac{4}{3} \text{Li}_2(-\xi)$$

При этом, согласно (2.1.31), значение автомодельной переменной $\xi_{ep} = e^A - 1$ соответствует упругопластической границе, как и в предыдущем подразделе. Опять же $\tilde{T}(r_a) = 0$ для установившейся кавитации и для полностью закрытой полости. Непрерывность σ_{rr} на упругопластической границе позволяет найти

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{cr}^+}{\mu_0}, \frac{\sigma_{cr}^-}{\mu_0} &= \frac{4}{3} \text{Li}_2(1 - e^A) + \frac{4A}{3} \int_{\tilde{T}_*}^1 \frac{N(\tau)A\tau - B}{1 - e^{M(\tau)}} d\tau + \\ &+ \frac{4A_\chi}{3} \int_0^{\tilde{T}_*} \frac{(A_\chi \tau - B_\chi) d\tau}{1 - e^{-A_\chi \tau - (3/2)\delta q_*} \left(\tau/\tilde{T}_*\right)^{B_\chi}} \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

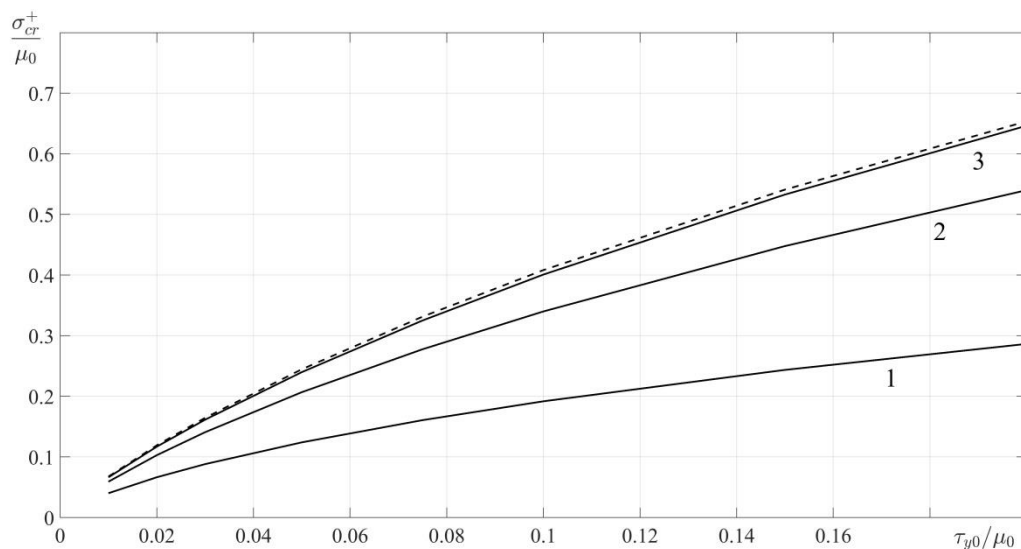
Для линейно упрочняемого материала без насыщения в формуле (2.1.32) нужно принять $\tilde{T}_* = 0$ и отбросить последний член.

В [72] аналитическое выражение для критического напряжения кавитации в несжимаемом упругопластическом твердом теле с линейным упрочнением выражается следующим образом:

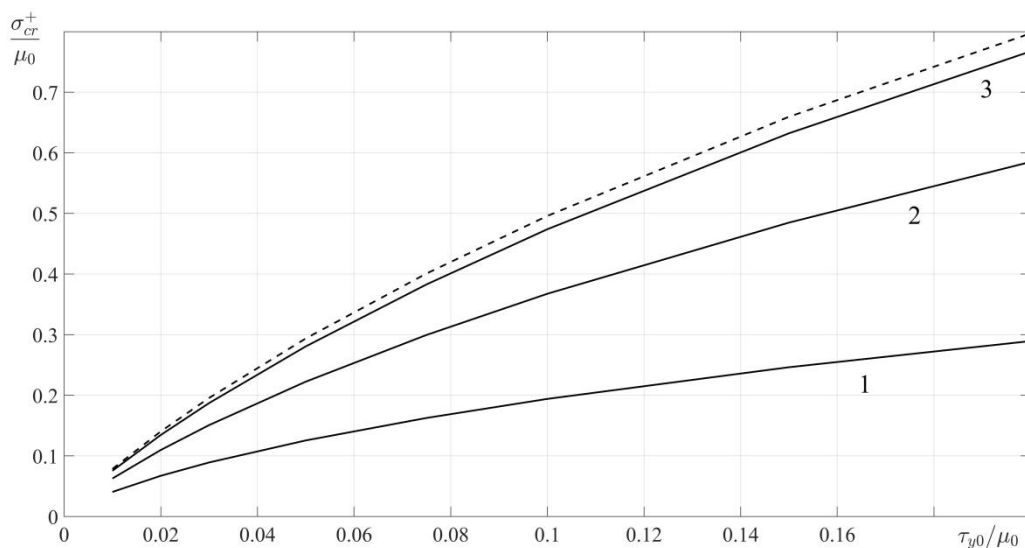
$$\frac{\sigma_{cr}^+}{\mu_0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\tau_{y0}}{\mu_0} \left(1 + \frac{\chi}{\sqrt{3}} \frac{\tau_{y0}}{\mu_0} \right)^{-1} \left[1 + \frac{\pi^2 \chi}{9} - \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\tau_{y0}}{\mu_0} \right) \right]$$

На рис. 2.1.5 показано сравнение полученного решения для линейного упрочнения без насыщения (уравнение (2.1.32) с $\tilde{T}_* = 0$) с решением [72]. По мере увеличения параметра тепловой связности $|B|$ представленное решение стремится к решению [72] для нечувствительного к температуре материала Мизеса. Из рис. 2.1.5 видно, что нагрев материала, вызванный пластической диссипацией, может иметь сильное влияние на процесс кавитации, возможно, даже более сильное, чем эффект деформационного упрочнения.

Также в упомянутой статье была приведена оценка радиуса пластической зоны $(r_a/r_{ep})^3 = (\sqrt{3}\tau_{y0})/(2\mu_0)$. Представленное решение дает оценку $(r_a/r_{ep})^3 = 1 - e^{-(\sqrt{3}\tau_{y0})/(2\mu_0)}$. При умеренных упругих деформациях разница между этими результатами невелика.



а)



б)

Рисунок 2.1.5 – Критическая нагрузка для установившейся кавитации в линейно-упрочняющемся упруго-пластическом теле: а) $\chi = 0.1$, б) $\chi = 1.0$. Штриховая линия соответствует решению [72]. Цифры возле кривых соответствуют различным значениям параметра температурной связности $|B|$: 1 – 0.173, 2 – 1.73, 3 – 17.3

На рис. 2.1.6 представлена зависимость критических нагрузок σ_{cr}^+ и $|\sigma_{cr}^-|$ на бесконечном расстоянии от полости от параметров q_* и $\tau_{y\infty}/\tau_{y0} = 1 + \chi q_*$ закона упрочнения (2.1.29), где $\tau_{y\infty}$ – насыщенная величина

сдвигового предела текучести. Когда q_* выше определенного значения, деформационное упрочнение не оказывает большого влияния на процесс, независимо от величины $\tau_{y\infty}/\tau_{y0}$. Это объясняется тем, что накопленная пластическая деформация достигает больших значений в узко локализованной области вблизи поверхности полости (рис. 2.1.7). Графики $q(r)$ очень слабо зависят от параметров закона упрочнения q_* и χ . Рис. 2.1.7 соответствует значениям $q_* = 1$ и $\chi = 1$.

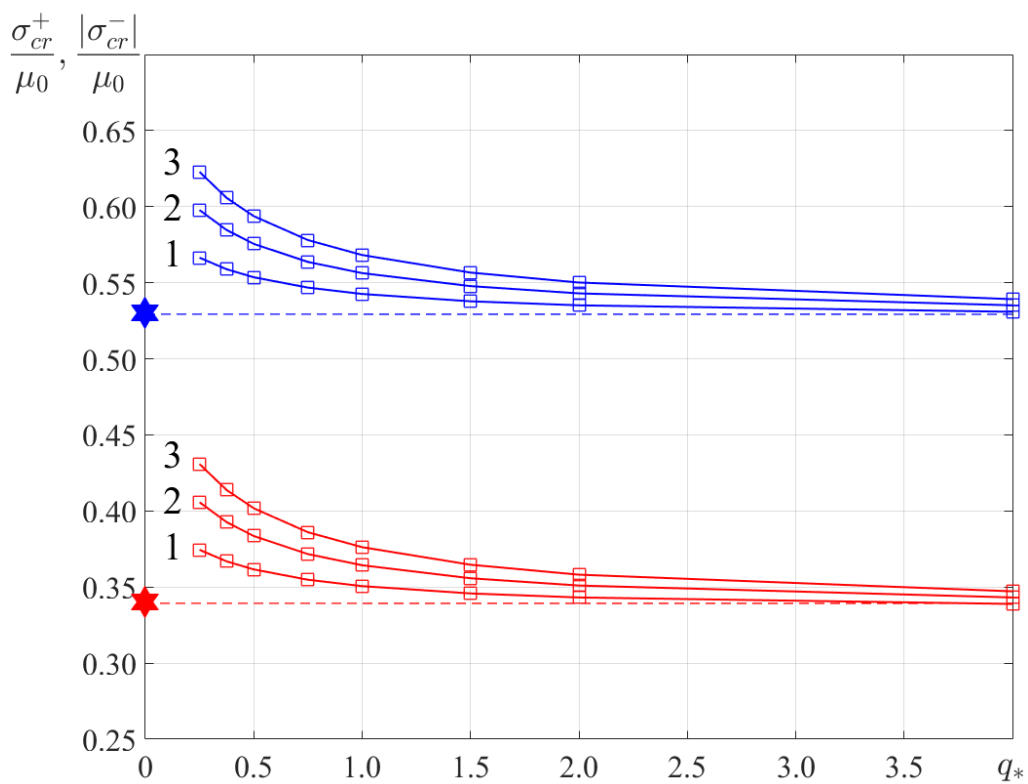


Рисунок 2.1.6 – Эффект деформационного упрочнения: безразмерные критические нагрузки σ_{cr}^+ (красная линия) и $|\sigma_{cr}^-|$ (голубая линия) для материала Мизеса с линейным упрочнением и насыщением предела текучести в зависимости от уровня накопленной пластической деформации q_* , требующегося для перехода к идеальной пластичности. Цифры возле кривых означают различные значения параметра $\tau_{y\infty}/\tau_{y0} = 1 + \chi q_*$: 1 – 1.5, 2 – 2.0, 3 – 2.5. Звездочки на оси ординат обозначают значения, соответствующие модели без деформационного упрочнения

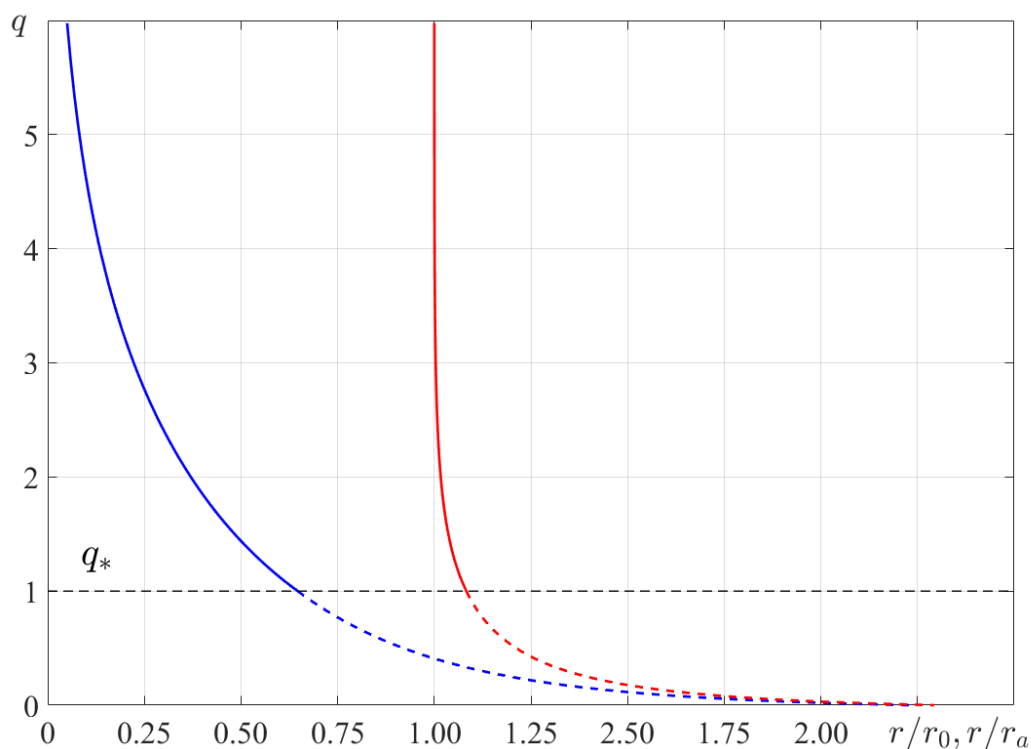


Рисунок 2.1.7 – Накопленная пластическая деформация: голубой цвет соответствует полностью закрывшейся полости при сжатии (ось абсцисс r/r_0), красный цвет соответствует установившемуся расширению полости (ось абсцисс r/r_a); сплошная линия соответствует подобласти идеального течения, штриховая линия соответствует подобласти пластического течения с упрочнением

Выводы к разделу 2.1. Представлено решение задачи радиального упругопластического деформирования сферического слоя с учетом нагрева материала за счет пластической диссипации. Рассмотрен только упруго нежимаемый материал, однако результаты [58] демонстрируют, что значение коэффициента Пуассона не слишком сильно влияет на процесс кавитации. Полученное решение справедливо для любой модели температурного разупрочнения, которая описывает изменение пластических и упругих характеристик материала при изменении температуры; а также для произвольного изотропного деформационного упрочнения в том смысле, что задача сводится к интегрированию нелинейного ОДУ первого порядка (2.1.17) для накопленной пластической деформации, а равенство (2.1.18) задает распределение температуры. Напряжение затем можно найти после вычисления интеграла в

формуле (2.1.19). Решение для уравнения (2.1.17) в общем случае можно получить численно. В частных случаях, когда предел текучести является функцией температуры и накопленной пластической деформации формы $\tau_y(T, q) = \tau_{yT}(T)\tau_{yq}(q)$, а остальные параметры материала, включенные в условие текучести (2.1.4), являются постоянными, уравнение (2.1.17) есть уравнение с разделяющимися переменными. Приведены два примера, иллюстрирующие получившееся универсальное решение. В первом рассматривается модель только температурного разупрочнения, во втором – модель температурного разупрочнения и линейного деформационного упрочнения с насыщением напряжения текучести. Обе модели также учитывают асимметрию растяжения – сжатия при текучести. Рассмотрены две краевые задачи: задача о полном закрытии полости при сжатии и задача о стационарном расширении полости при удаленном растяжении. В обеих задачах мы определяем нагрузку на бесконечном расстоянии от полости по формулам (2.1.28) и (2.1.32). В задаче сжатия полости этот результат можно интерпретировать как необходимое внешнее давление для полного устранения единичных сферических дефектов в материале. В задаче о расширении полости результирующая нагрузка представляет собой теоретическую прочность материала при удаленном гидростатическом растяжении. То есть предельную нагрузку, при достижении которой микроскопические дефекты материала начинают бесконечно расти.

2.2. Новая модель расширяющейся полости для описания конической индентации и её приложение для определения внутреннего параметра градиентной теории пластичности полимерных материалов

Индентация различными типами инденторов является широко используемым методом, позволяющим определять упругие и пластические свойства материалов [79–81]. Возможность получения данных даже для небольших объемов испытываемого материала делает этот метод очень важным для тестирования свойств покрытий и микродеталей.

Модели расширяющейся полости (Expanding Cavity Model, ECM) широко используются для аналитического описания конической индентации [43, 82]. Эти модели привлекательны тем, что они часто обеспечивают замкнутые зависимости между твердостью (нагрузкой на индентор, измеренной в эксперименте) и пластическими и упругими параметрами материала. ЕСМ на основе различных моделей материалов были предложены в [46, 83–86]. При этом общепринято, что модели конического индентирования также подходят для инденторов Виккерса и Берковича, если угол полуконуса равен $\alpha = 70.3^\circ$.

По-видимому, впервые аналогия между характером деформации при вдавливании индентора и при расширении одиночной полости (сферической для конических инденторов и цилиндрической для плоскоклиновых инденторов) в бесконечном объеме материала была использована в [42]. В этом исследовании было получено следующее выражение для твердости H (здесь оно записано для несжимаемого материала):

$$\frac{H}{\sigma_y} = \frac{2}{3} \left[1 + \ln \left(\frac{2}{3} \frac{E}{\sigma_y} \right) \right]$$

Здесь E это упругий модуль Юнга, σ_y предел текучести материала на растяжение. Это выражение не содержит геометрических параметров индентора.

Позднее Marsh [87] использовал этот анзац для описания кривых твердости материалов. В [82] ЕСМ была предложена в следующем виде (рис. 2.2.1, а). Предполагается, что непосредственно под индентором находится полусферическая область, в которой материал гидростатически сжат. Центр этой области находится в точке O , а диаметр области равен диаметру проекции погруженной части индентора на недеформированную поверхность материала. Твердость материала полагается равной давлению в гидростатически сжатой области, которое в свою очередь совпадает с радиальным напряжением на поверхности сферической полости.

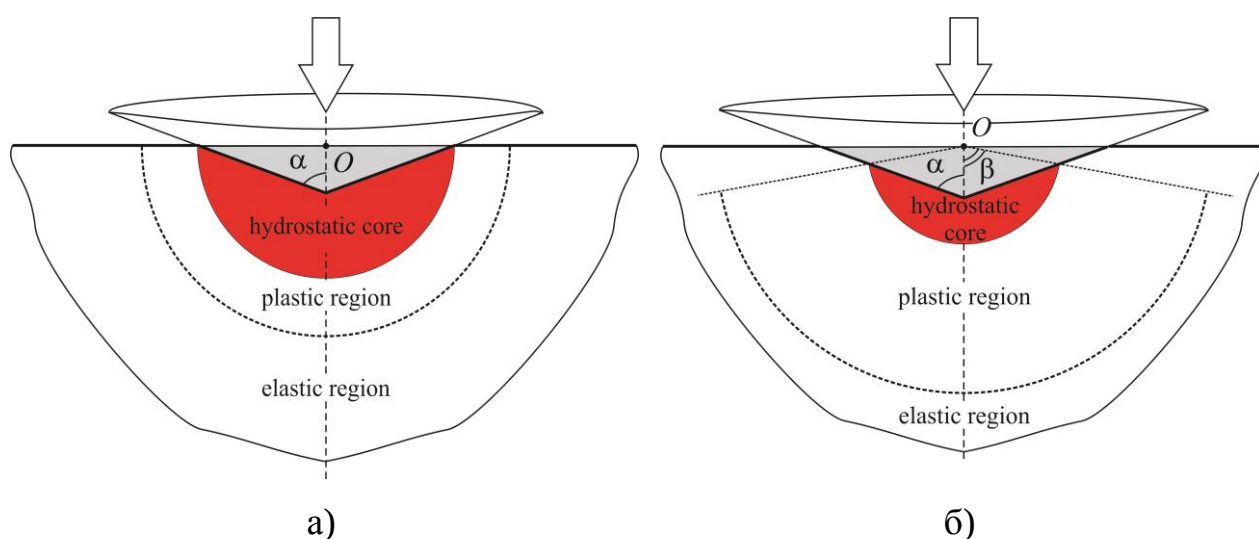


Рисунок 2.2.1 – Схема ЕСМ [82] (а) и предлагаемая модель (б)
Упруго-пластическая граница соответствует $E/\sigma_y = 25$ и $\alpha = 70.3^\circ$

Для несжимаемых материалов выражение для твердости, полученное в [82] на основе анализа Хилла [88] имеет вид

$$\frac{H}{\sigma_y} = \frac{2}{3} \left[1 + \ln \left(\frac{\cot \alpha}{3} \frac{E}{\sigma_y} \right) \right] \quad (2.2.1)$$

Позднее в [43] была предложена модификация этой модели, приводящая к выражению

$$\frac{H}{\sigma_y} = \frac{2}{3} \left[2 + \ln \left(\frac{\cot \alpha}{3} \frac{E}{\sigma_y} \right) \right] \quad (2.2.2)$$

которое лучше коррелирует с доступными экспериментальными данными. В [43], нет подробного описания того, как можно получить эту модификацию. В [46] приводится следующее объяснение: предполагается, что область материала под индентором не находится в состоянии чисто гидростатического сжатия, но среднее давление в этой области равно радиальному давлению на границе гидростатического ядра и пластически деформированного материала, а среднее эквивалентное напряжение также равно эквивалентному напряжению на границе раздела (см. также [89], где дано очень близкое выражение для твердости с аналогичными аргументами). Та же аргументация используется в [83–85].

На основе аналитического решения [51] для расширения сферической полости получена модель индентации, учитывающая упругую сжимаемость материала, а также произвольное изотропное упрочнение в пластическом диапазоне деформирования [46].

Упомянутые аналитические модели [43, 46, 82, 83, 89] основаны на классических моделях локальной пластичности материалов. В то же время размерные эффекты в пластичности являются хорошо документированным явлением, которое проявляется при индентации материалов, а также при испытаниях на микрокручение и микроизгиб [90–93]; см. также обзор по Indentation Size Effect (ISE) для полимеров [94]. Наличие значительного градиента деформации приводит к тому, что материал проявляет большую прочность, чем в условиях однородной деформации. В частности, при малой глубине индентирования (на субмикронном уровне) измеренная твердость, как правило, оказывается выше, чем при макроскопических испытаниях.

Для описания размерных (масштабных) эффектов были предложены различные градиентные модели пластичности (Strain Gradient Plasticity, SGP) начиная с работ [95, 96] (см. обзоры [97–100]). Некоторые из этих моделей

вводят дополнительные тензора напряжений (т.н. «higher-order theories»). Другие сохраняют структуру классической теории пластичности [101–103] и только различными способами включают зависящие от градиента деформации члены в условие текучести. В металлах зависимость предела текучести от градиента пластической деформации объясняется на основе концепции геометрически необходимых дислокаций (Geometrically Necessary Dislocations, GND). В полимерах подобные эффекты могут быть объяснены на основе Geometrically Necessary Kinks [104] (см. также [105]).

Известны некоторые ЕСМ, которые учитывают размерные эффекты (в большей степени для металлов) [84–86]. Эти модели основаны на той же схеме деформации, что и локальная модель идеальной пластичности [82]. Несмотря на то, что, например, в [84, 85] предлагается следовать аргументам [89] при построении ЕСМ, учитывающих неоднородность деформации, по-видимому, в этой идее есть изъян, поскольку среднее эквивалентное напряжение в полусферическом ядре под индентором не может совпадать с эквивалентным напряжением на границе ядра. В указанном ядре либо деформация однородна и градиентные эффекты должны отсутствовать, либо деформация неоднородна и тогда локальный предел текучести отличается от значения на границе ядра из-за деформационного упрочнения. Тем не менее, следует отметить, что модель [84] качественно согласуется с экспериментальными данными, хотя и дает макроскопические значения твердости несколько выше экспериментальных.

Отметим еще одну особенность ЕСМ по [82]: объем материала в гидростатически сжатом ядре заведомо не равен объему погруженной части индентора. Предполагается, что деформация материала в окрестности индентора соответствует характеру деформации при расширении сферической полости от некоторого ненулевого начального размера. Это приводит к тому, что рассчитанная величина деформации на границе ядра оказывается конечной (и при этом не слишком большой) (см., например, [48]). Градиент деформации также имеет конечное значение. Между тем, реальное значение деформации

при индентации острым индентором ограничено только точностью его изготовления; для идеально острого индентора оно стремится к бесконечности, как и градиент деформации. Такое огрубление не вносит существенной погрешности в анализ индентации металлических материалов, для которых характерны слабое деформационное упрочнение и насыщение предела текучести [25]. Для металлов ЕСМ, основанные на модели идеальной пластичности или, например, законе упрочнения Воге, достаточно точно оценивают реальные пластические свойства. Для многих полимеров насыщение предела текучести экспериментально не наблюдается; эти материалы подчиняются степенному закону упрочнения с гораздо большим показателем упрочнения, чем металлы; кроме того, полимерные материалы часто демонстрируют деформационное разупрочнение на некоторых участках кривой «напряжение-деформация» [48, 106–109]. По этим причинам здесь предлагается ЕСМ, которая включает в т.ч. и немонотонное деформационное упрочнение.

Основная цель настоящего раздела – предложить ЕСМ, которая удовлетворительно бы описывала экспериментальные данные макроиндентации и могла бы быть обобщена на случаи, в которых учитываются градиентные эффекты.

В первом подразделе описана предлагаемая ЕСМ, паттерн деформации которой содержит две области пластической деформации – одну, в которой преобладает радиальная деформация, и другую, прилегающую к свободной поверхности материала, в которой преобладают сдвиг и скольжение относительно поверхности индентора. Во втором подразделе описывается модель одиночной полости, которая под действием внутреннего давления расширяется в бесконечном объеме материала с пределом текучести, зависящим от градиента пластической деформации, а также с произвольным изотропным деформационным упрочнением. Эта модель применяется для области радиальной деформации. В третьем подразделе строится статически допустимое решение в области сдвига. В четвертом подразделе формулируется основной результат в виде формул для твердости и сравниваются результаты, получен-

ные с помощью предлагаемой модели, с результатами других моделей [42, 43, 82, 110], а также с экспериментальными данными [87, 111] о твердости по Виккерсу различных предварительно упрочненных материалов. В пятом подразделе описана немонотонная модель упрочнения для двух полимерных материалов, а именно полиметилметакрилата (РММА) и поликарбоната (РС); затем в шестом подразделе сравниваются численные результаты предлагаемой модели с экспериментальными данными [112] о зависимости универсальной твердости РС и РММА от глубины инdentации по Берковичу. В шестом подразделе также приведено сравнение прогнозных макроскопических значений твердости для РС и РММА при больших глубинах инdentации (когда градиентные эффекты уже не играют особой роли), полученных с помощью предлагаемой модели, с прогнозными значениями модели [46] и модели, созданной для описания баллистического отклика при глубоком проникновении [113], которая учитывает повреждение материала. Обе упомянутые модели, а также модель, представленная здесь, могут учитывать произвольное изотропное упрочнение материалов. Прогнозируемые значения макроскопической твердости сравниваются с экспериментальными данными [112] (индентор Берковича) и [114] (индентор Виккерса).

2.2.1. Новая модель расширяющейся полости. На рис. 2.2.1, б показана схема предложенной модели. Также, как и в [42, 43, 82], полагается, что деформация в окрестности острия индентора преимущественно радиальная. Это острие окружено гидростатически сжатым ядром. Однако, в отличие от [82], мы не требуем, чтобы это ядро покрывало всю погруженную часть индентора. Вместо этого мы требуем, чтобы объем материала, вытесненного коническим индентором, был равен объему ядра. Паттерн деформации в этом случае состоит из двух областей: в области I (см. рис. 2.2.2) деформация радиальная; в области II преобладает сдвиг материала относительно поверхности индентора. Наличие такой области, в которой движение материала не является строго радиальным, видно из результатов моделирования методом ко-

нечных элементов, например в [115, 116], и может быть объяснено влиянием свободной поверхности. Угол β определяется из условия равенства объемов следующим образом.

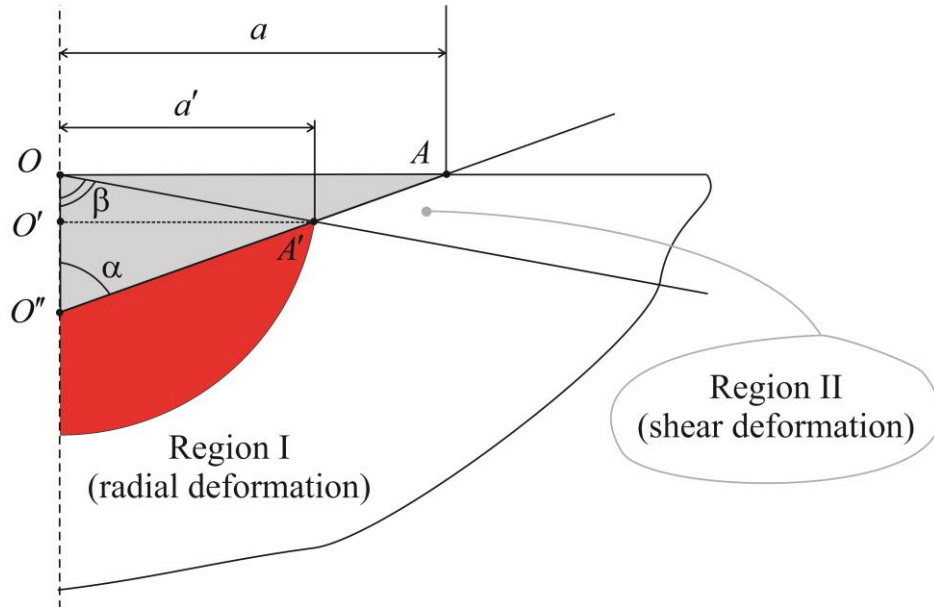


Рисунок 2.2.2 – Предлагаемая ЕСМ

Объем материала, вытесненного коническим индентором, равен $(\pi/3)OO''a^2$, где $OO'' = a \cot \alpha$ есть глубина индентации. Объем ядра равен разности между объемом сферического сектора с углом развертки 2β и общим объемом двух конусов (один с высотой OO' , второй с высотой $O''O'$; радиус основания обоих равен $O'A' = a'$). Приравнивая эти объемы и учитывая, что $OA' = a'/\sin \beta$, имеем:

$$(\pi/3)a^3 \cot \alpha = (2\pi/3)(a'/\sin \beta)^3 (1 - \cos \beta) - (\pi/3)a'^2 a \cot \alpha$$

Следовательно

$$x^{-1}(1 + x^{-2}) = \frac{2}{\cot \alpha} \frac{1 - \cos \beta}{\sin^3 \beta}, \quad x = \frac{a'}{a} \leq 1$$

С другой стороны, имеем

$$OO''/a' = (a/a') \cot \alpha = O'O''/a' + OO'/a' = \cot \alpha + \cot \beta$$

Следовательно

$$x^{-1} = \frac{a}{a'} = 1 + \frac{\cot \beta}{\cot \alpha}$$

Объединяя уравнения выше, мы имеем

$$\cot \alpha = \frac{x}{1-x} \cot \beta, \quad \cos \beta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8 \frac{x^2(1-x)}{x^2+1}} \quad (2.2.3)$$

Эти соотношения позволяют по заданному полууглу индентора определить угол β и безразмерный параметр x (см. рис. 2.2.3). В частности, для угла $\alpha = 70.3^\circ$, который часто ассоциируется с инденторами Виккерса и Берковича, приведенные выше формулы дают $x = 0.669$, $\beta = 1.395$. Эти величины не зависят от глубины индентации, поэтому определяемая таким образом картина деформации является самоподобной.

Для радиуса сферической поверхности, ограничивающей ядро, $r = r_c(t)$ можно записать выражение

$$r_c = OA' = \frac{a'}{\sin \beta} = \frac{xa}{\sin \beta} = xOO'' \frac{\tan \alpha}{\sin \beta} = xd \frac{\tan \alpha}{\sin \beta} \quad (2.2.4)$$

где $d(t) = OO''$ есть глубина индентации.

Следовательно, эта поверхность начинает свое расширение с нулевого радиуса, $r_c(0) = 0$, как и в модели [42]. На этой поверхности пластическая деформация сингулярна, как и градиент деформации (см., например, [3]), а также сингулярна скорость пластической деформации.

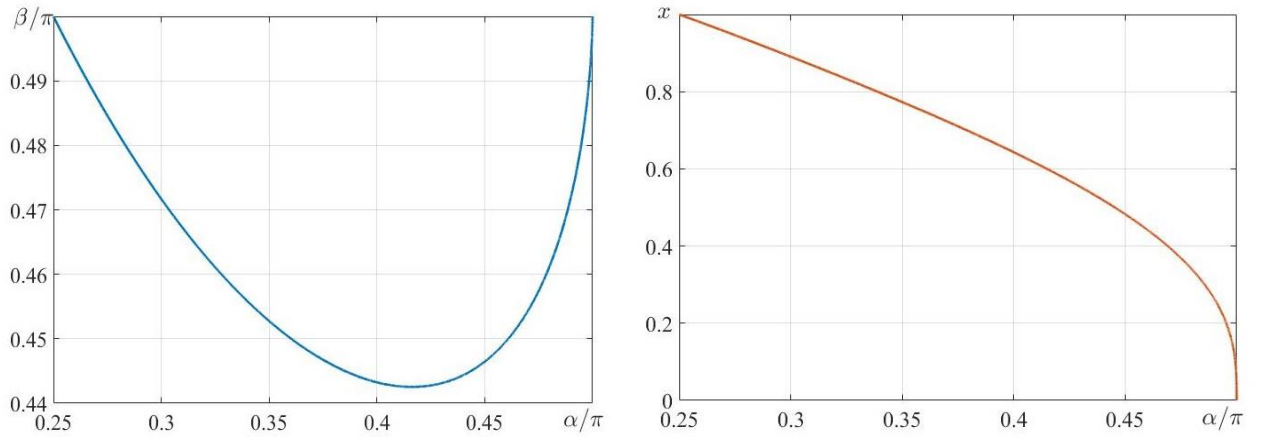


Рисунок 2.2.3 – К расчету геометрических параметров χ и β

2.2.2. Расширяющаяся полость в градиентно-зависимом изотропном деформационно упрочняющемся материале. Пусть сферическая полость с нулевым начальным радиусом расширяется под действием внутреннего давления. Положение внутренней поверхности полости в сферических координатах есть $r = r_c(t)$. В окрестности полости материал находится в состоянии пластического течения. Область пластического течения представляет собой сферический слой, окруженный областью упругой деформации.

Кинематика конечных упруго-пластических деформаций, изложенная в главе 1 для сферически симметричной задачи сильно упрощается:

$$\dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} = \dot{\mathbf{h}}^e = \mathbf{D} - \mathbf{D}^p \quad (2.2.5)$$

Определяющие упругие соотношения приняты в форме простейшей модели несжимаемого материала Генки с упругим потенциалом $\Psi = -2\mu I_2^{\mathbf{h}^e} = -(2/3)EI_2^{\mathbf{h}^e}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{h}^e} = -p\mathbf{I} + \frac{d\Psi}{dI_2^{\mathbf{h}^e}} \frac{\partial I_2^{\mathbf{h}^e}}{\partial \mathbf{h}^e} = -p\mathbf{I} - \frac{d\Psi}{dI_2^{\mathbf{h}^e}} \mathbf{h}^e = -p\mathbf{I} + \frac{2}{3}E\mathbf{h}^e \quad (2.2.6)$$

Хотя нетрудно получить решение для радиальной упругопластической деформации несжимаемого материала с произвольным упругим законом (см., например, [3]), мы используем простейшую версию гиперупругих соотноше-

ний, чтобы не усложнять представление модели. Упругая модель Генки является естественным расширением закона Гука и способна достаточно точно описывать поведение как металлических, так и полимерных материалов при умеренной деформации [117]. Здесь $E = 3\mu$ имеет тот же смысл, что и модуль Юнга в линейной теории упругости.

В области радиальной деформации мы используем обобщенное условие текучести Мизеса, которое учитывает изотропное деформационное упрочнение и градиентные эффекты простым феноменологическим способом, а также ассоциированный с ним закон пластического течения:

$$f = \sqrt{3J_2} - \sigma_y(q, \|\nabla q\|) = 0, \quad \mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\Lambda}{2\sqrt{3J_2}} \mathbf{s} = \frac{3\Lambda}{2\sigma_y} \mathbf{s} \quad (2.2.7)$$

$$\sigma_y(q, \|\nabla q\|) = \sigma_{y0} \sqrt{h^2(q) + l_0 \|\nabla q\|}$$

где $J_2 = (1/2) \text{tr} \mathbf{s}^2$ квадратичный инвариант девиатора напряжений $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{I} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} / 3$; $\sigma_y(q, \|\nabla q\|)$ есть предел текучести на растяжение, зависящий от накопленной пластической деформации и градиента пластической деформации, $\|\cdot\|$ обозначает норму вектора; q есть эквивалентная (накопленная) пластическая деформация, определяемая уравнением $\dot{q} = \sqrt{(2/3) \text{tr}(\mathbf{D}^p)^2} = (\Lambda / \sigma_y) \sqrt{(3/2) \text{tr} \mathbf{s}^2} = \Lambda$. Это выражение также определяет скалярный пластический множитель $\Lambda > 0$. Функция $h(q)$ описывает изотропное деформационное упрочнение в условиях однородной деформации; l_0 есть параметр градиентной теории пластичности – внутренний параметр масштаба длины (intrinsic length scale factor).

Уравнение равновесия в условиях сферической симметрии имеет одну нетривиальную компоненту $r \partial \sigma_{rr} / \partial r = 2(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})$.

Определяющее уравнение. Радиальная картина течения значительно упрощает определяющие уравнения. Ненулевые компоненты тензора деформации Генки имеют вид

$$h_{rr} = -\ln(1 - \partial u_r / \partial r), \quad h_{\theta\theta} = h_{\varphi\varphi} = -\ln(1 - u_r / r)$$

Из условия несжимаемости $\text{tr} \mathbf{h} = 0$ и граничного условия $u_r(r_c) = r_c$ (т.е. начальный радиус полости равен нулю) следует, что $u_r = r - (r^3 - r_c^3)^{1/3}$. Введем безразмерную координату $\tilde{r} = r/r_c \geq 1$. Тогда,

$$h_{rr} = \ln(1 - \tilde{r}^{-3})^{2/3}, \quad h_{\theta\theta} = h_{\varphi\varphi} = \ln(1 - \tilde{r}^{-3})^{-1/3}$$

Радиальная компонента скорости имеет выражение

$$v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} \left(1 - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^{-1} = \tilde{r}^{-2} \frac{dr_c}{dt} \quad (2.2.8)$$

Компоненты тензора скорости деформации:

$$D_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = -2 \frac{1}{r_c} \frac{dr_c}{dt} \tilde{r}^{-3}, \quad D_{\theta\theta} = D_{\varphi\varphi} = \frac{v_r}{r} = \frac{1}{r_c} \frac{dr_c}{dt} \tilde{r}^{-3} \quad (2.2.9)$$

Для сферически симметричного напряженного состояния $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$ и компоненты девиатора напряжений есть

$$s_{rr} = 2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/3, \quad s_{\theta\theta} = s_{\varphi\varphi} = -(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/3$$

Выражение для второго инварианта девиатора напряжений имеет вид

$$J_2 = (\text{tr} \mathbf{s}^2 - \text{tr}^2 \mathbf{s})/2 = \text{tr} \mathbf{s}^2/2 = (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2/3$$

Тогда из условия текучести (2.2.7) можно выразить

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\sigma_y \quad (2.2.10)$$

Учитывая, что $\text{tr} \mathbf{h}^e = 0$, выполняются следующие равенства для компонент тензора упругих деформаций в области пластического течения:

$$h_{rr}^e = -2h_{\theta\theta}^e, \quad h_{\varphi\varphi}^e = h_{\theta\theta}^e$$

Из закона упругости (2.2.6) следует, что

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{3}E(h_{rr}^e - h_{\theta\theta}^e) = -2Eh_{\theta\theta}^e \quad (2.2.11)$$

и, объединяя (2.2.10) и (2.2.11), получаем

$$\sigma_y = 2Eh_{\theta\theta}^e \quad (2.2.12)$$

Уравнение (2.2.5) для компоненты деформации $h_{\theta\theta}^e$ с учетом (2.2.7) и (2.2.9) принимает вид:

$$\dot{h}_{\theta\theta}^e = D_{\theta\theta} - D_{\theta\theta}^p = \frac{1}{r_c} \frac{dr_c}{dt} \tilde{r}^{-3} - \frac{\dot{q}}{2} \frac{3s_{\theta\theta}}{\sigma_y} = \frac{1}{r_c} \frac{dr_c}{dt} \tilde{r}^{-3} - \frac{\dot{q}}{2}$$

Последнее равенство следует из равенства $\sqrt{3J_2} = \sigma_y = -(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 3s_{\theta\theta}$.

Полагая, что все неизвестные зависят от времени t и пространственной координаты r через автомодельную переменную $\tilde{r} = r/r_c(t)$, и учитывая (2.2.8), последнее равенство можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_c} \frac{dr_c}{dt} \tilde{r}^{-3} &= \dot{h}_{\theta\theta}^e + \frac{\dot{q}}{2} = \frac{\partial(h_{\theta\theta}^e + q/2)}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} + v_r \frac{\partial \tilde{r}}{\partial r} \right) = \\ &= \frac{\partial(h_{\theta\theta}^e + q/2)}{\partial \tilde{r}} \frac{1}{r_c} \frac{dr_c}{dt} (\tilde{r}^{-2} - \tilde{r}) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$-\tilde{r}(\tilde{r}^3 - 1) \frac{\partial(h_{\theta\theta}^e + q/2)}{\partial \tilde{r}} = 1$$

Учитывая, что $q = 0$ на упруго-пластической границе $r = r_{ep}$, где выполнено следующее равенство:

$$h_{\theta\theta}^e = h_{\theta\theta} = \ln(1 - \tilde{r}_{ep}^{-3})^{-1/3}, \quad \tilde{r}_{ep} = r_{ep}/r_c,$$

имеем

$$h_{\theta\theta}^e + q/2 = h_{\theta\theta} = \ln(1 - \tilde{r}^{-3})^{-1/3} \quad (2.2.13)$$

Тогда учитывая (2.2.12) и равенства $\sigma_y = \sigma_{y0} \sqrt{\hbar^2(q) + l_0 \|\nabla q\|}$ и $\|\nabla q\| = -\frac{dq}{dr} = -\frac{1}{r_c} \frac{dq}{d\tilde{r}}$, можно получить определяющее ОДУ для накопленной пластической деформации $q(\tilde{r})$:

$$\frac{l_0}{r_c} \frac{dq}{d\tilde{r}} = \hbar^2(q) - \left(\frac{\sigma_{y0}}{E} \right)^{-2} \left[\ln(1 - \tilde{r}^{-3})^{-2/3} - q \right]^2 \quad (2.2.14)$$

Начальное условие для (2.2.14) есть $q(\tilde{r}_{ep}) = 0$, где величина $\tilde{r}_{ep} = r_{ep}/r_c$ определяется уравнением

$$\ln(1 - \tilde{r}_{ep}^{-3})^{-2/3} = \sigma_{y0}/E, \text{ т.е. } \tilde{r}_{ep} = \left(1 - e^{-\frac{3\sigma_{y0}}{2E}} \right)^{-1/3}$$

Для случая локальной идеально-пластической модели с $l_0 = 0$ и $\hbar(q) = 1$ уравнение (2.2.14) становится алгебраическим и определяет накопленную пластическую деформацию в виде

$$q = \ln(1 - \tilde{r}^{-3})^{-2/3} - \frac{\sigma_{y0}}{E} \quad (2.2.15)$$

В упругой зоне напряжение определяется известным универсальным решением [68]. В частности, радиальное напряжение равно

$$\sigma_{rr} = -\frac{4E}{3} \int_{\infty}^{\tilde{r}} \frac{h_{rr}^e - h_{\theta\theta}^e}{\tilde{r}} d\tilde{r} = 4E \int_{\infty}^{\tilde{r}} \frac{h_{\theta\theta}^e}{\tilde{r}} d\tilde{r} = -\frac{4E}{3} \int_{\infty}^{\tilde{r}} \frac{\ln(1 - \tilde{r}^{-3})}{\tilde{r}} d\tilde{r} = -\frac{4E}{9} \text{Li}_2(\tilde{r}^{-3})$$

где $\tilde{r} \geq \tilde{r}_{ep}$; $\text{Li}_2(z) = \int_z^0 \frac{\ln(1-\zeta)}{\zeta} d\zeta$ есть функция дилогарифма; $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{rr} = 0$.

В пластической области по найденному распределению $q(\tilde{r})$ можно проинтегрировать уравнение равновесия с учетом (2.2.11) и (2.2.13):

$$\tilde{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \tilde{r}} = -2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 2\sigma_y = 4Eh_{\theta\theta}^e = 2E \left[\ln(1 - \tilde{r}^{-3})^{-2/3} - q \right]$$

Следовательно

$$\sigma_{rr}(\tilde{r}) = -\frac{4}{9}E \text{Li}_2(\tilde{r}^{-3}) - 2E \int_{\tilde{r}_{ep}}^{\tilde{r}} q \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}}, \quad 1 \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_{ep} \quad (2.2.16)$$

Здесь учтено, что σ_{rr} непрерывно на упруго-пластической границе.

Для упомянутого случая локальной идеальной пластичности имеем в области пластического течения

$$\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_{y0}} = \frac{\sigma_{rr}|_{\tilde{r}=1}}{\sigma_{y0}} + 2 \ln \tilde{r}$$

Давление на поверхность полости равно

$$\begin{aligned} p_1 = -\sigma_{rr}|_{\tilde{r}=1} &= \frac{2}{3}\sigma_{y0} \left[\frac{2}{3} \frac{E}{\sigma_{y0}} \text{Li}_2 \left(1 - e^{-\frac{3\sigma_{y0}}{2E}} \right) - \ln \left(1 - e^{-\frac{3\sigma_{y0}}{2E}} \right) \right] \approx \\ &\approx \frac{2}{3}\sigma_{y0} \left[1 + \ln \left(\frac{2}{3} \frac{E}{\sigma_{y0}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Разница между указанным приближением и точным значением составляет менее 5% если $\sigma_{y0}/E \leq 0.25$. Последнее выражение является результатом Бишопа и др. [42].

2.2.3. Интегрирование напряжений в области сдвиговой деформации. Будем полагать, что в области II величина пластической деформации не слишком велика, а градиентные эффекты, в отличие от области радиальной деформации, не оказывают существенного влияния, поскольку эта область достаточно удалена от острия индентора. Это позволяет рассматривать идеально пластический однородный материал с пределом текучести σ_{y0} и полу-

Связь между декартовыми и тороидальными координатами следующая:

Гамильтониан в тороидальных координатах имеет вид

Ненулевые производные базисных векторов равны

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\xi}{\partial \xi} = \sin \theta \mathbf{e}_\theta - \cos \theta \mathbf{e}_\rho$$

65

симметрично, напряженное состояние не зависит от координаты ξ , а ненулевые компоненты тензора напряжений есть $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\xi\xi}$, и $\sigma_{\rho\theta}$.

При этих условиях уравнение равновесия $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ имеет две нетривиальные компоненты:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta} + \frac{\rho \cos \theta}{a' + \rho \cos \theta} (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\rho\theta} \tan \theta) &= 0 \\ \rho \frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{\rho\theta} + \frac{\rho \sin \theta}{a' + \rho \cos \theta} (\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\rho\theta} \cot \theta) &= 0 \end{aligned}$$

Будем искать напряженное состояние в следующем виде

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{y0}/2)(\boldsymbol{\Sigma} + \Sigma_0 \mathbf{I}), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\theta), \quad \Sigma_0 = \Sigma_0(\rho, \theta)$$

Тогда напряжения, удовлетворяющие следующим четырем уравнениям

$$\frac{d\Sigma_{\rho\theta}}{d\theta} = -(\Sigma_{\rho\rho} - \Sigma_{\theta\theta}) \quad (2.2.18)$$

$$\frac{d\Sigma_{\theta\theta}}{d\theta} = -2\Sigma_{\rho\theta} \quad (2.2.19)$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \rho \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \rho} = -\frac{\rho}{a' + \rho \cos \theta} (\Sigma_{\rho\rho} - \Sigma_{\xi\xi} - \Sigma_{\rho\theta} \tan \theta) \quad (2.2.20)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \theta} = -\frac{\rho}{a' + \rho \cos \theta} (\Sigma_{\xi\xi} - \Sigma_{\theta\theta} + \Sigma_{\rho\theta} \cot \theta) \quad (2.2.21)$$

заведомо удовлетворяют и уравнению равновесия.

Принимая условие пластичности Треска и предполагая, что нормальное напряжение $\sigma_{\xi\xi}$, соответствующее оси координат, ортогональной поверхности сдвига $\rho\theta$, является промежуточным главным напряжением, мы имеем статически определимую задачу. Действительно, главные напряжения равны

$$\sigma_2 = \sigma_{\xi\xi}, \quad \sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}}{2}\right)^2 + \sigma_{\rho\theta}^2}$$

условие текучести становится

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}}{2}\right)^2 + \sigma_{\rho\theta}^2} = \sigma_{y0}$$

или

$$\Sigma_{\rho\rho} - \Sigma_{\theta\theta} = \pm 2\sqrt{1 - \Sigma_{\rho\theta}^2} \quad (2.2.22)$$

Учитывая (2.2.22), уравнения (2.2.18) и (2.2.19) легко интегрируются. Уравнение (2.2.20) удовлетворяется, если

$$\Sigma_{\xi\xi} = \Sigma_{\rho\rho} + \rho \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \rho} \frac{a' + \rho \cos \theta}{\rho \cos \theta} - \Sigma_{\rho\theta} \tan \theta$$

и для определения функции Σ_0 интегрируем сумму (2.2.20) и (2.2.21):

$$\rho \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \rho} + \cot \theta \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \theta} = - \frac{\rho \cos \theta}{a' + \rho \cos \theta} \Omega \quad (2.2.23)$$

где функция

$$\Omega(\theta) = \Sigma_{\rho\rho} - \Sigma_{\theta\theta} + (\cot \theta - \tan \theta) \Sigma_{\rho\theta} \quad (2.2.24)$$

определяется (2.2.22) и решением уравнения (2.2.18). Таким образом, уравнение (2.2.23) является линейным уравнением с частными производными первого порядка.

Введем замену переменных:

$$w_1 = \ln \left(\frac{\rho}{a'} \cos \theta \right) \text{ и } w_2 = \int \Omega(\theta) \tan \theta d\theta$$

Тогда

$$\rho \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \rho} = \frac{\partial \Sigma_0}{\partial w_1} \rho \frac{\partial w_1}{\partial \rho} = \frac{\partial \Sigma_0}{\partial w_1},$$

$$\cot \theta \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \theta} = \cot \theta \left(\frac{\partial \Sigma_0}{\partial w_1} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \Sigma_0}{\partial w_2} \frac{dw_2}{d\theta} \right) = \Omega \frac{\partial \Sigma_0}{\partial w_2} - \frac{\partial \Sigma_0}{\partial w_1}$$

и (2.2.23) становится

$$\frac{\partial \Sigma_0}{\partial w_2} = - \frac{e^{w_1}}{1 + e^{w_1}}$$

и интегрируется в следующем виде

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \Sigma_{01}(w_1) - w_2 \frac{e^{w_1}}{1 + e^{w_1}} = \\ &= \Sigma_{01} \left(\ln \left(\frac{\rho}{a'} \cos \theta \right) \right) - \frac{\rho \cos \theta}{a' + \rho \cos \theta} \int \Omega(\theta) \tan \theta d\theta \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Функция $\Sigma_{01}(w_1)$ определяется из граничных условий.

Также, как это было проделано в [118–121] для плоского клина, мы конструируем разрывное решение. В верхней половине тороидального клина, где $\theta \in (\beta/2 - \alpha/2, \pi/2 - \alpha]$, условие пластичности имеет вид

$$\Sigma_{\rho\rho}^+ - \Sigma_{\theta\theta}^+ = 2\sqrt{1 - (\Sigma_{\rho\theta}^+)^2}; \text{ в нижней половине, где } \theta \in [\beta - \pi/2, \beta/2 - \alpha/2),$$

$$\text{условие текучести имеет вид } \Sigma_{\rho\rho}^- - \Sigma_{\theta\theta}^- = -2\sqrt{1 - (\Sigma_{\rho\theta}^-)^2} \text{ (см. рис. 2.2.4).}$$

Верхние индексы "+" и "-" здесь и далее указывают принадлежность к соответствующей области. На поверхности $\theta = (\beta - \alpha)/2$ компонента напряжений $\sigma_{\rho\rho}$ и среднее давление $\text{tr} \boldsymbol{\sigma}/3$ испытывают разрыв. Нужно упомянуть, что в отличие от плоского клина напряжение зависит от радиальной координаты.

$$\text{В области } \Pi^+, \text{ уравнение (2.2.18) имеет вид } d\Sigma_{\rho\theta}^+/d\theta = -2\sqrt{1 - (\Sigma_{\rho\theta}^+)^2}.$$

Решение, удовлетворяющее граничному условию $\Sigma_{\rho\theta}^+(\pi/2 - \alpha) = 0$ (абсолютно гладкий индентор) есть

$$\Sigma_{\rho\theta}^+ = \sin 2(\theta + \alpha) \quad (2.2.26)$$

Уравнение (2.2.19) $d\Sigma_{\theta\theta}^+/d\theta = -2\sin 2(\theta + \alpha)$ имеет следующее решение:

$$\Sigma_{\theta\theta}^+ = C_1^+ + \cos 2(\theta + \alpha) \quad (2.2.27)$$

Функция $\Omega^+(\theta)$ (2.2.24) есть

$$\begin{aligned} \Omega^+(\theta) &= \Sigma_{\rho\rho}^+ - \Sigma_{\theta\theta}^+ + (\cot \theta - \tan \theta) \Sigma_{\rho\theta}^+ = \\ &= (\cot \theta - \tan \theta) \sin 2(\theta + \alpha) - 2 \cos 2(\theta + \alpha) = 2 \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\theta} \end{aligned}$$

Здесь, для области Π^+ , угол $2(\theta + \alpha)$ принадлежит квадранту $[\pi/2, \pi]$.

Тогда выполнено равенство $\int \Omega^+(\theta) \tan \theta d\theta = \sin 2\alpha \tan \theta$, и по (2.2.25)

функция Σ_0^+ есть

$$\Sigma_0^+ = \Sigma_{01}^+ \left(\ln \left(\frac{\rho}{a'} \cos \theta \right) \right) - \sin 2\alpha \tan \theta \frac{\rho \cos \theta}{a' + \rho \cos \theta} \quad (2.2.28)$$

Подобным же образом, в области Π^- уравнение (2.2.18) имеет вид

$d\Sigma_{\rho\theta}^-/d\theta = 2\sqrt{1 - (\Sigma_{\rho\theta}^-)^2}$. Граничное условие непрерывности касательного напряжения на поверхности $\theta = \beta/2 - \alpha/2$ с учетом (2.2.26) дает

$$\Sigma_{\rho\theta}^-(\beta/2 - \alpha/2) = \Sigma_{\rho\theta}^+(\beta/2 - \alpha/2) = \sin(\beta + \alpha)$$

Искомое решение есть

$$\Sigma_{\rho\theta}^- = \sin 2(\beta - \theta)$$

На поверхности $\theta = -(\pi/2 - \beta)$ выполнено $\Sigma_{\rho\theta}^- = 0$, что обеспечивает непрерывность касательного напряжения на границе раздела между областью Π^- и областью радиальной деформации I .

Уравнение (2.2.19) $d\Sigma_{\theta\theta}^-/d\theta = -2\sin 2(\beta - \theta)$ интегрируется в виде

$$\Sigma_{\theta\theta}^- = C_1^- - \cos 2(\beta - \theta) \quad (2.2.29)$$

Тогда по (2.2.24)

$$\begin{aligned} \Omega^-(\theta) &= \Sigma_{\rho\rho}^- - \Sigma_{\theta\theta}^- + (\cot \theta - \tan \theta) \Sigma_{\rho\theta}^- = \\ &= (\cot \theta - \tan \theta) \sin 2(\beta - \theta) + 2 \cos 2(\beta - \theta) = 2 \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\theta} \end{aligned}$$

Здесь для области Π^- угол $2(\beta - \theta)$ лежит в квадранте $[\pi/2, \pi]$.

Тогда выполнено $\int \Omega^-(\theta) \tan \theta d\theta = \sin 2\beta \tan \theta$, и по (2.2.25) функция Σ_0^- есть

$$\Sigma_0^- = \Sigma_{01}^- \left(\ln \left(\frac{\rho}{a'} \cos \theta \right) \right) - \sin 2\beta \tan \theta \frac{\rho \cos \theta}{a' + \rho \cos \theta} \quad (2.2.30)$$

Теперь следует выполнить условия непрерывности компоненты напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ на границе между областями Π^- and Π^+ (поверхность $\theta = \beta/2 - \alpha/2$), а также на границе между областью радиальной деформации I и областью Π^- (поверхность $\theta = \beta - \pi/2$). В предыдущем подразделе мы нашли напряжения в области радиальной деформации I как функцию переменной $\tilde{r} = r/r_c$, где $r_c = a'/\sin \beta$ (сферические координаты). Далее обозначим компоненту напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ в области I как $S(\tilde{r})$ чтобы отличить ее от аналогичной составляющей в тороидальных координатах. На поверхности $\theta = \beta - \pi/2$ выполнено равенство $r = \rho + r_c$ и

$$\begin{aligned} w_1|_{\theta=\beta-\pi/2} &= \ln \left(\frac{\rho}{a'} \cos \theta \right) = \ln \left(\frac{\rho}{a'} \cos(\beta - \pi/2) \right) = \\ &= \ln \left(\frac{\rho}{a'} \sin \beta \right) = \ln \left(\frac{\rho}{r_c} \right) = \ln(\tilde{r} - 1) \end{aligned}$$

то есть $\tilde{r} = 1 + e^{w_1|_{\theta=\beta-\pi/2}}$. Теперь запишем равенство $\sigma_{\theta\theta}^-|_{\theta=\beta-\pi/2} = S(1 + e^{w_1|_{\theta=\beta-\pi/2}})$,

учитывая (2.2.29) и (2.2.30), в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta}^-|_{\theta=\beta-\pi/2}}{\sigma_{y0}/2} &= \Sigma_{\theta\theta}^-(\beta-\pi/2) + \Sigma_0|_{\theta=\beta-\pi/2} = \\ &= C_1^- + 1 + \Sigma_{01}^-(w_1|_{\theta=\beta-\pi/2}) + 2\cos^2\beta \frac{e^{w_1|_{\theta=\beta-\pi/2}}}{1+e^{w_1|_{\theta=\beta-\pi/2}}} = \frac{S(1+e^{w_1|_{\theta=\beta-\pi/2}})}{\sigma_{y0}/2} \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем указать функцию $\Sigma_{01}^-(w_1)$ в виде

$$\Sigma_{01}^-(w_1) = \frac{S(1+e^{w_1})}{\sigma_{y0}/2} - 2\cos^2\beta \frac{e^{w_1}}{1+e^{w_1}} - 1 - C_1^- \quad (2.2.31)$$

Условие непрерывности для компоненты напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ на поверхности $\theta = (\beta - \alpha)/2$ есть

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^-|_{\theta=(\beta-\alpha)/2} &= \Sigma_{\theta\theta}^-(\beta/2 - \alpha/2) + \Sigma_0^-|_{\theta=(\beta-\alpha)/2} = \sigma_{\theta\theta}^+|_{\theta=(\beta-\alpha)/2} = \\ &= \Sigma_{\theta\theta}^+(\beta/2 - \alpha/2) + \Sigma_0^+|_{\theta=(\beta-\alpha)/2} \end{aligned}$$

Это уравнение, с учетом уравнений (2.2.27)–(2.2.31), позволяет получить функцию $\Sigma_{01}^+(w_1)$ в следующем виде:

$$\Sigma_{01}^+(w_1) = \frac{S(1+e^{w_1})}{\sigma_{y0}/2} - 1 - C_1^+ - 2\cos(\beta + \alpha) - 2[\sin^2\alpha + \cos(\alpha + \beta)] \frac{e^{w_1}}{1+e^{w_1}}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^+|_{\theta=\pi/2-\alpha} &= \frac{\sigma_{y0}}{2} \left[\Sigma_{\theta\theta}^+(\pi/2 - \alpha) + \Sigma_0^+|_{\theta=\pi/2-\alpha} \right] = \\ &= S \left(1 + \frac{\rho}{a'} \sin\alpha \right) - \sigma_{y0} [1 + \cos(\alpha + \beta)] \left(1 + \frac{\rho \sin\alpha}{a' + \rho \sin\alpha} \right) \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

2.2.4. Полное давление на индентор. Из (2.2.32) следует, что давление на часть индентора, которая расположена непосредственно над областью II (рис. 2.2.5), равно

$$p_2(\zeta) = -S\left(\frac{\zeta}{a'}\right) + \sigma_{y0} [1 + \cos(\alpha + \beta)] \left(2 - \frac{a'}{\zeta}\right), \quad \zeta \in [a', a]$$

Здесь координата ζ обозначает положение точки на проекции погруженной части индентора на недеформированную поверхность материала. На части индентора, которая расположена над областью I (с $\zeta \in [0, a']$), действует давление $p_1 = \text{const}$, которое определяется по формуле (2.2.17). На рис. 2.2.5 схематически показано распределение давления.

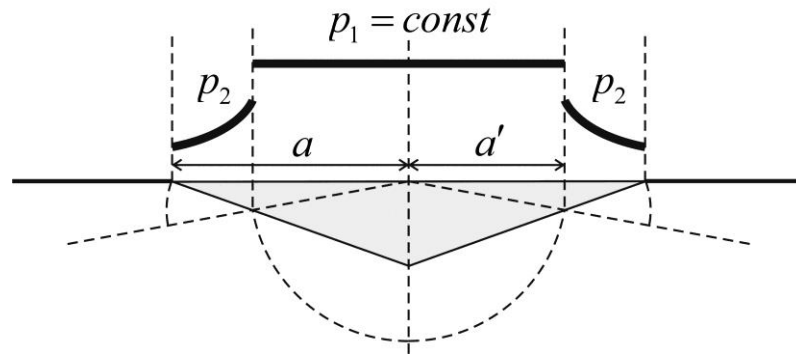


Рисунок 2.2.5 – Схема распределения давления индентации

Интегрируя предыдущее уравнение, находим силу как

$$\begin{aligned} F_2 &= 2\pi \int_{a'}^a \zeta p_2 d\zeta = \\ &= -2\pi \chi^2 a^2 \int_1^{1/\chi} \tilde{\zeta} S(\tilde{\zeta}) d\tilde{\zeta} + 2\pi a^2 \sigma_{y0} [1 + \cos(\alpha + \beta)] (1 - \chi) \\ \tilde{\zeta} &= \zeta / a' \end{aligned}$$

Учитывая, что в области радиальной деформации I уравнение равновесия можно записать в виде $\tilde{r}\sigma_{\theta\theta} = \frac{\tilde{r}^2}{2} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{r}\sigma_{rr}$, мы можем вывести

$$\begin{aligned} \int \tilde{r}\sigma_{\theta\theta} d\tilde{r} &= \int \left(\frac{\tilde{r}^2}{2} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{r}\sigma_{rr} \right) d\tilde{r} = \frac{1}{2} \int \tilde{r}^2 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \tilde{r}} d\tilde{r} + \int \tilde{r}\sigma_{rr} d\tilde{r} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\tilde{r}^2 \sigma_{rr} - 2 \int \tilde{r}\sigma_{rr} d\tilde{r} \right] + \int \tilde{r}\sigma_{rr} d\tilde{r} = \frac{1}{2} \tilde{r}^2 \sigma_{rr} \end{aligned}$$

Тогда,

$$F_2 = \pi a^2 \left\{ \left[x^2 \sigma_{rr}(1) - \sigma_{rr}(1/x) \right] + 2\sigma_{y0} [1 + \cos(\alpha + \beta)] (1 - x) \right\}$$

и выражение для полного давления на площадь проекции индентора на недеформированную поверхность материала становится

$$\begin{aligned} p &= p_1 x^2 + F_2 / (\pi a^2) = -x^2 \sigma_{rr}(1) + F_2 / (\pi a^2) = \\ &= -\sigma_{rr}(1/x) + 2\sigma_{y0} [1 + \cos(\alpha + \beta)] (1 - x) \end{aligned}$$

Первый член в правой части этой формулы представляет собой давление на сферическую поверхность $r = a$ (см. рис. 2.2.2), которая является поверхностью полости в моделях [43, 82], но это давление не совпадает с давлением на поверхность полости в этих моделях.

Учитывая (2.2.16), окончательное выражение для твердости материала согласно предложенной модели есть

$$\frac{H}{\sigma_{y0}} = -2 \frac{E}{\sigma_{y0}} \int_{1/x}^{\tilde{r}_{ep}} q \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}} + \frac{4}{9} \frac{E}{\sigma_{y0}} \text{Li}_2(x^3) + 2(1-x)[1 + \cos(\alpha + \beta)] \quad (2.2.33)$$

где $q(\tilde{r})$ есть решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{l_0}{r_c} \frac{dq}{d\tilde{r}} = \hbar^2(q) - \left(\frac{\sigma_{y0}}{E} \right)^{-2} \left[\ln(1 - \tilde{r}^{-3})^{-2/3} - q \right]^2$$

с граничным условием $q(\tilde{r}_{ep}) = 0$, где α есть полуугол индентора;

$\tilde{r}_{ep}^{-3} = 1 - e^{-\frac{3\sigma_{y0}}{2E}}$; функция $\hbar(q)$ определяет изотропное деформационное упрочнение, $\sigma_y = \sigma_{y0} \sqrt{\hbar^2(q) + l_0 \|\nabla q\|}$, l_0 есть внутренний параметр модели

градиентной теории пластичности (масштаб длины); $\text{Li}_2(z) = \int_z^0 \frac{\ln(1-\zeta)}{\zeta} d\zeta$

есть функция дилогарифма; $r_c = x d \frac{\tan \alpha}{\sin \beta}$, d — глубина индентации (см. уравнение (2.2.4)); величины x и β определяются уравнениями

$$\cot \alpha = \frac{x}{1-x} \cot \beta \quad \text{и} \quad \cos \beta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8 \frac{x^2(1-x)}{x^2+1}} \quad (\text{см. уравнения (2.2.3)}).$$

В частности, для конического индентора с полууглом развертки $\alpha = 70.3^\circ$ (а также для инденторов Викерса и Берковича), эти формулы дают $x = 0.669$ и $\beta = 1.395$.

В частном случае материала с произвольным изотропным упрочнением, но без градиентных эффектов имеем $\sigma_y = \sigma_{y0} \hbar(q)$ и

$$\begin{aligned} \frac{H}{\sigma_{y0}} = & \int_Q^0 \frac{q}{e^{\frac{3}{2}[(\sigma_{y0}/E)\hbar+q]} - 1} \left(\frac{d\hbar}{dq} + \frac{E}{\sigma_{y0}} \right) dq + \\ & + \frac{4}{9} \frac{E}{\sigma_{y0}} \text{Li}_2(x^3) + 2(1-x)[1 + \cos(\alpha + \beta)] \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

где $Q = q|_{\tilde{r}=1/x}$ — корень алгебраического уравнения $Q + (\sigma_{y0}/E)\hbar(Q) = -(2/3)\ln(1-x^3)$.

Для идеально пластического материала без какого-либо упрочнения имеем по формуле (2.2.15) $q = \ln(1-\tilde{r}^{-3})^{-2/3} - \sigma_{y0}/E$ и тогда

$$\begin{aligned} \frac{H}{\sigma_{y0}} = & \frac{4}{9} \frac{E}{\sigma_{y0}} \text{Li}_2\left(1 - e^{-\frac{3\sigma_{y0}}{2E}}\right) - \frac{2}{3} \ln\left(1 - e^{-\frac{3\sigma_{y0}}{2E}}\right) + \\ & + 2\ln x + 2(1-x)[1 + \cos(\alpha + \beta)] \approx \\ \approx & \frac{2}{3} \left[1 + \ln\left(\frac{2}{3} \frac{E}{\sigma_{y0}}\right) \right] + 2\ln x + 2(1-x)[1 + \cos(\alpha + \beta)] \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

Далее сравним значения твердости, прогнозируемые по формуле (2.2.35) с экспериментальными данными [87, 111] твердости по Викерсу

(см. рис. 2.2.6), а также с несколькими моделями индентации, включая чисто упругое решение [122] и жестко-пластические решения [110, 123].

Предлагаемая модель предсказывает слегка меньшую твердость, чем модель [43] и достаточно хорошо соответствует экспериментальным данным в широком диапазоне E/σ_y . Интересно отметить, что предсказанные по предлагаемой модели значения твердости достаточно близки (особенно для малых значений E/σ_y) к значениям, которые предсказывает модель [110], которая также достаточно хорошо соответствует большинству представленных экспериментальных данных (здесь мы использовали приближенный вариант этой модели, пригодный для не слишком острого угла индентора). Эта модель представляет собой комбинацию жестко-пластического решения и решения по модели расширяющейся полости [42]. Поэтому она имеет сходство с представленной здесь моделью.

Все представленные на рис. 2.2.6 экспериментальные данные были получены для предварительно деформированных материалов; поэтому полагается, что для них $\sigma_y = \text{const.}$ ³

Представленная модель не учитывает эффект искажения свободной поверхности (так называемые pile-up или sink-in эффекты). Возникающая в результате погрешность может стать существенной при очень больших или, наоборот, очень малых значениях E/σ_y (см., например, [124]).

Кроме того, представленная модель не учитывает упругую сжимаемость материала (все формулы, представленные на рис. 2.2.6, также не включают коэффициент Пуассона ν). Модель [43] для идеально пластического материала с учетом упругой сжимаемости дает следующее выражение для твердости

³ Большинство данных приведено для металлов, однако самые левые экспериментальные точки соответствуют полимерным материалам. Для них неясно, что понимается под состоянием полного упрочнения, которое указано в [87] (см., например, кривую напряжение-деформация для РММА на рис. 2.2.8). В [111] указано, что предварительная деформация образцов находилась в пределах 1.1 и 1.5.

$$\frac{H}{\sigma_y} = \frac{2}{3} \left\{ 2 + \ln \left[\frac{3\varepsilon + 4b}{3(1+b)} \right] \right\}, \quad \varepsilon = \frac{\cot \alpha}{3} \frac{E}{\sigma_y}, \quad b = 1 - 2\nu \quad (2.2.36)$$

Другая модель, которая также учитывает упругую сжимаемость, получена в [46]:

$$\frac{H}{\sigma_y} = \frac{2}{3} \left(2 + \ln \varepsilon - b \left[1 - \frac{4}{3} \frac{1 + \ln \varepsilon}{\varepsilon} \right] \right), \quad \varepsilon = \frac{\cot \alpha}{3} \frac{E}{\sigma_y}, \quad b = 1 - 2\nu \quad (2.2.37)$$

Для несжимаемых материалов $\nu = 1/2$, $b = 0$ и обе формулы (2.2.36) и (2.2.37) совпадают с (2.2.2).

Было проведено [3] сравнение значений твердости, рассчитанных по формулам (2.2.36) и (2.2.37), которые учитывают упругую сжимаемость материала, и по формуле (2.2.2) для несжимаемого материала с экспериментальными данными [87] и [111]. Учет упругой сжимаемости может несколько улучшить качество прогноза, особенно для конструкционных металлов. Вместе с тем, для материалов с маленьким отношением E/σ_y , которое типично для полимеров, выгода от такого усложнения моделей не очевидна.

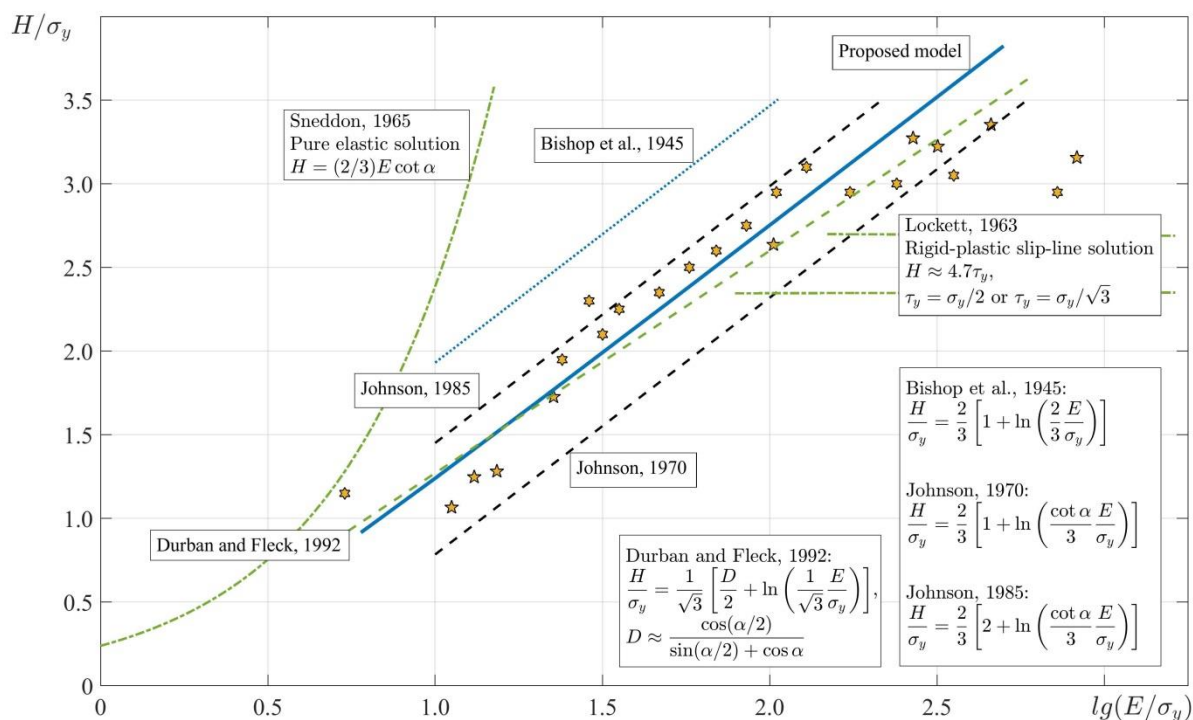


Рисунок 2.2.6 – Твердость. Сравнение предложенной модели (сплошная голубая линия, получена по формуле (2.2.35) с $\alpha = 70.3^\circ$, идеальная пластичность) с аналитическими моделями и экспериментальными данными (пирамида Викерса). Гексаграммы представляют экспериментальные данные [87] (взяты по рисунку №5 на стр. 425 цитируемой статьи), пентаграммы представляют экспериментальные данные [111] (таблица №1 на стр. 432 цитируемой статьи). Все материалы предварительно упрочнены

На рисунке 2.2.7 показано влияние угла конического индентора на твердость, предсказанную моделями для трех значений E/σ_y . Предложенная модель прогнозирует твердость материала немного ниже, чем модель [43], но выше, чем модель [82]. Предложенная модель, как и модели [43, 82], намного более чувствительна к величине угла индентора, чем модель [110]. Если полуугол индентора близок к 90° , предлагаемая модель предсказывает очень низкие значения твердости; вместе с тем, то же самое верно и для моделей Джонсона. Когда полуугол индентора равен 45° , предлагаемая модель переходит в модель [42]. При увеличении угла конического индентора представленная модель, а также модели [43, 82] предсказывают снижение твердости. Это качественно согласуется с анализом методом конечных элементов (см.,

например, [125]; тем не менее, ряд экспериментальных исследований [126–128] показывают, что зависимость твердости от угла индентора более сложная и может быть немонотонной. Отметим, что жестко-пластичное решение [123], полученное методом линий скольжения, и решение [110] предполагают, что твердость, наоборот, незначительно увеличивается с увеличением угла индентора.

Далее мы также сравниваем результаты, полученные по предложенной модели, с экспериментальными данными [112] о микроиндентации двух полимеров, полиметилметакрилата (PMMA) и поликарбоната (PC). Для этого нам необходимо аккуратное описание деформации этих материалов в пластическом диапазоне, которое дано в следующем подразделе.

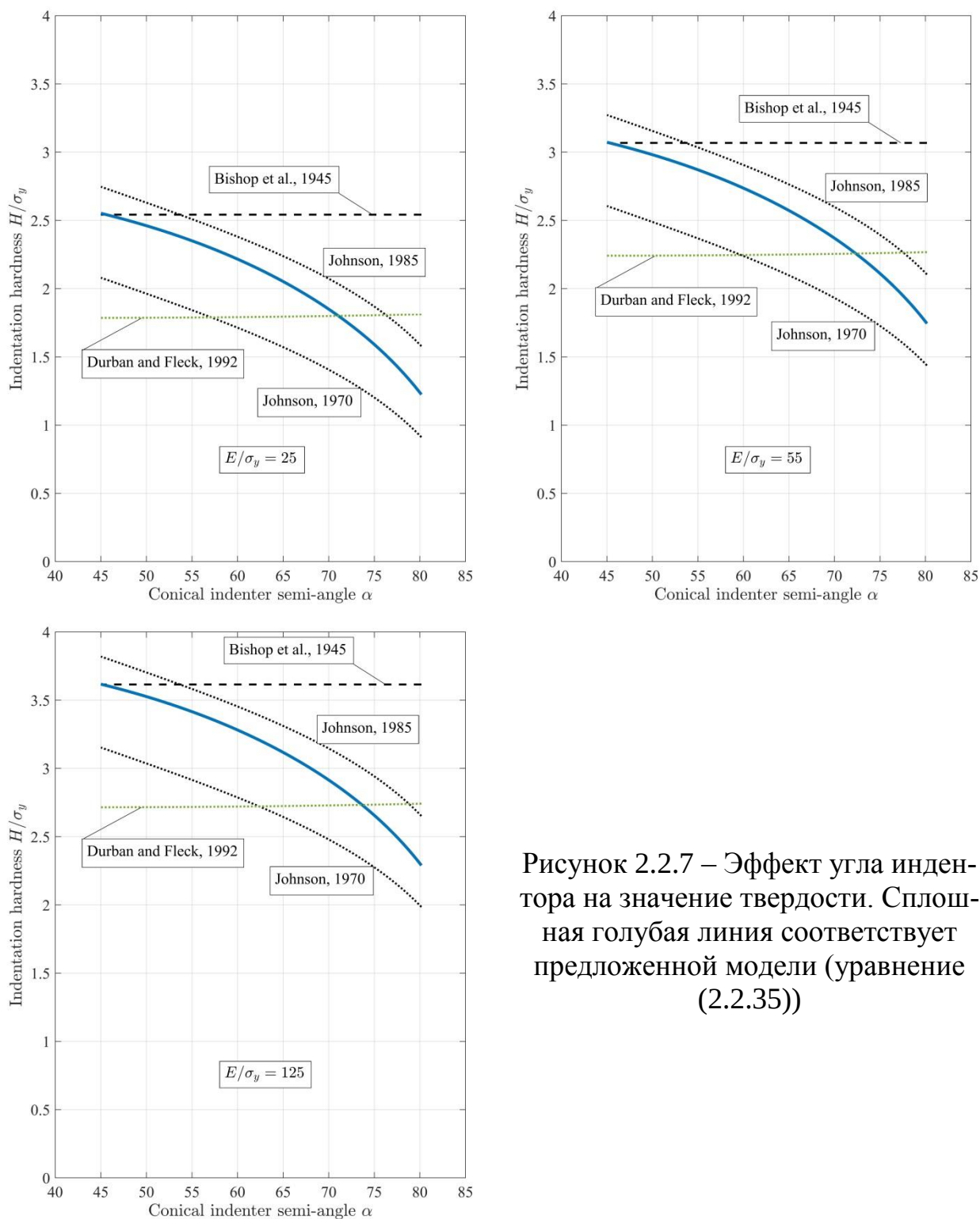


Рисунок 2.2.7 – Эффект угла индентора на значение твердости. Сплошная голубая линия соответствует предложенной модели (уравнение (2.2.35))

2.2.5. Описание деформирования РС и РММА. Поскольку кривые «напряжение-деформация» РС и РММА существенно различаются при разных скоростях деформации, а предлагаемая модель явно не учитывает этот эффект, мы определяем характерную скорость деформации и используем соответствующий закон деформационного упрочнения. В экспериментальном

исследовании [112] о микроиндентации скорость нагружения определена как $(dF/dt)/F = 0.1$, где F есть сила, действующая на индентор. Если предположить, что эта сила растет пропорционально площади проекции контактной поверхности, которая в свою очередь пропорциональна квадрату глубины вдавливания, то для радиуса гидростатически сжатого ядра в нашей модели имеем

$$2(dr_c/dt)/r_c = 0.1 \quad (2.2.38)$$

Скорость пластической деформации неоднородна в пластической области; в настоящем исследовании скорость пластической деформации на упругопластической границе полагается в качестве характерной. Это объясняется следующими соображениями. Предел текучести материала в изотермических условиях зависит от накопленной пластической деформации, градиента деформации и скорости пластической деформации. В представленной модели на поверхности полости $r = r_c$, как уже отмечалось, пластическая деформация, градиент деформации и скорость пластической деформации бесконечны. Часто предполагается, что влияние скорости деформации ограничено, то есть с ростом скорости деформации достигается некоторое «насыщенное» значение предела текучести. Для деформационного упрочнения полимерных материалов мы не вводим насыщение в модель, так как это экспериментально не подтверждено. Кроме того, упрочнение за счет градиентных эффектов также не ограничено, то есть предел текучести неограниченно возрастает с ростом градиента деформации. Таким образом, из трех упомянутых факторов скорость пластической деформации оказывает наименьшее влияние на локальный предел текучести материала вблизи поверхности полости. Напротив, вблизи упругопластической границы его влияние существенно, поскольку накопленная пластическая деформация и ее градиент близки к нулю, а ско-

рость пластической деформации на упругопластической границе отлична от нуля.⁴

Согласно (2.2.15), имеем

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{2\tilde{r}^{-4}}{1-\tilde{r}^{-3}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} = -\frac{2}{\tilde{r}^3-1} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{r}^3-1} \frac{2}{r_c} \frac{dr_c}{dt}$$

Тогда характерная скорость пластической деформации, которую мы используем при выборе кривой упрочнения материала, равна

$$\left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_{r=r_{ep}} = \frac{1}{\tilde{r}_{ep}^3-1} \frac{2}{r_c} \frac{dr_c}{dt} = \left(e^{\frac{3\sigma_{y0}}{2E}} - 1 \right) \frac{2}{r_c} \frac{dr_c}{dt}$$

Для экспериментов [112], учитывая (2.2.38), величина выше должна быть примерно равна 0.004 для РММА и примерно 0.005 для РС.

При задании функции упрочнения для РММА и РС мы опираемся на экспериментальные данные, приведенные в [129]. Для РС кривые упрочнения, приведенные в [129], при скоростях деформации 0.01 и 0.001 достаточно близки, любая из них может быть взята для наших расчетов. Результаты [129] и [75], в обоих случаях полученные при одноосном сжатии, показывают, что при скорости деформации более 0.01 кривая «напряжение-деформация» для РММА подвержена влиянию квазиadiaбатического нагрева. Для индентации мы считаем, что эффект нагрева не будет значительным из-за эффективного отвода тепла индентором (который часто изготавливается из алмаза с очень высокой теплопроводностью). Поэтому мы использовали кривую «напряжение-деформация», соответствующую скорости деформации 0.001, для РММА в качестве основы для нашего анализа. На рисунке 2.2.8 показаны упомянутые экспериментальные данные, а также их аппроксимация, для которой используется та же функция упрочнения, что и в разделе 2.3:

⁴ В отличие от вязкопластических моделей, в которых скорость пластической деформации нулевая на упругопластической границе и быстро увеличивается по мере продвижения в пластическую область до значений, сопоставимых с предсказываемыми моделями пластичности, не зависящими от скорости деформации.

$$\bar{h}(q) = 1 + \frac{\sigma_* - \sigma_{y0}}{\sigma_{y0}} \frac{2(q/q_*)}{1 + (q/q_*)^2} + Aq^n \quad (2.2.39)$$

Здесь точка (q_*, σ_*) приблизительно соответствует локальному максимуму на кривой «напряжение – деформация» (peak stress), а σ_{y0} начальный предел текучести при однородной деформации. Таблица 2.2.1 перечисляет параметры (2.2.39), используемые для обеспечения наилучшего приближения кривых «напряжение – деформация» (рис. 2.2.8).

Таблица 2.2.1 – Параметры материалов

	E , МПа	σ_{y0} , МПа	σ_* , МПа	q_*	A	n
РС	1600	50	78	0.045	1.7	2.9
PMMA	3000	70	120	0.07	1.8	2.2

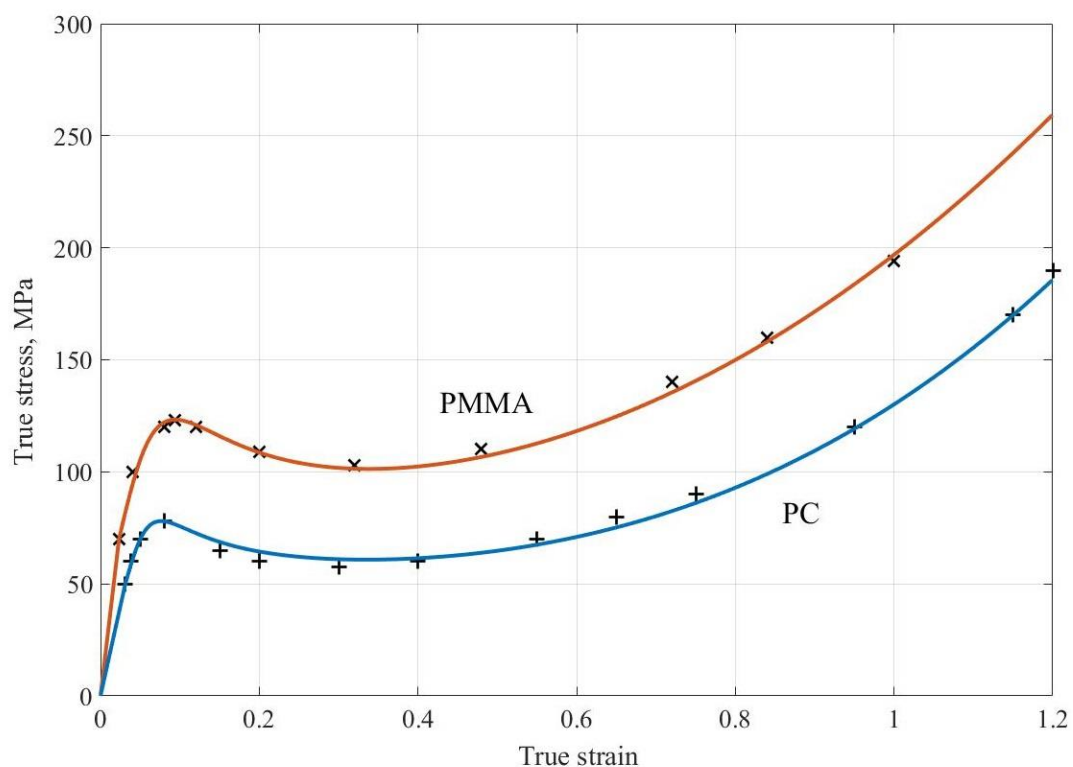


Рисунок 2.2.8 – Кривые «напряжение – деформация» для РС и РММА. Маркеры представляют экспериментальные данные [129]; сплошные линии соответствуют закону упрочнения (2.2.39). Скорости деформации есть 0.001 для РММА и 0.01 для РС

2.2.6. Сравнение с экспериментальными данными по микроиндентации. На рисунке 2.2.9 показаны результаты расчетов по представленной модели в сравнении с экспериментальными данными [112] (приведены по рисунку №9 на стр. 2402 цитируемой статьи). Мы использовали экспериментальные данные, полученные с помощью метода универсальной твердости, который использует пиковую нагрузку при вдавливании и номинальное смещение для расчета площади поверхности вдавливания (подробности см. в [130] и [112]).

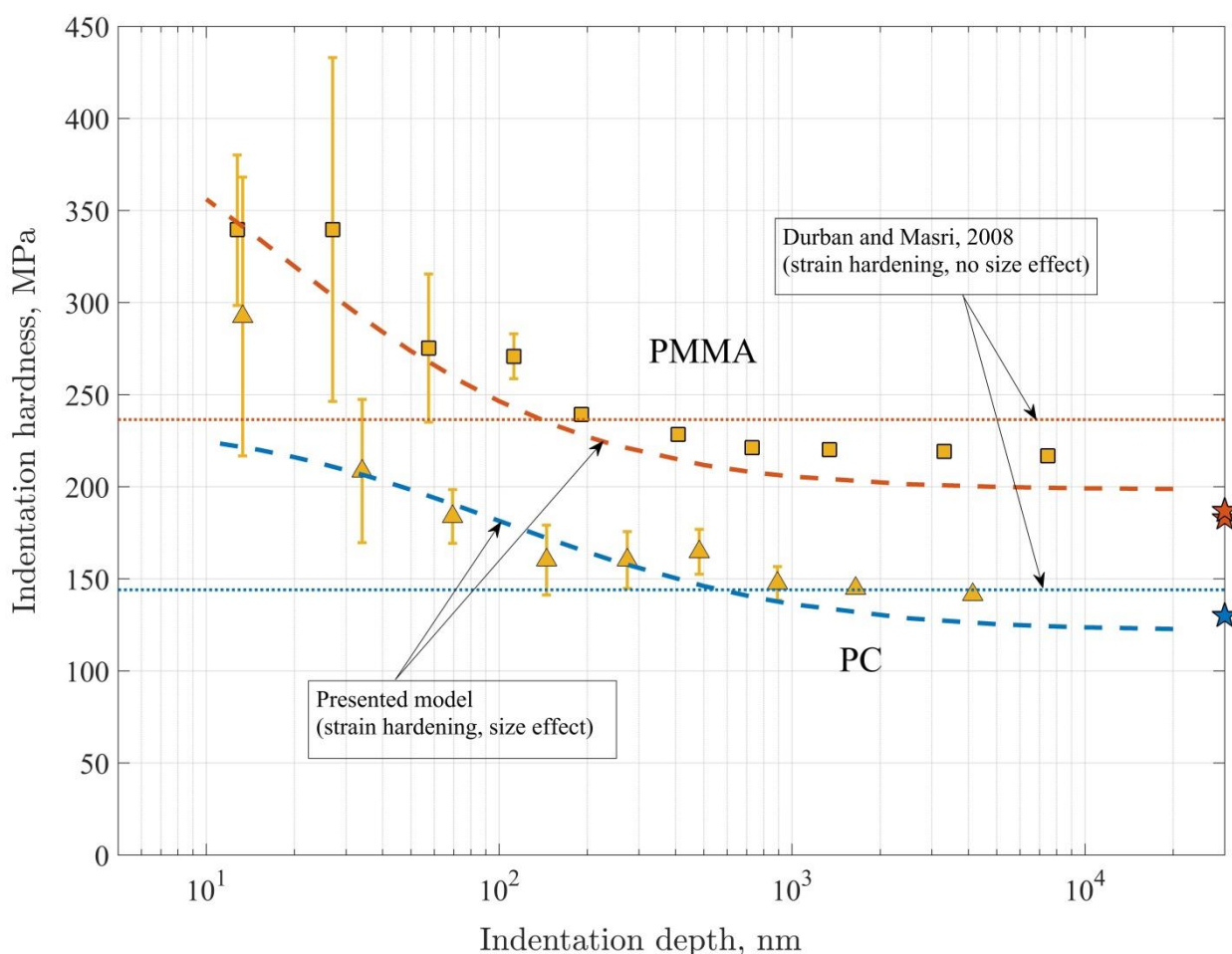


Рисунок 2.2.9 – Indentation Size Effect в PC и PMMA. Пунктирные линии соответствуют представленному решению (2.2.33) с внутренними параметрами масштаба длины $l_0 = 3\mu m$ для PMMA и $l_0 = 9\mu m$ для PC. Маркеры с погрешностями соответствуют экспериментальным данным по универсальной твердости [112] для индентора Берковича. Точечные линии показывают решение (2.2.41) [46] (модель локальной пластичности с деформационным упрочнением). Звездочки справа показывают экспериментальные данные [114] по макроскопической твердости PMMA и PC

Для выбранной модели градиентной теории пластичности наблюдается насыщение размерного эффекта при малых глубинах индентации.

Представленная модель удовлетворительно описывает ISE в РММА на всех глубинах индентации, а также в РС при глубине индентации более 30 нм. Отметим, что при малых глубинах индентации становится существенным влияние градиентных эффектов на модуль упругости материалов [112] (что не учитывается в представленной модели).

В таблице 2.2.2 также представлены оценки макроскопической твердости РММА и РС, полученные по моделям [43, 82] (уравнения (2.2.1) и (2.2.2)) и по представленной модели (уравнение (2.2.35), немонотонное упрочнение без градиентных эффектов). В качестве предела текучести в уравнениях (2.2.1) и (2.2.2) использованы как начальный предел текучести σ_{y0} , так и локальный максимум кривой «напряжение – деформация» (peak stress) σ_* .

Таблица 2.2.2 – Оценки макроскопической твердости, полученные с помощью различных моделей локальной пластичности, МПа

		РС	РММА
Экспериментально измеренная твёрдость *		141	217
Модели, основанные на идеальной пластичности	Модель [82], уравнение (2.2.1) с $\sigma_y = \sigma_{y0}$	78.0	122.8
	Модель [43], уравнение (2.2.2) с $\sigma_y = \sigma_{y0}$	111.3	169.5
	Модель [110] (см. уравнение на рис. 2.2.6) с $\sigma_y = \sigma_{y0}$	97.1	147.8
	Представленная модель, уравнение (2.2.35) для идеально пластического материала с $\sigma_y = \sigma_{y0}$	99.9	153.4
	Модель [82], уравнение (2.2.1) с $\sigma_y = \sigma_*$	98.6	167.5
	Модель [43] уравнение (2.2.2) с $\sigma_y = \sigma_*$	150.6	247.5
	Модель [110] (см. уравнение на рис. 2.2.6) с $\sigma_y = \sigma_*$	131.5	216.0
	Представленная модель, уравнение (2.2.35) для идеально пластического материала с $\sigma_y = \sigma_*$	133.1	220.3
Модели, включающие деформационное упрочнение	Модель [46], уравнение (2.2.41), немонотонное упрочнение по (2.2.39)	144.1	236.5
	Представленная модель, уравнение (2.2.34), немонотонное упрочнение по (2.2.39)	121.8	198.5

* По [112] (Fig. 9, p. 2402); квази-макроскопические значения твердости при глубине индентации $4 \mu\text{m}$ для РС и $7.5 \mu\text{m}$ для РММА.

Ни одна из этих моделей, основанных на предположениях об идеальной пластичности с $\sigma_y = \sigma_{y0}$, не описывает удовлетворительно эксперимен-

тальные данные по макротвердости РС и РММА. В то же время, модели [43] и в особенности [110] с $\sigma_y = \sigma_*$ несмотря на их простоту дают хорошие оценки твердости. Уравнение (2.2.35) для идеально пластического материала с $\sigma_y = \sigma_*$ дает оценку, более близкую к измеренным значениям, чем оригинальная ЕСМ [43]. Можно предположить, что эта формула может быть использована для оценки peak stress полимерных материалов с немонотонным упрочнением с хорошей точностью по данным макроиндентации. Например, для представленных материалов оценки по формуле (2.2.35) дают величины peak stress 117.2 МПа для РММА и 85.8 МПа для РС (против реально измеренных в опытах по одноосному сжатию [129] 120 МПа и 78 МПа соответственно).

Далее рассмотрим еще две модели, основанные на аналогии расширяющейся полости и учитывающие деформационное упрочнение материала. Одна из них – модель [113], созданная для оценки удельной энергии кавитации при глубоком проникновении (или среднего давления, замедляющего снаряд, которое можно рассматривать как твердость материала, H). В частности, в упомянутой работе изучался поликарбонат. Эта модель является значительно улучшенной моделью Бишопа, в которой полость также расширяется от нулевого начального радиуса, и в этом смысле эта модель имеет некоторое сходство с представленной моделью. Модель также учитывает произвольное изотропное упрочнение и разрушение материала. Предполагается, что полость окружена зоной повреждения, в которой нет окружного напряжения (см. также [131]). Результат [113] можно записать как

$$H = r_f^2 \left\{ E \int_0^{\sigma_{y0}/E} \frac{\zeta d\zeta}{e^{(3/2)\zeta} - 1} + \sigma_{y0} \int_0^{\varepsilon_f - \sigma_{y0}/E} \frac{h(q) dq}{e^{(3/2)(q + \sigma_{y0}/E)} - 1} \right\}, \quad (2.2.40)$$

$$r_f = \left(1 - e^{-(3/2)\varepsilon_f} \right)^{-1/3}$$

Здесь r_f это радиус поврежденной зоны, отнесенный к радиусу полости; ε_f это параметр материала, который представляет собой критическую деформацию разрушения; а $\hbar(q)$ есть функция упрочнения (см. (2.2.39)). Если $\varepsilon_f \rightarrow \infty$, то $r_f \rightarrow 1$, и поврежденная зона отсутствует; при $\varepsilon_f = \sigma_{y0}/E$ отсутствует зона пластического течения и есть только поврежденная зона, окруженная упругой областью.

На основе экспериментов о баллистическом проникновении [132], авторы [113] предлагают значение $\varepsilon_f \approx 0.2 \div 0.3$ для РС (на основе оценки фактического радиуса зоны растрескивания вокруг баллистического канала). Формула (2.2.40) хорошо согласуется с экспериментально полученным значением удельной энергии кавитации. Поскольку можно ожидать, что критическая деформация разрушения будет зависеть от скорости деформации, не очевидно, какое значение ε_f следует выбрать при квазистатическом нагружении для процесса индентации. В любом случае минимальные значения, рассчитанные с использованием (2.2.40), соответствуют значению параметра $\varepsilon_f \approx 1$ для обоих материалов. И эти значения составляют 317 МПа для РММА и 194 МПа для РС, что намного выше экспериментальных значений твердости [112, 114]. Подобно модели [42], модель [113] плохо подходит для описания индентации, вероятно, из-за наличия свободной поверхности вблизи индентора, что не характерно для опытов по глубокому проникновению.

Другая модель индентации, основанная на аналогии с расширяющейся полостью, которую следует рассмотреть, – это модель [46], которая дает следующее выражение для твердости:

$$H = E \int_0^{\sigma_{y0}/E} \frac{\varsigma d\varsigma}{e^{(3/2)\varsigma} - 1} + \sigma_{y0} \int_0^{q_a} \frac{\hbar(q) dq}{e^{(3/2)(q+\sigma_{y0}/E)} - 1} + \frac{2}{3} \hbar(q_a), \quad (2.2.41)$$

$$q_a = -\frac{2}{3} \ln \left(1 - \frac{\cot \alpha}{2} \right) - \frac{\sigma_{y0}}{E}$$

Значения макротвердости, рассчитанные по (2.2.41) составляют 236.5 МПа для РММА и 144.1 МПа для РС. Эти значения (показанные на рис. 2.2.9 и в табл. 2.2.2) достаточно близки к экспериментальным данным как [112], так и [114], особенно для РС; для обоих материалов они немного выше значений, измеренных в экспериментах.

Напротив, расчеты по представленной модели (2.2.34), учитывающей немонотонное упрочнение, дают макроскопические значения твердости, которые несколько ниже экспериментальных значений. Нужно упомянуть, что в [112] твердость измерялась с помощью индентора Берковича, а, судя по численному анализу, выполненному в [133], индентор Берковича может показывать значения твердости на несколько процентов выше, чем конический индентор с полууглом развертки 70.3° , если тестируемый материал способен существенно деформироваться упруго. Кроме того, мы получили данные о твердости и кривых зависимости деформации от напряжения из разных источников, поэтому нельзя исключать возможный разброс свойств материалов. Так, следует отметить, что эксперимент с индентором Виккерса, выполненный в [114] дает данные о твердости 130 МПа для РС и 183/187 МПа для РММА (эти значения отмечены звездочками на рис. 2.2.9).

Представленная модель (2.2.33), объединяющая произвольное изотропное упрочнение и градиентные эффекты в пластичности, позволяет определить внутренний параметр масштаба длины материала из экспериментов по микроиндентации. При этом модель (2.2.33) хорошо согласуется с имеющимися экспериментальными данными для двух полимерных материалов (РС и РММА). Уравнение (2.2.34), являющееся частным случаем представленной модели (если пренебречь градиентными эффектами), отличается от известных ЕСМ и в то же время достаточно хорошо описывает макроскопическое значение твердости для материалов со сложным законом деформационного упрочнения (в частности, РС и РММА). Наконец, уравнение (2.2.35), выведенное из представленной общей модели (2.2.33) для идеально пластического материала (без деформационного упрочнения и без градиентных эффектов),

качественно хорошо согласуется с экспериментальными данными по твердости Виккерса для широкого спектра предварительно упрочненных материалов.

Выводы к разделу 2.2. Предложена новая модель расширяющейся сферической полости (ЕСМ) для конической индентации. Для описания полимерных материалов модель включает изотропное немонотонное деформационное упрочнение. Для учета размерного эффекта индентации (ISE) модель включает зависимость предела текучести от градиента накопленной пластической деформации. Для прогнозирования на основе предложенной модели величины твердости материала, зависящей от глубины индентации, достаточно численно проинтегрировать одно нелинейное ОДУ первого порядка, а затем вычислить определенный интеграл. Для локальной модели идеальной пластичности твердость получена в виде аналитического выражения, которое отличается от известных ЕСМ. Оценки твердости, полученные численно с использованием предложенной модели, сравниваются с экспериментальными данными об ISE для поликарбоната (РС) и полиметилметакрилата (РММА). Для локальной модели идеальной пластичности полученная формула сравнивается с экспериментальными данными по твердости предварительно упрочненных материалов. В обоих случаях модель показывает хорошее соответствие с экспериментальными данными. Обработкой экспериментальных данных об ISE получены значения внутреннего параметра масштаба длины для РММА (около 3 микрон) и для РС (около 9 микрон).

2.3. Упруго-пластическое кручение кругового цилиндра

Кручение это один из часто используемых методов испытания механических свойств материалов как в упругом, так и в пластическом диапазоне. При кручении тонкостенных круговых трубок реализуется напряженное состояние, близкое к однородному. Такие опыты достаточно просто интерпретировать. Вместе с тем, при больших деформациях и развитием пластическом течении достаточно тяжело предотвратить потерю устойчивости тонкостенных образцов. Кручение полнотелых круговых цилиндров проще реализовать, однако напряженное состояние в этом случае неоднородно и для интерпретации опытных данных полезно иметь точные или приближенные аналитические решения соответствующей краевой задачи. Кроме того, кручение полнотелых образцов может быть использовано для получения информации о механических свойствах материала в составе синтетических тестов. Данный раздел посвящен аналитическому решению проблемы кручения при конечных деформациях для материалов с изотропным деформационным упрочнением и/или температурным разупрочнением в пластическом диапазоне.

Для сплошного кругового цилиндра с внешним радиусом R_1 и длиной L простое кручение с закрепленными торцами описывается уравнениями

$$r = R, \varphi = \theta + \Theta Z/L, z = Z \quad (2.3.1)$$

которые связывают цилиндрические координаты точки материала в недеформированном состоянии (R, θ, Z) с координатами (r, φ, z) в деформированном состоянии. Здесь Θ есть угол поворота торца $Z = L$ относительно неподвижного торца $Z = 0$. Длина цилиндра вдоль образующей и диаметр цилиндра остаются неизменными.

Вектор скорости материальных точек есть $\mathbf{v} = \frac{rz}{L} \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_\varphi$, а пространственный градиент скорости имеет вид

$$\mathbf{l} = -\frac{z}{L} \frac{d\Theta}{dt} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r) + \frac{r}{L} \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z \quad (2.3.2)$$

Для кинематики (2.3.1) координатное представление тензоров деформации $\mathbf{B}$ и $\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1}$ есть

$$[\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + (\Theta R/L)^2 & \Theta R/L \\ 0 & \Theta R/L & 1 \end{pmatrix}, [\mathbf{c}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\Theta r/L \\ 0 & -\Theta r/L & 1 + (\Theta R/L)^2 \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

С увеличением Θ цилиндр деформируется, сначала чисто упруго, затем, при достижении некоторой величины $\Theta = \Theta^*$ начинается пластическое течение. При $\Theta > \Theta^*$ в теле существуют две области: в одной деформирование чисто упругое, во второй – упруго-пластическое. Эти области разделены упруго-пластической границей, которая движется в теле, начиная с внешней поверхности цилиндра $r = R_1$. При этом в обеих областях выполнена кинематика (2.3.1) и верно представление тензора полных деформаций (2.3.3). Но если в упругом ядре тензор упругих деформаций совпадает с тензором полных деформаций, который определяется по (2.3.3), т.е. $\mathbf{B}^e = \mathbf{B}$, $\mathbf{c}^e = \mathbf{c}$, то в области упруго-пластического деформирования он неизвестен и определяется эволюционным уравнением (1.2.4) или (1.2.5).

2.3.1. Решение для упруго-пластической модели в виде комбинации гиперупругой модели Муни – Ривлина и условия пластичности Треска.

Для обеих областей выполнен гиперупругий закон с потенциалом Муни – Ривлина:

$$\Psi^B = C_1 (I_1^{\mathbf{B}^e} - 3) + C_2 (I_2^{\mathbf{B}^e} - 3) = \mu \left(\frac{1 + \tilde{C}}{4} I_1^{\mathbf{B}^e} + \frac{1 - \tilde{C}}{4} I_2^{\mathbf{B}^e} - \frac{3}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}^e \frac{\partial \Psi^B}{\partial \mathbf{B}^e} = \\
&= -p\mathbf{I} + \frac{\mu}{2} \left[1 + \tilde{C} + (1 - \tilde{C}) I_1^{\mathbf{B}^e} \right] \mathbf{B}^e - \frac{\mu(1 - \tilde{C})}{2} (\mathbf{B}^e)^2 = \\
&= -p\mathbf{I} + \frac{\mu(1 - \tilde{C})}{2} I_2^{\mathbf{B}^e} \mathbf{I} + \frac{\mu(1 + \tilde{C})}{2} \mathbf{B}^e - \frac{\mu(1 - \tilde{C})}{2} (\mathbf{B}^e)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\mu = 2(C_1 + C_2), \quad \tilde{C} = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2},$$

$$C_1 = \frac{\mu(1 + \tilde{C})}{4} > 0, \quad C_2 = \frac{\mu(1 - \tilde{C})}{4} \geq 0, \quad -1 \leq \tilde{C} \leq 1$$

Здесь μ имеет тот же смысл, что и модуль сдвига в линейной теории упругости.

Далее введем безразмерную радиальную координату $\tilde{r} = r/R_1$ и параметр нагружения $\gamma = R_1 \Theta / L$, который представляет собой поверхностную деформацию сдвига.

Упругое ядро. В области упругого деформирования компоненты напряжений есть

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \sigma_{zz} + \frac{\mu(1 - \tilde{C})}{2} (\gamma \tilde{r})^2 \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{zz} + \mu (\gamma \tilde{r})^2 \\
\sigma_{zz} &= -p + \frac{\mu(3 - \tilde{C})}{2} \\
\sigma_{\varphi z} &= \mu \gamma \tilde{r}
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Главные напряжения в упругом ядре имеют следующее выражение:

$$\sigma_{II} = \sigma_{rr}, \quad \sigma_{I,III} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}}{2} \right)^2 + \sigma_{\varphi z} \sigma_{\varphi z}} \tag{2.3.5}$$

Нетрудно убедиться, что $\sigma_{II} = \sigma_{rr}$ является промежуточным главным напряжением, если $C_1 > 0$, $C_2 \geq 0$, $\Theta > 0$:

$$\begin{aligned}\sigma_I - \sigma_{II} &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{2} + \frac{\sigma_{zz} - \sigma_{rr}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \sigma_{\varphi z} \sigma_{\varphi z}} = \\ &= \frac{\mu}{2} \left[\tilde{C}(\gamma\tilde{r})^2 + (\gamma\tilde{r})^2 \sqrt{1 + 4(\gamma\tilde{r})^{-2}} \right] > \frac{\mu(1 + \tilde{C})}{2} (\gamma\tilde{r})^2 > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{II} - \sigma_{III} &= \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{2} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{zz}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \sigma_{\varphi z} \sigma_{\varphi z}} = \\ &= \frac{\mu}{2} \left[-\tilde{C}(\gamma\tilde{r})^2 + (\gamma\tilde{r})^2 \sqrt{1 + 4(\gamma\tilde{r})^{-2}} \right] > \frac{\mu(1 - \tilde{C})}{2} (\gamma\tilde{r})^2 \geq 0\end{aligned}$$

Условие пластичности Треска:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \tau_y = 0$$

Здесь τ_y есть предел текучести материала на сдвиг; τ_y может быть функцией температуры, если учитывается температурное разупрочнение материала, и/или функцией накопленной пластической деформации q , если учитывается изотропное деформационное упрочнение. В обоих случаях началу пластического течения ($q = 0$) соответствует начальный предел текучести τ_{y0} . Здесь и далее индекс «0» при механической характеристике материала означает ее величину при отсутствии пластической деформации (при $q = 0$ и при начальной температуре).

Тогда по (2.3.5) можно записать условие, которое выполняется на упруго-пластической границе:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \sigma_{\varphi z} \sigma_{\varphi z}} = \tau_{y0}$$

или, с учетом (2.3.4):

$$(1/4)(\gamma \tilde{r}_{ep})^4 + (\gamma \tilde{r}_{ep})^2 = (\tau_{y0}/\mu_0)^2$$

Это уравнение определяет положение упруго-пластической границы:

$$\tilde{r}_{ep} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + (\tau_{y0}/\mu_0)^2} - 1 \right)} \quad (2.3.6)$$

Здесь и далее предполагается, что нагрев материала за счет пластической диссипации (если температурные эффекты учитываются) происходит адиабатически и упругие модули материала в упругом ядре остаются постоянными. При малых значениях τ_{y0}/μ последнее выражение приближенно равно

$$\tilde{r}_{ep} \approx \frac{1}{\gamma} \frac{\tau_{y0}}{\mu_0}.$$

Условие пластического течения впервые выполняется на внешней поверхности цилиндра $r = R_1$ при $\gamma = \gamma^* = \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + (\tau_{y0}/\mu_0)^2} - 1 \right)}$. При малых значениях τ_{y0}/μ_0 имеем $\gamma^* \approx \tau_{y0}/\mu_0$.

Единственная нетривиальная компонента уравнения равновесия $r \partial \sigma_{rr} / \partial r = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$ с учетом (2.3.4) принимает вид

$$\tilde{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \tilde{r}} = \frac{\mu(1 + \tilde{C})}{2} (\gamma \tilde{r})^2 \quad (2.3.7)$$

с граничным условием

$$\begin{cases} \sigma_{rr}|_{\tilde{r}=1} = 0, & \gamma \leq \gamma^* \\ \sigma_{rr}|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{ep}} = \sigma_{rr}^{ep}, & \gamma \geq \gamma^* \end{cases}$$

То есть при чисто упругом деформировании используется условие свободной поверхности, после начала пластического деформирования требуется непрерывность радиального напряжения на упруго-пластической границе

$\tilde{r} = \tilde{r}_{ep}(\gamma)$; величина $\sigma_{rr}^{ep}(\gamma)$ должна быть определена интегрированием уравнений в области упруго-пластического деформирования.

Решение (2.3.7) есть

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\mu \frac{1+\tilde{C}}{4} \gamma^2 (1 - \tilde{r}^2), & \gamma \leq \gamma^* \\ \sigma_{rr} = -\mu \frac{1+\tilde{C}}{4} \gamma^2 (\tilde{r}_{ep}^2 - \tilde{r}^2) + \sigma_{rr}^{ep}, & \gamma \geq \gamma^* \end{cases}$$

Область упруго-пластического деформирования. При $\gamma \geq \gamma^*$ в области $\tilde{r}_{ep}(\gamma) \leq \tilde{r} \leq 1$ будем искать тензор упругих деформаций в следующем координатном представлении:

$$[\mathbf{B}^e] = \begin{pmatrix} B_{rr}^e & 0 & 0 \\ 0 & B_{\varphi\varphi}^e & B_{\varphi z}^e \\ 0 & B_{\varphi z}^e & B_{zz}^e \end{pmatrix}$$

предполагая, что

$$B_{rr}^e = 1$$

В том, что это предположение не противоречит эволюционному уравнению (1.2.5) убедимся непосредственно далее.

В таком случае условие несжимаемости имеет вид $\det(\mathbf{B}^e) = B_{\varphi\varphi}^e B_{zz}^e - B_{\varphi z}^e B_{\varphi z}^e = 1$. Отсюда

$$B_{\varphi z}^e = \sqrt{B_{\varphi\varphi}^e B_{zz}^e - 1}$$

Компоненты тензора напряжений Коши в этой области имеют следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -p + \mu \frac{1+\tilde{C}}{2} + \mu \frac{1-\tilde{C}}{2} (B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e) \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= -p + \mu \frac{1-\tilde{C}}{2} + \mu B_{\varphi\varphi}^e \\
\sigma_{zz} &= -p + \mu \frac{1-\tilde{C}}{2} + \mu B_{zz}^e \\
\sigma_{\varphi z} &= \mu B_{\varphi z}^e
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Главные напряжения в области упруго-пластического деформирования имеют тот же вид (2.3.5). Можно убедиться, что при тех же условиях $C_1 > 0$, $C_2 \geq 0$ радиальное напряжение остается промежуточным главным не только в упругом ядре, но и в области упруго-пластического деформирования:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{\mu} &= \tilde{C} \left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} \right)^2 - 1} > \\
&> \tilde{C} \left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} - 1 \right) + \left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} - 1 \right) = (1 + \tilde{C}) \left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} - 1 \right) > 0 \\
\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{\mu} &= -\tilde{C} \left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} \right)^2 - 1} > \\
&> -\tilde{C} \left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} - 1 \right) + \left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} - 1 \right) = (1 - \tilde{C}) \left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} - 1 \right) > 0
\end{aligned}$$

Условие пластичности Треска в области $\tilde{r}_{ep}(\gamma) \leq \tilde{r} \leq 1$ имеет вид

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\mu} = \frac{\tau_y}{\mu} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}}{2} \right)^2 + \sigma_{\varphi z}^2} = \sqrt{\left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} \right)^2 - 1}$$

это равенство позволяет получить следующее равенство

$$\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau_y}{\mu} \right)^2} \tag{2.3.9}$$

в котором локальный предел текучести на сдвиг τ_y в общем случае есть функция T и q ; модуль сдвига μ также может зависеть от температуры и накопленной пластической деформации.

Ассоциированный с условием пластичности Треска $f = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 - \tau_y = 0$ закон $\mathbf{D}^p = \Lambda \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ позволяет получить

$$D_{\varphi\varphi}^p = -D_{zz}^p = \frac{\Lambda}{2\tau_y} \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}}{2}, \quad D_{\varphi z}^p = \frac{\Lambda}{2\tau_y} \sigma_{\varphi z}$$

Или, с учетом (2.3.8):

$$D_{\varphi\varphi}^p = -D_{zz}^p = \frac{\Lambda\mu}{2\tau_y} \frac{B_{\varphi\varphi}^e - B_{zz}^e}{2}, \quad D_{\varphi z}^p = \frac{\Lambda\mu}{2\tau_y} B_{\varphi z}^e \quad (2.3.10)$$

Далее нам понадобится выражение для конвективной производной, входящей в эволюционное уравнение (1.2.5):

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B}^e &= \frac{z}{R_1} \frac{d\gamma}{dt} (B_{rr}^e - B_{\varphi\varphi}^e) (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r) - \\ &- \frac{z}{R_1} \frac{d\gamma}{dt} B_{\varphi z}^e (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r) \end{aligned}$$

Тогда с учетом (2.3.2), (2.3.10) и условия несжимаемости $B_{\varphi z}^e = \sqrt{B_{\varphi\varphi}^e B_{zz}^e - 1}$ уравнение (1.2.5) позволяет получить следующие дифференциальные уравнения для компонент $\mathbf{B}^e$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{\varphi\varphi}^e}{\partial t} &= 2\tilde{r} \frac{d\gamma}{dt} B_{\varphi z}^e - \frac{\Lambda\mu}{\tau_y} \left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} B_{\varphi\varphi}^e - 1 \right) \\ \frac{\partial B_{zz}^e}{\partial t} &= -\frac{\Lambda\mu}{\tau_y} \left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2} B_{zz}^e - 1 \right) \\ \frac{\partial B_{rr}^e}{\partial t} &= \frac{\partial B_{r\varphi}^e}{\partial t} = \frac{\partial B_{rz}^e}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial B_{\varphi z}^e}{\partial t} &= \tilde{r} \frac{d\gamma}{dt} B_{zz}^e - \frac{\Lambda\mu}{2\tau_y} B_{\varphi z}^e (B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e) \end{aligned}$$

Последнее из этих уравнений выполняется тождественно, если выполнены первые два для компонент $B_{\varphi\varphi}^e$ и B_{zz}^e . Далее удобно ввести новые переменные

$$\Sigma = \frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{zz}^e}{2}, \quad \Delta = \frac{B_{\varphi\varphi}^e - B_{zz}^e}{2}$$

Тогда $B_{\varphi\varphi}^e = \Sigma + \Delta$, $B_{zz}^e = \Sigma - \Delta$, $B_{\varphi z}^e = \sqrt{B_{\varphi\varphi}^e B_{zz}^e - 1} = \sqrt{\Sigma^2 - \Delta^2 - 1}$, и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} &= \tilde{r} \frac{d\gamma}{dt} \sqrt{\Sigma^2 - \Delta^2 - 1} - \frac{\Lambda \mu}{\tau_y} (\Sigma^2 - 1) \\ \frac{\partial \Delta}{\partial t} &= \tilde{r} \frac{d\gamma}{dt} \sqrt{\Sigma^2 - \Delta^2 - 1} - \frac{\Lambda \mu}{\tau_y} \Sigma \Delta \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Уравнение для температурного поля в адиабатическом приближении

$$\rho C \dot{T} = \beta_{TQ} \mathbf{D}^p : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.3.12)$$

где ρ и C – соответственно плотность и теплоемкость материала; безразмерный коэффициент Тейлора – Куинни β_{TQ} определяет долю пластической работы, преобразованной в тепло.

Будем искать решение в пластической области в виде функций $\Sigma(q)$ и $\Delta(q)$, полагая, что накопленная пластическая деформация в свою очередь есть функция автомодельной переменной $\xi = \gamma \tilde{r}$, то есть $q = q(\xi)$. Прежде всего, по определению q , с учетом того, что для рассматриваемой задачи $\dot{q} = \partial q / \partial t$, имеем

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{dq}{d\xi} \tilde{r} \frac{d\gamma}{dt} = \sqrt{(2/3)(D_{\varphi\varphi}^{p\,2} + D_{zz}^{p\,2} + 2D_{\varphi z}^{p\,2})} = \frac{\Lambda \mu}{\sqrt{3}\tau_y} \sqrt{\Sigma^2 - 1} \quad (2.3.13)$$

Уравнение для температурного поля (2.3.12) с учетом пластической несжимаемости, уравнений (2.3.8), (2.3.10) и (2.3.13), а также условия пластичности (2.3.9) $\tau_y / \mu = \sqrt{\Sigma^2 - 1}$ принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\beta_{TQ}}{\rho C} \mathbf{D}^p : \boldsymbol{\sigma} = \frac{\beta_{TQ}}{\rho C} \mathbf{D}^p : \mathbf{s} = \frac{\beta_{TQ}}{\rho C} (D_{\varphi\varphi}^p s_{\varphi\varphi} + D_{zz}^p s_{zz} + 2D_{\varphi z}^p s_{\varphi z}) = \\ &= \frac{\beta_{TQ}}{\rho C} \frac{\Lambda \mu^2}{\tau_y} (\Sigma^2 - 1) = \sqrt{3} \frac{\beta_{TQ} \tau_y}{\rho C} \frac{\partial q}{\partial t}\end{aligned}$$

откуда следует обыкновенное дифференциальное уравнение для $T(q)$ с начальным условием $T(0) = T_0$, где T_0 есть температура материала в недеформированном состоянии:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dT}{dq} = \frac{\beta_{TQ} \tau_y}{\rho C} \quad (2.3.14)$$

Комплекс параметров в правой части этого уравнения есть функция температуры T и накопленной пластической деформации q . Для ОДУ первого порядка общего вида нет универсальных методов интегрирования, однако, нет проблемы проинтегрировать его численно. Кроме того, если $\beta_{TQ} \tau_y / (\rho C)$ можно представить в виде двух сомножителей, один из которых зависит только от температуры, а второй только от накопленной пластической деформации, то указанное уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными.

Возвращаясь к системе (2.3.11), исключим

$$\tilde{r} \frac{d\gamma}{dt} \sqrt{\Sigma^2 - \Delta^2 - 1} = \tilde{r} \frac{d\gamma}{dt} \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \Delta^2} \text{ и запишем}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\xi}{dq} &= \frac{A}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \Delta^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\Delta}{dq} + B\Delta &= A\end{aligned} \quad (2.3.15)$$

где

$$A(q) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\tilde{\tau}_y}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + \tilde{\tau}_y, \quad B(q) = \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}}{\tilde{\tau}_y}$$

здесь $\tilde{\tau}_y = \frac{\tau_y}{\mu}$; $\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} = \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial q} + \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial T} \frac{dT}{dq} = \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial q} + \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial T} \sqrt{3} \frac{\beta_{TQ} \tau_y}{\rho C}$ как производная сложной функции; $T(q)$ есть решение (2.3.14).

Второе из уравнений (2.3.15) – линейное ОДУ относительно функции $\Delta(q)$. Исходя из выполнения (2.3.3) и (2.3.6) на упруго-пластической границе, начальные условия для этих уравнений:

$$\xi(0) = \xi_0 = \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + (\tau_{y0}/\mu_0)^2} - 1 \right)}$$

$$\Delta(0) = \Delta_0 = \sqrt{1 + (\tau_{y0}/\mu_0)^2} - 1$$

Решение второго уравнения системы (2.3.15) есть

$$\Delta(q) = e^{-\sqrt{3} \int_0^q B(\zeta) d\zeta} \left[\Delta_0 + \sqrt{3} \int_0^q A(\zeta) e^{\sqrt{3} \int_0^\zeta B(\zeta) d\zeta} d\zeta \right] \quad (2.3.16)$$

Первое уравнение (2.3.15) позволяет найти зависимость накопленной пластической деформации от автомодельной переменной $\xi = \gamma \tilde{r}$:

$$\xi = \xi_0 + \int_0^q \frac{\sqrt{3} A(q) dq}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2(q) - \Delta^2(q)}} \quad (2.3.17)$$

Интегрирование (2.3.14) и (2.3.15) позволяет найти распределение Σ и Δ в пластической области в любой момент времени.

Рассмотрим некоторые важные частные случаи.

1. Изотропно упрочняющийся материал без температурных эффектов. Эта модель подходит для описания достаточно медленного процесса с эффективным отводом тепла. В этом случае $\partial \tilde{\tau}_y / \partial T = 0$, $d\tilde{\tau}_y / dq = \partial \tilde{\tau}_y / \partial q$. В интегрировании (2.3.14) нет необходимости, так как температура в этом случае не влияет на механические характеристики материала. Коэффициенты в (2.3.15) есть константы, $A = \tilde{\tau}_y = \text{const}$ и $B = \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1} / \tilde{\tau}_y = \text{const}$.

2. Температурно разупрочняющийся материал без деформационного упрочнения. Эта модель может использоваться в том случае, если материал, подвергнутый упруго-пластическому кручению, предварительно был обработан интенсивной пластической деформацией до насыщения механических характеристик. В этом случае (2.3.14) дает

$$q = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{T_0}^T \frac{\rho C}{\beta_{TQ} \tau_y} dT$$

Систему (2.3.15) удобнее переписать, используя в качестве независимой переменной температуру, в виде

$$\frac{d\xi}{dT} = \frac{a}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \Delta^2}}$$

$$\frac{d\Delta}{dT} + b\Delta = a$$

$$\text{где } b(T) = \frac{\rho C}{\mu \beta_{TQ}} \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}}{\tilde{\tau}_y^2}, \quad a(T) = \frac{\tilde{\tau}_y}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dT} + \frac{\rho C}{\mu \beta_{TQ}}$$

Ее решение

$$\Delta(T) = e^{-\int_{T_0}^T b(\zeta) d\zeta} \left[\Delta_0 + \int_{T_0}^T a(\zeta) e^{\int_{T_0}^{\zeta} b(\zeta) d\zeta} d\zeta \right]$$

$$\xi = \xi_0 + \int_{T_0}^T \frac{a}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \Delta^2}} dT$$

3. Идеально пластический материал без температурных и деформационных эффектов.

Решение может быть получено как частный случай предыдущих:

$$\tilde{\gamma} = \xi = \xi_0 + \tilde{\tau}_y \left[\operatorname{atanh} \left(\tilde{\tau}_y \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1} - \Delta}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \Delta^2}} \right) - \operatorname{atanh} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} + 1}{2}} \right] \quad (2.3.18)$$

$$\Delta(q) = \frac{\tilde{\tau}_y^2}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}}\right) e^{-\frac{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}}{\tilde{\tau}_y} \sqrt{3}q}$$

4. Модель пластичности Джонсона – Кука с линейным температурным членом:

$$\tau_y = \tau_{y0} (1 + q^n) (1 - \tilde{T})$$

без зависимости упругого модуля от температуры и накопленной деформации ($\mu = \mu_0 = \text{const}$), где $\tilde{T} = \frac{T - T_0}{T_g - T_0}$, T_g – температура, при которой материал

перестает сопротивляться пластической деформации. Коэффициенты β_{TQ} , ρ , C постоянные. Уравнение (2.3.14) интегрируется в виде:

$$\tilde{T} = 1 - e^{-\frac{\sqrt{3}}{T_g - T_0} \frac{\beta_{TQ} \tau_{y0}}{\rho C} \left(q + \frac{q^{n+1}}{n+1}\right)}$$

Тогда

$$\tau_y(q) = \tau_{y0} (1 + q^n) e^{-\frac{\sqrt{3}}{T_g - T_0} \frac{\beta_{TQ} \tau_{y0}}{\rho C} \left(q + \frac{q^{n+1}}{n+1}\right)}$$

и

$$\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} = \frac{1}{\mu} \frac{d\tau_y}{dq} = \frac{\tau_{y0}}{\mu_0} \left(nq^{n-1} - \frac{\sqrt{3}}{T_g - T_0} \frac{\beta_{TQ} \tau_{y0}}{\rho C} (1 + q^n)^2 \right) e^{-\frac{\sqrt{3}}{T_g - T_0} \frac{\beta_{TQ} \tau_{y0}}{\rho C} \left(q + \frac{q^{n+1}}{n+1}\right)}$$

Эти выражения следует подставить в формулы для коэффициентов

$$A(q) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\tilde{\tau}_y}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + \tilde{\tau}_y, \quad B(q) = \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}}{\tilde{\tau}_y} \quad \text{системы уравнений (2.3.15) и}$$

отыскать интегралы в решении (2.3.16) и (2.3.17).

5. Модель пластичности Джонсона – Кука с квадратичным температурным членом

$$\tau_y = \tau_{y0} (1 + q^n) (1 - \tilde{T}^2)$$

и линейной зависимостью модуля сдвига от температуры $\mu = \mu_0 (1 - \tilde{T})$. Коэффициенты β_{TQ} , ρ , C постоянные. Уравнение (2.3.14) интегрируется в виде:

$$\tilde{T} = \tanh \left[\frac{\sqrt{3}}{T_g - T_0} \frac{\beta_{TQ} \tau_{y0}}{\rho C} \left(q + \frac{q^{n+1}}{n+1} \right) \right]$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_y &= \frac{\tau_y}{\mu} = \frac{\tau_{y0} (1 + q^n) (1 - \tilde{T}^2)}{\mu_0 (1 - \tilde{T})} = \frac{\tau_{y0}}{\mu_0} (1 + q^n) (1 + \tilde{T}) = \\ &= \frac{\tau_{y0}}{\mu_0} (1 + q^n) \left(1 + \tanh \left[\frac{\sqrt{3}}{T_g - T_0} \frac{\beta_{TQ} \tau_{y0}}{\rho C} \left(q + \frac{q^{n+1}}{n+1} \right) \right] \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} &= \frac{\tau_{y0}}{\mu_0} n q^{n-1} \left(1 + \tanh \left[\frac{\sqrt{3}}{T_g - T_0} \frac{\beta_{TQ} \tau_{y0}}{\rho C} \left(q + \frac{q^{n+1}}{n+1} \right) \right] \right) + \\ &+ \frac{\tau_{y0}}{\mu_0} \frac{\sqrt{3}}{T_g - T_0} \frac{\beta_{TQ} \tau_{y0}}{\rho C} \left\{ \frac{1 + q^n}{\cosh \left[\frac{\sqrt{3}}{T_g - T_0} \frac{\beta_{TQ} \tau_{y0}}{\rho C} \left(q + \frac{q^{n+1}}{n+1} \right) \right]} \right\}^2 \end{aligned}$$

Эти выражения следует подставить в формулы для коэффициентов

$$A(q) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\tilde{\tau}_y}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + \tilde{\tau}_y, \quad B(q) = \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}}{\tilde{\tau}_y} \quad \text{системы уравнений (2.3.15) и}$$

отыскать интегралы в решении (2.3.16) и (2.3.17).

Крутящий момент и торцевая сила. Теперь, когда найдены параметры Σ и Δ в пластической области, можно записать выражения для крутящего

момента, действующего на цилиндр, а также для эффекта второго порядка – возникающей торцевой силы.

Крутящий момент определяется формулой

$$M = 2\pi \int_0^{R_1} \sigma_{\varphi z} r^2 dr = 2\pi \mu_0 R_1^3 \gamma \int_0^1 \tilde{r}^3 d\tilde{r} = \frac{\pi \mu_0 \gamma R_1^3}{2}$$

если цилиндр деформируется чисто упруго, т.е.

$$\gamma < \xi_0 = \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + (\tau_{y0}/\mu_0)^2} - 1 \right)}; \text{ и формулой}$$

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_0^{R_1} \sigma_{\varphi z} r^2 dr = 2\pi \mu_0 R_1^3 \gamma \int_0^{\tilde{r}_{ep}} \tilde{r}^3 d\tilde{r} + 2\pi R_1^3 \int_{\tilde{r}_{ep}}^1 \mu B_{\varphi z}^e \tilde{r}^2 d\tilde{r} = \\ &= \frac{\pi \mu_0 R_1^3 (\gamma \tilde{r}_{ep})^4}{2\gamma^3} + \frac{2\pi R_1^3}{\gamma^3} \int_{\gamma \tilde{r}_{ep}}^{\gamma} \mu \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \Delta^2} \xi^2 d\xi = \\ &= \frac{\pi \mu_0 \xi_0^4 R_1^3}{2\gamma^3} + \frac{2\pi R_1^3}{\gamma^3} \int_0^{q(\gamma)} \mu \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \Delta^2} \xi^2 \frac{d\xi}{dq} dq = \\ &= \frac{\pi R_1^3}{\gamma^3} \left\{ \frac{\mu_0 \xi_0^4}{2} + 2\sqrt{3} \int_0^{q(\gamma)} \mu A(q) \xi^2 dq \right\} \end{aligned}$$

если происходит упруго-пластическое деформирование, т.е. $\gamma \geq \xi_0$. В последней формуле $\xi(q)$ определяется формулой (2.3.17), а предел интегрирования $q(\gamma)$ представляет собой величину накопленной пластической деформации на внешней поверхности цилиндра при поверхностной деформации равной γ . Эта величина определяется решением нелинейного алгебраического уравнения, следующего как частный случай (2.3.17):

$$\gamma = \xi_0 + \int_0^{q(\gamma)} \frac{\sqrt{3} A(q) dq}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2(q) - \Delta^2(q)}}$$

Для определения торцевой силы необходимо проинтегрировать уравнение равновесия $r(\partial\sigma_{rr}/\partial r) = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$. По (2.3.8) имеем в пластической области:

$$\begin{aligned}\tilde{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \tilde{r}} &= \tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(-p + \frac{\mu(1+\tilde{C})}{2} + \mu(1-\tilde{C})\Sigma \right) = \\ &= \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \mu \left[\Delta + \tilde{C}(\Sigma - 1) \right]\end{aligned}$$

отсюда с учетом граничного условия свободной поверхности $\sigma_{rr}|_{\tilde{r}=1} = 0$:

$$\sigma_{rr} = -p + \frac{\mu(1+\tilde{C})}{2} + \mu(1-\tilde{C})\Sigma = \int_1^{\tilde{r}} \frac{\mu \left[\Delta + \tilde{C}(\Sigma - 1) \right]}{\tilde{r}} d\tilde{r}$$

Далее, учитывая, что в пластической области $\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \mu \left[\tilde{C}(\Sigma - 1) - \Delta \right]$, найдем среднее осевое напряжение

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{zz} \rangle &= \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} \sigma_{zz} r dr = 2 \int_0^{\tilde{r}_{ep}} \sigma_{zz} \tilde{r} d\tilde{r} + 2 \int_{\tilde{r}_{ep}}^1 \sigma_{zz} \tilde{r} d\tilde{r} = \\
&= 2 \int_0^{\tilde{r}_{ep}} \left[\sigma_{rr} - \mu_0 \frac{1-\tilde{C}_0}{2} (\gamma \tilde{r})^2 \right] \tilde{r} d\tilde{r} + 2 \int_{\tilde{r}_{ep}}^1 \left[\sigma_{rr} + \mu [\tilde{C}(\Sigma-1) - \Delta] \right] \tilde{r} d\tilde{r} = \\
&= 2 \int_0^{\tilde{r}_{ep}} \sigma_{rr} \tilde{r} d\tilde{r} + 2 \int_{\tilde{r}_{ep}}^1 \sigma_{rr} \tilde{r} d\tilde{r} + 2 \int_{\tilde{r}_{ep}}^1 \mu [\tilde{C}(\Sigma-1) - \Delta] \tilde{r} d\tilde{r} - \mu_0 \frac{1-\tilde{C}_0}{2} \gamma^2 \frac{\tilde{r}_{ep}^4}{2} = \\
&= 2 \underbrace{\left[\frac{\tilde{r}^2}{2} \sigma_{rr} \right]_0^{\tilde{r}_{ep}} + 2 \left[\frac{\tilde{r}^2}{2} \sigma_{rr} \right]_{\tilde{r}_{ep}}^1}_{0} - \int_0^{\tilde{r}_{ep}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \tilde{r}} \tilde{r}^2 d\tilde{r} - \int_{\tilde{r}_{ep}}^1 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \tilde{r}} \tilde{r}^2 d\tilde{r} + \\
&+ 2 \int_{\tilde{r}_{ep}}^1 \mu [\tilde{C}(\Sigma-1) - \Delta] \tilde{r} d\tilde{r} - \mu_0 \frac{1-\tilde{C}_0}{4} \gamma^2 \tilde{r}_{ep}^4 = \\
&= - \int_0^{\tilde{r}_{ep}} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) \tilde{r} d\tilde{r} - \int_{\tilde{r}_{ep}}^1 (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) \tilde{r} d\tilde{r} + \\
&+ 2 \int_{\tilde{r}_{ep}}^1 \mu [\tilde{C}(\Sigma-1) - \Delta] \tilde{r} d\tilde{r} - \mu_0 \frac{1-\tilde{C}_0}{4} \gamma^2 \tilde{r}_{ep}^4 = \\
&= -\mu_0 \frac{1+\tilde{C}_0}{8} \gamma^2 \tilde{r}_{ep}^4 - \int_{\tilde{r}_{ep}}^1 \mu [\tilde{C}(\Sigma-1) + \Delta] \tilde{r} d\tilde{r} + \\
&+ 2 \int_{\tilde{r}_{ep}}^1 \mu [\tilde{C}(\Sigma-1) - \Delta] \tilde{r} d\tilde{r} - \mu_0 \frac{1-\tilde{C}_0}{4} \gamma^2 \tilde{r}_{ep}^4 = \\
&= -\mu_0 \frac{3-\tilde{C}_0}{8} \xi_0^2 \tilde{r}_{ep}^2 - \int_{\tilde{r}_{ep}}^1 \mu [3\Delta - \tilde{C}(\Sigma-1)] \tilde{r} d\tilde{r} = \\
&= -\mu_0 \frac{3-\tilde{C}_0}{8} \xi_0^2 \tilde{r}_{ep}^2 - \frac{\sqrt{3}}{\gamma^2} \int_0^{q(\gamma)} \mu A \xi \frac{3\Delta - \tilde{C}(\sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2} - 1)}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \Delta^2}} dq
\end{aligned}$$

Эта формула справедлива при упруго-пластическом деформировании, т.е.

при $\gamma \geq \xi_0$. Для чисто упругого деформирования $\langle \sigma_{zz} \rangle = -\mu_0 \frac{3-\tilde{C}_0}{8} \gamma^2$.

Предельные величины крутящего момента и осевого усилия. Для пластической модели с насыщением предела текучести $\lim_{q \rightarrow \infty} \tau_y = \tau_{y\infty} = \text{const}$ и без тем-

пературных эффектов крутящий момент и осевое усилие стремятся к некоторому пределу с нарастанием деформации. Переходя к пределу во втором уравнении (2.3.15), с учетом $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (d\Delta/dq) = 0$ можно получить:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \Delta = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (A/B) = \frac{\tilde{\tau}_{y\infty}^2}{\sqrt{\tilde{\tau}_{y\infty}^2 + 1}},$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \Sigma = \sqrt{\tilde{\tau}_{y\infty}^2 + 1}, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} B_{\theta z}^e = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \sqrt{\Sigma^2 - \Delta^2 - 1} = \frac{\tilde{\tau}_{y\infty}}{\sqrt{\tilde{\tau}_{y\infty}^2 + 1}}$$

Крутящий момент:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} M = 2\pi\mu R_1^3 \int_0^1 \lim_{\gamma \rightarrow \infty} B_{\varphi z}^e \tilde{r}^2 d\tilde{r} = \frac{2}{3} \pi\mu R_1^3 \frac{\tilde{\tau}_{y\infty}}{\sqrt{\tilde{\tau}_{y\infty}^2 + 1}}$$

Здесь обозначено $\tilde{\tau}_{y\infty} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (\tau_y / \mu)$.

Для идеально пластического материала с $\tilde{\tau}_{y\infty} = \tilde{\tau}_{y0}$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} M = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2}{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1}} M_{ep} \approx \frac{4}{3} M_{ep} \quad (2.3.19)$$

где $M_{ep} = \frac{\pi\mu R_1^3}{2} \sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)} \approx \frac{\pi\tau_{y0} R_1^3}{2}$ есть величина крутящего момента,

соответствующая началу пластического течения в цилиндре.

Осевое усилие:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \langle \sigma_{zz} \rangle = -\mu \int_0^1 \lim_{\gamma \rightarrow \infty} [3\Delta - \tilde{C}(\Sigma - 1)] \tilde{r} d\tilde{r} = -\frac{\mu}{2} \left[3 \frac{\tilde{\tau}_{y\infty}^2}{\sqrt{\tilde{\tau}_{y\infty}^2 + 1}} - \tilde{C}(\sqrt{\tilde{\tau}_{y\infty}^2 + 1} - 1) \right]$$

Для идеально пластического материала с $\tilde{\tau}_{y\infty} = \tilde{\tau}_{y0}$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \langle \sigma_{zz} \rangle = 2 \left(1 + \frac{3}{3 - \tilde{C}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1}} \right) \langle \sigma_{zz} \rangle_{ep} \approx 2 \left(1 + \frac{3}{3 - \tilde{C}} \right) \langle \sigma_{zz} \rangle_{ep} \quad (2.3.20)$$

где $\langle \sigma_{zz} \rangle_{ep} = -\mu \frac{3-\tilde{C}}{4} \left(\sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right) \approx -\mu \frac{3-\tilde{C}}{8} \tilde{\tau}_{y0}^2$ есть величина осевого усилия, соответствующая началу пластического течения в цилиндре.

Знаки приближенного равенства в формулах выше подразумевают $\tilde{\tau}_y \ll 1$; неогуковскому материалу соответствует значение $\tilde{C} = 1$.

2.3.2. Решение для упруго-пластической модели в виде комбинации гиперупругой модели обобщенного неогуковского тела и условия пластичности Мизеса. В предыдущем подразделе было получено аналитическое решение задачи упруго-пластического кручения для материала Муни – Ривлина с условием пластичности Треска, обобщенным на температурное разупрочнение и изотропное деформационное упрочнение в пластическом диапазоне. В этом подразделе получим решение этой же задачи для обобщенного неогуковского материала с условием пластичности Мизеса.

В этой задаче удобнее оказывается использование тензора $\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1}$. Это связано с тем, что при решении эволюционного уравнения (1.2.4) для тензора $\mathbf{c}^e$ в пластической области может быть сделано одно предположение, аналог которого для тензора $\mathbf{B}^e$ не интуитивен.

Итак, будем рассматривать класс нелинейно-упругих несжимаемых материалов, для которых свободная энергия может быть представлена как функция второго инварианта тензора $\mathbf{c}^e$, $\Psi = \Psi(I_2^{\mathbf{c}^e})$. Упругий закон для таких материалов может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{I} - 2 \frac{\partial \Psi^c}{\partial \mathbf{c}^e} \mathbf{c}^e = -p\mathbf{I} - 2\psi_2^c \cdot (\text{tr} \mathbf{c}^e \mathbf{I} - \mathbf{c}^e) \mathbf{c}^e = \\ &= -p\mathbf{I} + 2\psi_2^c \cdot \left[(\mathbf{c}^e)^{-1} - I_2^{\mathbf{c}^e} \mathbf{I} \right], \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

$$\psi_2^c(I_2^{\mathbf{c}^e}) = \frac{\partial \Psi^c}{\partial I_2^{\mathbf{c}^e}}$$

В простейшем случае – для потенциала неогнуковского тела – $\Psi^c = C_1(I_2^c - 3)$ и $\psi_2^c = C_1 = \mu/2$, где μ есть модуль сдвига материала.

J_2 - критерий Мизеса для изотропно упрочняющегося и температурно разупрочняющегося материала:

$$f = J_2 - \tau_y^2 = 0, \quad (2.3.22)$$

где $2J_2 = \text{tr dev}^2 \boldsymbol{\sigma}$, $\tau_y = \tau_y(q, T)$ есть сдвиговой предел текучести.

Согласно ассоциированному закону для тензора скорости пластической деформации верно равенство

$$\mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \Lambda \text{dev} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.3.23)$$

Тогда $\dot{q} = \Lambda \sqrt{(2/3) \text{tr dev}^2 \boldsymbol{\sigma}} = 2\Lambda \sqrt{J_2/3} = (2/\sqrt{3}) \Lambda \tau_y$ и уравнение (1.2.4) с учетом равенства $\text{dev} \boldsymbol{\sigma} = 2\psi_2^c \cdot \left[\text{dev} \left\{ \mathbf{c}^e - \text{tr} \mathbf{c}^e \mathbf{c}^e \right\} \right] = 2\psi_2^c \cdot \left[\text{dev} \left\{ (\mathbf{c}^e)^{-1} \right\} \right]$ может быть записано в виде

$$\frac{\partial \mathbf{c}^e}{\partial t} = \frac{2\sqrt{3}\psi_2^c}{\tau_y} \dot{q} \mathbf{c}^e \text{dev}(\mathbf{c}^e)^{-1} - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{c}^e - \mathbf{l}^T \mathbf{c}^e - \mathbf{c}^e \mathbf{l} \quad (2.3.24)$$

Кинематика деформирования по-прежнему соответствует формулам (2.3.1)–(2.3.3), при этом напряженное состояние определяется по (2.3.21).

В упругом ядре

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\psi_2^c \cdot \begin{pmatrix} -2 - (\gamma \tilde{r})^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \gamma \tilde{r} \\ 0 & \gamma \tilde{r} & -2 - (\gamma \tilde{r})^2 \end{pmatrix} \quad (2.3.25)$$

$$\psi_2^c = \psi_2^c(I_2^c), \quad I_2^c = 3 + (\gamma \tilde{r})^2.$$

По (2.3.22), (2.3.25) на упруго-пластической границе выполнено равенство

$$\sqrt{J_2|_{r=r_{ep}}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\text{tr dev}^2 \boldsymbol{\sigma})|_{r=r_{ep}}} = 2\psi_2^c|_{r=r_{ep}} \cdot (\gamma \tilde{r}_{ep}) \sqrt{1 + \frac{1}{3}(\gamma \tilde{r}_{ep})^2} = \tau_{y0}$$

или

$$(\gamma \tilde{r}_{ep})^2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\tau_{y0}}{2\psi_2^c|_{r=r_{ep}}}\right)^2}, \quad (2.3.26)$$

$$\psi_2^c|_{r=r_{ep}} = \psi_2^c(I_2^e|_{r=r_{ep}}), \quad I_2^e|_{r=r_{ep}} = 3 + (\gamma \tilde{r}_{ep})^2$$

Для неогукковского материала с $\psi_2^c|_{r=r_{ep}} = \mu_0/2$ это уравнение можно разрешить в явном виде: $(\gamma \tilde{r}_{ep})^2 = -3/2 + \sqrt{(3/2)^2 + 3\tilde{\tau}_{y0}^2}$, $\tilde{\tau}_{y0} = \tau_{y0}/\mu_0$.

В области пластического деформирования будем искать тензор упругой деформации $\mathbf{c}^e$, удовлетворяющий следующему координатному представлению:

$$[\mathbf{c}^e] = \begin{pmatrix} c_{rr}^e & 0 & 0 \\ 0 & c_{\varphi\varphi}^e & c_{\varphi z}^e \\ 0 & c_{\varphi z}^e & c_{zz}^e \end{pmatrix}$$

По (2.3.24) с учетом равенства $\dot{q} = \partial q / \partial t$, выражения

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{c}^e = \frac{z}{R_1} \frac{d\gamma}{dt} (c_{rr}^e - c_{\varphi\varphi}^e) (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r) - \\ - \frac{z}{R_1} \frac{d\gamma}{dt} c_{\varphi z}^e (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r)$$

и условия несжимаемости $\det \mathbf{c}^e = 1$ имеем:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{c}^e}{\partial t} \right] = -\tilde{r} \frac{d\gamma}{dt} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{\varphi\varphi}^e \\ 0 & c_{\varphi\varphi}^e & 2c_{\varphi z}^e \end{pmatrix} + \frac{2\psi_2^c}{\sqrt{3}\tau_y} \frac{\partial q}{\partial t} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 2 - c_{rr}^{e^2} (c_{\varphi\varphi}^e + c_{zz}^e) & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \frac{c_{\varphi\varphi}^e}{c_{rr}^e} - c_{rr}^e c_{\varphi\varphi}^e (c_{\varphi\varphi}^e + c_{zz}^e) & -\frac{c_{\varphi z}^e}{c_{rr}^e} [1 + c_{rr}^{e^2} (c_{\varphi\varphi}^e + c_{zz}^e)] \\ 0 & -\frac{c_{\varphi z}^e}{c_{rr}^e} [1 + c_{rr}^{e^2} (c_{\varphi\varphi}^e + c_{zz}^e)] & 3 - \frac{c_{zz}^e}{c_{rr}^e} - c_{rr}^e c_{zz}^e (c_{\varphi\varphi}^e + c_{zz}^e) \end{pmatrix} \quad (2.3.27)$$

здесь $\psi_2^c = \psi_2^c(I_2^e)$, $I_2^e = c_{rr}^e c_{\varphi\varphi}^e + c_{\varphi\varphi}^e c_{zz}^e + c_{rr}^e c_{zz}^e - c_{\varphi z}^{e^2}$

Нетрудно увидеть, что отсюда следует равенство компонент c_{rr}^e и $c_{\varphi\varphi}^e$ в области упруго-пластического деформирования, поскольку они совпадают в упругой области и на упруго-пластической границе (там $c_{rr}^e = c_{\varphi\varphi}^e = 1$, в области упруго-пластического деформирования $c_{rr}^e = c_{\varphi\varphi}^e \neq 1$) и при $c_{rr}^e = c_{\varphi\varphi}^e$ совпадают соответствующие компоненты $\partial \mathbf{c}^e / \partial t$.

Таким образом, система дифференциальных уравнений (2.3.27) содержит неизвестные функции c_{rr}^e , $c_{\varphi\varphi}^e$, c_{zz}^e , $c_{\varphi z}^e$, q , которые также связаны алгебраическими соотношениями $c_{\varphi\varphi}^e = c_{rr}^e$, $c_{\varphi z}^{e^2} = c_{\varphi\varphi}^e c_{zz}^e - 1/c_{rr}^e$ (условие несжимаемости) и условием пластичности (2.3.22), которое с учетом равенства

$$\text{dev } \boldsymbol{\sigma} = 2\psi_2^c \cdot \left[\text{dev} \left\{ \mathbf{c}^{e2} - \text{tr } \mathbf{c}^e \mathbf{c}^e \right\} \right] = 2\psi_2^c \cdot \left[\text{dev} \left\{ \left(\mathbf{c}^e \right)^{-1} \right\} \right]$$

принимает вид

$$4(\psi_2^c)^2 \text{tr dev}^2 \left\{ \left(\mathbf{c}^e \right)^{-1} \right\} = 2\tau_y^2$$

или

$$c_{rr}^{e^3} + \left[\tilde{\tau}_y^2 - \frac{1}{3} \left(I_2^e \right)^2 \right] c_{rr}^{e^2} + I_2^e c_{rr}^e - 1 = 0 \quad (2.3.28)$$

В адиабатическом приближении температурное поле с учетом (2.3.23) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \rho C \dot{T} &= \beta_{TQ} \mathbf{D}^p : \boldsymbol{\sigma} = \beta_{TQ} \Lambda (\text{dev } \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}) = \beta_{TQ} \Lambda (\text{dev } \boldsymbol{\sigma} : \text{dev } \boldsymbol{\sigma}) = \\ &= \beta_{TQ} \Lambda \text{tr dev}^2 \boldsymbol{\sigma} = 2\beta_{TQ} \Lambda J_2 = \sqrt{3} \beta_{TQ} \dot{q} \frac{J_2}{\tau_y} = \sqrt{3} \beta_{TQ} \dot{q} \tau_y \end{aligned}$$

Учитывая, что в рассматриваемой задаче $\dot{T} = \partial T / \partial t$ и $\dot{q} = \partial q / \partial t$, последнее уравнение представляет собой ОДУ

$$\frac{dT}{dq} = \frac{\sqrt{3} \beta_{TQ}}{\rho C} \tau_y$$

с начальным условием $T(0) = T_0$. Его интегрирование позволяет установить зависимость $T(q)$.

Тогда (2.3.28) позволяет выразить в явном виде $c_{rr}^e = c_{rr}^e(q, I_2^e)$ как корни кубического уравнения. Или, если это возможно, $I_2^e = I_2^e(q, c_{rr}^e)$.

Вместо системы (2.3.27) с учетом равенства $I_2^e = c_{rr}^{e^2} + c_{rr}^e c_{zz}^e + 1/c_{rr}^e$ и, соответственно,

$$\begin{aligned} \frac{dI_2^e}{dq} &= \left(2c_{rr}^e + c_{zz}^e - \frac{1}{c_{rr}^{e^2}} \right) \frac{dc_{rr}^e}{dq} + c_{rr}^e \frac{dc_{zz}^e}{dq} = \\ &= -\frac{4\sqrt{3}\psi_2^c}{\tau_y} \left\{ \frac{1}{3} \left(I_2^e \right)^2 - \frac{1}{c_{rr}^e} I_2^e - c_{rr}^e + \frac{1}{c_{rr}^{e^2}} \right\} + 2 \frac{d\xi}{dq} c_{rr}^e \sqrt{I_2^e - c_{rr}^{e^2} - 2/c_{rr}^e} = \\ &= -2\sqrt{3}\tilde{\tau}_y + 2 \frac{d\xi}{dq} c_{rr}^e \sqrt{I_2^e - c_{rr}^{e^2} - 2/c_{rr}^e} \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

удобно записать систему

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dq} &= \frac{dI_2^e/dq + 2\sqrt{3}\tilde{\tau}_y}{2c_{rr}^e \sqrt{I_2^e - c_{rr}^{e^2} - 2/c_{rr}^e}} \\ \frac{dc_{rr}^e}{dq} &= \frac{2\psi_2^c}{\sqrt{3}\tau_y} (3 - c_{rr}^e I_2^e)\end{aligned}\quad (2.3.30)$$

Здесь учтено, что $c_{\theta z}^e = -\sqrt{I_2^e - c_{rr}^{e^2} - 2/c_{rr}^e} < 0$. Так же, как и в предыдущем подразделе, полагается, что все неизвестные величины являются функциями автомодельной переменной $\xi = \gamma\tilde{r}$.

Тогда, если из алгебраического уравнения (2.3.28) было выражено $I_2^e = I_2^e(q, c_{rr}^e)$, то второе уравнение (2.3.20) есть нелинейное ОДУ с начальным условием $c_{rr}^e(0) = 1$, которое позволяет найти решение в виде функции $c_{rr}^e(q)$. Первое же уравнение (2.3.30) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными (с начальным условием $q(\gamma\tilde{r}_{ep}) = 0$, $\gamma\tilde{r}_{ep}$ есть корень (2.3.26)) и служит для нахождения распределения накопленной пластической деформации по сечению образца. Производную dI_2^e/dq в (2.3.30) следует брать как производную сложной функции:

$$\frac{dI_2^e}{dq} = \frac{\partial I_2^e}{\partial q} + \frac{\partial I_2^e}{\partial c_{rr}^e} \frac{dc_{rr}^e}{dq} = \frac{\partial I_2^e}{\partial q} + \frac{\partial I_2^e}{\partial c_{rr}^e} \frac{2\psi_2^c}{\sqrt{3}\tau_y} (3 - c_{rr}^e I_2^e)$$

Если же из (2.3.28) выражено $c_{rr}^e = c_{rr}^e(q, I_2^e)$, то из второго уравнения системы можно получить:

$$\frac{dc_{rr}^e}{dq} = \frac{\partial c_{rr}^e}{\partial q} + \frac{\partial c_{rr}^e}{\partial I_2^e} \frac{dI_2^e}{dq} = \frac{2\psi_2^c}{\sqrt{3}\tau_y} (3 - c_{rr}^e I_2^e)$$

откуда

$$\frac{dI_2^e}{dq} = \frac{(2/\sqrt{3})(\psi_2^c/\tau_y)(3 - c_{rr}^e I_2^e) - \partial c_{rr}^e/\partial q}{\partial c_{rr}^e/\partial I_2^e}$$

Последнее уравнение есть нелинейное ОДУ первого порядка общего вида, его интегрирование с граничным условием $I_2^e(0) = 3 + (\gamma \tilde{r}_{ep})^2$, где $\gamma \tilde{r}_{ep}$ есть корень (2.3.26), которое следует из упругого решения, позволяет установить $I_2^e(q)$. Затем, приравнявая правую часть этого уравнения к правой части уравнения (2.3.29), можно получить ОДУ с разделяющимися переменными, аналогичное первому уравнению системы (2.3.30).

Таким образом, представленное решение позволяет определить распределение в образце накопленной пластической деформации q , а также установить зависимость компонент упругой деформации от q . К сожалению, получить решение в замкнутом виде этой задачи оказывается достаточно проблематичным, за исключением наиболее простого случая – гиперупругого неогуковского материала, для которого конечные соотношения приведены в конце этого подраздела.

Формулы для крутящего момента и осевого усилия. Крутящий момент с помощью найденного решения и формул (2.3.21) может быть выражен как

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_0^{R_1} r^2 \sigma_{\varphi z} dr = 4R_1^3 \gamma \pi \int_0^{\tilde{r}_{ep}} (\psi_2^c)_e \tilde{r}^3 d\tilde{r} - 4\pi R_1^3 \int_{\tilde{r}_{ep}}^1 (\psi_2^c)_{ep} \tilde{r}^2 c_{rr}^e c_{\varphi z}^e d\tilde{r} = \\ &= 4R_1^3 \gamma \pi \int_0^{\tilde{r}_{ep}} (\psi_2^c)_e \tilde{r}^3 d\tilde{r} + \frac{4\pi R_1^3}{\gamma^3} \int_0^{q|_{\tilde{r}=1}} (\psi_2^c)_{ep} \xi^2 c_{rr}^e \sqrt{I_2^e - c_{rr}^{e^2} - 2/c_{rr}^e} \frac{d\xi}{dq} dq \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Здесь в первом слагаемом $(\psi_2^c)_e = \psi_2^c|_{I_2^e = 3 + (\gamma \tilde{r})^2}$; во втором слагаемом $(\psi_2^c)_{ep} = \psi_2^c(I_2^e)$, где $I_2^e(q)$ определяется найденным решением наряду с $c_{rr}^e(q)$; функции $\xi(q)$ и $d\xi/dq$ определяется по (2.3.30), равно как и значение накопленной пластической деформации на внешней поверхности образца $q|_{\tilde{r}=1}$. Первое слагаемое отражает вклад упругой области, второе – пластической.

Для вычисления осевого усилия $Q = -2\pi \int_0^{R_1} \sigma_{zz} r dr$ представим интеграл $\int \sigma_{zz} r dr$ с помощью равенств

$$\sigma_{zz} = -p - 2\psi_2^c I_2^e + 2\psi_2^c c_{rr}^e c_{\varphi\varphi}^e = \sigma_{rr} + 2(c_{rr}^{e^2} - c_{rr}^{e-1})\psi_2^c$$

которые следуют из упругого закона (2.3.21):

$$\int \sigma_{zz} r dr = \int \sigma_{rr} r dr + 2 \int (c_{rr}^{e^2} - c_{rr}^{e-1}) r \psi_2^c dr$$

Далее, первый интеграл в правой части равенства проинтегрируем по частям и воспользуемся уравнением равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 2\psi_2^c \frac{c_{rr}^e c_{zz}^e - 1/c_{rr}^e}{r} = 2\psi_2^c \frac{I_2^e - c_{rr}^{e^2} - 2/c_{rr}^e}{r},$$

имеем:

$$\begin{aligned} \int \sigma_{zz} r dr &= \frac{1}{2} \sigma_{rr} r^2 - \frac{1}{2} \int r^2 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr + 2 \int (c_{rr}^{e^2} - c_{rr}^{e-1}) r \psi_2^c dr = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{rr} r^2 + \int (3c_{rr}^{e^2} - I_2^e) r \psi_2^c dr \end{aligned}$$

Это выражение верно как для упругой области, так и для пластической. Тогда, учитывая непрерывность радиального напряжения на упруго-пластической границе, а также то, что образующая цилиндра свободна от напряжений, $\sigma_{rr}|_{r=R_1} = 0$, имеем выражение для осевой силы:

$$\begin{aligned} Q &= -2\pi \int_0^{R_1} \sigma_{zz} r dr = -2\pi R_1^2 \left[\frac{1}{2} \sigma_{rr} \tilde{r}^2 \right]_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} - 2\pi R_1^2 \int_0^1 (3c_{rr}^{e^2} - I_2^e) \tilde{r} \psi_2^c d\tilde{r} = \\ &= 2\pi R_1^2 \gamma^2 \int_0^{\tilde{r}_{ep}} \tilde{r}^3 (\psi_2^c)_e d\tilde{r} + \frac{2\pi R_1^2}{\gamma^2} \int_0^1 (I_2^e - 3c_{rr}^{e^2}) \xi \frac{d\xi}{dq} (\psi_2^c)_{ep} dq \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Здесь так же в первом слагаемом $(w)_e = \psi_2^c|_{I_2^e = 3 + (\gamma\tilde{r})^2}$; во втором слагаемом

$(\psi_2^c)_{ep} = \psi_2^c(I_2^e)$, где $I_2^e(q)$ определяется найденным решением наряду с $c_{rr}^e(q)$; функции $\xi(q)$ и $d\xi/dq$ определяется по (2.3.30), равно как и значе-

ние накопленной пластической деформации на внешней поверхности образца $q|_{\tilde{r}=1}$. Первое слагаемое отражает вклад упругой области, второе – пластической.

Предельные величины момента и осевого усилия. Если деформационное упрочнение материала ограничено, а температурные эффекты несущественны (например, из-за интенсивного отвода тепла от образца), то существуют предельные значения крутящего момента и осевого усилия, к которым стремятся эти величины при возрастании угла закрутки. Также существует предельное напряженное состояние, которому соответствует некоторое значение тензора упругих деформаций. Тогда $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (dc_{rr}^e/dq) = 0$ и

$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (dI_2^e/dq) = 0$. Из второго уравнения системы тогда (2.3.29) следует, что при неограниченном росте деформации выполняется предельное равенство

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} I_2^e c_{rr}^e = 3. \quad \text{Условие пластичности} \quad (2.3.28) \quad \text{принимает вид}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \{c_{rr}^{e^3} + \tilde{\tau}_{y\infty}^2 c_{rr}^{e^2}\} = 1 \quad \text{или} \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \{c_{rr}^{e^{-2}} - c_{rr}^e\} = \tilde{\tau}_{y\infty}^2, \quad \text{где обозначено}$$

$$\tilde{\tau}_{y\infty} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} [\tau_y / (2\psi_2^c)]. \quad \text{Корень этого уравнения с точностью до квадратичных}$$

слагаемых есть $c_{rr}^e = 1 - \tilde{\tau}_{y\infty}^2/3$. Из первого уравнения системы (2.3.30) следу-

$$\text{ет} \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left\{ 2 \frac{d\xi}{dq} c_{rr}^e \sqrt{I_2^e - c_{rr}^{e^2} - 2/c_{rr}^e} \right\} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4\sqrt{3}\psi_2^c (c_{rr}^{e^{-2}} - c_{rr}^e)}{\tau_y} \right\} = 2\sqrt{3}\tilde{\tau}_{y\infty}, \quad \text{откуда}$$

можно выразить $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \{d\xi/dq\} = \sqrt{3} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \{c_{rr}^{e^{-3/2}}\}$. Теперь перейдем к пределу в

выражениях для крутящего момента (2.3.31) и осевой силы (2.3.32) с учетом выражений выше:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} M = 2\pi R_1^3 \tau_{y\infty} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_0^1 \tilde{r}^2 c_{rr}^e{}^{3/2} d\tilde{r} \approx \frac{2}{3} \pi R_1^3 \tau_{y\infty} (1 - \tilde{\tau}_{y\infty}^2 / 2) \approx \frac{2}{3} \pi R_1^3 \tau_{y\infty}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} Q = 3\pi R_1^2 \tilde{\tau}_{y\infty} \tau_{y\infty} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_0^1 \tilde{r} c_{rr}^e d\tilde{r} \approx \frac{3}{2} \pi R_1^2 \tilde{\tau}_{y\infty} \tau_{y\infty} (1 - \tilde{\tau}_{y\infty}^2 / 3) \approx \frac{3}{2} \pi R_1^2 \tilde{\tau}_{y\infty} \tau_{y\infty} \quad (2.3.33)$$

Пример решения. Неогуковский материал (материал Трелоара) с условием пластичности Мизеса, обобщенным на произвольное изотропное упрочнение (без температурных эффектов). Для материала Трелоара $\Psi^c = (\mu/2)(I_2^e - 3)$, $\psi_2^c = \mu/2 = \text{const}$. Из (2.3.28) выразим:

$$I_2^e = \frac{3}{2} \frac{S+1}{c_{rr}^e}, \quad S = \sqrt{\frac{4}{3} c_{rr}^e{}^2 (c_{rr}^e + \tilde{\tau}_y^2)} - \frac{1}{3}, \quad \tilde{\tau}_y = \frac{\tau_y(q)}{\mu}$$

Второе уравнение системы (2.3.30) имеет вид

$$\frac{dc_{rr}^e}{dq} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{S-1}{\tilde{\tau}_y}, \quad c_{rr}^e(0) = 1$$

Первое уравнение (2.3.30) с учетом следующих равенств

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial c_{rr}^e} = \frac{c_{rr}^e}{S} - \frac{3}{2c_{rr}^e{}^2} + \frac{1}{2Sc_{rr}^e{}^2}$$

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial q} = 2\tilde{\tau}_y \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{c_{rr}^e}{S}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_2^e}{dq} &= \frac{\partial I_2^e}{\partial q} + \frac{\partial I_2^e}{\partial c_{rr}^e} \frac{dc_{rr}^e}{dq} = \\ &= 2\tilde{\tau}_y \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{c_{rr}^e}{S} + \frac{\sqrt{3}(S-1)}{4\tilde{\tau}_y c_{rr}^e{}^2 S} (3S-1-2c_{rr}^e{}^3) \end{aligned}$$

имеет вид

$$\frac{d\xi}{dq} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \frac{\left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} c_{rr}^e (3S^2 + 1 - 4c_{rr}^{e^3}) + \right.}{\tilde{\tau}_y S c_{rr}^{e^{5/2}} \sqrt{3S - 2c_{rr}^{e^3} - 1}} \left. + (S+1)[3S(2S-1)+1] - 2(5S-1)c_{rr}^{e^3} \right\}}$$

с граничным условием $\xi|_{q=0} = \gamma \tilde{r}_{ep}$, где $(\gamma \tilde{r}_{ep})^2 = (3/2) \left[\sqrt{1 + (4/3) \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right]$,

$$\tilde{\tau}_{y0} = \tau_{y0} / \mu.$$

Крутящий момент и осевая сила:

$$\tilde{M} = \frac{\pi R_1^3}{2\gamma^3} \left\{ (\gamma \tilde{r}_{ep})^4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q|_{\tilde{r}=1}} \frac{\xi^2}{\tilde{\tau}_y S c_{rr}^{e^2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} c_{rr}^e (3S^2 + 1 - 4c_{rr}^{e^3}) + \right. \right. \\ \left. \left. + (S+1)[3S(2S-1)+1] - 2(5S-1)c_{rr}^{e^3} \right\} dq \right\}$$

$$-\langle \tilde{\sigma}_{zz} \rangle = -\frac{2}{\mu R_1^2} \int_0^{R_1} \sigma_{zz} r dr = \frac{(\gamma \tilde{r}_{ep})^4}{4\gamma^2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}\gamma^2} \times \\ \times \int_0^{q|_{\tilde{r}=1}} \frac{\xi}{\tilde{\tau}_y S c_{rr}^{e^{7/2}}} \frac{S+1-2c_{rr}^{e^3}}{\sqrt{3S-2c_{rr}^{e^3}-1}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} c_{rr}^e (3S^2 + 1 - 4c_{rr}^{e^3}) + \right. \\ \left. + (S+1)[3S(2S-1)+1] - 2(5S-1)c_{rr}^{e^3} \right\} dq$$

Частный случай. Идеально пластический неогуковский материал. Предел текучести на сдвиг есть постоянная $\tau_y = \tau_{y0} = \text{const}$. В этом случае предыдущие соотношения упрощаются, можно получить, что в области пластического течения:

$$q(c_{rr}^e) = \frac{2\tilde{\tau}_{y0}}{\sqrt{3}} \int_{c_{rr}^e}^1 \frac{d\zeta}{S(\zeta)-1}, \quad S(c_{rr}^e) = \sqrt{\frac{4}{3} c_{rr}^{e^2} (c_{rr}^e + \tilde{\tau}_{y0}^2) - \frac{1}{3}}, \quad \tilde{\tau}_{y0} = \frac{\tau_{y0}}{\mu}$$

$$\xi(c_{rr}^e) = \gamma \tilde{r} = \gamma \tilde{r}_{ep} + \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{c_{rr}^e}^1 \frac{(S+1)[3S(2S-1)+1] - 2(5S-1)\zeta^3}{S(S-1)\zeta^{5/2}(3S-2\zeta^3-1)^{1/2}} d\zeta \quad (2.3.34)$$

где $(\gamma \tilde{r}_{ep})^2 = (3/2) \left[\sqrt{1 + (4/3) \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right]$

Крутящий момент:

- до наступления пластического течения $M = \frac{\pi \mu \gamma R_1^3}{2}$

- после наступления пластического течения

$$M = \frac{\pi \mu R_1^3}{2 \gamma^3} \left\{ (\gamma \tilde{r}_{ep})^4 + \int_{c_{rr}^e|_{\tilde{r}=1}}^1 \frac{(S+1)[3S(2S-1)+1] - 2(5S-1)\zeta^3}{S(S-1)\zeta^2} \xi^2(\zeta) d\zeta \right\}$$

Осевое усилие:

- до наступления пластического течения $Q = \frac{\pi \mu \gamma^2 R_1^2}{4}$

- после наступления пластического течения

$$Q = \frac{\pi \mu R_1^2}{4 \gamma^2} \left\{ (\gamma \tilde{r}_{ep})^4 + \frac{3}{\sqrt{2}} \int_{c_{rr}^e|_{\tilde{r}=1}}^1 \frac{\left\{ (S+1)[3S(2S-1)+1] - 2(5S-1)\zeta^3 \right\}}{S(S-1)\zeta^{5/2}(3S-2\zeta^3-1)^{1/2}} \frac{S+1-2\zeta^3}{\zeta} \xi(\zeta) d\zeta \right\}$$

Формула (2.3.34) связывает параметр решения $c_{rr}^e|_{\tilde{r}=1}$ с величиной поверх-

ностной деформации $\xi|_{\tilde{r}=1} = \xi(c_{rr}^e|_{\tilde{r}=1})$. Величина γ , фигурирующая в форму-

лах для M и Q после наступления пластического течения, также может

быть выражена через величину поверхностной деформации: $\gamma = \xi|_{\tilde{r}=1}$.

2.3.3. Сопоставление моделей Мизеса и Треска для материала Трелоара.

Приведем выражения для крутящего момента и осевого усилия при упруго-

пластическом кручении для неогукковского материала с условием пластичности Треска по точному решению из вышеизложенных подразделов:

$$M = 2\pi \int_0^{R_1} \sigma_{\varphi z} r^2 dr = \frac{\pi \mu \xi_0^4 R_1^3}{2\gamma^3} + \frac{2\pi \mu R_1^3}{\gamma^3} \int_{\xi_0}^{\gamma} \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \Delta^2} \xi^2 d\xi$$

$$\langle \sigma_{zz} \rangle = \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} \sigma_{zz} r dr = -\frac{\mu \xi_0^4}{4\gamma^2} - \frac{\mu}{\gamma^2} \int_{\xi_0}^{\gamma} \left(3\Delta - \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} + 1 \right) \xi d\xi$$

где $\tilde{\tau}_y = \tau_y / \mu = \text{const}$, $\xi_0 = \gamma \tilde{r}_{ep} = \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} - 1 \right)}$, $\Delta(\xi)$ неявно определяется (2.3.18). Опуская необходимые преобразования, запишем конечный результат:

$$M = \frac{\pi \mu \xi_0^4 R_1^3}{2\gamma^3} \left[1 + 2 \left(\frac{2\tilde{\tau}_y}{\xi_0} \right)^2 \int_0^{\frac{\gamma - \xi_0}{2\tilde{\tau}_y}} \frac{f^2 - 1}{f^2 + 1} \left(1 + \frac{2\tilde{\tau}_y}{\xi_0} \varsigma \right)^2 d\varsigma \right]$$

$$\langle \sigma_{zz} \rangle = -\frac{\mu \xi_0^4}{4\gamma^2} \left[1 + \frac{4\tilde{\tau}_y}{\xi_0} \int_0^{\frac{\gamma - \xi_0}{2\tilde{\tau}_y}} \left(\frac{12\tilde{\tau}_y}{\xi_0^2} \frac{f}{f^2 + 1} - 1 \right) \left(1 + \frac{2\tilde{\tau}_y}{\xi_0} \varsigma \right) d\varsigma \right]$$

$$f(\varsigma) = \sqrt{\frac{\tilde{\tau}_y + \xi_0}{\tilde{\tau}_y - \xi_0}} \frac{1 + (2\tilde{\tau}_y / \xi_0 - 1) \tanh \varsigma}{1 + (2\tilde{\tau}_y / \xi_0 + 1) \tanh \varsigma}$$

Началу пластического течения соответствуют значения $M = \pi \mu \gamma R_1^3 / 2$ и $\langle \sigma_{zz} \rangle = -\mu \gamma^2 / 4$, которые можно получить как из упругого решения, так и из формул выше при $\gamma = \xi_0$.

На рисунке 2.3.1 приведены графики безразмерного момента $\tilde{M} = 2M / (\pi \mu R_1^3)$ и осевого давления $-\langle \tilde{\sigma}_{zz} \rangle = -4\langle \sigma_{zz} \rangle / (\mu R_1^2)$ для пластических моделей Треска и Мизеса (упругая модель неогукковского тела). Деформация кручения, при которой начинается пластическое течение в образце,

для модели Треска выражается формулой $\gamma = \sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)}$, для модели Мизеса $\gamma = \sqrt{(3/2)[\sqrt{1 + (4/3)\tilde{\tau}_{y0}^2} - 1]}$. Обе эти величины при $\tilde{\tau}_{y0} \ll 1$ практически неотличимы от приближения теории малых деформаций $\gamma = \tilde{\tau}_{y0}$.

Крутящий момент для моделей Мизеса и Треска практически не различается, если обе модели откалиброваны таким образом, что предел текучести при чистом сдвиге совпадает. Эффект Свифта (возникновение осевой силы при кручении с закрепленными торцами) сильнее выражен для модели Мизеса, причем разница увеличивается с ростом деформации образца. Для идеально пластического материала с упругой моделью неогуковского тела обе модели прогнозируют, что при больших углах закрутки как крутящий момент, так и осевое усилие выходят на свои предельные стационарные значения. Для материала Треска по (2.3.19), (2.3.20)

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} M = \frac{2\pi\mu}{3} \frac{\tilde{\tau}_{y0} R_1^3}{\sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1}}, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \langle \sigma_{zz} \rangle = -\frac{\mu}{2} \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1} + 2\tilde{\tau}_{y0}^2 - 1}{\sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1}}$$

Если $\tilde{\tau}_{y0} \ll 1$, то первая из этих величин мало отличается от величины $M = (2/3)\pi R_1^3 \tau_{y0}$, которая может быть получена, если полностью пренебречь упругими эффектами и считать $\sigma_{\varphi z} = \tau_{y0}$. Вторая величина, которая представляет собой чисто нелинейный эффект, при $\tilde{\tau}_{y0} \ll 1$ приближенно равна $-(5/4)\tilde{\tau}_{y0}\tau_{y0}$.

Для материала Мизеса согласно (2.3.33) при $\tilde{\tau}_{y0} \ll 1$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} M \approx \frac{2}{3} \pi R_1^3 \tau_{y0}, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \langle \sigma_{zz} \rangle \approx -\frac{3}{2} \tilde{\tau}_{y0} \tau_{y0}$$

Предельное осевое давление для модели Мизеса на 20% выше по модулю, чем для модели Треска.

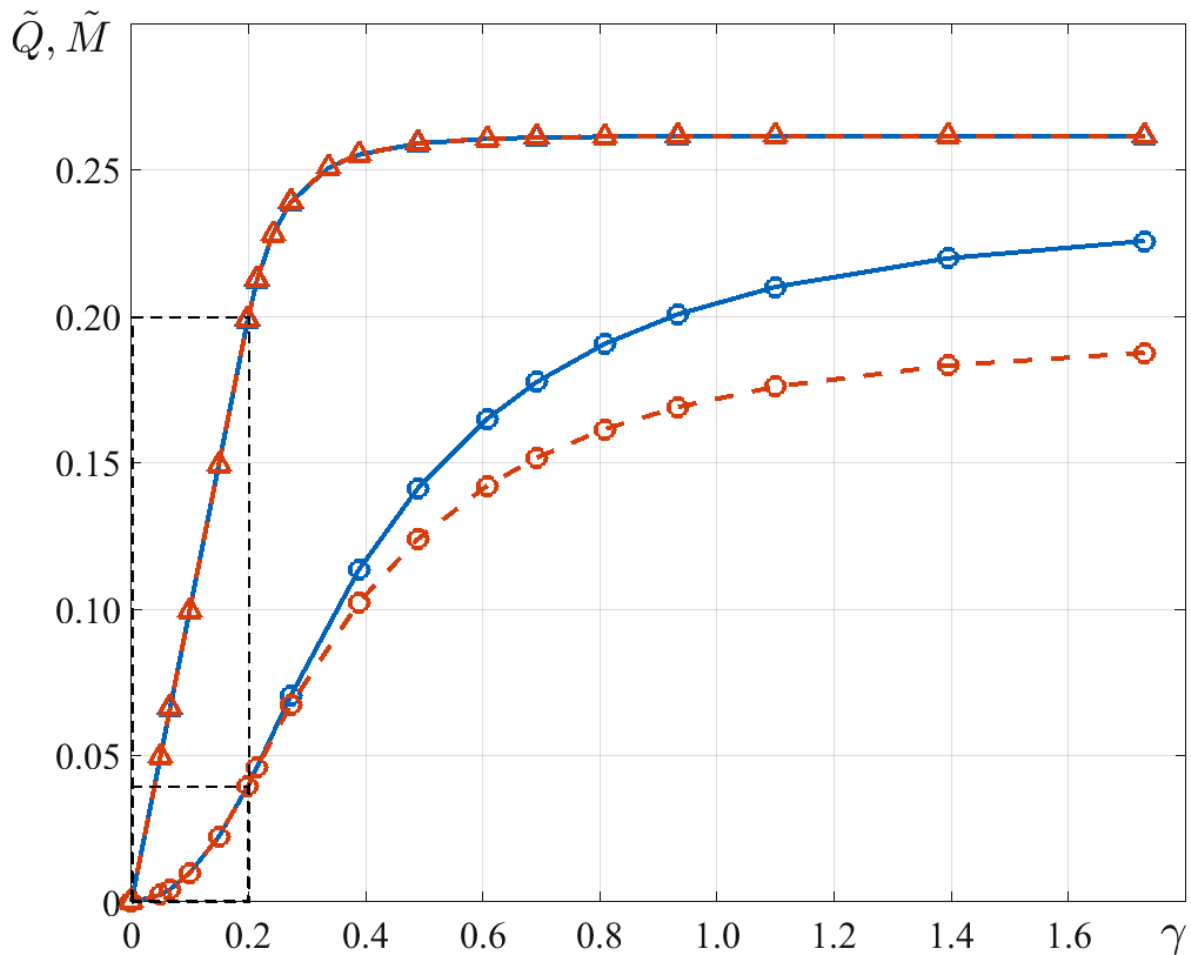


Рисунок 2.3.1 – Осовое усилие $\tilde{Q} = 4Q/(\pi\mu R^2)$ (круговые маркеры) и крутящий момент $\tilde{M} = 2M/(\pi\mu R^3)$ (треугольные маркеры). Сплошные линии соответствуют представленному решению для условия пластичности Мизеса, штриховые соответствуют решению для условия Треска. Пунктирными прямоугольниками выделен диапазон чисто упругого кручения. Ось абсцисс отображает параметр нагружения – поверхностную деформацию $\gamma = \Theta R_1/L$.

Неогуковский материал, $\tilde{\tau}_{y0} = \tau_{y0}/\mu = 0.2$

2.3.4. Сопоставление аналитического решения с экспериментальными данными и результатами МКЭ-моделирования.

В [12] проведено сравнение точного решения для упруго-пластической модели, которая представляет собой совокупность упругой модели Трелоара и пластической модели Треска с изотропным упрочнением, с численным решением в MSC.Marc (численные расчёты выполнены К.С. Бормотиным). Приведем здесь результаты из указанной работы для квадратичного закона

упрочнения, дополнив их сравнением с решением по пластической модели Мизеса (рис. 2.3.2).

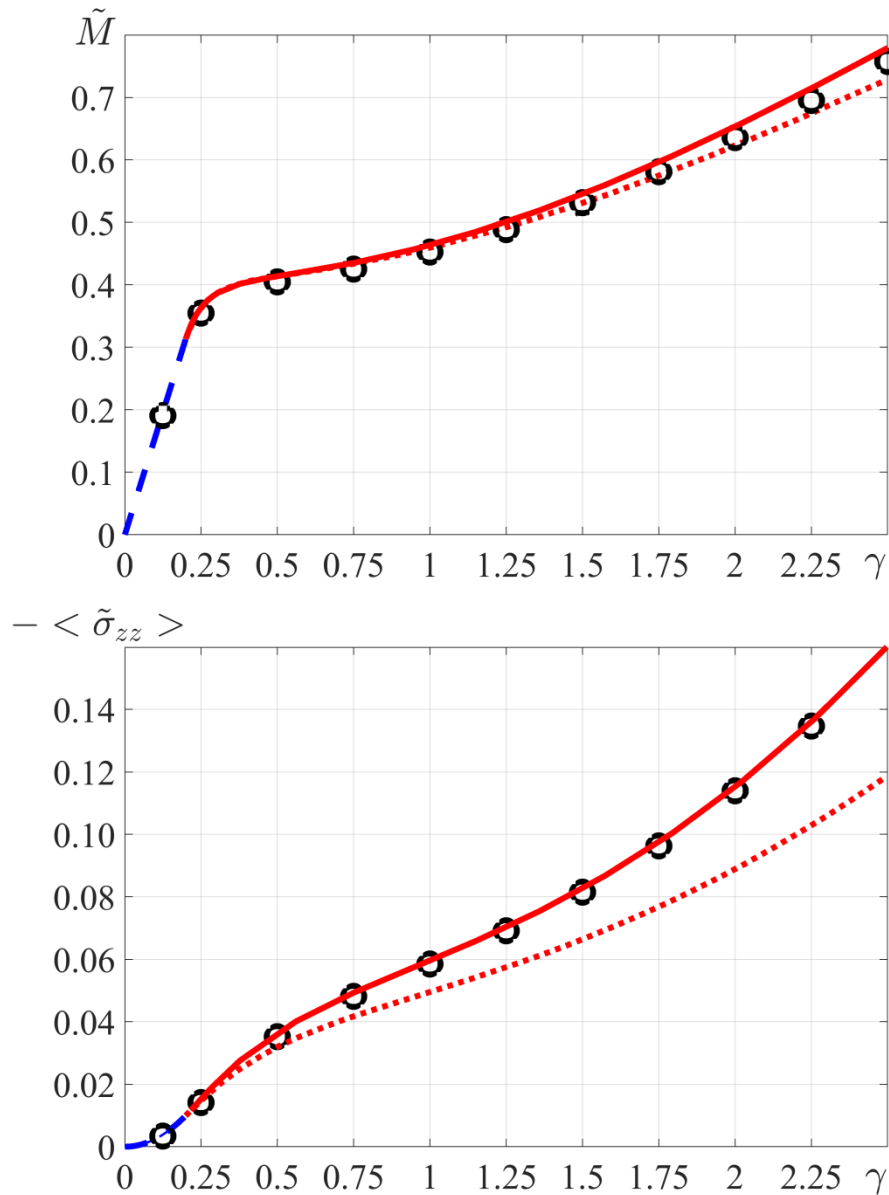


Рисунок 2.3.2 – Крутящий момент и осевое давление. Упругая модель неогукковского тела с $\mu = 50$ МПа. Монотонное квадратичное упрочнение $\tau_y = \tau_{y0}(1 + \chi q^2)$ с параметром $\chi = 4/3$; начальный сдвиговой предел текучести $\tau_{y0} = 10$ МПа. Красные линии – после начала пластического течения в образце, синие линии – чисто упругое деформирование образца. Сплошные линии соответствуют модели Мизеса, пунктирные – модели Треска. Круговые маркеры соответствуют численному решению в MSC. Marc (параметры геометрии образца $R_1 = L = 1$ м). Ось абсцисс отображает параметр нагружения – поверхностную деформацию $\gamma = \Theta R_1 / L$

Аналитическое решение для модели Мизеса, приведенное в подразделе 2.3.2, практически совпадает с расчетными значениями, полученными МКЭ-моделированием, как для крутящего момента, так и для осевого усилия.

Ниже приведено сравнение полученных в данном разделе аналитических решений с экспериментальными данными. Используются два источника: работа [129], в которой приведены данные по кручению с закрепленными торцами образца из поликарбоната (РС), и работа [134], в которой испытывались образцы из полиметилметакрилата (РММА). Отметим, что, судя по приведенным кривым, в обеих работах испытывались на кручение образцы, предварительно деформированные небольшим осевым усилием.

Оба полимера проявляют достаточно сложное поведение в диапазоне пластической деформации, которое характеризуется немонотонным упрочнением (см. рис. 2.3.3). В указанной работе [129] приведены также данные по одноосному сжатию обоих материалов при различных скоростях деформации, которые использованы здесь для задания функции упрочнения. В [129] кручению был подвергнут образец (РС) диаметром 31.75 мм и высотой 8.89 мм; угловая скорость испытания 0.25 град/с. Это соответствует скорости деформации на внешней поверхности образца $(\partial\gamma/\partial t)/\sqrt{3} = 0.0045\text{с}^{-1}$. Максимальная достигнутая величина γ в эксперименте составляла 1.4 (эквивалентная пластическая деформация не превосходит $\gamma/\sqrt{3} = 0.81$). В [134] испытаны образцы (РММА) диаметром 10 мм и высотой 42 мм; угловая скорость испытания 25 град/с. Это соответствует скорости деформации на внешней поверхности образца $(\partial\gamma/\partial t)/\sqrt{3} = 0.03\text{с}^{-1}$. Отметим, что в [134] испытывались предварительно деформированные осевым усилием образцы. Максимальная достигнутая в эксперименте величина γ до разрушения образца (для образца с начальным осевым сжатием 1.25 МПа) составляла 0.63. Эквивалентная пластическая деформация не превосходит $\gamma/\sqrt{3} = 0.36$. Скорость пластической деформации неоднородна по образцу, в качестве осредненной

по объему образца величины можно принять значение $0.001\epsilon^{-1}$ для экспериментов над РС [129] и $0.01\epsilon^{-1}$ для экспериментов над РММА [134]⁵. В соответствии с этими значениями выбраны кривые одноосного сжатия из [129] для задания функций упрочнения.

Будем использовать функцию упрочнения следующего вида [12]:

$$\sigma_y = \sigma_{y0} \left(1 + \frac{\sigma_{y*} - \sigma_{y0}}{\sigma_{y0}} \frac{2(q/q_*)}{1 + (q/q_*)^2} + Aq^n \right)$$

Эта функция является модификацией закона упрочнения [109] с целью, главным образом, учета неквадратичного роста предела текучести материала при больших деформациях. Она позволяет описать резкий рост предела текучести при малых пластических деформациях за пределами упругости, локальный пик предела текучести, разупрочнение и дальнейшее упрочнение по степенному закону – в целом, поведение, характерное для полимерных материалов (подробнее о механизмах см. [106, 108]). На рис. 2.3.3 приведено сопоставление кривых упрочнения с экспериментальными данными по одноосному сжатию [129] (в указанной работе приведены кривые «сопротивление деформации – полная деформация (*true strain*)»); для выделения пластической составляющей деформации для каждой экспериментальной точки от полной деформации отнята величина σ_y/E в предположении, что модуль упругости не меняется в ходе деформирования). Использованные значения параметров закона упрочнения приведены в таблице 2.3.1.

⁵ Модели пластических течений, использованные в диссертационной работе, не учитывают зависимость предела текучести материалов от скорости пластической деформации, поэтому остается довольствоваться оценками осредненной скорости деформации в качестве некоторой характерной величины, полагая, что она не слишком сильно меняется по объему образца.

Таблица 2.3.1 – Параметры законов упрочнения

Материал (скорость де- формации)	Модуль сдвига μ , МПа	Начальный предел те- кучести σ_{y0} , МПа	Параметры закона упрочнения $\sigma_y = \sigma_{y0} \left(1 + \frac{\sigma_{y*} - \sigma_{y0}}{\sigma_{y0}} \frac{2(q/q_*)}{1 + (q/q_*)^2} + Aq^n \right)$			
			σ_{y*} , МПа	q_*	A	n
РС ($0.001c^{-1}$)	550	45	74	0.032	2.1	2.5
РММА ($0.01c^{-1}$)	1100	85	140	0.055	0.85	2.7

На рис. 2.3.4, 2.3.5 приведено сравнение аналитических решений для моделей Мизеса и Треска, представленных в этом разделе, с экспериментальными данными [129] и [134] (для пластической модели Мизеса $\tau_y = \sigma_y / \sqrt{3}$, для пластической модели Треска $\tau_y = \sigma_y / 2$).

Полученные аналитические решения качественно соответствуют экспериментальным данным, по крайней мере, в области умеренных деформаций. Наблюдаемое количественное расхождение может объясняться следующими причинами:

- в качестве упругой модели выбрана простейшая модель Трелоара; при наличии достаточно информативных экспериментальных данных по деформированию РС и РММА в упругом диапазоне эту модель можно заменить на модель Муни – Ривлина для решения с условием пластичности Треска или на произвольную обобщенную модель неогуковского тела для решения с условием пластичности Мизеса;

- полученные решения не учитывают приобретенную деформационную анизотропию;

- вероятно, наиболее существенная причина – поведение материалов в пластическом диапазоне деформирования может сильно различаться при сдвиге и при одноосном растяжении / сжатии, поэтому возможности прогнозирования и модели Мизеса, и модели Треска ограничены; в таком случае, опре-

деление механических характеристик материала (в т.ч. параметров закона упрочнения) разумно проводить путем минимизации невязки в синтетических тестах, включающих различные схемы деформирования; другим вариантом может послужить использование более общих пластических моделей, например, [135], Unified Yield Criterion [136] или условий пластичности [73, 137] включающих инвариант $J_3 = \det \mathbf{s}$.

Выводы к разделу 2.3. Получены аналитические решения для упруго-пластической задачи о кручении с конечными деформациями цилиндрического стержня. Рассмотрены две модели материала: 1) комбинация гиперупругой модели Муни – Ривлина и условия пластичности Треска, обобщенного на изотропное деформационное упрочнение и температурное разупрочнение; 2) комбинация гиперупругой модели обобщенного неогуковского тела и условия пластичности Мизеса, обобщенного на изотропное деформационное упрочнение и температурное разупрочнение. Законы упрочнения / разупрочнения могут быть заданы произвольными функциями. При учете температурных эффектов игнорируются термоупругие деформации, используется адиабатическое приближение и учитывается только изменение механических характеристик материала при нагреве за счет выделяющейся теплоты пластического деформирования. Полученные решения сравнены между собой, отмечено, что модель Мизеса прогнозирует более высокие значения осевой нагрузки (эффект Свифта), при этом величины крутящего момента для обеих моделей достаточно близки, если модели откалиброваны так, что предел текучести материала на сдвиг совпадает. Решения очень близко соответствуют известным данным численных расчетов, выполненных в MSC.Marc. Проведено сравнение обоих решений с известными экспериментальными данными.

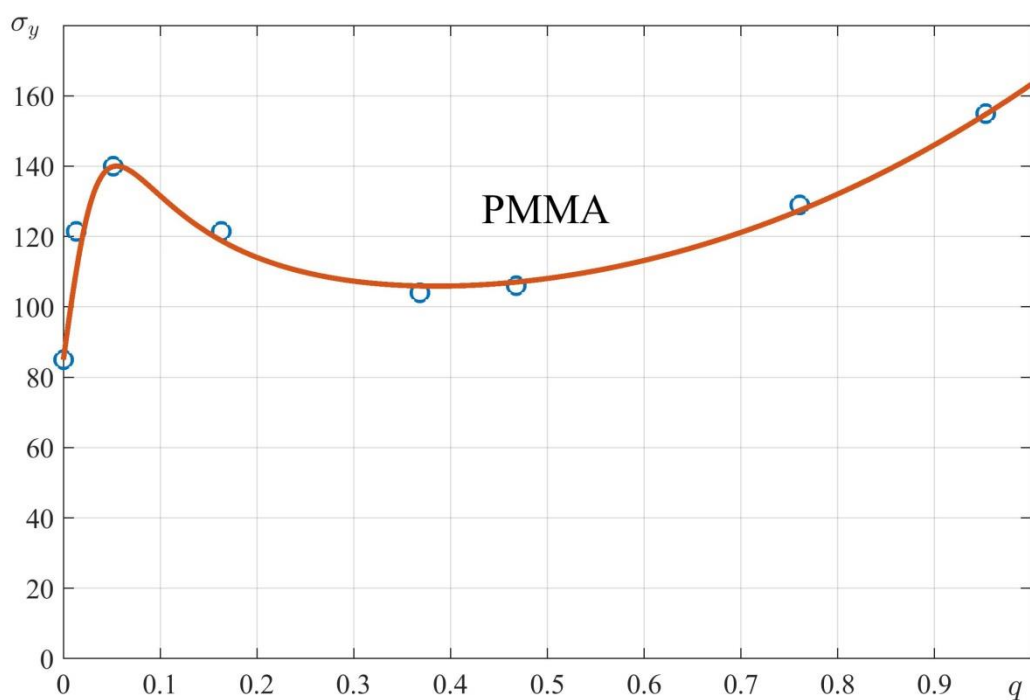
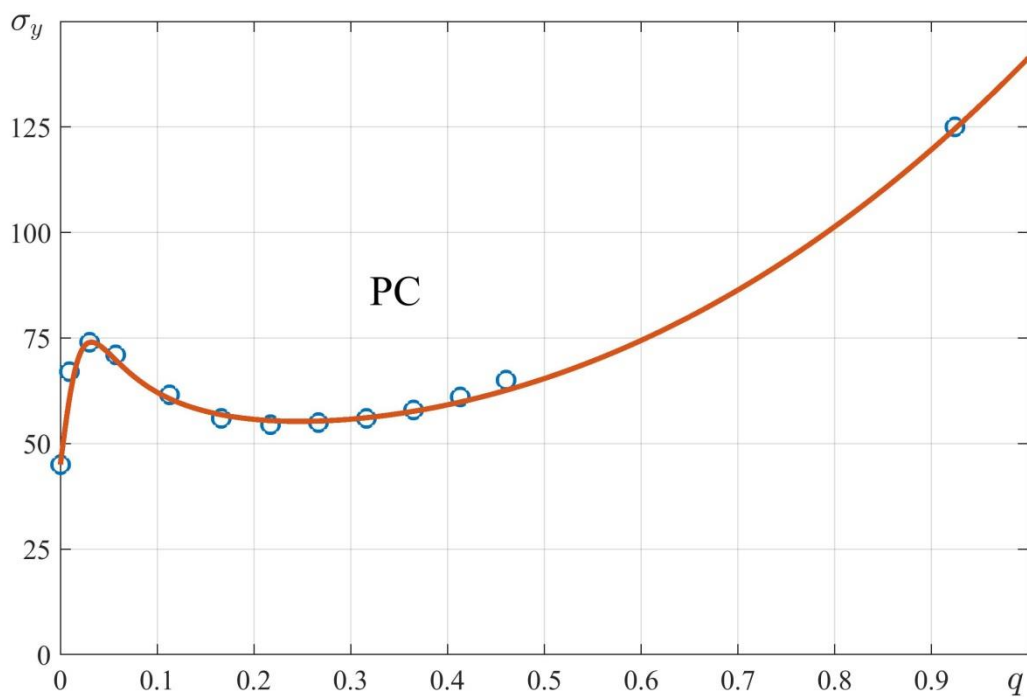


Рисунок 2.3.3 – Упрочнение РС и РММА в пластическом диапазоне (предел текучести σ_y в МПа, q – накопленная пластическая деформация). Маркеры – по экспериментальным данным об одноосном сжатии [129], сплошные ли-

нии – функция упрочнения $\sigma_y = \sigma_{y0} \left(1 + \frac{\sigma_{y*} - \sigma_{y0}}{\sigma_{y0}} \frac{2(q/q_*)}{1 + (q/q_*)^2} + Aq^n \right)$

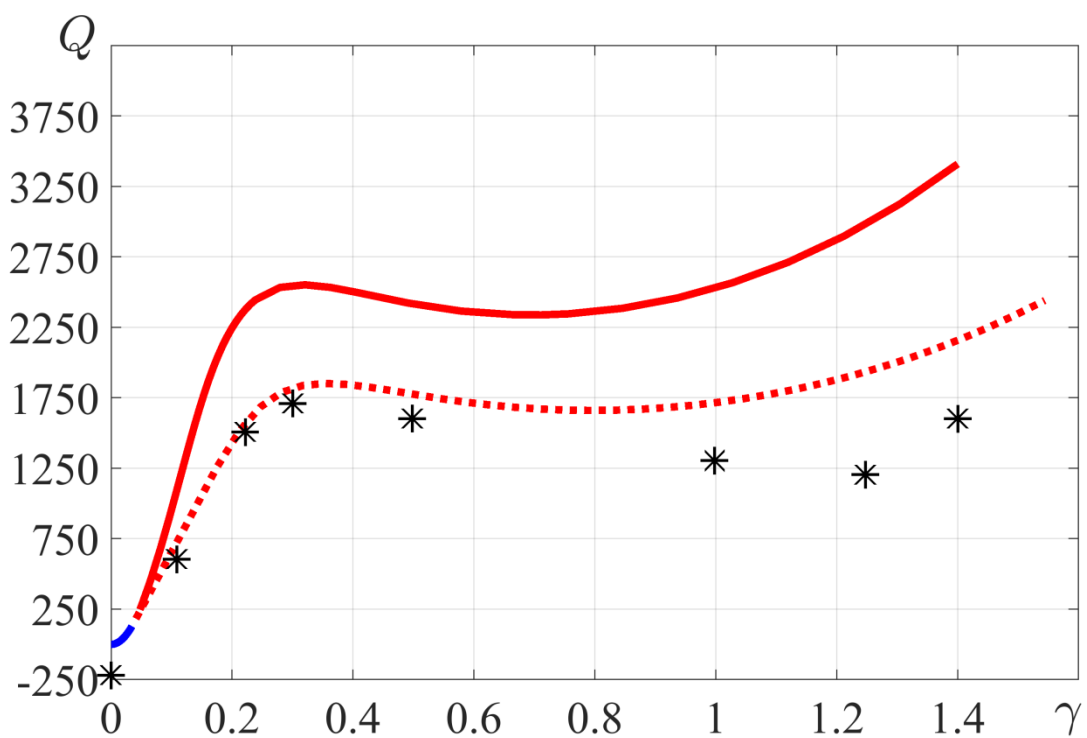
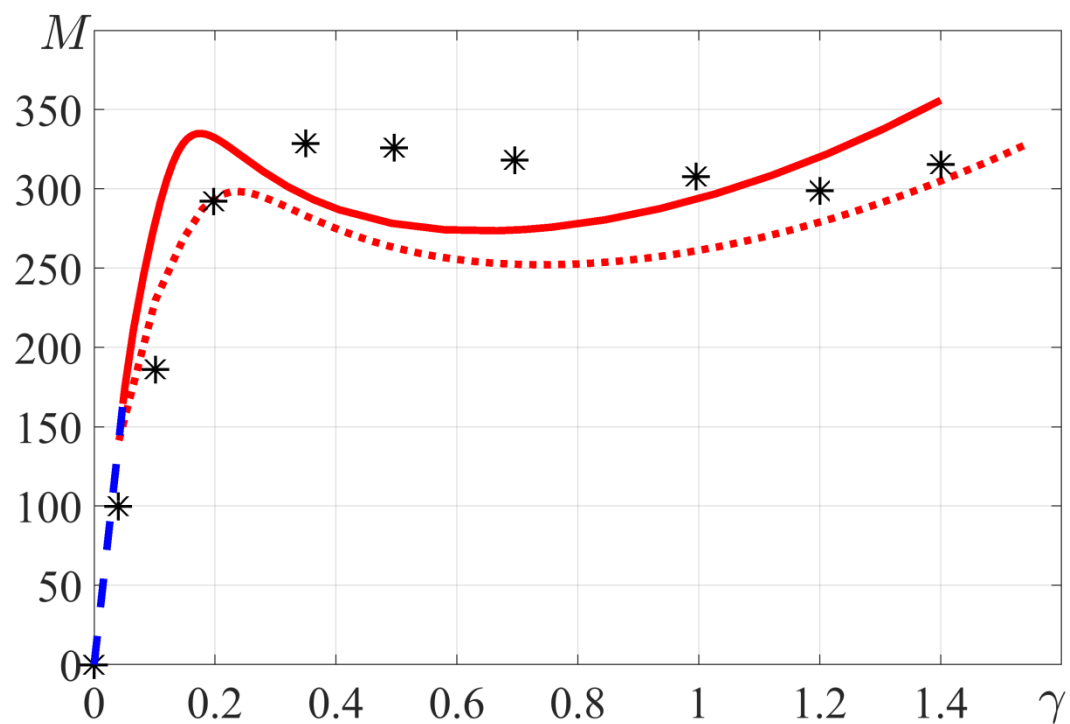


Рисунок 2.3.4 – Кривые крутящего момента (Н·м) и осевой силы (Н) для РС. Маркеры – экспериментальные данные [129]. Синий цвет – диапазон чисто упругого кручения, красный – упруго-пластического. Сплошная линия – аналитическое решение для материала с пластической моделью Мизеса, пунктирная – с пластической моделью Треска

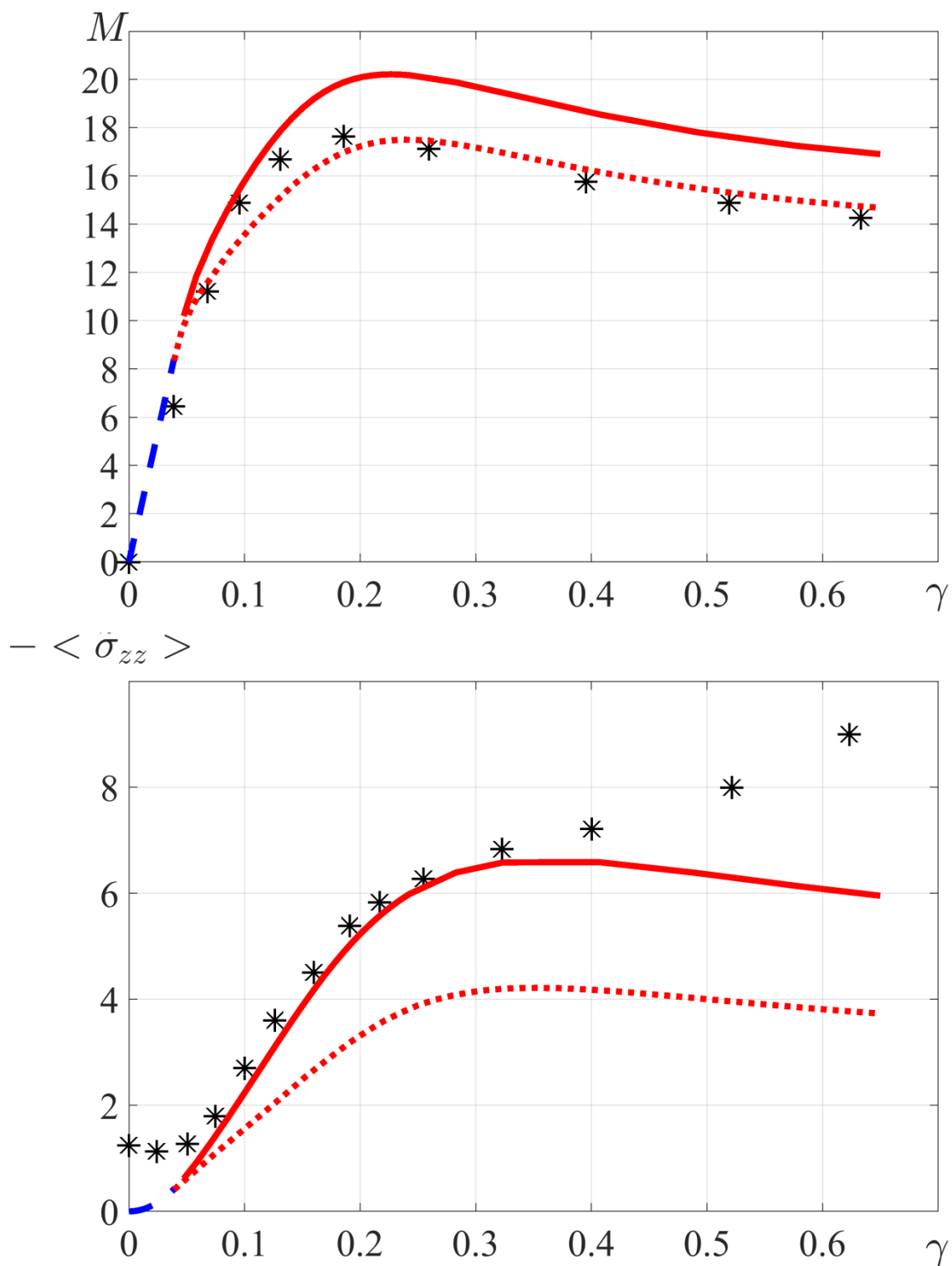


Рисунок 2.3.5 – Кривые крутящего момента ($\text{Н} \cdot \text{м}$) и среднего осевого давления $-\langle \sigma_{zz} \rangle = -2R_1^{-2} \int_0^{R_1} \sigma_{zz} r dr$ (МПа) для РММА. Маркеры – экспериментальные данные [134]. Синий цвет – диапазон чисто упругого кручения, красный – упруго-пластического. Сплошная линия – аналитическое решение для материала с пластической моделью Мизеса, пунктирная – с пластической моделью Треска

2.4. Аналитическое решение для кручения под высоким давлением в рамках геометрически-нелинейной неассоциированной пластичности

Кручение при высоком давлении (High Pressure Torsion – HPT) это современная технология обработки материалов интенсивной пластической деформацией, которая служит для улучшения их свойств (механических, электрических, оптических и т. д.). HPT (а также сходные техники) известны как экспериментальный метод исследования материалов, включая кинетику фазовых переходов и механо-химию, при высоком давлении и экстремальной пластической деформации [138–140]. В то же время существуют значительные трудности с интерпретацией результатов из-за неоднородности напряжений [141].

Техника HPT реализуется в два этапа: на первом этапе к цилиндрическому образцу (обычно с большим отношением диаметра к высоте) прикладывается высокое давление с помощью верхней наковальни (рис. 2.4.1); на втором этапе создается интенсивная деформация кручения под давлением путем поворота нижней наковальни.

Первые исследования HPT были сосредоточены на деформации металлов и сплавов. Эти исследования впервые были проведены Бриджменом [142, 143] и получили новый импульс как способ получения ультрамелкозернистых структур в конце 1980-х гг. после сообщения проф. Р. Валиева и его коллег [144]. Отметим также значительный вклад группы Л.Ф. Верещагина [145], связанный как с развитием экспериментальной техники, так и с исследованием механических свойств материалов при сверхвысоких давлениях. Достаточно полную картину исследований HPT можно получить из обзоров [146–148]. Обзор конечно-элементного моделирования HPT представлен в [149]. Сегодня известно применение HPT для уплотнения металлических порошков [150, 151], для обработки металлов, стёкол [152], полимеров (см. [153], а также цитированные там источники) и многих других материалов.

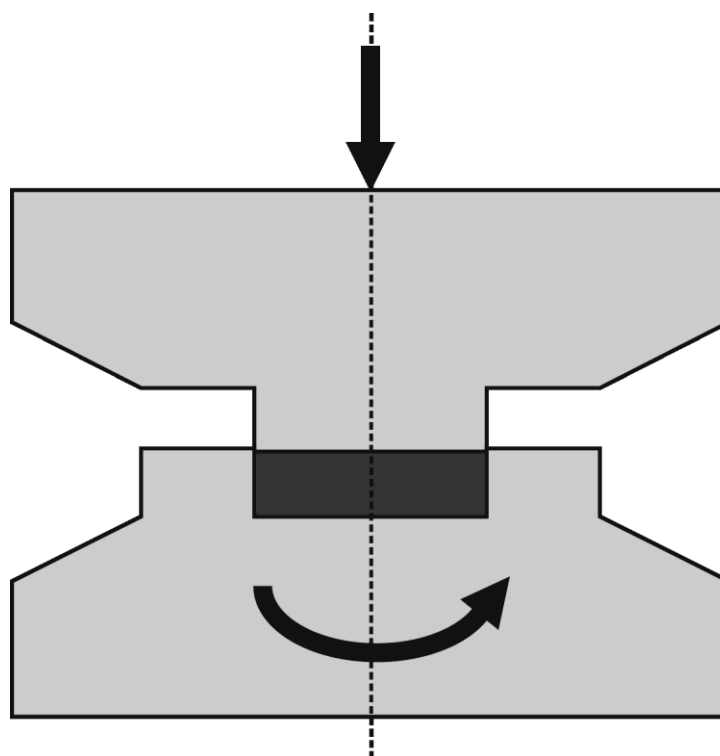


Рисунок 2.4.1 – Ограниченная схема НРТ [147]

Бриджменом было отмечено, что приложенное высокое давление изменяет способность материала сопротивляться разрушению. Для большинства материалов предел прочности увеличивается с увеличением давления [154]. Кроме того, кривые «крутящий момент – угол закручивания» существенно различаются при разном начальном давлении [143, 152, 155]. Причины этого эффекта различаются в зависимости от геометрических характеристик устройства для НРТ и свойств обрабатываемого материала. При использовании неограниченной или квазиограниченной схемы процесса величина приложенного давления определяет начальное изменение формы образца из-за радиального течения. Кроме того, давление напрямую влияет на условия контакта наковальни с образцом. При использовании ограниченной схемы распределение давления в образце до начала вращения наковальни должно быть близким к равномерному [147].

Влияние среднего напряжения на пластические свойства может быть очень значительным для полимеров [156–159], металлических стекол [160], органических материалов. Таким образом, корректная математическая модель НРТ для этих материалов должна учитывать это свойство. Кроме того,

при давлениях, типичных для НРТ процесса ($\sim 10^8 \div 10^{11}$ Па), предел текучести металлов также существенно изменяется [154, 161–163]. Эта особенность учтена в современных математических моделях процесса [164, 165]. С другой стороны, пластическая деформация даже при высоком давлении практически изохорна для широкого класса материалов. Эти два аргумента оправдывают использование неассоциированных моделей пластичности для моделирования НРТ-обработки компактных материалов.

В работе [166] обсуждалась концепция неассоциированной пластичности (класс моделей, в которых условие текучести не совпадает с пластическим потенциалом). В этом случае для изотропных материалов тензор скорости пластической деформации и тензор напряжений остаются соосными, как в классических теориях. В частном случае такой подход позволяет учесть влияние давления на переход материала из упругого в пластическое состояние и одновременно учесть изохорную пластическую деформацию. Неассоциированные модели пластичности используются в том числе в МКЭ-решениях для НРТ [165]. Наиболее часто используемые модели неассоциированной изохорной пластичности для изотропных материалов это кусочно-линейные модели (такие как совокупность пластического потенциала Треска и условия текучести Мора – Кулона или Хука – Брауна) и гладкие модели (например, совокупность пластического потенциала Мизеса и условия текучести Друкера – Прагера). Указанные модели используются также в задачах геомеханики [167] и для моделирования поведения некоторых аморфных полимеров [168] и металлов. Для описания последних также представлены более сложные неассоциированные модели [169].

Еще одна особенность рассматриваемого процесса НРТ заключается в том, что материал во время деформации подвергается большим поворотам и деформациям. Поэтому в настоящем исследовании используется упругопластическая модель конечных деформаций.

Существует несколько наиболее важных параметров процесса НРТ, которые в конечном итоге определяют свойства получаемого материала. Это

накопленная пластическая деформация и локальное давление в образце. Совместное действие этих параметров определяет фазовые и структурные превращения материала [170–172].

Существует много конечно-элементных решений для разных версий НРТ в рамках достаточно общих механических моделей [78, 165, 173–175]. В частности, последнее из упомянутых МКЭ-решений моделирует процесс RDAC (rotational diamond anvil cell) и рассматривает общую осесимметричную постановку задачи, учитывает проскальзывание в зоне контакта, влияние давления на механические характеристики материала образца, деформацию оснастки, конечные упругие и пластические деформации, а также фазовые превращения в материале.

В то же время аналитические решения для НРТ довольно редки. В [176] рассмотрено НРТ материалов со степенным упрочнением. Это решение учитывает круговой сдвиг материала и нелинейность угла закрутки по высоте образца. Аналитические решения [177, 178] учитывают влияние радиального сдвига, вызванного радиальным течением материала (второе из этих решений учитывает зависимость предела текучести от давления). Кроме того, отметим точные аналитические решения для упругопластического кручения при конечных деформациях для материала, не зависящего от давления [10, 11, 179].

В данном исследовании предлагается простая модель процесса и получено приближенное аналитическое решение в замкнутой форме. Это решение, в отличие от вышеупомянутых аналитических решений, учитывает упругие свойства материала, зависимость пластических свойств материала от давления и имеет дело с конечными упругими и пластическими деформациями.

Мы используем модель изотропного идеально-пластического несжимаемого материала. Это предположение основано на том факте, что заметные изменения предела текучести из-за деформационного упрочнения (или разупрочнения) прекращаются после определенного уровня деформации, который обычно составляет порядка единицы [25]. При НРТ-обработке типич-

ная деформация может превышать это значение на 1–2 порядка. В этом случае разумно использовать установившееся значение предела текучести. Кроме того, в ряде экспериментов по НРТ используется предварительно пластически деформированный образец [180]. При тех же условиях анизотропия, вызванная деформацией, также не имеет существенного значения для процессов монотонного нагружения (если исходный недеформированный материал изотропен). Эти предположения были подтверждены экспериментально для самых разных материалов [25] и принимались при конечно-элементном моделировании различных техник НРТ [164, 165, 173]. Кроме того, пластическая несжимаемость компактных материалов – обычное предположение для процессов интенсивной пластической деформации.

Несмотря на то, что используемая ниже модель не может описать проскальзывание в контактной паре «наковальня – образец», мы получили условия, при которых это проскальзывание исключено. Решение не учитывает возможность кругового сдвига в образце, который даже при отсутствии проскальзывания в контактной паре «наковальня – образец» может быть вызван трением на боковой поверхности образца. Считается, что эту силу трения можно существенно уменьшить за счет смазки. Также не учитывается радиальное течение материала, поскольку предполагается, что используемые инструменты (наковальни, обойма) значительно более жесткие, чем сам образец. Полученное таким образом решение относится к полностью ограниченной схеме НРТ. Упомянутая схема RDAC с жесткой обоймой также может быть аппроксимирована этим решением.

Температурные эффекты не учитываются, так как предполагается, что процесс идет достаточно медленно с эффективным отводом теплоты пластической диссипации. По той же причине не учитывается влияние скорости деформации на механические свойства материала. Также не учитывается изменение свойств материала, вызванное фазовыми превращениями, однако аналитические результаты, полученные для среднего напряжения и накопленной пластической деформации, могут быть использованы для приближенного

решения задачи о фазовых превращениях, вызванных пластической деформацией, с использованием соответствующего кинетического уравнения [177].

Модули упругости материала принимаются постоянными. Последнее предположение объясняется тем, что рост модулей упругости ряда материалов с увеличением приложенного давления ограничен. Например, модуль сдвига полиэтилена низкой плотности перестает существенно изменяться после давления 0,7–1,0 ГПа, в то время как предел текучести продолжает расти при гораздо более высоких давлениях [181]. Модуль сдвига полиэтилентерефталата изменяется очень мало, в то время как его предел текучести линейно увеличивается с давлением; то же самое можно сказать и о РММА при давлении 50–200 МПа [182], полиэтилене и полипропилене при достаточно высоких давлениях [183]. В целом зависимость предела текучести аморфных полимеров от давления более выражена, чем зависимость модулей упругости [184].

Основные цели данного раздела можно сформулировать следующим образом:

- построить приближенное аналитическое решение для упрощенной формулировки НРТ (ограниченная схема), пригодное для умеренных упругих и больших пластических деформаций и учитывающее зависимость предела текучести материала образца от давления; это решение может использоваться для тестирования МКЭ-алгоритмов;

- проанализировать влияние начального давления и параметров материала на распределение напряжений и накопленную пластическую деформацию в образце;

- обеспечить возможность более точного определения параметра, характеризующего зависимость предела текучести от давления из экспериментов для гиперупругих материалов в условиях неоднородного напряженного состояния.

2.4.1. Модель НРТ. Рассматривается цилиндрический образец высотой L и радиусом R_1 (рис. 2.4.1). Верхняя наковальня опускается на образец, за-

давая ему начальную нагрузку и ограничивая полость, в которую помещается образец. Эту нагрузку можно приближенно рассматривать как равномерное гидростатическое сжатие величиной p_0 [147]. Рассматривается несжимаемый материал, поэтому эта нагрузка не вызывает деформации среды. Далее положение верхней наковальни фиксируется, а нижняя наковальня вращается. Образец начинает испытывать кручение, которое вызывает сначала обратимую деформацию, затем необратимую. Деформированный материал полностью ограничен, так что высота и диаметр образца остаются неизменными. Плоские сечения, ортогональные оси вращения, остаются неискаженными.

Уравнения модели. Мы используем кинематику конечных упруго-пластических деформаций, описанную в главе 1.

В качестве гиперупругой модели будем использовать закон Муни – Ривлина с потенциалом

$$\Psi = C_1(I_2^e - 3) + C_2(I_1^e - 3), \quad \sigma = -p\mathbf{I} - 2\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}_e}\mathbf{c}_e, \quad \det\mathbf{c}_e = 1 \quad (2.4.1)$$

где $C_1 > 0$, $0 \leq C_2 \leq C_1$ есть упругие модули материала. Функция свободной энергии (2.4.1) представляет собой общее представление с ошибкой четвертого порядка относительно градиента перемещений для несжимаемой изотропной среды [185]. Она обычно используется для резиноподобных и полимерных материалов и предполагает линейный отклик материала на деформацию сдвига.

Использование нелинейного закона упругости предпочтительно, поскольку упругая деформация в рассматриваемом процессе не является бесконечно малой. Отметим, в частности, работу [165], в которой принята модель материала Мурнагана. Конечно, предположение об упругой несжимаемости достаточно сильное, особенно для исследований при высоких давлениях. Тем не менее, предыдущие аналитические решения [176, 177], полученные для несжимаемого жесткопластического материала, хорошо согласуются с решениями МКЭ, в которых упругие деформации не считаются изохорными [176,

186]. Поэтому можно полагать, что упругий закон (2.4.1) с некоторой погрешностью подходит для любых материалов. Особенно с учетом того, что изменение объема образца на стадии кручения намного меньше, чем изменение на стадии гидростатического сжатия [174].

Используется неассоциированная модель изохорного идеально-пластического течения, которая учитывает зависимость предела текучести от давления. Модель включает условие текучести Мора – Кулона

$$f = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + g \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \tau_{y0} = 0 \quad (2.4.2)$$

и пластический потенциал Треска

$$g = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.4.3)$$

здесь $g > 0$ есть параметр чувствительности к давлению. Таким образом, мы рассматриваем только материалы, у которых предел текучести увеличивается с увеличением давления.

Условие (2.4.2) хорошо согласуется с экспериментальными данными для аморфных полимеров и металлических стекол [187–190]. Кроме того, условие текучести Мора – Кулона можно рассматривать как приближение гладкого условия Друкера – Прагера. Пластический потенциал Треска также можно рассматривать как приближение потенциала Мизеса, который более широко используется для описания поведения металлов.

Рассматривается квазистатический процесс, для которого выполняется уравнение равновесия

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.4.4)$$

Эквивалентная гиперболическая система. Как и в предыдущем разделе, при круговом движении вектор перемещений в актуальной конфигурации имеет вид

$$\mathbf{u} = r \left(1 - \cos \frac{z\Theta}{L} \right) \mathbf{e}_r + r \sin \frac{z\Theta}{L} \mathbf{e}_\varphi \quad (2.4.5)$$

где Θ есть угол скрутки одного торца цилиндра относительно другого. Предполагается, что после начала пластического течения в образце представление (2.4.5) вектора перемещений остается в силе. В этом случае тензор напряжений Коши зависит только от координаты r .

Упругое равновесие несжимаемого цилиндра при сочетании однородного гидростатического сжатия и кручения с закрепленными от осевого смещения торцами определяется известным универсальным решением [191, 192]. В упругой области $\mathbf{c}^e = \mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}$, $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - (\nabla \otimes \mathbf{u})^T$. Компоненты тензора $\mathbf{c}^e$ согласно (2.4.5) есть

$$c_{rr}^e = c_{\varphi\varphi}^e = 1, \quad c_{r\varphi}^e = c_{rz}^e = 0, \quad c_{zz}^e = 1 + (\gamma\tilde{r})^2, \quad c_{\varphi z}^e = -\gamma\tilde{r} \quad (2.4.6)$$

здесь введен безразмерный радиус $\tilde{r} = r/R_1$, а также параметр нагружения $\gamma = R_1\Theta/L$, который следует понимать как поверхностную сдвиговую деформацию.

Из (2.4.1) следует, что

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} - 2(C_1 \text{tr} \mathbf{c}_e + C_2) \mathbf{c}_e + 2C_1 \mathbf{c}_e^2. \quad (2.4.7)$$

Согласно (2.4.6) и (2.4.7), компоненты напряжений в упругой области, удовлетворяющие уравнению равновесия (2.4.4) и условию начального однородного гидростатического сжатия величиной p_0 , имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{rr}|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{ep}} - C_1(\gamma\tilde{r}_{ep})^2 + C_1(\gamma\tilde{r})^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{rr}|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{ep}} - C_1(\gamma\tilde{r}_{ep})^2 + 3C_1(\gamma\tilde{r})^2, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{rr}|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{ep}} - C_1(\gamma\tilde{r}_{ep})^2 + (C_1 - 2C_2)(\gamma\tilde{r})^2, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{\varphi z} = 2(C_1 + C_2)\gamma\tilde{r}.$$

Здесь $\tilde{r}_{ep}(\gamma)$ есть положение движущейся упругопластической границы. До начала пластического течения в образце $\tilde{r}_{ep} = 1$ и $\sigma_{rr}|_{\tilde{r}=1} = -p_0$.

На основании (2.4.8) собственные значения тензора σ имеют следующее выражение:

$$\sigma_{II} = \sigma_{rr}, \quad \sigma_{I,III} = \sigma_{rr} + (C_1 - C_2)(\gamma\tilde{r})^2 \pm (C_1 + C_2)\gamma\tilde{r}\left((\gamma\tilde{r})^2 + 4\right)^{1/2}. \quad (2.4.9)$$

Из (2.4.9) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_I - \sigma_{II} &= (C_1 - C_2)(\gamma\tilde{r})^2 + (C_1 + C_2)\gamma\tilde{r}\left((\gamma\tilde{r})^2 + 4\right)^{1/2} \geq 2C_1(\gamma\tilde{r})^2 \geq 0 \\ \sigma_{II} - \sigma_{III} &= -(C_1 - C_2)(\gamma\tilde{r})^2 + (C_1 + C_2)\gamma\tilde{r}\left((\gamma\tilde{r})^2 + 4\right)^{1/2} \geq \\ &\geq 2C_2(\gamma\tilde{r})^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

неравенства в (2.4.10) выполнены строго за исключением $\gamma\tilde{r} = 0$. Тогда $\sigma_1 = \sigma_I$, $\sigma_3 = \sigma_{III}$ и σ_{rr} есть промежуточное главное напряжение в упругой области. Точка, представляющая напряженное состояние при упругом деформировании, находится на грани $g = (\sigma_I - \sigma_{III})/2$ призмы Треска и не может выйти на ребро.

Также из (2.4.9) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + g \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} &= \\ &= (C_1 + C_2)\gamma\tilde{r}\left((\gamma\tilde{r})^2 + 4\right)^{1/2} + g\left(\sigma_{rr} + (C_1 - C_2)(\gamma\tilde{r})^2\right) \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Согласно (2.4.8) $\partial\sigma_{rr}/\partial r \geq 0$. Тогда функция $(\sigma_1 - \sigma_3)/2 + g(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ монотонно возрастает с увеличением r , по крайней мере, если $C_1 \geq C_2$. Последнее неравенство выполнено для широкого класса гиперупругих материалов. Таким образом, условие текучести (2.4.2) впервые выполнится на поверхности $r = R_0$.

Будем искать тензор $\mathbf{c}^e$ в пластической области в следующем координатном представлении:

$$[\mathbf{c}^e] = \begin{pmatrix} c_{rr}^e & 0 & 0 \\ 0 & c_{\varphi\varphi}^e & c_{\varphi z}^e \\ 0 & c_{\varphi z}^e & c_{zz}^e \end{pmatrix},$$

предполагая, что это не противоречит эволюционному уравнению (1.2.4) с начальными условиями (2.4.6). Согласно (2.4.7), ненулевые компоненты напряжения, выраженные через упругую деформацию в пластической области, равны

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p - 2c_{rr}^e [C_2 + C_1(c_{\varphi\varphi}^e + c_{zz}^e)] \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p - 2c_{\varphi\varphi}^e [C_2 + C_1(c_{rr}^e + c_{zz}^e)] + 2C_1(c_{\varphi z}^e)^2 \\ \sigma_{zz} &= -p - 2c_{zz}^e [C_2 + C_1(c_{rr}^e + c_{\varphi\varphi}^e)] + 2C_1(c_{\varphi z}^e)^2 \\ \sigma_{\varphi z} &= -2c_{\varphi z}^e (C_2 + C_1 c_{rr}^e) \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Поскольку компоненты упругой деформации и компонента напряжений σ_{rr} непрерывны на упругопластической границе, функция p и все другие компоненты напряжений также непрерывны на упругопластической границе.

После того, как пластическое течение начинается в точке сплошной среды, в течение некоторого периода времени σ_{rr} остается промежуточным главным напряжением. Тогда в пластической области при активном нагружении представление тензора скорости пластической деформации, полученное из (2.4.3), имеет вид [193]

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^p &= \frac{\Lambda}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma} - \sigma_2 \mathbf{I}}{\sigma_1 - \sigma_3} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} - \sigma_3 \mathbf{I}}{\sigma_1 - \sigma_2} - \frac{\boldsymbol{\sigma} - \sigma_1 \mathbf{I}}{\sigma_2 - \sigma_3} \right) = \\ &= \frac{\Lambda \left((\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}) (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) + 2\sigma_{\varphi z} (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi) \right)}{2 \left((\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{\varphi z}^2 \right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Имеют место следующие представления

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= z\tilde{r}\gamma_t \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{l} = (\nabla \otimes \mathbf{v})^T = -\frac{z}{R_1}\gamma_t (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r) + \tilde{r}\gamma_t \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z, \\ (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{c}^e &= \frac{z}{R_1}\gamma_t (c_{rr}^e - c_{\varphi\varphi}^e)(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r) - \frac{z}{R_1}\gamma_t c_{\varphi z}^e (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r) \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Здесь γ_t обозначает частную производную γ по времени.

Из эволюционного уравнения (1.2.4) для тензора $\mathbf{c}^e$ с учетом (2.4.13) и (2.4.14) следует, что $\partial c_{rr}^e / \partial t = 0$, и поэтому компонента c_{rr}^e остается постоянной на протяжении всего процесса деформирования,

$$c_{rr}^e = 1. \quad (2.4.15)$$

Из условия несжимаемости $\det \mathbf{c}_e = 1$ следует, что

$$(c_{\varphi z}^e)^2 = c_{\varphi\varphi}^e c_{zz}^e - 1, \quad c_{\varphi z}^e \leq 0. \quad (2.4.16)$$

Подстановка (2.4.13) и (2.4.14) с учетом (2.4.12), (2.4.15), (2.4.16) в эволюционное уравнение (1.2.4) для тензора $\mathbf{c}^e$ приводит к системе двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{\varphi\varphi}^e}{\partial \gamma} &= -\frac{\Lambda}{\gamma_t} (\Sigma^2 - 1)^{-1/2} (c_{\varphi\varphi}^e \Sigma - 1) \\ \frac{\partial c_{zz}^e}{\partial \gamma} &= -\frac{\Lambda}{\gamma_t} (\Sigma^2 - 1)^{-1/2} (c_{zz}^e \Sigma - 1) - 2\tilde{r}c_{\varphi z}^e \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Поскольку рассматривается только процесс активного нагружения, в (2.4.17) используется подобный времени монотонный параметр нагружения γ ; введено обозначение $\Sigma = (c_{\varphi\varphi}^e + c_{zz}^e)/2$.

Складывая уравнения (2.4.17), можно выразить пластический множитель:

$$\Lambda = -\gamma_t (\Sigma^2 - 1)^{-1/2} \left(\tilde{r} c_{\varphi z}^e + \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma} \right) > 0 \quad (2.4.18)$$

Далее выражается следующее

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial c_{\varphi z}^e}{\partial \gamma} &= \frac{1}{2\tilde{r}c_{\varphi z}^e} \left(\frac{\partial c_{\varphi\varphi}^e}{\partial \gamma} c_{zz}^e + c_{\varphi\varphi}^e \frac{\partial c_{zz}^e}{\partial \gamma} \right) = \\ &= -\Sigma + \left(\Sigma^2 - (c_{\varphi z}^e)^2 - 1 \right)^{1/2} + \frac{\Sigma c_{\varphi z}^e}{\Sigma^2 - 1} \left(c_{\varphi z}^e + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma} \right), \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

здесь учтено, что

$$c_{\varphi\varphi}^e = \Sigma - \left(\Sigma^2 - (c_{\varphi z}^e)^2 - 1 \right)^{1/2}. \quad (2.4.20)$$

Условие текучести (2.4.2) с учетом выражений для главных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3} &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}}{2} \pm \frac{1}{2} \left((\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{\varphi z}^2 \right)^{1/2} = \\ &= -p - 2C_1 - 2(C_1 + C_2)\Sigma \pm 2(C_1 + C_2)(\Sigma^2 - 1)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

позволяет выразить безразмерное давление $\tilde{p}$ как функцию Σ

$$\tilde{p} = \left((\Sigma^2 - 1)^{1/2} - \tilde{\tau}_{y0} \right) / \mathcal{G} - (1 + C)/2 - \Sigma, \quad (2.4.22)$$

введены следующие обозначения $\tilde{C} = (C_1 - C_2)/(C_1 + C_2)$, $\tilde{C} \in [0, 1]$, $\tilde{p} = p/\mu$,

$$\tilde{\tau}_{y0} = \tau_{y0}/\mu, \quad \mu = 2(C_1 + C_2).$$

С учетом (2.4.12), (2.4.15), (2.4.16), (2.4.20), (2.4.22) уравнение равновесия (2.4.4) можно выразить через неизвестные Σ и $c_{\varphi z}^e$

$$\tilde{r} \frac{\partial \Sigma}{\partial \tilde{r}} = -\mathcal{G} \frac{\tilde{C}(\Sigma - 1) + \left(\Sigma^2 - (c_{\varphi z}^e)^2 - 1 \right)^{1/2}}{\mathcal{G}\tilde{C} + \Sigma(\Sigma^2 - 1)^{-1/2}}. \quad (2.4.23)$$

После следующей замены переменных

$$\tanh \alpha = -c_{\varphi z}^e \left(\Sigma^2 - 1 \right)^{-1/2}, \quad \cosh \beta = \Sigma \left(\Sigma^2 - 1 \right)^{-1/2}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (2.4.24)$$

уравнения (2.4.19) и (2.4.23) принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} = \cosh \beta - \cosh \alpha \end{cases} \quad (2.4.25a)$$

$$\begin{cases} \tilde{r} \frac{\partial \beta}{\partial \tilde{r}} = \frac{\mathcal{G} \sinh \beta}{\mathcal{G} \tilde{C} + \cosh \beta} \left(\frac{1}{\cosh \alpha} + \frac{\tilde{C}}{\exp \beta} \right) \end{cases} \quad (2.4.25b)$$

Гиперболическая система (2.4.25) замыкается граничными условиями на фиксированной границе $r = R_1$ и на подвижной неизвестной упругопластической границе $\tilde{r} = \tilde{r}_{ep}(\gamma)$:

$$\coth \beta|_{\tilde{r}=1} = \Sigma|_{\tilde{r}=1} = 1 + \gamma_0^2 / 2, \quad (2.4.26a)$$

$$\coth \beta|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{ep}} = \Sigma|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{ep}} = 1 + (\tilde{r}_{ep} \gamma)^2 / 2, \quad (2.4.26b)$$

$$\sinh \alpha|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{ep}} = 2(\tilde{r}_{ep} \gamma)^{-1}. \quad (2.4.26c)$$

Начальное условие

$$\frac{\gamma_0^2}{2} = \frac{(\tilde{\tau}_y^2 + 2\mathcal{G}\tilde{C}\tilde{\tau}_y + 1)^{1/2} - \mathcal{G}\tilde{C}\tilde{\tau}_y - 1}{1 - (\mathcal{G}\tilde{C})^2}, \quad \tilde{\tau}_y = \tilde{\tau}_{y0} + \mathcal{G}\tilde{p}_0, \quad \tilde{p}_0 = \frac{p_0}{\mu} \quad (2.4.27)$$

определяется на основании условия текучести с учетом равенства (2.4.11) и граничного значения $\sigma_{rr}|_{\tilde{r}=1} = -p_0$. Здесь γ_0 есть параметр нагружения, при котором начинается пластическое течение на поверхности $r = R_1$, т.е. $\tilde{r}_{ep}(\gamma_0) = 1$.

Условие (2.4.26a) получено из равенств $\sigma_{rr}|_{\tilde{r}=1} = -p_0$ и (2.4.22); условия (2.4.26b), (2.4.26c) вытекают из непрерывности деформаций на упругопластической границе. Непрерывность σ_{rr} на упругопластической границе выполняется, поскольку функция β непрерывна.

Из (2.4.21) с учетом (2.4.12) и (2.4.15) следует, что при $\Sigma \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_{rr} &= 2(C_1 - C_2)(\Sigma - 1) + 2(C_1 + C_2)(\Sigma^2 - 1)^{1/2} \geq 0 \\ \sigma_{rr} - \sigma_3 &= -2(C_1 - C_2)(\Sigma - 1) + 2(C_1 + C_2)(\Sigma^2 - 1)^{1/2} \geq \\ &\geq 2C_1 \left(1 - \Sigma + (\Sigma^2 - 1)^{1/2} \right) \geq 0\end{aligned}$$

кроме того, строгие равенства $\sigma_1 = \sigma_{rr}$, $\sigma_{rr} = \sigma_3$ могут выполняться только одновременно при $\Sigma = 1$ (это соответствует напряженному состоянию гидростатического сжатия). Согласно (2.4.23), в пластической области $\partial\Sigma/\partial r \leq 0$, и согласно (2.4.26a) $\Sigma|_{r=R_0} > 1$. Таким образом, $\Sigma > 1$ в пределах всей пластической области при активном нагружении и σ_{rr} остается промежуточным главным напряжением.

Замечание 1 (точное решение в случае материала, не зависящего от давления). В частном случае $\mathcal{G} = 0$, который соответствует модели ассоциированной пластичности, система (2.4.25) с условиями (2.4.26) имеет автомодельное решение [10, 11]. Действительно, если $\mathcal{G} = 0$, то из (2.4.22) следует, что $\Sigma^2 - 1 = \tilde{\tau}_{y0}^2 = \text{const}$, $\cosh \beta = (\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1)^{1/2} / \tilde{\tau}_{y0}$ и (2.4.25b), также как и (2.4.26a), выполняется тождественно. И уравнение (2.4.26b) в этом случае определяет положение упругопластической границы

$$(\tilde{r}_{ep}\gamma)^2 = \gamma_0^2 = 2 \left((\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1)^{1/2} - 1 \right). \quad (2.4.28)$$

Уравнение (2.4.25a) с граничным условием (2.4.26c) имеет точное решение с автомодельной переменной $\gamma\tilde{r}$:

$$\alpha(\tilde{r}, \gamma) = \ln \left((\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1)^{1/2} + \frac{1 + \frac{2\tilde{\tau}_{y0}}{\gamma_0} + \tanh\left(\frac{\gamma\tilde{r} - \gamma_0}{2\tilde{\tau}_{y0}}\right)}{1 + \left(1 + \frac{2\tilde{\tau}_{y0}}{\gamma_0}\right) \tanh\left(\frac{\gamma\tilde{r} - \gamma_0}{2\tilde{\tau}_{y0}}\right)} \right) - \ln \tilde{\tau}_{y0}. \quad (2.4.29)$$

С учетом (2.4.24) $(\tilde{\tau}_{y0} \tanh \alpha)^2 + 1 = c_{\varphi\varphi}^e \left(2(\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1)^{1/2} - c_{\varphi\varphi}^e \right)$, откуда

$$c_{\varphi\varphi}^e = (\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1)^{1/2} - \frac{\tilde{\tau}_{y0}}{\cosh \alpha}.$$

Функция p в пластической области в указанном частном случае получается прямым интегрированием уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \tilde{p} = \tilde{p}_0 - \frac{1 - \tilde{C}}{2} - (1 + \tilde{C})(\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1)^{1/2} + \\ + \tilde{C} \left((\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1)^{1/2} - 1 \right) \ln \frac{1}{\tilde{r}} + \tilde{\tau}_{y0} \int_{\tilde{r}}^1 \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r} \cosh \alpha}. \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

Согласно (2.4.12) с учетом (2.4.15) и (2.4.16) безразмерное среднее напряжение $\tilde{\sigma} = \text{tr } \sigma / (3\mu)$ в пластической области имеет вид

$$\tilde{\sigma} = -\tilde{p} - \frac{3 + \tilde{C}}{6} \left(1 + 2(\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1)^{1/2} \right), \quad r \geq r_{ep}(\gamma). \quad (2.4.31)$$

В упругой области согласно (2.4.8)

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{ep}} + \frac{3 + 7\tilde{C}}{6} \left(\frac{(\gamma\tilde{r})^2}{2} + 1 - (\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1)^{1/2} \right), \quad r < r_{ep}(\gamma). \quad (2.4.32)$$

2.4.2. Алгоритм численного решения. На каждом шаге τ по параметру нагружения γ начиная с γ_0 должно быть выполнено следующее.

1. Задается начальное приближение $\tilde{r}_{ep}^\tau$ для положения упруго-пластической границы. Скорость распространения упругопластической границы уменьшается с увеличением γ , поэтому начальное приближение $\tilde{r}_{ep}^\tau$ на каждом шаге по параметру нагружения γ может быть рассчитано на основе средней скорости на предыдущем шаге. Это значение $\tilde{r}_{ep}^\tau$ гарантированно будет меньше реального значения. Для рассматриваемой модели неассоцииро-

ванной пластичности упругопластическая граница является поверхностью разрыва скорости пластической деформации и, следовательно, из (2.4.18) является также поверхностью разрыва производной $\partial\Sigma/\partial\gamma$. Поэтому на первом шаге по параметру нагружения γ для нахождения начальной скорости распространения упругопластической границы следует использовать кинематическое условие совместности Адамара, которое для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\left. \frac{\partial\Sigma}{\partial\gamma} \right|_{\tilde{r}=1, \gamma=\gamma_0} = - \left. \frac{\partial\tilde{r}_{ep}}{\partial\gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} \left. \frac{\partial\Sigma}{\partial\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1, \gamma=\gamma_0},$$

где

$$\left. \frac{\partial\Sigma}{\partial\gamma} \right|_{\tilde{r}=1, \gamma=\gamma_0} = \left. \frac{\partial\Sigma^e}{\partial\gamma} \right|_{\tilde{r}=1, \gamma=\gamma_0} - \left. \frac{\partial\Sigma^p}{\partial\gamma} \right|_{\tilde{r}=1, \gamma=\gamma_0}, \quad \left. \frac{\partial\Sigma}{\partial\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1, \gamma=\gamma_0} = \left. \frac{\partial\Sigma^e}{\partial\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1, \gamma=\gamma_0} - \left. \frac{\partial\Sigma^p}{\partial\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1, \gamma=\gamma_0},$$

Здесь индекс «e» означает, что значение рассчитывается из соотношений, справедливых в упругой области, «p» – в пластической области. В частности, $\left. \partial\Sigma^p/\partial\gamma \right|_{\tilde{r}=1, \gamma=\gamma_0} = 0$ поскольку Σ^p не меняется на поверхности $r = R_0$ согласно (2.4.26a) после зарождения пластического течения; $\left. \partial\Sigma^e/\partial\gamma \right|_{\tilde{r}=1, \gamma=\gamma_0}$ и $\left. \partial\Sigma^e/\partial\tilde{r} \right|_{\tilde{r}=1, \gamma=\gamma_0}$ определяются согласно (2.4.6); $\left. \partial\Sigma^p/\partial\tilde{r} \right|_{\tilde{r}=1, \gamma=\gamma_0}$ определяется согласно (2.4.23). После некоторых преобразований

$$\left. \frac{\partial\tilde{r}_{ep}}{\partial\gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} = - \frac{1}{\gamma_0} \left(1 - \vartheta \frac{1 + \tilde{C}}{\vartheta(1 + 3\tilde{C}) + 2x} \right), \quad x = \frac{2 + \gamma_0^2}{\gamma_0 \sqrt{4 + \gamma_0^2}}$$

2. После того, как сделано определенное предположение о положении упругопластической границы на текущем шаге γ , необходимо определить набор узловых точек на интервале $\tilde{r} \in (\tilde{r}_{ep}^\tau, \tilde{r}_{ep}^{\tau-1})$. Если шаг по γ достаточно мал, то можно считать, что скорость распространения упругопластической

границы на шаге не изменилась, и для каждой из этих точек можно определить, при каком значении γ упругопластическая граница прошла через эту точку. Тогда значения α и β в этих точках во время прохождения упругопластической границы можно считать известными по (2.4.26b) и (2.4.26с), а согласно (2.4.25a) можно определить значение $\partial\alpha/\partial\gamma$. И после этого можно по явной схеме определить значение α в этих узлах в конце текущего шага по γ . В узловых точках, введенных на предыдущих шагах (на интервале $\tilde{r} \in [\tilde{r}_{ep}^{\tau-1}, 1]$), значение производной $\partial\alpha/\partial\gamma$ вычисляется согласно (2.4.25a) в начале текущего шага по γ на основе узловых значений α и β , известных из предыдущего шага. И также по явной схеме вычисляется значение α в этих узлах в конце текущего шага.

3. Значения β в конце текущего шага по γ рассчитываются с использованием односторонней производной, определенной по (2.4.25b), с учетом граничного условия (2.4.26a) и узловых значений α , которые рассчитаны в предыдущем пункте. Если при итеративном вычислении значений β в пространственных узлах (начиная с внешней поверхности $\tilde{r} = 1$) в каком-то узле выполнится граничное условие (2.4.26b), тогда начальное предположение о положении упругопластической границы должно быть пересмотрено. Новым приближением текущего положения упругопластической границы $\tilde{r}_{ep}^{\tau}$ объявляется узел, в котором выполнилось (2.4.26b). После этого алгоритм возвращается на пункт 2. Расчеты ведутся до сходимости по значению $\tilde{r}_{ep}^{\tau}$. На этом этап алгоритма по параметру нагружения γ завершен. Напряженное состояние образца как в упругой, так и в пластической областях определяется найденным положением упругопластической границы и узловыми значениями α и β .

2.4.3. Приближенное аналитическое решение. Описанный алгоритм реализован в виде скрипта в MATLAB. Результаты численных расчетов представлены на рис. 2.4.2. Геометрические параметры следующие:

$R_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $L = 1 \cdot 10^{-3}$ м; начальное гидростатическое давление $p_0 = 500$ МПа. Параметры материала (для полиэтилентерефталата из [182]) $C_2 = 0$, $C_1 = \mu/2 = 250$ МПа, $\tau_{y0} = 50$ МПа, $\mathcal{J} = 0.1$. Упомянем здесь работу [194], посвященную синтезу под высоким давлением микроразмерных алмазов из полиэтилентерефталата.

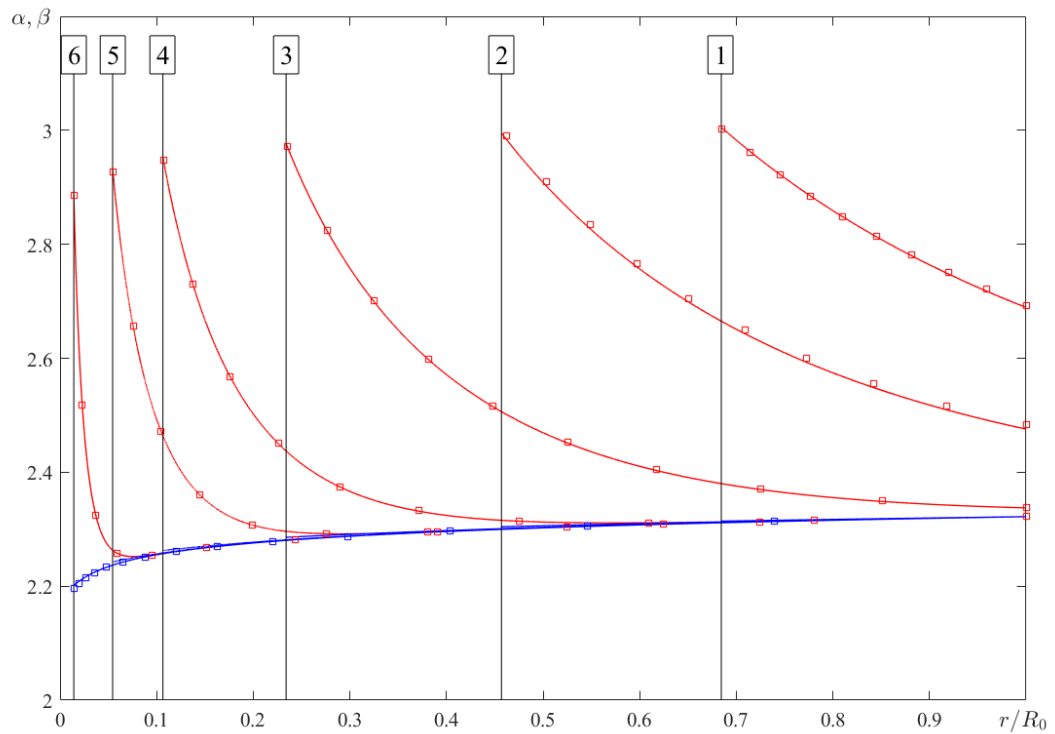


Рисунок 2.4.2 – Решение системы (2.4.25) при различном числе оборотов $N = \Theta/(2\pi)$: 1 – $N = 1/108$, 2 – $N = 1/72$, 3 – $N = 1/36$, 4 – $N = 1/16$, 5 – $N = 1/8$, 6 – $N = 1/2$; красные линии соответствуют кривым α , синие линии соответствуют кривым β , квадратные маркеры обозначают приближенное аналитическое решение, вертикальные линии означают позицию упругопластической границы при различных N ; пластическое течение начинается на внешней цилиндрической поверхности образца $r = R_0$ при $N \approx 1/160$

Результаты численного интегрирования показывают, что:

- функция β практически не меняется с увеличением γ ; с учетом (2.4.22) и (2.4.24) это говорит о том, что в области пластической деформации среднее напряжение также существенно не меняется с увеличением γ (хотя,

конечно, она является функцией координаты r); это согласуется с результатами [177];

– функция α имеет ту же асимптотику, что и функция β при $\gamma \rightarrow \infty$.

Упругий сдвиг $(c_e)_{\varphi z}$ и следовательно касательное напряжение $\sigma_{\varphi z}$ в фиксированной точке изменяется немонотонно с ростом γ . При упругой деформации локальное касательное напряжение $\sigma_{\varphi z}$ увеличивается до тех пор, пока в точке не начнется пластическое течение. Затем оно быстро уменьшается до стационарного значения в зависимости от координаты r . Если $\mathcal{G} > 0$ численные результаты показывают, что Σ неограниченно возрастает на упругопластической границе при $\gamma \rightarrow \infty$. Наличие асимптотики $\alpha \rightarrow \beta$ при $\gamma \rightarrow \infty$ показывает, что упругая деформация сдвига в пластической области имеет асимптоту $-c_{\varphi z}^e \rightarrow \Sigma^{-1}(\Sigma^2 - 1)^{1/2} \rightarrow 1$. Если $\mathcal{G} = 0$, то согласно (2.4.29) $-c_{\varphi z}^e \rightarrow \tilde{\tau}_{y0}(\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1)^{-1/2} < 1$ при $\gamma \rightarrow \infty$. Это означает, что даже для жестких материалов с $\tau_{y0}/\mu \ll 1$ упругие деформации не являются бесконечно малыми вблизи $r = 0$ при больших углах закручивания, если предел текучести материала существенно зависит от давления.

Такое поведение функций α и β позволяет аппроксимировать систему (2.4.25) следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial A}{\partial \gamma} + \cosh A = \cosh B \end{array} \right. \quad (2.4.33a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r} \frac{\partial B}{\partial \tilde{r}} = \frac{\mathcal{G} \sinh B}{\mathcal{G} \tilde{C} + \cosh B} \left(\frac{1}{\cosh B} + \frac{\tilde{C}}{\exp B} \right), \end{array} \right. \quad (2.4.33b)$$

$$\alpha(\tilde{r}, \gamma) \approx A(\tilde{r}, \gamma), \quad B(\tilde{r}) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \beta(\tilde{r}, \gamma).$$

Аналитическое решение для $B(\tilde{r})$. Уравнение (2.4.33b) является ОДУ с разделяющимися переменными. Обозначая $\xi = \exp B$, из (2.4.33b) можно заключить, что

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} \frac{\xi^2 + 2\vartheta\tilde{C}\xi + 1}{\xi^2 + \tilde{C}/(\tilde{C} + 2)} d\xi = \vartheta(\tilde{C} + 2) \ln \tilde{r}. \quad (2.4.34)$$

Интегрируя (2.4.34) с (2.4.26a), получаем

$$\begin{aligned} \ln \tilde{r} = \Omega(\xi) - \Omega(\xi_0), \quad \xi_0 = \left(1 + (\gamma_0/2)^{-2}\right)^{1/2}, \quad \xi \in [\xi_{ep}, \xi_0]; \\ \vartheta(\tilde{C} + 1)(\tilde{C} + 2)\Omega(\xi) = \vartheta\tilde{C} \left((\tilde{C} + 2) \ln(\xi^2 - 1) - \ln \left(\xi^2 + \frac{\tilde{C}}{\tilde{C} + 2} \right) \right) + \\ + (\tilde{C} + 1)\xi + (\tilde{C} + 2) \ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1} - \frac{2}{(\tilde{C} + 2)} \left(\frac{\tilde{C} + 2}{\tilde{C}} \right)^{1/2} \arctan \left(\xi \left(\frac{\tilde{C} + 2}{\tilde{C}} \right)^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

Здесь γ_0 определяется формулой (2.4.27) и значение параметра $\xi = \xi_{ep}$ соответствует упругопластической границе. Согласно (2.4.26b) и (2.4.35) $\xi_{ep} > 1$ является корнем алгебраического уравнения $2(\xi_{ep}^2 - 1)^{-1/2} = \gamma e^{\Omega(\xi_{ep}) - \Omega(\xi_0)}$.

Аналитическое решение для $A(\tilde{r}, \gamma)$. Уравнение (2.4.33a) представляет собой нелинейное ОДУ с параметром $\tilde{r}$. Замена переменных $x = \gamma\tilde{r}/2$ и $\exp A = y'_x/y$ приводит к линейному уравнению $y''_x - 2 \cosh B y'_x + y = 0$. Таким образом, мы получаем решение

$$\exp A = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\xi^2 - 1}{1 - \xi \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \exp \left[\frac{\xi^2 - 1}{\xi} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{\gamma\tilde{r}}{2} \right) \right]},$$

которое удовлетворяет приближенному граничному условию $\sinh A|_{\gamma\tilde{r} = \frac{2}{\sqrt{\xi^2 - 1}}} = \sqrt{\xi^2 - 1}$, которое следует из (2.4.26b), (2.4.26c). Отметим, что

$\exp A \rightarrow \xi = \exp B$ при $\gamma \rightarrow \infty$.

Приближенное аналитическое решение системы (2.4.33) показано на рис. 2.4.2 в сравнении с результатами численного интегрирования исходной системы (2.4.25). Функции A и B приближают функции α и β очень близко.

Напряженное состояние. Из (2.4.12) с учетом (2.4.15), (2.4.16) и (2.4.22) безразмерное среднее напряжение в пластической области в параметрической форме:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma} &= -\tilde{p} - \frac{3+\tilde{C}}{6}(1+2\Sigma) = -\frac{1-\tilde{\tau}_{y0}\sinh\beta}{\vartheta\sinh\beta} - \frac{\tilde{C}}{3}(\coth\beta-1) \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{2}{\xi^2-1}\left(\frac{\xi}{\vartheta} + \frac{\tilde{C}}{3}\right) + \frac{\tilde{\tau}_{y0}}{\vartheta}\end{aligned}$$

Среднее напряжение в упругой области

$$\tilde{\sigma} = -\frac{1}{\xi_{ep}^2-1}\left(\frac{2}{\vartheta}\xi_{ep} + 3\tilde{C}+1\right) + \frac{\tilde{\tau}_{y0}}{\vartheta} + \frac{3+7\tilde{C}}{12}(\gamma\tilde{r})^2, \quad r \leq r_{ep}(\gamma).$$

Компоненты напряжения в пластической области

$$\begin{aligned}-\frac{\sigma_{rr}}{\mu} &= \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{1}{\sinh\beta} - \tilde{\tau}_{y0}\right) + \tilde{C}(\coth\beta-1) \rightarrow \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{2\xi}{\xi^2-1} - \tilde{\tau}_{y0}\right) + \frac{2\tilde{C}}{\xi^2-1} \\ -\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\mu} &= \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{1}{\sinh\beta} - \tilde{\tau}_{y0}\right) - \frac{1}{\cosh\alpha\sinh\beta} \rightarrow \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{2\xi}{\xi^2-1} - \tilde{\tau}_{y0}\right) - \frac{4\xi^2}{\xi^4-1} \\ -\frac{\sigma_{zz}}{\mu} &= \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{1}{\sinh\beta} - \tilde{\tau}_{y0}\right) + \frac{1}{\cosh\alpha\sinh\beta} \rightarrow \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{2\xi}{\xi^2-1} - \tilde{\tau}_{y0}\right) + \frac{4\xi^2}{\xi^4-1} \\ \frac{\sigma_{\varphi z}}{\mu} &= \frac{\tanh\alpha}{\sinh\beta} \rightarrow \frac{2\xi}{\xi^2+1} < 1\end{aligned}$$

Зависимость $r(\xi)$ по формуле (2.4.35).

Рис. 2.4.3 представляет компоненты напряжений (в пластической области) в сравнении с жесткопластическим решением $\boldsymbol{\sigma} = -p_0\mathbf{I} + (\tau_{y0} + \vartheta p_0)(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi)$. Напряженное состояние достаточно близко к гидростатическому, но не однородно; промежуточное главное

напряжение σ_{rr} близко к среднему; $\sigma_{\varphi\varphi}$ несколько меньше по абсолютной величине, чем другие диагональные компоненты тензора напряжений. Среднее напряжение у границы $r = R_1$ несколько ниже, чем p_0 , и существенно возрастает вблизи $r = 0$. Это согласуется с вышеупомянутым МКЭ-решением [165]. В упругой области диагональные компоненты напряжений неограниченно возрастают в $r = 0$ при стремлении γ к бесконечности; касательное напряжение равно нулю при $r = 0$

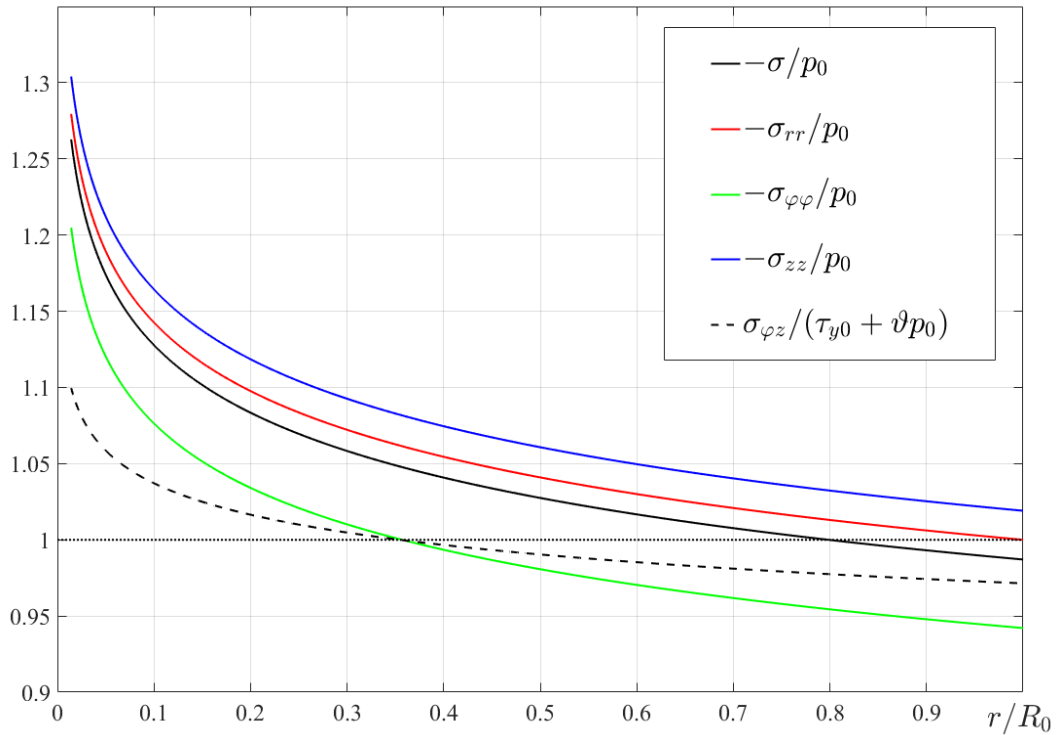


Рисунок 2.4.3 – Безразмерные напряжения в пластической области при $N = 1/2$ в сравнении с жестко-пластическим решением. Отметим, что локальное значение предела текучести на сдвиг есть

$$\tau_{y0} - \mathcal{G}(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})/2 > \tau_{y0} + \mathcal{G}p_0$$

Рис. 2.4.4 показывает эволюцию среднего напряжения с увеличением параметра нагружения. Давление в центре образца неограниченно возрастает с увеличением угла закрутки. Конечно, на самом деле пиковое значение будет сглажено из-за упругой деформации наковальни вблизи оси симметрии.

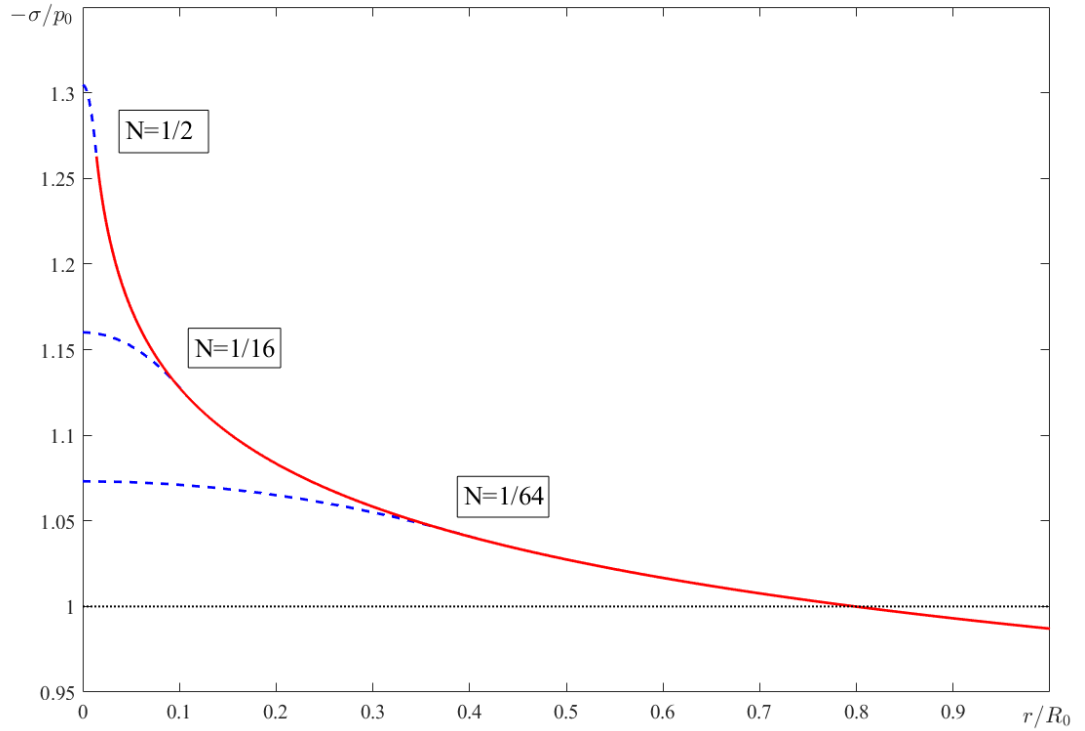


Рисунок 2.4.4 – Эволюция распределения среднего напряжения в образце с увеличением параметра нагружения $N = \Theta/(2\pi)$; синий цвет соответствует упругой области, красный – пластической

Рис. 2.4.5 и рис. 2.4.6 показывают безразмерный крутящий момент $M = M_{ep}/M_{rp}$ и безразмерную осевую силу $Q = Q_{ep}/Q_{rp}$; здесь M_{ep} и Q_{ep} рассчитываются на основе полученного упругопластического решения, а M_{rp} и Q_{rp} соответствуют жесткопластическому решению

$$M_{rp} = 2\pi \int_0^{R_1} \sigma_{\varphi z} r^2 dr = \frac{2}{3} \pi R_1^3 (\tau_{y0} + \vartheta p_0), \quad Q_{rp} = 2\pi \int_0^{R_1} |\sigma_{zz}| r dr = \pi R_1^2 p_0$$

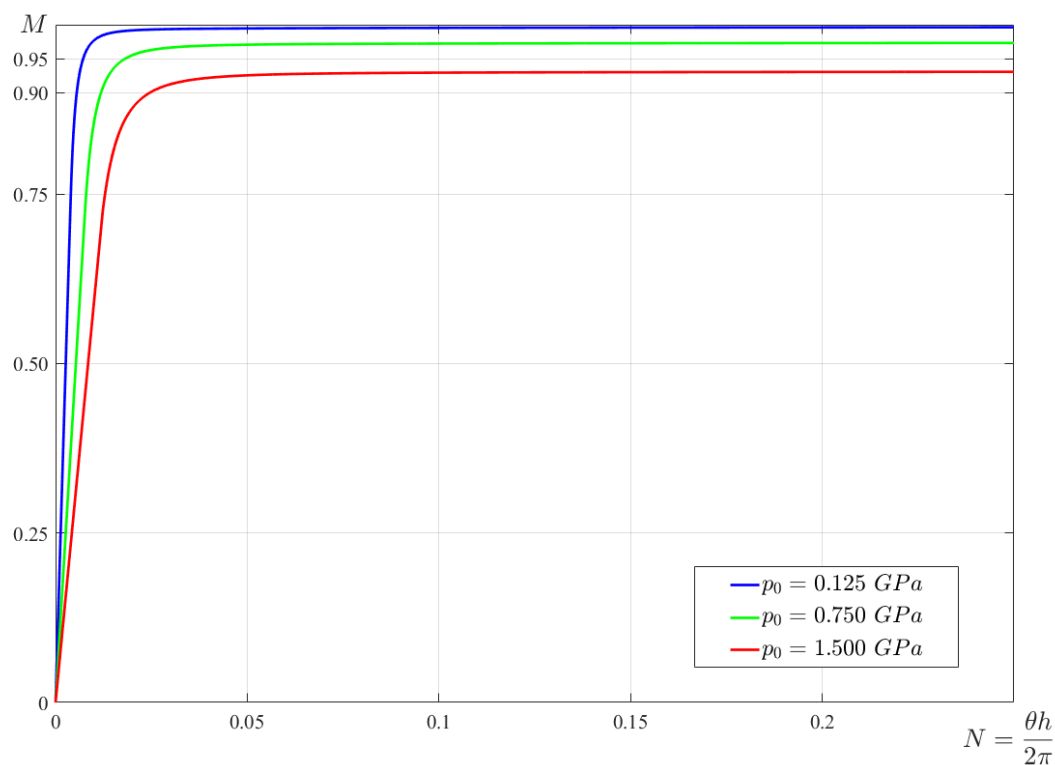


Рисунок 2.4.5 – Эволюция безразмерного крутящего момента $M = M_{ep}/M_{rp}$ при различных значениях начального гидростатического давления

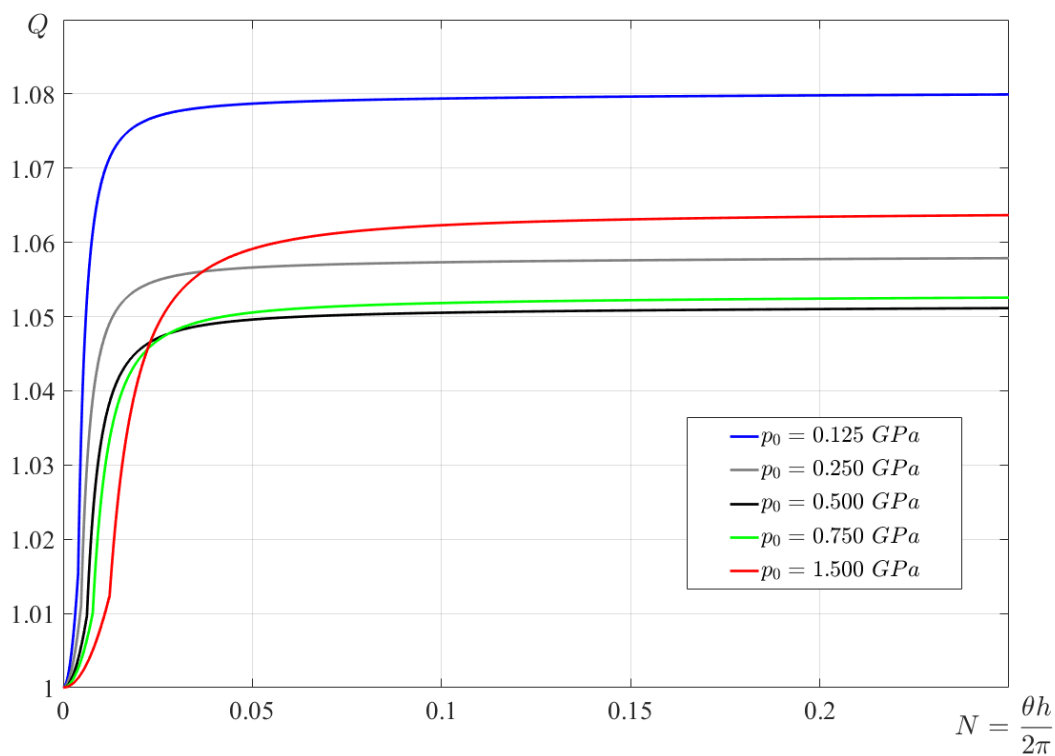


Рисунок 2.4.6 – Эволюция безразмерного осевого усилия $Q = Q_{ep}/Q_{rp}$ при различных значениях начального гидростатического давления

Безразмерный крутящий момент монотонно уменьшается с ростом начального давления. Поведение безразмерной осевой силы немонотонно, минимальное установившееся значение достигается при значении $p_0 = 0.5$ ГПа.

При малых упругих деформациях полученное решение стремится к однородному жестко-пластическому. Однако различия могут быть значительными, если НРТ используется для определения зависимости предела текучести от давления гиперупругих материалов. Если экспериментальные данные по крутящему моменту и осевому усилию для сплошного образца в точности совпадают с результатами представленного упругопластического анализа M_{ep} , Q_{ep} , то интерпретация этих данных в рамках жестко-пластического анализа приведет к занижению коэффициента $\mathcal{J}$ в сравнении с его значением $\mathcal{J} = 0.1$, полученным в условиях однородного напряженно-деформированного состояния в эксперименте над полым образцом [182]. На рис. 2.4.7 показаны результаты расчета коэффициента $\mathcal{J}_{rp}$ по крутящему моменту и осевой силе в рамках жесткопластического анализа:

$$\mathcal{J}_{rp} = \frac{3M_{ep} - 2\pi R_1^3 \tau_{y0}}{2R_1 Q_{ep}}. \quad (2.4.36)$$

В этом случае значение $\mathcal{J}_{rp}$ само по себе зависит от значения начального давления.

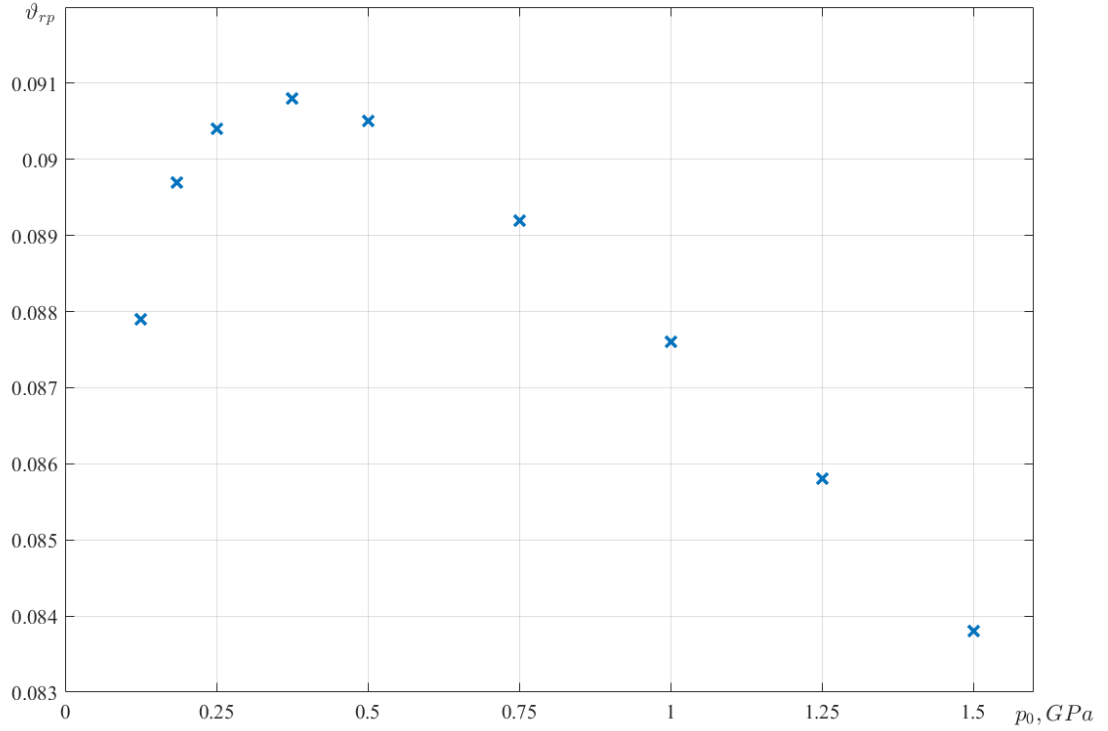


Рисунок 2.4.7 – Коэффициент зависимости от давления ϑ_{rp} рассчитанный на основе жестко-пластического решения по формуле (2.4.36) при различных значениях начального гидростатического давления. Крутящий момент и осевое усилие рассчитаны с использованием упруго-пластического решения со значением $\vartheta = 0.1$ (экспериментально полученным в условиях однородного напряженно-деформированного состояния, [182])

Проскальзывание на контактной поверхности. Полученное решение справедливо, если в контактной паре «наковальня – образец» отсутствует проскальзывание, т.е., если $-\sigma_{\varphi z}/\sigma_{zz} < f_s$, где f_s коэффициент статического трения. Из (2.4.8) следует что $\partial(-\sigma_{\varphi z}/\sigma_{zz})/\partial r > 0$ в упругой области $r < r_{ep}$. Из (2.4.12) с учетом (2.4.15), (2.4.16), (2.4.22) и (2.4.24) следует, что $-\sigma_{\varphi z}/\sigma_{zz} = \vartheta \sinh \alpha \left[(1 - \tilde{\tau}_{y0} \sinh \beta) \cosh \alpha + \vartheta \right]^{-1}$ в пластической области $r \geq r_{ep}$, и следовательно $\partial(-\sigma_{\varphi z}/\sigma_{zz})/\partial \gamma < 0$. Поэтому $\max \{-\sigma_{\varphi z}/\sigma_{zz}\} = -(\sigma_{\varphi z}/\sigma_{zz}) \Big|_{r=R_1, \gamma=\gamma_0}$

после начала пластического течения в образце. Последнее значение может быть вычислено с использованием граничных условий (2.4.26). То есть, если к моменту начала пластического течения проскальзывания не произошло, то

при дальнейшем нагружении его также не произойдет. На стадии чисто упругой деформации согласно (2.4.8) величина $-\sigma_{\varphi z}/\sigma_{zz}$ максимальна на поверхности $r = R_1$. Поскольку $\tilde{C} < 1$, то $\left(-\sigma_{\varphi z}/\sigma_{zz}\right)\big|_{r=R_1}$ немонотонна по γ и максимальное значение $\left(2\tilde{p}_0(1-\tilde{C})\right)^{-1/2}$ достигается при $\gamma = \sqrt{\frac{2\tilde{p}_0}{1-\tilde{C}}}$, если это значение параметра не превосходит γ_0 . Таким образом, условие сцепления (отсутствия проскальзывания) на контактных поверхностях между образцом и наковальнями:

$$\left[2\tilde{p}_0(1-\tilde{C})\right]^{-1/2} < f_s, \text{ если } \gamma_0^2 \geq \frac{2\tilde{p}_0}{1-\tilde{C}}$$

$$\frac{2\gamma_0}{2\tilde{p}_0 + (1-\tilde{C})\gamma_0^2} < f_s, \text{ иначе}$$

Здесь γ_0 определяется по формуле (2.4.27). В частности, если упругие деформации малы, то $\gamma_0 \approx \tilde{\tau}_{y0} + \mathcal{G}\tilde{p}_0 \ll 1$ и проскальзывания не будет если $p_0 > \tau_{y0}/(f_s - \mathcal{G})$ и $f_s > \mathcal{G}$.

Несмотря на то, что приложенное давление увеличивает предел текучести и, соответственно, касательное напряжение, меньшее значение $-\sigma_{\varphi z}/\sigma_{zz}$ соответствует более высокому давлению. Таким образом, при достаточно большом начальном гидростатическом давлении можно избежать проскальзывания в контактной паре «наковальня – образец».

Накопленная пластическая деформация. Накопленная пластическая деформация q определяется уравнением $\dot{q} = \sqrt{2 \operatorname{tr}(\mathbf{D}^p)^2 / 3}$. Из (2.4.13) с учетом (2.4.12), (2.4.15), (2.4.16), (2.4.18) и (2.4.24) следует, что

$$\dot{q} = \frac{\Lambda}{\sqrt{3}} = \frac{\gamma_t}{\sqrt{3}} \left(\tilde{r} \tanh \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial \gamma} \frac{1}{\sinh \beta} \right).$$

Интегрируя это выражение, имеем

$$q(\tilde{r}, \gamma) = \frac{\tilde{r}}{\sqrt{3}} \int_{\gamma^*(\tilde{r})}^{\gamma} \tanh \alpha d\gamma + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\tanh(\beta/2)}{\tanh(\beta^*/2)} \approx$$

$$\approx \frac{\tilde{r}}{\sqrt{3}} \int_{\gamma^*(\tilde{r})}^{\gamma} \tanh A d\gamma \approx \frac{\tilde{r}(\gamma - \gamma^*)}{\sqrt{3}} \tanh B$$

где $\gamma^*(\tilde{r})$ закрутка, соответствующая расстоянию между упругопластической границей и осью симметрии, равному $\tilde{r}$, $\beta^* = \beta(\tilde{r}, \gamma^*)$. Распределение накопленной пластической деформации по радиусу образца близко к линейному (рис. 2.4.8).

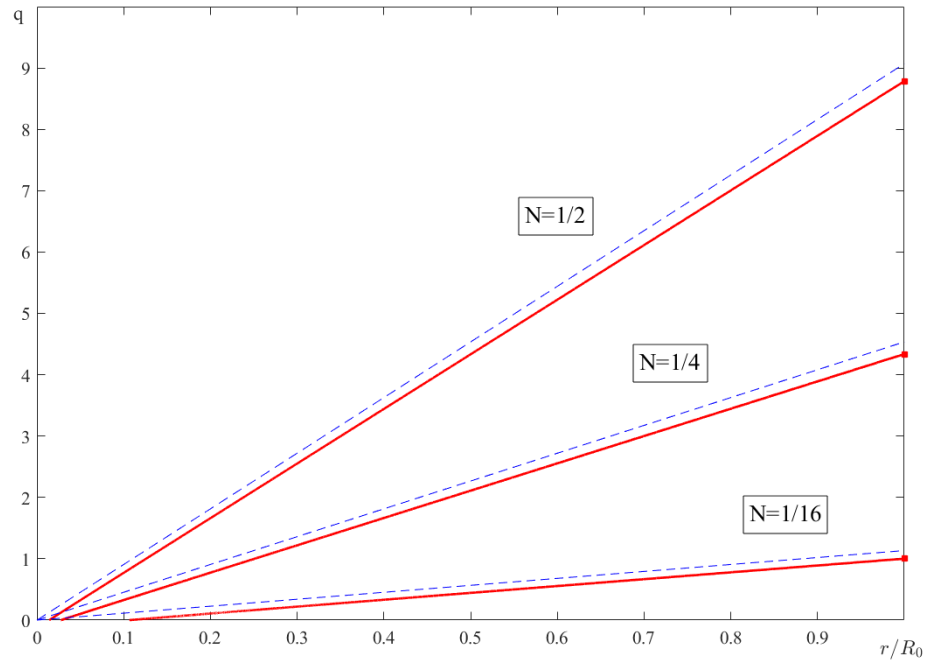


Рисунок 2.4.8 – Накопленная пластическая деформация: сплошная линия соответствует численному решению, штриховая соответствует жестко-пластическому решению, квадратные маркеры соответствуют формуле (2.4.37)

Градиент пластической деформации вблизи упруго-пластической границы с увеличением γ стремится к значению, предсказанному жестко-пластическим решением, а именно $\Theta/(\sqrt{3}L)$. Хорошим приближением для накопленной пластической деформации является выражение

$$q(\tilde{r}, \gamma) \approx \tilde{r} q|_{\tilde{r}=1} \approx \frac{2\tilde{r}}{\sqrt{3}} \frac{\gamma - \gamma_0}{2 + \gamma_0^2} \approx \frac{2\tilde{r}}{\sqrt{3}} \frac{\gamma - (\tilde{\tau}_{y0} + \mathcal{G}\tilde{p}_0)}{2 + (\tilde{\tau}_{y0} + \mathcal{G}\tilde{p}_0)^2}. \quad (2.4.37)$$

Это выражение учитывает зависимость предела текучести от давления и нелинейно-упругое поведение материала.

Результаты МКЭ-анализа, в котором учитывалось радиальное течение материала из-за деформации обоймы, показывают, что накопленная пластическая деформация в большей степени зависит от давления, чем это определяется (2.4.37). Причем, в отличие от представленных результатов, учитывающих деформацию только образца, при более высоком давлении и более высоком пределе текучести материала локальные значения накопленной пластической деформации выше. Это говорит о том, что давление влияет на накопление пластической деформации в большей степени из-за дополнительной деформации образца в радиальном направлении, чем из-за изменения свойств материала. Однако в то же время изменение свойств материала из-за приложенного давления сильно влияет на распределение реального гидростатического давления в образце.

На рис. 2.4.9 показано безразмерное среднее напряжение $|\sigma/p_0|$ при различных значениях параметра зависимости от давления $\mathcal{G}$. Неоднородность среднего напряжения и максимальное давление в образце существенно зависят от значения $\mathcal{G}$. Для материалов с достаточно высоким отношением $\tau_{y0}/\mu < 1$, которые могут проявлять умеренную упругую деформацию, заметная неоднородность среднего напряжения присутствует, даже если предел текучести не зависит от давления. Это следует из точного решения (2.4.28) – (2.4.32). Если упругие деформации материала малы, значительная неоднородность среднего напряжения при ограниченной схеме НРТ может наблюдаться, если предел текучести материала сильно зависит от гидростатического давления.

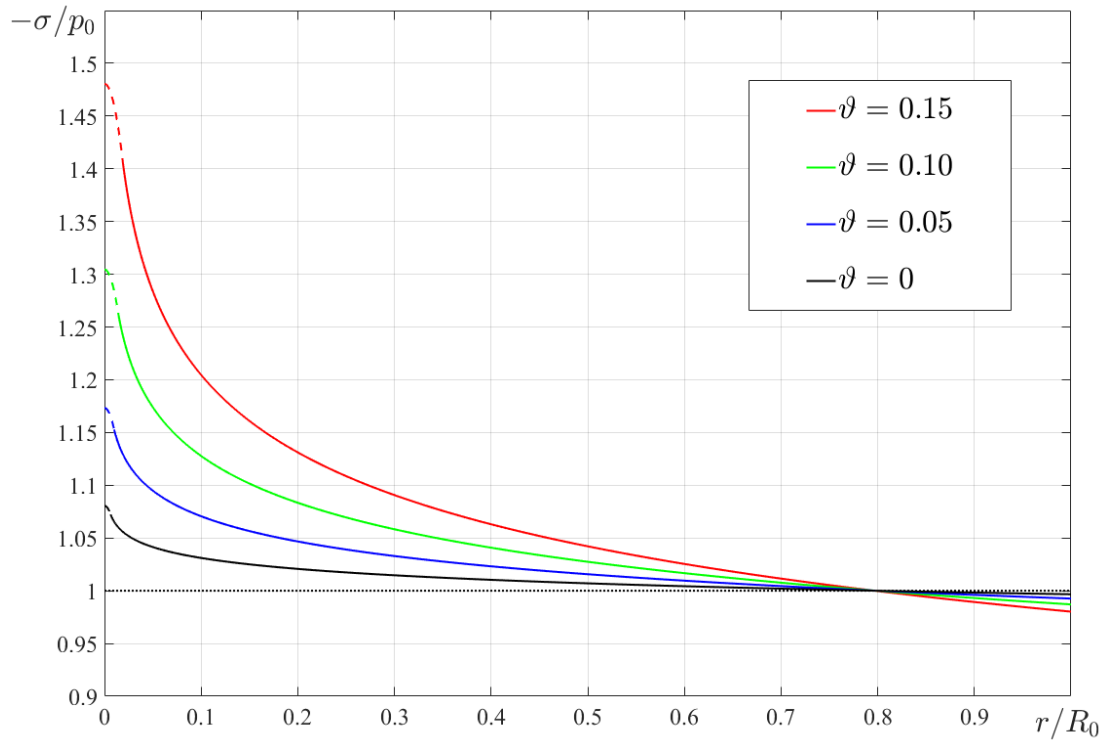


Рисунок 2.4.9 – Распределение среднего напряжения по радиусу образца при различных значениях параметра ϑ ; значение $\vartheta = 0$ соответствует точному аналитическому решению в рамках ассоциированной пластической модели (2.4.31)–(2.4.32); сплошные линии соответствуют пластической области, штриховые – упругой. Число оборотов есть $N = 1/2$. Параметры материала $C_2 = 0$, $C_1 = \mu/2 = 250$ МПа, $\tau_{y0} = 50$ МПа; начальное гидростатическое давление $p_0 = 500$ МПа

На рис. 2.4.10 видно, что средняя неоднородность напряжений и максимальное давление в образце растут с увеличением отношения τ_{y0}/μ .

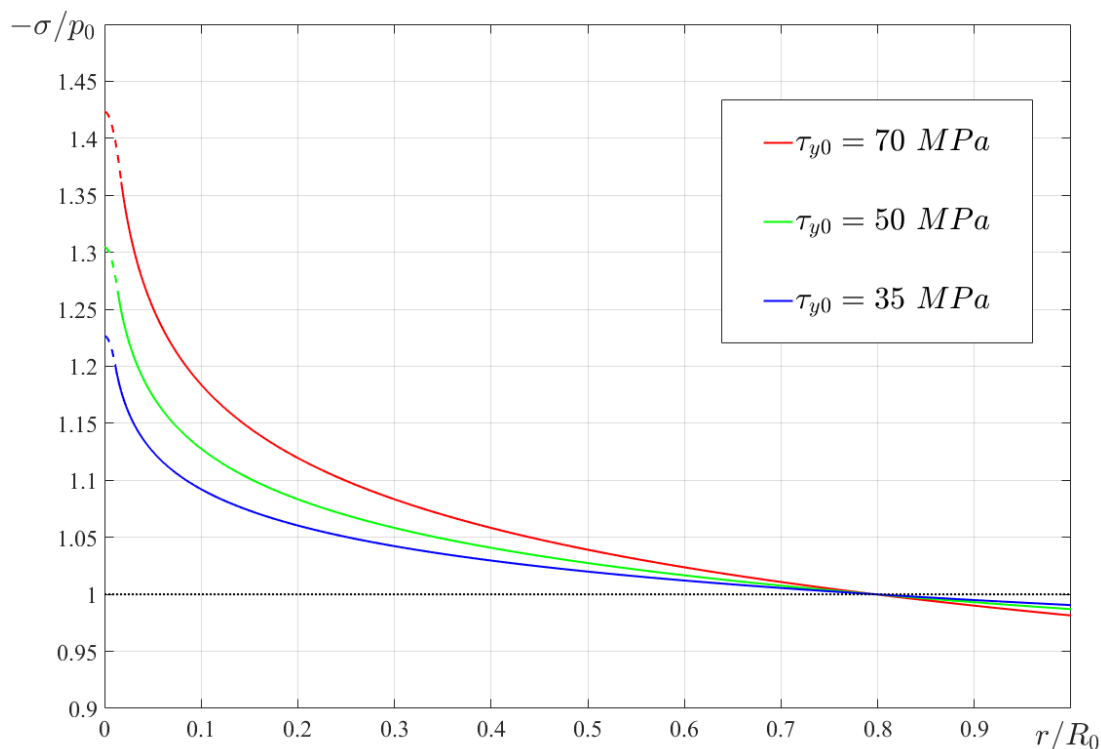


Рисунок 2.4.10 – Распределение среднего напряжения по радиусу образца при различных значениях параметра τ_{y0} (предел текучести при чистом сдвиге); сплошные линии соответствуют пластической области, штриховые – упругой. Число оборотов есть $N = 1/2$. Параметры материала $C_2 = 0$, $C_1 = \mu/2 = 250$ МПа, $\mathcal{G} = 0.1$; начальное гидростатическое давление $p_0 = 500$ МПа

На рис. 2.4.11 видно, что неоднородность среднего напряжения немотонно зависит от величины начального гидростатического давления p_0 .

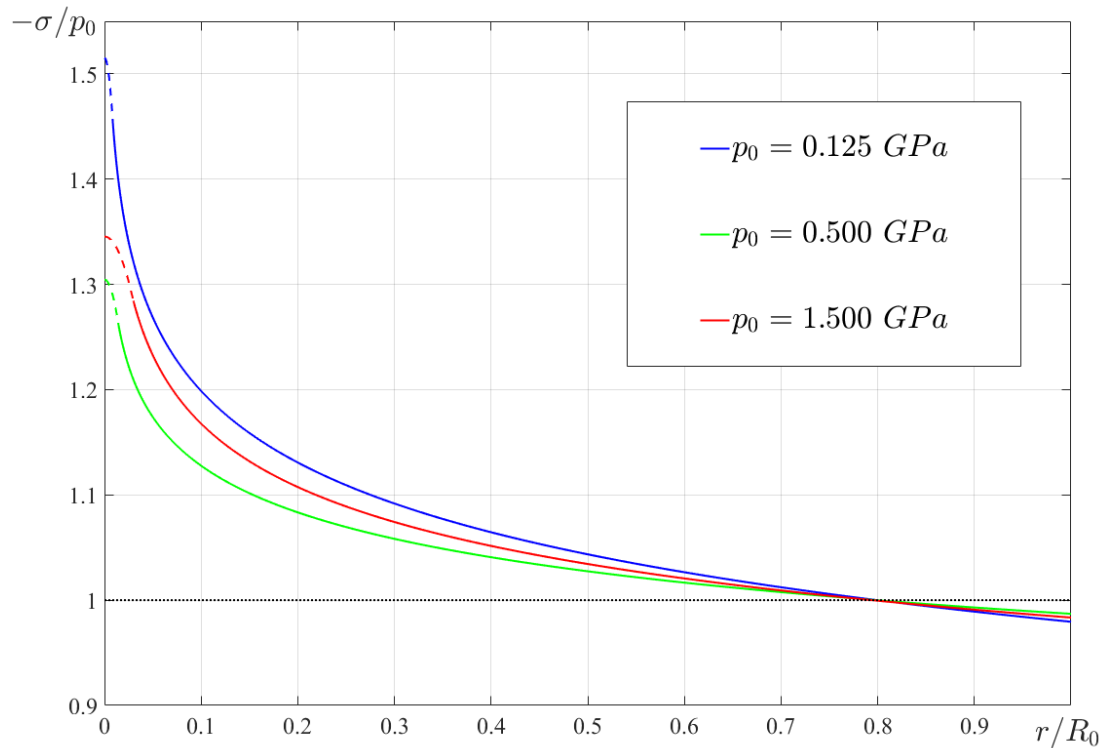


Рисунок 2.4.11 – Распределение среднего напряжения по радиусу образца при различных значениях начального гидростатического давления p_0 ; сплошные линии соответствуют пластической области, штриховые – упругой. Число оборотов есть $N = 1/2$. Параметры материала $C_2 = 0$, $C_1 = \mu/2 = 250$ МПа, $\tau_{y0} = 50$ МПа, $\vartheta = 0.1$

На рис. 2.4.12 показано влияние упругого параметра $\tilde{C}$. Неоднородность среднего напряжения несколько уменьшается с уменьшением $\tilde{C}$. Координата r , в которой среднее напряжение точно равно p_0 , зависит практически только от упругого параметра $\tilde{C}$. Следовательно, значение давления для инициирования фазовых превращений, вызванных пластической деформацией, может быть получено путем измерения микротвердости в этой точке после НРТ при различных значениях начального давления.

Результаты на рисунках 2.4.9–2.4.12 соответствуют образцу с радиусом $R_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м и высотой $L = 1 \cdot 10^{-3}$ м.

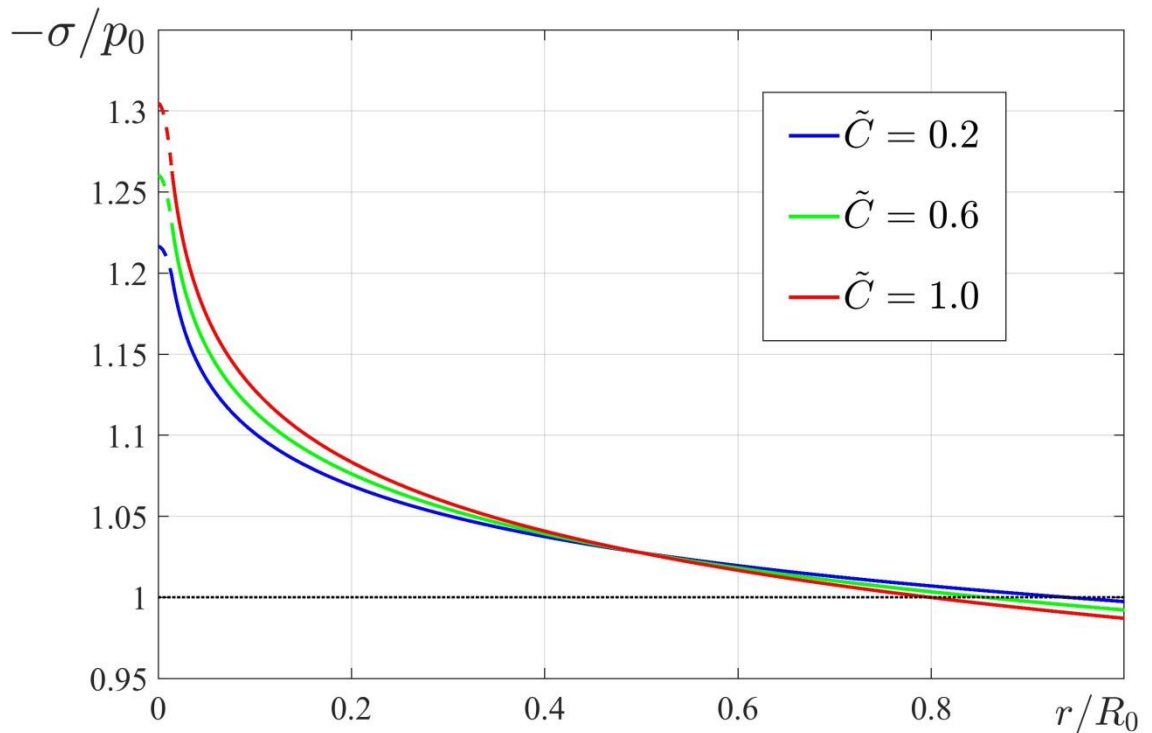


Рисунок 2.4.12 – Распределение среднего напряжения по радиусу образца при различных значениях упругого параметра $\tilde{C} = (C_1 - C_2)/(C_1 + C_2)$; сплошные линии соответствуют пластической области, штриховые – упругой. Число оборотов есть $N = 1/2$. Параметры материала $\mu = 2(C_1 + C_2) = 500$ МПа, $\tau_{y0} = 50$ МПа, $\vartheta = 0.1$; начальное гидростатическое давление $p_0 = 500$ МПа

Выводы к разделу 2.4. В данном разделе исследовано, как чувствительность предела текучести материала образца к давлению влияет на напряжение и деформацию во время обработки НРТ. Система уравнений геометрически нелинейной неассоциативной теории упругопластичности, основанная на мультипликативном разложении градиента тензора деформации, сведена к связанной гиперболической системе двух нелинейных УЧП первого порядка. Построен алгоритм численного интегрирования этой системы. Найдено приближенное аналитическое решение этой системы в замкнутой форме, которое очень точно аппроксимирует численное решение. Результаты могут быть успешно использованы для материалов, у которых за-

висимость предела текучести от давления намного сильнее, чем зависимость упругих свойств. Можно сделать следующие выводы.

1) Напряженное состояние достаточно близко к состоянию гидростатического сжатия, но не является однородным, если упругие деформации не малы. Напряжение в области пластического течения практически стационарное.

2) Абсолютное значение локального гидростатического давления максимально в центре образца. Это максимальное значение монотонно и неограниченно возрастает с увеличением угла закрутки. Давление у внешней поверхности $r = R_0$ по абсолютной величине несколько меньше начального гидростатического давления p_0 . Для гиперупругих материалов с $\tau_{y0}/\mu \sim 1$ расчеты показывают значительную неоднородность давления во время НРТ, даже если пластические свойства материала образца слабо зависят от давления.

3) Чем выше значения параметров материала $\mathcal{G}$ (параметр зависимости предела текучести от давления), τ_{y0} (предел текучести при чистом сдвиге) и $\tilde{C} = (C_1 - C_2)/(C_1 + C_2)$ (безразмерный комплекс констант Муни – Ривлина), тем выше значение пикового давления и неоднородность напряжений в образце. Неоднородность напряжений немонотонно зависит от величины начального гидростатического давления p_0 .

4) На оценку параметра зависимости предела текучести гиперупругого материала от давления посредством крутящего момента и осевой нагрузки может сильно повлиять неоднородность напряжений в НРТ.

5) В образце есть область, давление в которой точно равно p_0 , и положение этой области зависит только от упругого параметра $\tilde{C}$, но не от τ_{y0} , p_0 и $\mathcal{G}$.

Неоднородность напряжений в представленном решении является в основном следствием нелинейных упругих эффектов. Для твердых материалов

с малыми упругими деформациями представленное решение предсказывает почти равномерное распределение напряжений. В то же время неоднородность напряжений при НРТ твердых материалов может быть значительной и является следствием неоднородности начального давления, неоднородности деформации оснастки, а также фазовых превращений материала. По этой причине полезность представленного решения ограничена мягкими гиперупругими материалами.

Тем не менее, несмотря на то, что реальное поведение материалов при НРТ во многих случаях может быть намного сложнее, чем описываемое предлагаемой моделью, полученное аналитическое решение может быть использовано в качестве тестового решения для более сложных и подробных алгоритмов МКЭ-анализа, поскольку это решение учитывает зависимость предела текучести от давления и имеет дело с конечными упругими и пластическими деформациями. Аналитическое решение важно, поскольку имеющиеся экспериментальные данные о напряженном состоянии образца во время НРТ ограничены крутящим моментом и локальным давлением на контактной поверхности, а также косвенными данными (распределением концентраций фаз) [180, 195, 196]. Кроме того, это решение может точно описать реальный процесс, если используемая оснастка (наковальни, обойма) намного жестче, чем материал образца.

2.5. Упруго-пластический анализ круговой трубы, вывернутой наизнанку

Выворачивание наизнанку гиперупругой трубы это одно из универсальных решений в нелинейной теории упругости [191, 192, 197], то есть решение этой задачи может быть построено для произвольного упругого потенциала несжимаемой среды. Упомянем здесь также исследование [198], в котором рассмотрено выворачивание полой упругой сферы. Ряд исследований посвящен проблеме свободно вывернутой трубы, то есть, когда боковые поверхности трубы свободны от напряжений [199, 200]. Эти исследования обусловлены использованием деформации такого типа в различных демпферах (абсорберах) кинетической энергии. В частности, в [201] проведен анализ упругопластического деформирования тонкостенных труб при их выворачивании наизнанку в рамках деформационной теории пластичности Генки, основное внимание уделено определению необходимого для выворачивания осевого усилия.

Выворачивание труб (преимущественно из полимерных материалов) может служить для создания многослойных конструкций, когда внутри жесткой внешней трубы с той или иной целью создается покрытие (см. рис. 2.5.1).

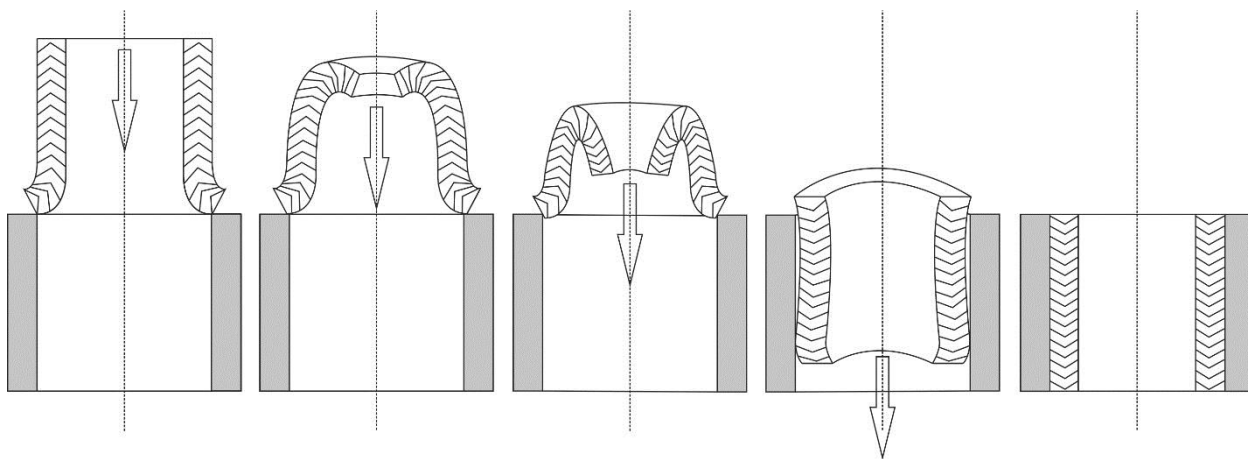


Рисунок 2.5.1 – Выворачивание трубы в жесткой обойме

В этом случае ключевыми характеристиками реализующегося напряженного состояния будет натяг между слоями конструкции (величина радиального напряжения на контактной границе), а также величина тангенциаль-

ного напряжения на внутренней (свободной) поверхности вывернутой трубы, поскольку считается, что создание значительных сжимающих тангенциальных напряжений положительно сказывается на эксплуатации труб под давлением [202].

Нетрудно понять, что максимальная величина тангенциального напряжения на свободной поверхности ограничена пределом текучести материала. То есть максимальный эффект от создания сжимающих тангенциальных напряжений достигается в случае пластического деформирования материала. Этой задаче посвящен настоящий раздел.

2.5.1. Модель материала. Мы рассматриваем два варианта задания упругих соотношений материала: один с использованием модели обобщенного неогуковского материала, когда упругий потенциал есть функция только первого инварианта левого тензора (упругой) деформации Коши – Грина $\mathbf{B}^e = (\mathbf{F}^e)(\mathbf{F}^e)^T$, $\mathbf{F}^e$ есть упругая часть градиента деформации $\mathbf{F}$; второй с использованием обобщений несжимаемого материала Генки, когда упругий потенциал есть функция только второго инварианта тензора (упругой) деформации Генки $\mathbf{h}^e = \ln(\mathbf{B}^e)^{1/2}$. Здесь везде индекс «e» означает упругую часть соответствующего тензора полной деформации (подробнее о разделении деформации на упругую и пластическую составляющие см. последний подраздел данного раздела; здесь укажем только, что упругая часть деформации должна совпадать с полной при отсутствии пластического течения).

Итак, упругий закон несжимаемого изотропного тела задан в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\frac{\partial\Psi^B}{\partial\mathbf{B}^e}\mathbf{B}^e = -p\mathbf{I} + 2\psi_1^B\mathbf{B}^e \quad (2.5.1)$$

где $\Psi^B = \Psi^B(I_1^{\mathbf{B}^e})$ есть упругий потенциал (удельная по массе свободная энергия Гельмгольца), $\psi_1^B = \psi_1^B(I_1^{\mathbf{B}^e}) = d\Psi^B/dI_1^{\mathbf{B}^e} > 0$; или же в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{\partial \Psi^h}{\partial \mathbf{h}^e} = -p\mathbf{I} - \psi_2^h \mathbf{h}^e \quad (2.5.2)$$

где $\Psi^h = \Psi^h(I_2^{\mathbf{h}^e})$ есть упругий потенциал, $\psi_2^h = \psi_2^h(I_2^{\mathbf{h}^e}) = d\Psi^h/dI_2^{\mathbf{h}^e} < 0$. В формулах выше p есть скалярная функция добавочного гидростатического давления, обусловленная ограничением несжимаемости материала. При отсутствии деформации $\mathbf{B}^e = \mathbf{I}$, $\mathbf{h}^e = \mathbf{0}$ и функция свободной энергии должна удовлетворять равенствам $\Psi^B|_{\mathbf{B}^e=\mathbf{I}} = \Psi^B(I_1^{\mathbf{B}^e}|_{\mathbf{B}^e=\mathbf{I}}) = \Psi^B(3) = 0$ или $\Psi^h|_{\mathbf{h}^e=\mathbf{0}} = \Psi^h(I_2^{\mathbf{h}^e}|_{\mathbf{h}^e=\mathbf{0}}) = \Psi^h(0) = 0$. Рассматриваются только упругие потенциалы, представляющие собой функции тензоров обратимых деформаций. Независимость свободной энергии от пластической деформации является распространенным допущением для изотропных пластически несжимаемых материалов [25, 203, 175].

Пластическое течение в материале связывается с выполнением условия Треска

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_y$$

где σ_1 и σ_3 есть наибольшее и наименьшее главные напряжения, τ_y сдвиговой предел текучести материала.

2.5.2. Кинематика выворачивания круговой трубы в условиях плоской деформации. С точностью до жестких вращений связь координат материальных точек в начальном состоянии R, θ, Z с координатами в актуальном (деформированном) состоянии r, φ, z есть [192, 197, 200, 201]

$$R = R(r), \theta = \varphi, Z = z$$

т.е. подразумевается, что цилиндрическая труба вывернута так, что ее длина осталась неизменной за счет внешних ограничений; при свободном вывора-

чивании происходит увеличение длины трубы вместе с утоньшением стенки и увеличением ее внутреннего диаметра [200]). Задачи о радиальной деформации цилиндрического или сферического слоя это одни из наиболее простых среди упругопластических задач, и часто имеют замкнутое решение даже в нелинейной постановке [3, 204–206].

Итак, указанная кинематика приводит к тому, что тензора деформации диагональные; ненулевые компоненты левого тензора Коши – Грина $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ есть

$$B_{rr} = (R')^{-2}, \quad B_{\varphi\varphi} = \left(\frac{R}{r}\right)^{-2}, \quad B_{zz} = 1 \quad (2.5.3)$$

а логарифмического тензора Генки $\mathbf{h} = \ln \mathbf{B}^{1/2}$

$$h_{rr} = -\ln|R'|, \quad h_{\varphi\varphi} = -\ln\frac{R}{r}, \quad h_{zz} = 0 \quad (2.5.4)$$

здесь $R' = dR/dr$. Условие несжимаемости $\text{tr} \mathbf{h} = 0$ или $\det \mathbf{B} = 1$ приводит к дифференциальному уравнению $R'(R/r) = -1$ с кинематическими граничными условиями $R(a) = b$, $R(b) = a$ (см. рис. 2.5.2); его решение $R = \sqrt{a^2 + b^2 - r^2}$.

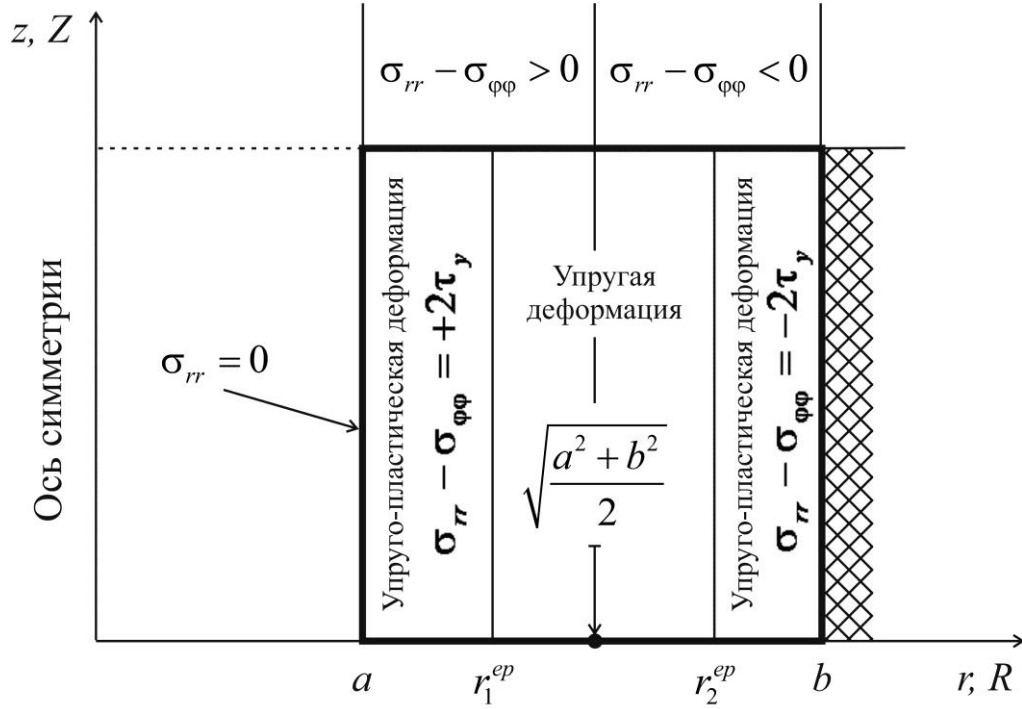


Рисунок 2.5.2 – Расчетная область (вывернутая труба)

Введем замену переменных

$$x = \frac{2r^2}{a^2 + b^2} - 1, \quad r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}(1+x), \quad -1 < -\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \leq x \leq \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} < 1 \quad (2.5.5)$$

Тогда

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}(1-x), \quad \frac{R}{r} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{и} \quad R' = -\frac{r}{R} = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (2.5.6)$$

Инварианты тензоров деформации в новых обозначениях:

$$I_1^B = (R')^{-2} + \left(\frac{R}{r}\right)^{-2} + 1 = \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x} + 1 \quad (2.5.7)$$

$$I_2^h = -\frac{1}{2} \left(\ln^2 |R'| + \ln^2 \frac{R}{r} \right) = -\frac{1}{4} \ln^2 \frac{1-x}{1+x}$$

2.5.3. Интегрирование уравнений. Упругое ядро. В области $r \in (r_1^{ep}, r_2^{ep})$

(см. рис. 2.5.2) нет пластического течения, тензоры полных и упругих дефор-

маций тождественны, $\mathbf{h}^e = \mathbf{h}$, $\mathbf{B}^e = \mathbf{B}$. С учетом замены (2.5.5), правило дифференцирования сложных функций дает $\frac{d}{dr} = \frac{dx}{dr} \frac{d}{dx} = 2\sqrt{\frac{2(1+x)}{a^2+b^2}} \frac{d}{dx}$. Тогда уравнение равновесия $r(d\sigma_{rr}/dr) + \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 0$ принимает вид

$$2(1+x)\frac{d\sigma_{rr}}{dx} = -(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \quad (2.5.8)$$

Разность координатных напряжений может быть выражена как

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2\psi_1^B \cdot (B_{rr}^e - B_{\varphi\varphi}^e)$$

в случае использования упругого закона (2.5.1); или

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -\psi_2^h \cdot (h_{rr}^e - h_{\varphi\varphi}^e)$$

если используется упругий закон (2.5.2).

Или же, с учетом равенств (2.5.3), (2.5.4), (2.5.6):

- для упругого закона (2.5.1) $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2\psi_1^B \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x} \right)$,
- для упругого закона (2.5.2) $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -\psi_2^h \ln \frac{1-x}{1+x}$.

Интегрируя уравнение равновесия в упругой области $r \in (r_1^{ep}, r_2^{ep})$:

- для упругого закона (2.5.1)

$$\sigma_{rr} = \int_{x_1^{ep}}^x \frac{\psi_1^B(\xi)}{1+\xi} \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} - \frac{1-\xi}{1+\xi} \right) d\xi + C \quad (2.5.9)$$

- для упругого закона (2.5.2)

$$\sigma_{rr} = \int_{x_1^{ep}}^x \frac{\psi_2^h(\xi)}{2(1+\xi)} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi} d\xi + C \quad (2.5.10)$$

где $x_1^{ep} = 2(r_1^{ep})^2 / (a^2 + b^2) - 1$, константа интегрирования C определяется из условия непрерывности радиального напряжения на упруго-пластической

границе $r = r_1^{ep}$; $\psi_1^B(x)$ и $\psi_2^h(x)$, как указано ранее, есть функции инвариантов

$$I_1^{B^e} = \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x} + 1 \text{ и } I_2^{h^e} = -\frac{1}{4} \ln^2 \frac{1-x}{1+x}.$$

Внутренняя пластическая область $r \in [a, r_1^{ep}]$. Здесь условие пластичности Треска выполняется в виде $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2\tau_y$, следовательно, радиальное напряжение в этой области, удовлетворяющее уравнению равновесия (2.5.8) с граничным условием $\sigma_{rr}|_{x=-\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}} = 0$, имеет выражение

$$\sigma_{rr} = -\tau_y \ln \frac{(1+x)(a^2+b^2)}{2a^2}$$

Тогда константа интегрирования в формулах (2.5.9), (2.5.10) есть $C = -\tau_y \ln \left[(1+x_1^{ep})(a^2+b^2)/(2a^2) \right]$.

Внешняя пластическая область $r \in [r_2^{ep}, b]$. Здесь условие пластичности Треска выполняется в виде $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -2\tau_y$. Уравнение равновесия (2.5.8) интегрируется в виде

$$\sigma_{rr} = \tau_y \ln(1+x) + K \quad (2.5.11)$$

Константа интегрирования K обеспечивает непрерывность радиального напряжения на упругопластической границе $r = r_2^{ep}$:

$$K = \int_{x_1^{ep}}^{x_2^{ep}} \frac{\psi_1^B(\xi)}{1+\xi} \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} - \frac{1-\xi}{1+\xi} \right) d\xi - \tau_y \ln \frac{(1+x_1^{ep})(1+x_2^{ep})(a^2+b^2)}{2a^2} \quad (2.5.12)$$

для упругого закона (2.5.1) и

$$K = \int_{x_1^{ep}}^{x_2^{ep}} \frac{\psi_2^h(\xi)}{2(1+\xi)} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi} d\xi - \tau_y \ln \frac{(1+x_1^{ep})(1+x_2^{ep})(a^2+b^2)}{2a^2} \quad (2.5.13)$$

для упругого закона (2.5.2).

Положение упругопластических границ. Из упругого анализа в области $r \in (r_1^{ep}, r_2^{ep})$ имеем на упругопластических границах следующие равенства.

Для упругого закона (2.5.1):

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_1^{ep}} &= 2\tau_y = 2\psi_1^B \Big|_{x=x_1^{ep}} \cdot \left(\frac{1-x_1^{ep}}{1+x_1^{ep}} - \frac{1+x_1^{ep}}{1-x_1^{ep}} \right) \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_2^{ep}} &= -2\tau_y = 2\psi_1^B \Big|_{x=x_2^{ep}} \cdot \left(\frac{1-x_2^{ep}}{1+x_2^{ep}} - \frac{1+x_2^{ep}}{1-x_2^{ep}} \right) \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

Для упругого закона (2.5.2):

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_1^{ep}} &= 2\tau_y = -\psi_2^h \Big|_{x=x_1^{ep}} \ln \frac{1-x_1^{ep}}{1+x_1^{ep}} \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_2^{ep}} &= -2\tau_y = -\psi_2^h \Big|_{x=x_2^{ep}} \ln \frac{1-x_2^{ep}}{1+x_2^{ep}} \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Эти уравнения определяют значения x_1^{ep} и x_2^{ep} как функции от механических параметров материала. Из (2.5.14), (2.5.15) следует, что $x_1^{ep} = -x_2^{ep} < 0$.

Если по (2.5.14), (2.5.15) оказывается, что

$$x_2^{ep} \geq \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} = \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2} \quad (2.5.16)$$

где $\delta = a/b < 1$ – геометрическая характеристика трубы (соотношение её диаметров; диаметры не меняются после выворачивания), то упругое ядро занимает всю толщину трубы, которая после выворачивания деформирована чисто упруго. Безразмерная ширина упругой области определяется как

$$\frac{r_2^{ep} - r_1^{ep}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{1+x_2^{ep}}{2}} - \sqrt{\frac{1+x_1^{ep}}{2}} = \sqrt{\frac{1+x_2^{ep}}{2}} - \sqrt{\frac{1-x_2^{ep}}{2}}$$

Из (2.5.14), (2.5.15) следует, что ширина упругой зоны ненулевая, то есть упругое ядро всегда присутствует в вывернутой трубе. Это отличает

представленную постановку задачи от исследования [201], которое подразумевает, что труба целиком находится в пластическом состоянии.

Таким образом, по (2.5.11)–(2.5.13) натяг $-\sigma_{rr}(b)/\tau_y$ можно представить в виде суммы двух функций, одна из которых S_g зависит только от геометрии трубы, вторая, S_m – только от механических характеристик материала:

$$-\sigma_{rr}(b)/\tau_y = S_g + S_m$$

$$\text{где } S_g(\delta) = 2 \ln \frac{\delta + \delta^{-1}}{2} > 0 \text{ и}$$

$$\begin{aligned} S_m &= \ln \left[(1 + x_1^{ep})(1 + x_2^{ep}) \right] + \int_{x_1^{ep}}^{x_2^{ep}} \frac{\psi_1^B(\xi)}{\tau_y} \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} - \frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \frac{d\xi}{1+\xi} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \int_0^{x_2^{ep}} \left[\frac{\psi_1^B(-\xi)}{1-\xi} - \frac{\psi_1^B(\xi)}{1+\xi} \right] \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} - \frac{1-\xi}{1+\xi} \right) \frac{d\xi}{\tau_y} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + 8 \int_0^{x_2^{ep}} \frac{\psi_1^B(\xi)}{\tau_y} \left(\frac{\xi}{1-\xi^2} \right)^2 d\xi \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

для упругого закона (2.5.1),

$$\begin{aligned} S_m &= \ln \left[(1 + x_1^{ep})(1 + x_2^{ep}) \right] + \frac{1}{2} \int_{x_1^{ep}}^{x_2^{ep}} \frac{-\psi_2^h(\xi)}{\tau_y} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi} \frac{d\xi}{1+\xi} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \frac{1}{2} \int_0^{x_2^{ep}} \left[\frac{-\psi_2^h(-\xi)}{1-\xi} - \frac{-\psi_2^h(\xi)}{1+\xi} \right] \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} \frac{d\xi}{\tau_y} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \int_0^{x_2^{ep}} \frac{-\psi_2^h(\xi)}{\tau_y} \frac{\xi}{1-\xi^2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} d\xi \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

для упругого закона (2.5.2). Здесь, как уже упоминалось, $\psi_1^B(x)$ и $\psi_2^h(x)$ есть

функции инвариантов $I_1^B = \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x} + 1$ и $I_2^h = -\frac{1}{4} \ln^2 \frac{1-x}{1+x}$ соответствен-

но. В выражениях выше учтено, что $x_1^{ep} = -x_2^{ep} \leq 0$, и что указанные инварианты есть четные функции x .

2.5.4. Частные случаи. Введем механический параметр $\varepsilon = \tau_y/\mu$, где μ нелинейный аналог модуля сдвига.

Несжимаемый материал Генки. Модель Генки [72] задается упругим потенциалом $\Psi^h = -2\mu I_2^h$, $\Psi_2^h = -2\mu = \text{const}$. Уравнения (2.5.15) приводят к следующим выражениям: $x_2^{ep} = (1 - e^{-\varepsilon})/(1 + e^{-\varepsilon})$, $x_1^{ep} = -x_2^{ep}$. Ограничение (2.5.16) приводит к неравенству $\delta < \delta^* = e^{-\varepsilon/2}$, при выполнении которого труба деформирована упругопластически. Безразмерная ширина упругой зоны:

$$\frac{r_2^{ep} - r_1^{ep}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1 - e^{-\varepsilon/2}}{\sqrt{1 + e^{-\varepsilon}}}$$

По (2.5.18):

$$\begin{aligned} S_m &= -\varepsilon - 2 \ln \frac{1 + e^{-\varepsilon}}{2} + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{(1 - e^{-\varepsilon})/(1 + e^{-\varepsilon})} \frac{\xi}{1 - \xi^2} \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} d\xi = \\ &= \ln 4 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{\varepsilon} \left[\frac{\pi^2}{12} + \text{Li}_2(-e^{-\varepsilon}) \right] < 0 \end{aligned}$$

где $\text{Li}_2(\zeta) = -\int_0^\zeta \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

Неогуковский материал. Модель неогуковского тела задается упругим потенциалом $\Psi^B = (\mu/2)(I_1^B - 3)$, $\Psi_1^B = \mu/2 = \text{const}$. Уравнения (2.5.14) приводят к следующим выражениям: $x_2^{ep} = \sqrt{1 + \varepsilon^{-2}} - \varepsilon^{-1}$, $x_1^{ep} = -x_2^{ep}$. Ограничение (2.5.16) приводит к неравенству $\delta < \delta^* = \sqrt{\sqrt{\varepsilon^2 + 1} - \varepsilon}$, при выполнении которого труба деформирована упругопластически. Безразмерная ширина упругой зоны:

$$\frac{r_2^{ep} - r_1^{ep}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon - 1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{2\varepsilon}} - \sqrt{\frac{\varepsilon - \sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1}{2\varepsilon}}$$

По (2.5.17):

$$\begin{aligned} S_m &= -\ln \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1}{2} + \frac{4}{\varepsilon} \int_0^{\sqrt{1 + \varepsilon^2} - \varepsilon^{-1}} \left(\frac{\xi}{1 - \xi^2} \right)^2 d\xi = \\ &= 1 - \ln \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1}{2} - \varepsilon^{-1} \ln \left(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2} \right) < 0 \end{aligned}$$

Упругий материал Гента. Модель Гента [207] с упругим потенциалом

$$\Psi^B = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left(1 - \frac{I_1^{B^e} - 3}{J_m} \right), \quad \text{где } J_m = \left(I_1^{B^e} \right)_{\max} - 3 \text{ есть константа материала,}$$

$\left(I_1^{B^e} \right)_{\max}$ есть предельное значение первого инварианта левого тензора Коши

– Грина, $\Psi_1^B = \frac{\mu}{2} \frac{J_m}{J_m - \left(I_1^{B^e} - 3 \right)}$, описывает полимерные материалы с ограни-

ченной растяжимостью полимерных цепей.

Уравнения (2.5.14) с учетом (2.5.7) приводят к следующим выражениям:

$$x_2^{ep} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (1 + 4/J_m)} - 1}{\varepsilon (1 + 4/J_m)}, \quad x_1^{ep} = -x_2^{ep} \quad (2.5.19)$$

Ограничение (2.5.16) приводит к неравенству

$$\delta < \delta^* = \sqrt{\frac{(1 + 4/J_m)\varepsilon + 1 - \sqrt{(1 + 4/J_m)\varepsilon^2 + 1}}{(1 + 4/J_m)\varepsilon - 1 + \sqrt{(1 + 4/J_m)\varepsilon^2 + 1}}}, \quad \text{при выполнении которого труба}$$

деформирована упругопластически. При $J_m \rightarrow \infty$ это неравенство совпадает с

неравенством, полученным для неогукковского материала $\delta < \delta^* = \sqrt{\sqrt{\varepsilon^2 + 1} - \varepsilon}$.

Формула (2.5.17) с учетом (2.5.7) дает:

$$S_m = \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \frac{4}{\varepsilon} \int_0^{x_2^{ep}} \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} \frac{d\xi}{1 - (1 + 4/J_m)\xi^2} =$$

$$= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \frac{J_m}{\varepsilon} \left[\frac{\operatorname{atanh} \left(x_2^{ep} \sqrt{1 + 4/J_m} \right)}{\sqrt{1 + 4/J_m}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - x_2^{ep}}{1 + x_2^{ep}} \right]$$

Здесь x_2^{ep} определяется по формуле (2.5.19).

На рис. 2.5.3 представлены графики $\delta^*(\varepsilon)$ для всех трех моделей. При $\delta \geq \delta^*$ вывернутая труба деформирована чисто упруго, при $\delta < \delta^*$ – упругопластически.

Безразмерная ширина упругой области приведена на рис. 2.5.4 как функция от механического параметра $\varepsilon = \tau_y / \mu$. Чем шире диапазон упругих деформаций материала (т.е. чем выше $\varepsilon = \tau_y / \mu$), тем шире упругая область в вывернутой трубе и меньше натяг. Предельная величина натяга при $\varepsilon \rightarrow 0$ (т.е. $\mu \rightarrow \infty$) есть $-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_{rr}(b) / \tau_y = S_g$, что совпадает с решением для жестко-пластического материала.

Действительно, в вывернутой трубе из жестко-пластического материала в области $r \in \left[a, (a^2 + b^2)/2 \right]$ $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2\tau_y$, а в области $r \in \left[(a^2 + b^2)/2, b \right]$ $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -2\tau_y$; интегрируя уравнение равновесия с учетом непрерывности σ_{rr} на границе между областями, имеем $\sigma_{rr}(b) = -2\tau_y \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \right] = -2\tau_y \ln \frac{\delta + \delta^{-1}}{2}$.

Для материала Гента, чем выше ограничение растяжимости полимерных цепей (т.е., чем ниже параметр модели J_m), тем меньше упругая область в вывернутой трубе и тем выше натяг при одной и той же величине параметра $\varepsilon = \tau_y / \mu$.

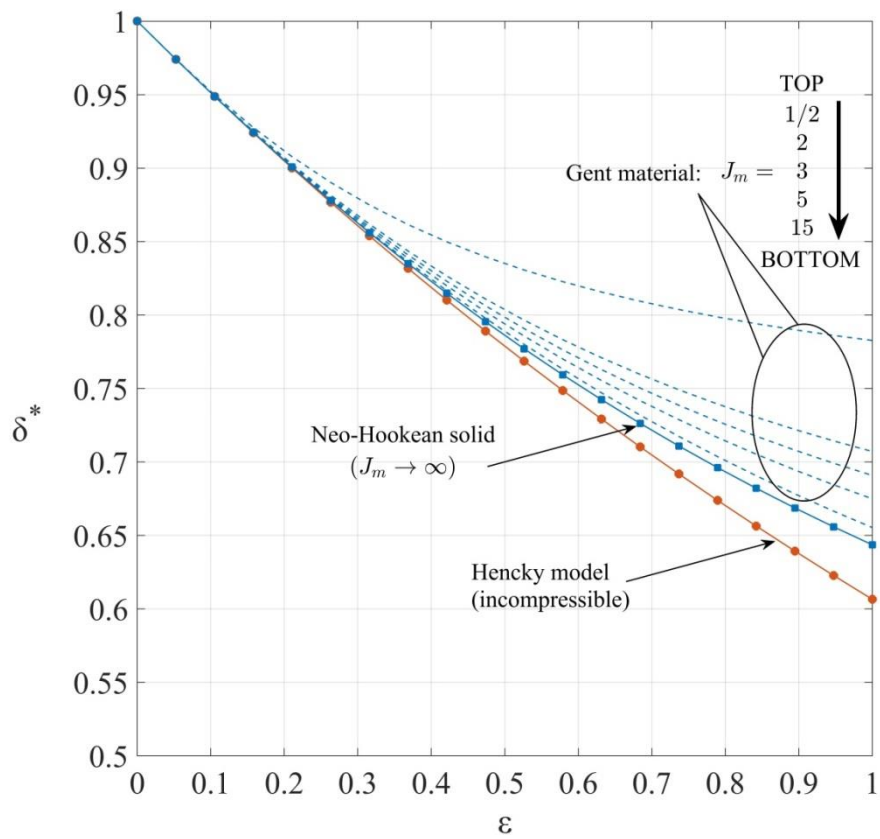


Рисунок 2.5.3 – Предельная величина геометрического параметра для упругих моделей Генки, неогуковского тела и Гента: если $\delta = a/b \geq \delta^*$, то вывернутая труба деформирована упруго, если $\delta = a/b < \delta^*$, то упруго-пластически

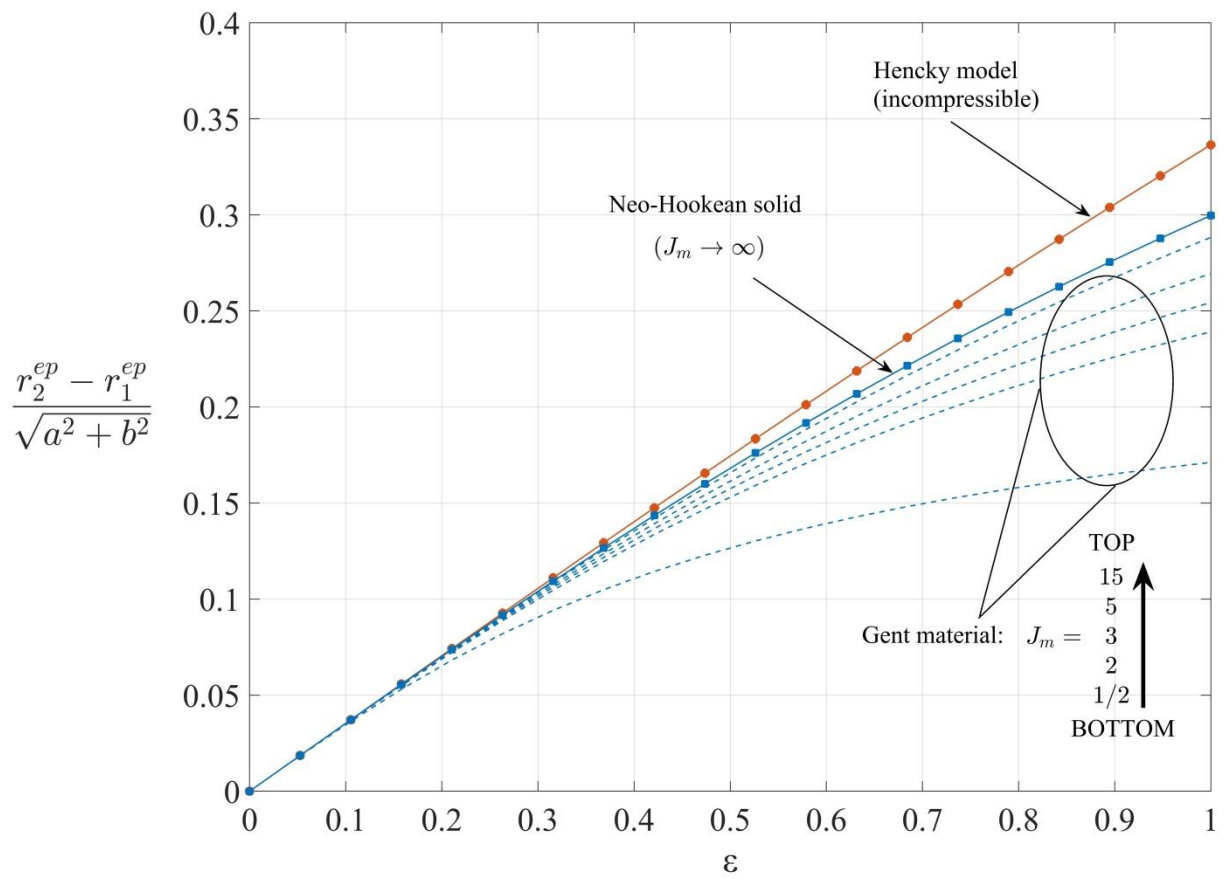


Рисунок 2.5.4 – Ширина упругой зоны

На рис. 2.5.5 представлены графики функций $S_g = S_g(\delta)$ и $S_m = S_m(\varepsilon)$, в сумме составляющих натяг между вывернутой трубой и облоймой.

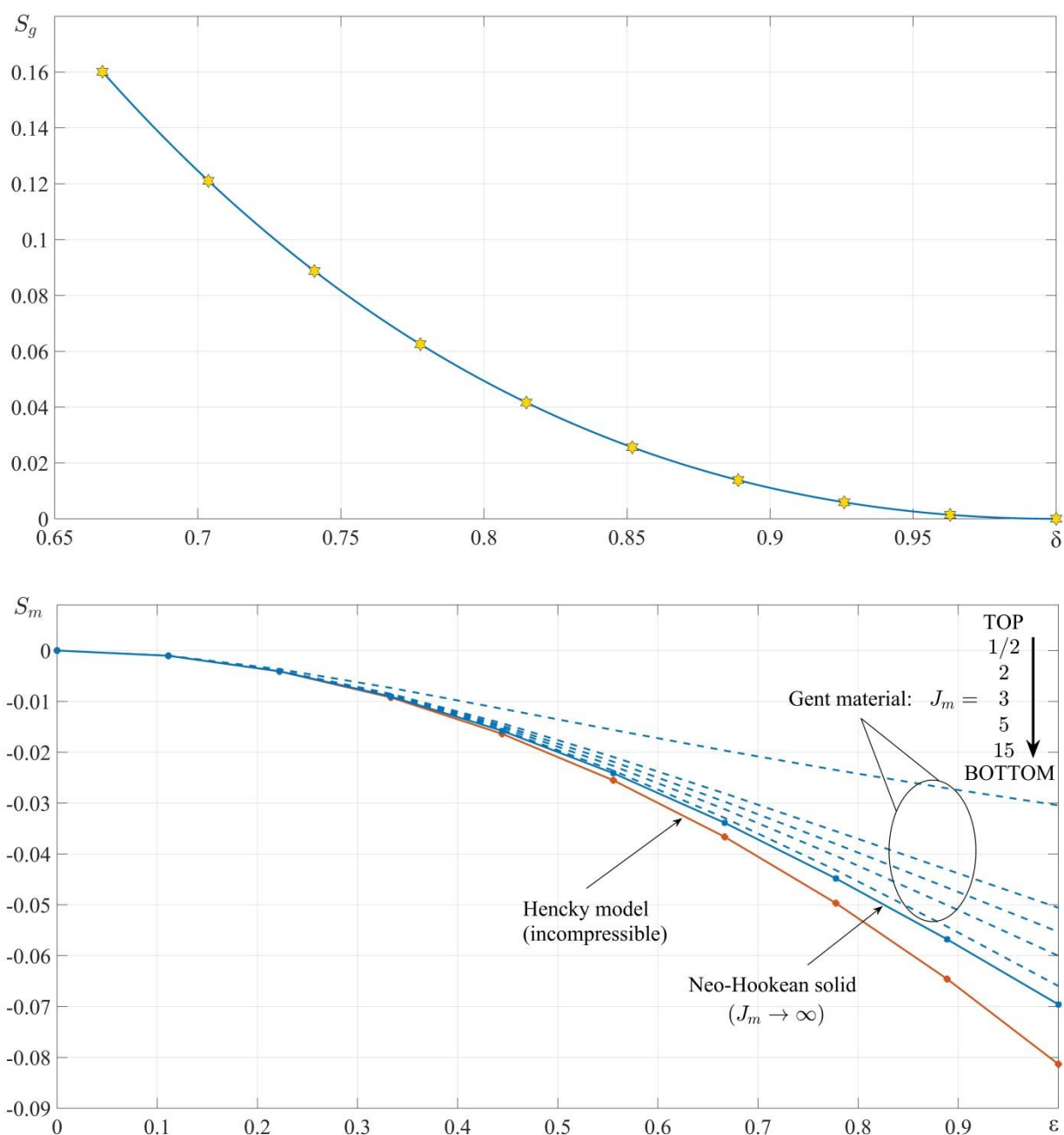


Рисунок 2.5.5 – Величина натяга есть сумма «геометрического» и «механического» слагаемых $-\sigma_{rr}(b)/\tau_y = S_g + S_m$; $S_m = S_m(\epsilon)$, $\epsilon = \tau_y/\mu$, $S_g = S_g(\delta)$, $\delta = a/b$

2.5.5. Учет изотропного деформационного упрочнения материала в пластических областях. Зависимость предела текучести от накопленной пластической деформации может существенно сказываться на напряженном состоянии, особенно при больших деформациях. Корректный подход к учету эффекта упрочнения подразумевает введение в модель законов упрочнения вида $\tau_y = \tau_y(q)$, основанных на параметре накопленной пластической де-

формации q , который определяется интегрированием дифференциального уравнения $\dot{q} = \sqrt{(2/3)\text{tr}(\mathbf{D}^p)^2}$ по всему пути деформирования.

В представленной задаче путь деформирования, приводящий к выворачиванию трубы, как и в соответствующей задаче нелинейной теории упругости, остается вне рассмотрения. Мы имеем дело только с начальным и конечным положением точек материала в пространстве. Для учета эффектов упрочнения в этом случае можно использовать вместо накопленной пластической деформации параметр интенсивности пластической деформации [201], который может быть введен, например, определением $h_{\text{int}} = (h_1^p - h_3^p)/2$, где h_1^p и h_3^p наибольшее и наименьшее собственные значения логарифмического тензора пластической деформации $\mathbf{h}^p$.

Здесь требуется указать разделение деформаций на упругую и пластическую составляющие. Используя мультипликативное разложение градиента деформации $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$, и учитывая, что все тензорные величины в рассматриваемой задаче диагональные, можно записать:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p (\mathbf{F}^p)^T (\mathbf{F}^e)^T = \mathbf{F}^e (\mathbf{F}^e)^T \mathbf{F}^p (\mathbf{F}^p)^T = \mathbf{B}^e \mathbf{B}^p$$

$$\mathbf{h} = \ln \mathbf{B}^{1/2} = \ln (\mathbf{B}^e)^{1/2} + \ln (\mathbf{B}^p)^{1/2} = \mathbf{h}^e + \mathbf{h}^p$$

Далее, поскольку используется пластический потенциал Треска, можно заключить, что осевая компонента скорости пластической деформации, соответствующая промежуточному главному напряжению, отсутствует, $D_{zz}^p = 0$, следовательно, $h_{zz}^p = 0$ и $h_{rr}^p = -h_{\varphi\varphi}^p$. Тогда $h_{\text{int}} = -h_{\varphi\varphi}^p > 0$ во внутренней пластической области $r \in [a, r_1^{ep}]$ и $h_{\text{int}} = h_{\varphi\varphi}^p > 0$ во внешней пластической области $r \in [r_2^{ep}, b]$. Приравнивая разницу главных напряжений, выраженную с использованием условия текучести и с использованием упругого закона (2.5.1), имеем:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= \begin{cases} +2\tau_y(h_{\text{int}}), & r \in [a, r_1^{ep}] \\ -2\tau_y(h_{\text{int}}), & r \in [r_2^{ep}, b] \end{cases} = \\
&= -\psi_2^h \cdot (h_{rr}^e - h_{\varphi\varphi}^e) = 2\psi_2^h h_{\varphi\varphi}^e = 2\psi_2^h \cdot (h_{\varphi\varphi} - h_{\varphi\varphi}^p) = \\
&= \begin{cases} +2\psi_2^h \cdot \left(h_{\text{int}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right), & r \in [a, r_1^{ep}] \\ -2\psi_2^h \cdot \left(h_{\text{int}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right), & r \in [r_2^{ep}, b] \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

Здесь

$$\psi_2^h = \psi_2^h(I_2^{h^e})$$

$$\begin{aligned}
I_2^{h^e} &= -(1/2) \text{tr} \mathbf{h}^{e2} = -(h_{\varphi\varphi}^e)^2 = -(h_{\varphi\varphi} - h_{\varphi\varphi}^p)^2 = \\
&= \begin{cases} -\left(h_{\text{int}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right)^2, & r \in [a, r_1^{ep}] \\ -\left(h_{\text{int}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right)^2, & r \in [r_2^{ep}, b] \end{cases}
\end{aligned}$$

Из (2.5.20) с учетом последних равенств можно выразить интенсивность пластической деформации h_{int} как функцию переменной x . И далее, в обеих пластических областях можно проинтегрировать уравнения равновесия (2.5.8) и получить в конечном итоге искомый натяг. Интегрирование в упругой области, равно как и определение положения упругопластических границ, остаются такими же, как и в предыдущих подразделах для идеально-пластического (неупрочняемого) материала.

В качестве примера рассмотрим несжимаемый материал, линейно-упрочняющийся в пластическом диапазоне с функцией упрочнения $\tau_y(h_{\text{int}}) = \tau_{y0}(1 + \chi h_{\text{int}})$, τ_{y0} и χ материальные константы, и описывающийся законом Генки в упругом диапазоне. По (2.5.20) с $w_h = -2\mu$ имеем:

$$h_{\text{int}} = \begin{cases} \frac{\ln[(1-x)/(1+x)] - \tau_{y0}/\mu}{2 + \chi \tau_{y0}/\mu}, & r \in [a, r_1^{ep}] \\ \frac{\ln[(1+x)/(1-x)] - \tau_{y0}/\mu}{2 + \chi \tau_{y0}/\mu}, & r \in [r_2^{ep}, b] \end{cases}$$

Отсюда следует, что интенсивность пластической деформации максимальна на боковых поверхностях трубы при $x = \pm \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2}$, а именно

$$h_{\text{int}}^{\text{max}} = \frac{2\mu \ln \delta^{-1} - \tau_{y0}}{2\mu + \chi \tau_{y0}}.$$

Уравнение равновесия в пластических областях

$$2(1+x) \frac{d\sigma_{rr}}{dx} = \begin{cases} -2\tau_{y0} \left(1 + \chi \frac{\ln[(1-x)/(1+x)] - \tau_{y0}/\mu}{2 + \chi \tau_{y0}/\mu} \right), & r \in [a, r_1^{ep}] \\ +2\tau_{y0} \left(1 + \chi \frac{\ln[(1+x)/(1-x)] - \tau_{y0}/\mu}{2 + \chi \tau_{y0}/\mu} \right), & r \in [r_2^{ep}, b] \end{cases}$$

Интегрируя уравнение равновесия по всей расчетной области, можно получить величину натяга:

$$-\frac{\sigma_{rr}|_{r=b}}{\tau_{y0}} = \frac{S_g + S_m - \chi H}{1 + \chi \varepsilon_0/2},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\tau_{y0}}{\mu}, \quad S_g(\delta) = 2 \ln \frac{\delta + \delta^{-1}}{2} > 0,$$

$$S_m(\varepsilon_0) = \ln 4 - \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{2}{\varepsilon_0} \left[\frac{\pi^2}{12} + \text{Li}_2(-e^{-\varepsilon_0}) \right] < 0,$$

$$H(\delta) = \text{Li}_2 \frac{1}{1 + \delta^2} - \frac{\pi^2}{12} - \ln^2 \delta + \frac{1}{2} \ln^2(1 + \delta^2) < 0$$

При $\chi = 0$ это выражение совпадает с результатом предыдущего подраздела для неупрочняющегося материала $-\sigma_{rr}|_{r=b}/\tau_{y0} = S_g + S_m$, а при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$

($\mu \rightarrow \infty$) можно получить с помощью правила Лопиталья выражение натяга $-\lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \sigma_{rr}|_{r=b} / \tau_{y0} = S_g - \chi H$, который соответствует жестко-пластическому материалу. Увеличение параметра упрочнения ведет к увеличению натяга.

Выводы к разделу 2.5. Получено аналитическое решение задачи о круговой трубе, вывернутой наизнанку в жесткой обойме. Получены формулы для величины радиального напряжения, которое отвечает за сцепление между трубой и обоймой. Решение получено для произвольного несжимаемого гиперупругого материала с упругим потенциалом, который зависит только от первого инварианта левого тензора деформаций Коши – Грина (обобщенный неогуковский материал) или от второго инварианта логарифмического тензора Генки (различные обобщения несжимаемого материала Генки). Решение учитывает возникновение пластического течения в областях, прилегающих к боковым поверхностям трубы. Рассмотрен как идеально-пластический, так и изотропно упрочняющийся материал общего вида. Для последнего приведена схема решения, в частном случае линейно-упрочняющегося материала получено решение в замкнутом виде. Для идеально-пластического материала решение в замкнутом виде получено для неогуковского тела, для несжимаемого материала Генки и для материала Гента.

2.6. Антиплоский осесимметричный упруго-пластический сдвиг в изотропно упрочняющемся материале

Механика материалов описывает их поведение в рамках некоторых математических моделей. В теории пластически упрочняющихся тел, например, принимается, что интенсивность напряжений по Мизесу или Треска (в качестве интенсивности могут быть использованы и другие более сложные конструкции) при пластическом течении есть некоторая функция накопленной пластической деформации (функция упрочнения). Для нее может быть принят тот или иной вид, включающий коэффициенты (материальные константы), которые можно определить опытным путем, сравнивая экспериментальные данные с численными или аналитическими расчетами по выбранной модели. При этом разные схемы нагружения материала могут дать различающиеся между собой наборы материальных констант. Синтетические тесты, в которых применяется несколько различных схем нагружения, показывают более надежные результаты идентификации материальных параметров [208]. Схемы тестирования с неоднородным напряженным состоянием имеют некоторые преимущества перед схемами с однородным состоянием: реализация однородного состояния требует соблюдения достаточно сложных условий тестирования; тесты с неоднородным состоянием могут предоставить большую информацию о поведении материала [208]. Вместе с тем, тесты с неоднородным напряженным состоянием сложнее интерпретировать.

Один из примеров теста с неоднородным напряженным состоянием это тест кручения сплошного цилиндрического образца. Этот тест широко используется, и для соответствующей краевой задачи имеется ряд аналитических решений, учитывающих как нелинейно-упругие свойства материала [10, 179], так и нелинейное упрочнение в пластическом диапазоне [5, 12]. В данном разделе дается решение для другой достаточно простой схемы неоднородного деформирования, а именно для антиплоского осесимметричного

сдвига. Реализация этой схемы может быть выполнена с помощью оснастки, описанной в работе [209] (см. также [210]) и приведенной на рис. 2.6.1.

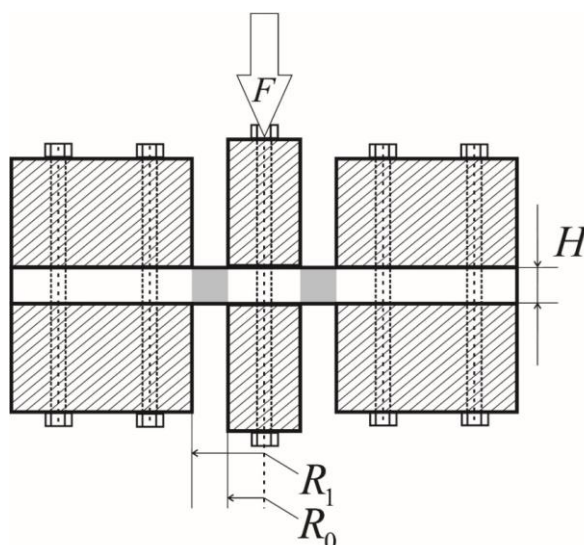


Рисунок 2.6.1 – Реализация антиплоского осесимметричного сдвига (серым цветом выделена область деформации образца). Заштрихована оснастка

Указанный тест предоставляет данные «перемещение пуансона – приложенная нагрузка». Несмотря на то, что представленная далее модель не учитывает накопление поврежденности материала (а, значит, не может описать нисходящую часть кривой нагрузки), она может дать адекватное аналитическое описание процесса при умеренных деформациях вплоть до пикового значения нагрузки.

Осесимметричное антиплоское движение материала (то есть такое, при котором вектор скорости имеет только осевую компоненту, величина которой зависит только от радиальной координаты) рассматривалось при различных краевых условиях в ряде работ в рамках жестко-вязкопластического [211, 212], а также упруго-вязкопластического анализа [213] (см. также цитируемую в этих источниках литературу). Вместе с тем, при обычных условиях большинство материалов в пластическом диапазоне в большей степени проявляют деформационное упрочнение, нежели зависимость предела текучести от скорости деформации. В этом смысле представленное решение, учитывающее изотропное упрочнение, более пригодно для описания тестирования материалов.

2.6.1. Постановка задачи. Будем полагать, что область деформации материала расположена между неподвижным внешним кожухом и сердцевинной, на которую давит пуансон (см. рис. 2.6.1), т.е. ограничена цилиндрическими поверхностями с радиусами R_1 и R_0 , $R_1 > R_0$, и имеет начальную высоту H . Остальная часть образца не деформируется. Таким образом, движение деформируемого материала соответствует кинематике антиплоского сдвига:

$$r = R, \quad z = Z + w(R, t), \quad \varphi = \theta, \quad (2.6.1)$$

где $w(R, t) \geq 0$ есть функция осевого перемещения с граничными условиями

$$w(R_1, t) = 0, \quad w(R_0, t) = w^*(t), \quad (2.6.2)$$

Здесь (R, θ, Z) и (r, φ, z) есть цилиндрические координаты точки среды в недеформированном и деформированном состоянии соответственно; t есть время.

Модель материала. Для несжимаемой гиперупругой среды примем модель Муни – Ривлина:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e}, \quad \Psi = C_1(I_1^{\mathbf{B}^e} - 3) + C_2(I_2^{\mathbf{B}^e} - 3), \quad \det \mathbf{B}^e = 1 \quad (2.6.3)$$

$C_1 > 0$ и $C_2 \geq 0$ есть упругие константы Муни – Ривлина. Удобно ввести следующие обозначения: $\mu = 2(C_1 + C_2)$, $\tilde{C} = (C_1 - C_2)(C_1 + C_2)^{-1}$, $-1 \leq \tilde{C} \leq 1$; $4C_1 = \mu(1 + \tilde{C})$, $4C_2 = \mu(1 - \tilde{C})$. Неогуковскому материалу соответствует $\tilde{C} = 1$; μ есть модуль сдвига. Эта модель обычно используется для резиноподобных и полимерных материалов [214, 215], однако нелинейно упругий закон (2.6.3) с некоторой погрешностью может быть применен и для других слабо сжимаемых материалов при умеренных величинах упругой деформации сдвига.

Из (2.6.3) следует, что

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = -\tilde{p}\mathbf{I} + \left(\frac{1 + \tilde{C}}{2} + \frac{1 - \tilde{C}}{2} \text{tr} \mathbf{B}^e \right) \mathbf{B}^e - \frac{1 - \tilde{C}}{2} (\mathbf{B}^e)^2 \quad (2.6.4)$$

здесь и далее « $\sim$ » означает безразмерную величину напряжения, полученную нормированием на модуль сдвига μ .

Пластическое деформирование описывается условием текучести Треска, обобщенным на случай изотропного упрочнения, и ассоциированным с ним законом:

$$f = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \tau_y(q) = 0, \quad (2.6.5)$$

$$\mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.6.6)$$

Здесь $\tau_y(q)$ есть произвольная монотонная функция упрочнения, параметром которой выступает накопленная пластическая деформация q . Начальный предел текучести на сдвиг обозначим $\tau_{y0} = \tau_y(0)$.

Разделение деформации на упругую и пластическую составляющие. Будем использовать кинематику конечных упруго-пластических деформаций, описанную в главе 1. В частности, уравнение

$$\frac{\partial_{old}(\mathbf{B}^e)}{\partial t} = \dot{\mathbf{B}}^e - \mathbf{I}\mathbf{B}^e - \mathbf{B}^e\mathbf{I}^T = -2\mathbf{B}^e\mathbf{D}^p \quad (2.6.7)$$

Уравнение (2.6.7) описывает изменение тензора упругой деформации в области пластического течения, при этом начальные значения компонент этого тензора определяются решением упругой задачи.

Кинематика антиплоского сдвига. Исходя из (2.6.1) несимметричный тензор градиента деформации $\mathbf{F}$ отличается от единичного тензора единственной компонентой $F_{zR} = \partial w / \partial R$. Левый тензор деформации Коши – Грина имеет координатное представление

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{F}\mathbf{F}^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \partial w / \partial R \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial w / \partial R & 0 & 1 + (\partial w / \partial R)^2 \end{bmatrix} \quad (2.6.8)$$

Вектор перемещений имеет единственную ненулевую компоненту $u_z = w$; единственная ненулевая компонента вектора скорости $v_z = \partial w / \partial t$.

2.6.2. Упругое деформирование. На стадии чисто упругого деформирования во всем теле тензоры полной деформации и упругой деформации совпадают, $\mathbf{B}^e = \mathbf{B}$ и по (2.6.4) и (2.6.8) компоненты тензора напряжений имеют выражение

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{rr} &= -\tilde{p} + \frac{3 - \tilde{C}}{2} \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} &= \tilde{\sigma}_{rr} + \frac{1 - \tilde{C}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \\ \tilde{\sigma}_{zz} &= \tilde{\sigma}_{rr} + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \\ \tilde{\sigma}_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r}\end{aligned}\tag{2.6.9}$$

Поскольку деформирование осуществляется не за счет градиента давления, а за счет перемещения цилиндрических поверхностей $R = R_0$ и $R = R_1$ друг относительно друга, то разумно предположить, что напряженное состояние не зависит от продольной координаты z , и, в частности, $\partial \tilde{p} / \partial z = 0$.

Тогда условие равновесия $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ приводит к следующим уравнениям:

$$r \frac{\partial \tilde{\sigma}_{rr}}{\partial r} = \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} - \tilde{\sigma}_{rr}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\sigma}_{rz}) = -\frac{\partial \tilde{\sigma}_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = 0\tag{2.6.10}$$

Второе из этих уравнений с учетом последнего уравнения (2.6.9) позволяет найти

$$\tilde{\sigma}_{rz} = -\frac{A}{r}; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{A}{r}, \quad w = w_0 - A \ln r$$

где $A = A(t) \geq 0$ и $w_0 > 0$ есть константы интегрирования. Учитывая граничные условия (2.6.2), имеем:

$$A(t) = \frac{w^*(t)}{\ln \delta}, \quad w_0 = w^*(t) \frac{\ln R_1}{\ln \delta}, \quad \delta = \frac{R_1}{R_0} > 1 \quad (2.6.11)$$

и

$$\tilde{\sigma}_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{w^*}{\ln \delta} \frac{1}{r}; \quad w = \frac{w^*}{\ln \delta} \ln \frac{R_1}{r} \quad (2.6.12)$$

Первое уравнение (2.6.10) служит для установления функции добавочного давления $\tilde{p}$.

2.6.3. Возникновение пластического течения. Формулы (2.6.9) позволяют получить выражения для главных напряжений:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_I &= \frac{\tilde{\sigma}_{zz} + \tilde{\sigma}_{rr}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{rr}}{2}\right)^2 + \tilde{\sigma}_{rz}^2} = \\ &= -\tilde{p} + \frac{3 - \tilde{C}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^4}, \\ \tilde{\sigma}_{II} &= \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = -\tilde{p} + \frac{3 - \tilde{C}}{2} + \frac{1 - \tilde{C}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2, \\ \tilde{\sigma}_{III} &= \frac{\tilde{\sigma}_{zz} + \tilde{\sigma}_{rr}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{rr}}{2}\right)^2 + \tilde{\sigma}_{rz}^2} = \\ &= -\tilde{p} + \frac{3 - \tilde{C}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^4} \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_I - \tilde{\sigma}_{II} &= \frac{\tilde{C}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^4} > \\
&> \frac{\tilde{C}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = \frac{1 + \tilde{C}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \\
\tilde{\sigma}_{II} - \tilde{\sigma}_{III} &= -\frac{\tilde{C}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^4} > \\
&> -\frac{\tilde{C}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = \frac{1 - \tilde{C}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2
\end{aligned}$$

Поскольку $-1 \leq \tilde{C} \leq 1$, то $\sigma_{II} = \sigma_{\varphi\varphi}$ есть промежуточное главное напряжение, максимальное главное напряжение $\sigma_1 = \sigma_I$, минимальное есть $\sigma_3 = \sigma_{III}$.

Запишем условие возникновения пластического течения, которое должно выполняться на упругопластической границе $r = r_{ep}$ (с учетом того, что на упругопластической границе накопленная пластическая деформация равна нулю, $q|_{r=r_{ep}} = 0$):

$$\left. \frac{\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3}{2} \right|_{r=r_{ep}} = \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=r_{ep}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left[\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=r_{ep}} \right]^2} = \frac{\tau_{y0}}{\mu} = \tilde{\tau}_{y0}$$

Отсюда

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=r_{ep}} = -\sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)} \quad (2.6.13)$$

Учитывая, что по (2.6.12) величина $\partial w / \partial r$ обратно пропорциональна радиальной координате, пластическое течение зарождается на внутренней границе области деформирования $r = R_0$ при величине смещения

$$w^* = w_{cr1}^* = R_0 \ln \delta \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)}$$

При $w_{cr1}^* < w^* < w_{cr2}^*$ в теле существует две области: область $R_0 \leq r < r_{ep}$, в которой происходит упругопластическое деформирование, и область $r_{ep} < r \leq R_1$, которая остается деформированной чисто упруго. При $w^* \geq w_{cr2}^*$ упругая область полностью исчезает, пластическое течение охватывает всё тело. Выражение для w_{cr2}^* будет приведено позже. Полагается, что w и $\partial w / \partial r$ непрерывны на упругопластической границе.

2.6.4. Область упругого деформирования. В упругой области $r_{ep} < r \leq R_1$ сохраняется равенство $\mathbf{B}^e = \mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ определяется по (2.6.8), и верны выражения (2.6.9) для компонент напряжения, а также равенства

$$\tilde{\sigma}_{rz} = -\frac{A^e}{r}, \quad w = w_0^e - A^e \ln r \quad (2.6.14)$$

Однако теперь A^e и w_0^e уже не совпадают с A и w_0 из чисто упругого решения (2.6.11). Граничное условие $w|_{r=R_1} = 0$ как и прежде позволяет выразить $w_0^e = A^e \ln R_1$ и, следовательно,

$$w = A^e \ln \frac{R_1}{r}, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{A^e}{r} \quad (2.6.15)$$

По (2.6.13) с учетом (2.6.15):

$$\frac{A^e}{r_{ep}} = \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)} \quad (2.6.16)$$

Для определения закона движения упругопластической границы $r = r_{ep}(w^*)$ необходимо знать $A^e(w^*)$. А для определения этой функции по формуле (2.6.15) необходимо значение $w|_{r=r_{ep}}$, которое может быть найдено только из решения в области упругопластического деформирования.

2.6.5. Область упругопластического деформирования. В этой области $\mathbf{B}^e \neq \mathbf{B}$; тензор упругой деформации определяется эволюционным уравнением (2.6.7). Мы будем искать координатное представление этого тензора в области пластического течения в виде

$$[\mathbf{B}^e] = \begin{bmatrix} B_{rr}^e & 0 & B_{rz}^e \\ 0 & 1 & 0 \\ B_{rz}^e & 0 & B_{zz}^e \end{bmatrix}, \det \mathbf{B}^e = B_{rr}^e B_{zz}^e - (B_{rz}^e)^2 = 1 \quad (2.6.17)$$

Несимметричный тензор градиента скорости в (2.6.7) имеет единственную ненулевую компоненту

$$l_{zr} = \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} \quad (2.6.18)$$

Компоненты тензора $\mathbf{B}^e$ не зависят от координаты z , тогда $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B}^e = \mathbf{0}$.

Упругий закон (2.6.4) с учетом (2.6.17) позволяет выразить в пластической области компоненты напряжений в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr} &= -\tilde{p} + \frac{1 - \tilde{C}}{2} + B_{rr}^e \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} &= -\tilde{p} + \frac{1 + \tilde{C}}{2} + \frac{1 - \tilde{C}}{2} (B_{rr}^e + B_{zz}^e) \\ \tilde{\sigma}_{zz} &= -\tilde{p} + \frac{1 - \tilde{C}}{2} + B_{zz}^e \\ \tilde{\sigma}_{rz} &= B_{rz}^e \end{aligned} \quad (2.6.19)$$

Уравнение равновесия в пластической области так же, как и в упругой, дает $\partial(\tilde{\sigma}_{rz}r)/\partial r = 0$, и непрерывность касательного напряжения на упруго-пластической границе позволяет получить равенство идентичное (2.6.14)

$$\tilde{\sigma}_{rz} = B_{rz}^e = -\frac{A^e}{r}$$

Из (2.6.19) можно получить

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{I,III} &= \frac{\tilde{\sigma}_{zz} + \tilde{\sigma}_{rr}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{rr}}{2}\right)^2 + \tilde{\sigma}_{rz}^2} = -\tilde{p} + \frac{1 - \tilde{C}}{2} + \Sigma \pm \sqrt{\Sigma^2 - 1}, \\ \tilde{\sigma}_{II} &= \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = -\tilde{p} + \frac{1 + \tilde{C}}{2} + \Sigma(1 - \tilde{C}) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_I - \tilde{\sigma}_{II} &= \tilde{C}(\Sigma - 1) + \sqrt{\Sigma^2 - 1} > \tilde{C}(\Sigma - 1) + (\Sigma - 1) = (\tilde{C} + 1)(\Sigma - 1) \geq 0, \\ \tilde{\sigma}_{II} - \tilde{\sigma}_{III} &= \tilde{C}(1 - \Sigma) + \sqrt{\Sigma^2 - 1} > \tilde{C}(1 - \Sigma) + (\Sigma - 1) = (\Sigma - 1)(1 - \tilde{C}) \geq 0\end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $\Sigma = (B_{rr}^e + B_{zz}^e)/2$. Таким образом, $\sigma_{II} = \sigma_{\varphi\varphi}$ остается промежуточным главным напряжением в пластической области; $\sigma_1 = \sigma_I, \sigma_3 = \sigma_{III}$.

Условие пластичности (2.6.5) может быть записано в виде

$$\frac{\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3}{2} = \tilde{\tau}_y = \sqrt{\Sigma^2 - 1} \quad (2.6.20)$$

По (2.6.6) с учетом (2.6.19) тензор скорости пластической деформации имеет следующие ненулевые компоненты

$$\begin{aligned}D_{zz}^p &= -D_{rr}^p = \frac{\Lambda}{2\tilde{\tau}_y} \frac{\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{rr}}{2} = \frac{\Lambda}{2\tilde{\tau}_y} \frac{B_{zz}^e - B_{rr}^e}{2} \\ D_{rz}^p &= \frac{\Lambda}{2\tilde{\tau}_y} \tilde{\sigma}_{rz} = \frac{\Lambda}{2\tilde{\tau}_y} B_{ez}^e\end{aligned} \quad (2.6.21)$$

Уравнение для накопленной пластической деформации с учетом (2.6.19) и (2.6.21) принимает вид

$$\dot{q} = \sqrt{(2/3)\mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p} = 2/\sqrt{3} \sqrt{(D_{zz}^p)^2 + (D_{rz}^p)^2} = \frac{\Lambda}{\sqrt{3}\tilde{\tau}_y} \sqrt{\Sigma^2 - 1} = \frac{\Lambda}{\sqrt{3}}$$

При этом, учитывая, что $\partial q / \partial z = 0$, имеем $\dot{q} = \partial q / \partial t$.

Подставляя (2.6.17), (2.6.18), (2.6.21) в (2.6.7), запишем уравнения изменения компонент тензора упругой деформации $\mathbf{B}^e$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_{rr}^e}{\partial t} &= -\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\tau}_y} \frac{\partial q}{\partial t} \left(B_{rr}^e \frac{B_{zz}^e + B_{rr}^e}{2} - 1 \right) \\ \frac{\partial B_{rz}^e}{\partial t} - B_{rr}^e \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial r} &= -\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\tau}_y} \frac{\partial q}{\partial t} \frac{B_{rr}^e + B_{zz}^e}{2} B_{rz}^e \\ \frac{\partial B_{zz}^e}{\partial t} - 2B_{rz}^e \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial r} &= -\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\tau}_y} \frac{\partial q}{\partial t} \left(B_{zz}^e \frac{B_{rr}^e + B_{zz}^e}{2} - 1 \right)\end{aligned} \quad (2.6.22)$$

остальные компоненты не изменяются при пластическом деформировании; из трех уравнений выше независимы только два из-за условия несжимаемости $B_{rr}^e B_{zz}^e - 1 = (B_{rz}^e)^2$.

Далее, согласно (2.6.20) нам известно выражение для $\Sigma = (B_{rr}^e + B_{zz}^e)/2$ в виде функции накопленной пластической деформации:

$$\Sigma = \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}$$

Если теперь предположить, что компоненты упругой деформации, а также функция $G = \partial w / \partial r$, которая характеризует искривление материальных волокон, расположенных в недеформированном состоянии в радиальном направлении, являются функциями одной переменной q (накопленной пластической деформации), то система уравнений (2.6.22) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{B_{rz}^e}{\tilde{\tau}_y} \frac{dG}{dq} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dB_{rz}^e}{dq} &= \left[\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - (B_{rz}^e)^2} \right] \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dG}{dq} - \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}}{\tilde{\tau}_y} B_{rz}^e \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $B_{rr}^e = \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - (B_{rz}^e)^2}$. Это выражение следует из условия несжимаемости $B_{rr}^e B_{zz}^e - 1 = (B_{rz}^e)^2$ и равенства $\Sigma = (B_{rr}^e + B_{zz}^e)/2 = \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}$.

Или, исключая dG/dq из первого уравнения этой системы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dG}{dq} &= \frac{\tilde{\tau}_y}{B_{rz}^e} \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + 1 \right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dB_{rz}^e}{dq} B_{rz}^e &= - \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}}{\tilde{\tau}_y} (B_{rz}^e)^2 + \\ &+ \left[\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - (B_{rz}^e)^2} \right] \left[\frac{\tilde{\tau}_y}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + \tilde{\tau}_y \right] \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

Замечание (существование решения). Поскольку условия равновесия требуют, чтобы касательное напряжение по абсолютной величине убывало

обратно пропорционально радиальной координате r , а накопленная пластическая деформация также убывает с ростом r , то правая часть в последнем уравнении системы (2.6.23) должна быть положительной. Можно понять, что это возможно не при любых функциях упрочнения.

В частности, для неупрочняемого материала в момент начала пластического течения (при $B_{rz}^e = -\sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)}$) имеем

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1}}{\tilde{\tau}_{y0}} (B_{rz}^e)^2 + \left[\sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1} - \sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 - (B_{rz}^e)^2} \right] \tilde{\tau}_{y0} = \\ & = -\frac{2\sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1}(\sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1} - 1)}{\tilde{\tau}_{y0}} + \tilde{\tau}_{y0} = -\frac{(\sqrt{\tilde{\tau}_{y0}^2 + 1} - 1)^2}{\tilde{\tau}_{y0}} < 0 \end{aligned}$$

Уравнение, совпадающее с последним уравнением в системе (2.6.23), было получено для кругового упругопластического сдвига в [14]. Там же были приведены условия, налагаемые на функцию упрочнения, которые обеспечивают существование решения (правда, достаточно жесткие; для существования решения в некотором интервале нагрузки достаточно просто монотонного роста предела текучести с ростом пластической деформации).

Введем новую функцию $\Omega = \sqrt{1 - (\tilde{\sigma}_{rz}/\tilde{\tau}_y)^2} = \sqrt{1 - (B_{rz}^e/\tilde{\tau}_y)^2}$, $\Omega \in [0,1]$, которая характеризует, насколько напряженное состояние в точке отличается от состояния чистого сдвига. Тогда система уравнений (2.6.23) принимает простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dq} &= -\frac{f_1}{\sqrt{1 - \Omega^2}} \\ \frac{d\Omega}{dq} &= (1 - \Omega f_2)f_1 \end{aligned}$$

где $f_1(q) = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2(q)+1}} \frac{d\tilde{\tau}_y(q)}{dq}$, $f_2(q) = \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_y^2(q)+1}}{\tilde{\tau}_y(q)}$. Второе из этих уравнений – линейное ОДУ с решением

$$\Omega(q) = \Omega(0) + \int_0^q f_1(\xi) e^{-\int_\xi^q f_1(\zeta) f_2(\zeta) d\zeta} d\xi \quad (2.6.24)$$

первое же, после того как найдена функция $\Omega(q)$, позволяет найти функцию $G(q) = \partial w / \partial r$ прямым интегрированием:

$$G(q) = G(0) - \int_0^q \frac{f_1(\varsigma)}{\sqrt{1 - \Omega^2(\varsigma)}} d\varsigma \quad (2.6.25)$$

Значения $\Omega(0)$ и $G(0)$ соответствуют упругопластической границе, где по (2.6.14), (2.6.15) и (2.6.16)

$$B_{rz}^e|_{r=r_{ep}} = \frac{\partial w}{\partial r}|_{r=r_{ep}} = G(0) = -\frac{A^e}{r_{ep}} = -\sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)} \quad (2.6.26)$$

и, следовательно,

$$\Omega(0) = \sqrt{1 - \left(B_{rz}^e|_{r=r_{ep}} / \tilde{\tau}_{y0} \right)^2} = \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1}{\tilde{\tau}_{y0}} \quad (2.6.27)$$

Равенство

$$B_{rz}^e = -\frac{A^e}{r} = -\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega^2(q)} \quad (2.6.28)$$

позволяет (в неявном виде) установить распределение накопленной пластической деформации по радиусу образца. Остается только связать величину A^e с величиной осевого смещения w^* внутренней цилиндрической поверхности относительно внешней. Далее удобно использовать в качестве параметра нагружения (после начала пластического течения) величину накопленной пластической деформации на внутренней цилиндрической поверхности

$q|_{r=R_0} = q^{in}$. Величина A^e связана с этим параметром выражением $A^e = R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})}$.

Поле перемещений в области упругопластического деформирования $r_{ep} < r < R_0$ определяется интегрированием функции $G(q) = \partial w / \partial r$. Учитывая (2.6.28), накопленная пластическая деформация является функцией автомодельной переменной A^e/r , тогда можно записать следующие равенства

$$G(q) = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial q} \frac{dq}{d(A^e/r)} \frac{\partial(A^e/r)}{\partial r} = - \frac{\partial w}{\partial q} \frac{1}{A^e} \left(\frac{A^e}{r} \right)^2 \left[\frac{d(A^e/r)}{dq} \right]^{-1}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial q} &= -A^e G \frac{d(A^e/r)}{dq} \left(\frac{A^e}{r} \right)^{-2} \\ &= R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} G \frac{d}{dq} \left[\frac{1}{\tilde{\tau}_y \sqrt{1 - \Omega^2}} \right] \end{aligned} \quad (2.6.29)$$

Интегрируя (2.6.29) по частям с граничным условием на упругопластической границе, которое следует из (2.6.15) и (2.6.16)

$$\begin{aligned} w|_{r=r_{ep}} &= A^e \ln \frac{R_1}{r_{ep}} = A^e \ln \left\{ \frac{R_1}{A^e} \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)} \right\} = \\ &= R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} \ln \left\{ \frac{R_1 \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)}}{R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})}} \right\} \end{aligned}$$

имеем:

$$\begin{aligned}
w &= w|_{r=r_{ep}} + R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} \int_0^q G \frac{d}{dq} \left[\frac{1}{\tilde{\tau}_y \sqrt{1 - \Omega^2}} \right] dq = \\
&= w|_{r=r_{ep}} + R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} \times \\
&\times \left\{ \frac{G(q)}{\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega^2(q)}} - \frac{G(0)}{\tilde{\tau}_{y0} \sqrt{1 - \Omega^2(0)}} + \int_0^q \frac{f_1}{\tilde{\tau}_y(1 - \Omega^2)} dq \right\} = \\
&= R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} \times \\
&\times \left\{ \ln \left[\frac{R_1 \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)}}{R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})}} \right] + \frac{G(q)}{\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega^2(q)}} + 1 + \int_0^q \frac{f_1}{\tilde{\tau}_y(1 - \Omega^2)} dq \right\}
\end{aligned}$$

Это равенство при $q = q^{in}$ связывает w^* с параметром q^{in} . Теперь по (2.6.16) можно указать, при каком значении смещения w^* пластическое течение достигнет внешней границы области деформирования:

$$w_{cr2}^* = w|_{q=q_{cr2}^{in}},$$

где q_{cr2}^{in} есть корень алгебраического уравнения

$$\tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} = \frac{R_1}{R_0} \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)} \quad (2.6.30)$$

2.6.6. Деформирование при развитом пластическом течении. Когда смещение цилиндрических поверхностей образца друг относительно друга превышает величину w_{cr2}^* , которая определена в предыдущем подразделе, вся область деформирования находится в состоянии пластического течения.

В этом случае решение строится таким же образом, как и в предыдущем подразделе, за исключением того, что константа интегрирования в уравнении (2.6.29) находится не из условия на упругопластической границе, а из условия на внешней границе области деформирования образца $w|_{r=R_1} = 0$:

$$\begin{aligned}
w &= R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} \int_{q^{out}}^q G \frac{d}{dq} \left[\frac{1}{\tilde{\tau}_y \sqrt{1 - \Omega^2}} \right] dq = \\
&= R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} \times \\
&\times \left\{ \frac{G(q)}{\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega^2(q)}} - \frac{G(q^{out})}{\tilde{\tau}_y(q^{out}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{out})}} + \int_{q^{out}}^q \frac{f_1(\zeta)}{\tilde{\tau}_y(\zeta) [1 - \Omega^2(\zeta)]} d\zeta \right\}
\end{aligned}$$

Здесь q^{out} есть величина накопленной пластической деформации на внешней границе области деформирования, которая согласно (2.6.28) связана с величиной q^{in} равенством $R_0 \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})} = R_1 \tilde{\tau}_y(q^{out}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{out})}$; функции $\Omega(q)$ и $G(q)$ определены равенствами (2.6.24) и (2.6.25) из предыдущего подраздела, с теми же константами интегрирования $\Omega(0)$ и $G(0)$, определенными формулами (2.6.26) и (2.6.27).

2.6.7. Расчет величины силового воздействия. В качестве характеристики силового воздействия примем безразмерную величину $F/(2\pi R_0 H \mu)$, где F есть сила, действующая на пуансон, H есть начальная высота образца [209, 210]. Работа механических сил равна $w^* F$. С другой стороны, она равна $2\pi R_0 H |\sigma_{rz}| \big|_{r=R_0} w^*$. Тогда

$$F/(2\pi R_0 H \mu) = |\tilde{\sigma}_{rz}| \big|_{r=R_0} = |B_{rz}^e| \big|_{r=R_0} = \tilde{\tau}_y(q^{in}) \sqrt{1 - \Omega^2(q^{in})}$$

Из последней формулы с учетом (2.6.30) следует, что моменту перехода всего образца в пластическое состояние соответствует приложенная к пуансону сила

$$F_{fp} = 2\pi R_1 H \mu \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)} \approx 2\pi R_1 H \tau_{y0}$$

Эта величина не зависит от функции упрочнения материала. Последнее приближенное равенство верно при небольших значениях $\tilde{\tau}_{y0}$.

2.6.8. Пример решения. В заключение рассмотрим поведение материалов с различными законами упрочнения при антиплоском осесимметричном сдвиге. Для сравнения выберем три варианта функции упрочнения:

- линейная $\tau_y/\tau_{y0} = 1 + \chi_1 q$,
- квадратичная $\tau_y/\tau_{y0} = 1 + \chi_2 q^2$,
- с насыщением по типу Воце $\tau_y/\tau_{y0} = \tau_{y\infty}/\tau_{y0} - (\tau_{y\infty}/\tau_{y0} - 1)e^{-\chi_3 q}$.

Параметры во всех трех функциях выбраны так, чтобы пределы текучести при величине накопленной пластической деформации равной 1 совпадали (см. рис. 2.6.2): $\chi_1 = \chi_2 = 1.8$, $\tau_{y\infty}/\tau_{y0} = 3$, $\chi_3 = 2.3$. Другие параметры материалов совпадают: начальный предел текучести $\tau_{y0} = 20$ МПа, модуль сдвига $\mu = 1$ ГПа. Геометрическая характеристика образца $R_1/R_0 = 2$.

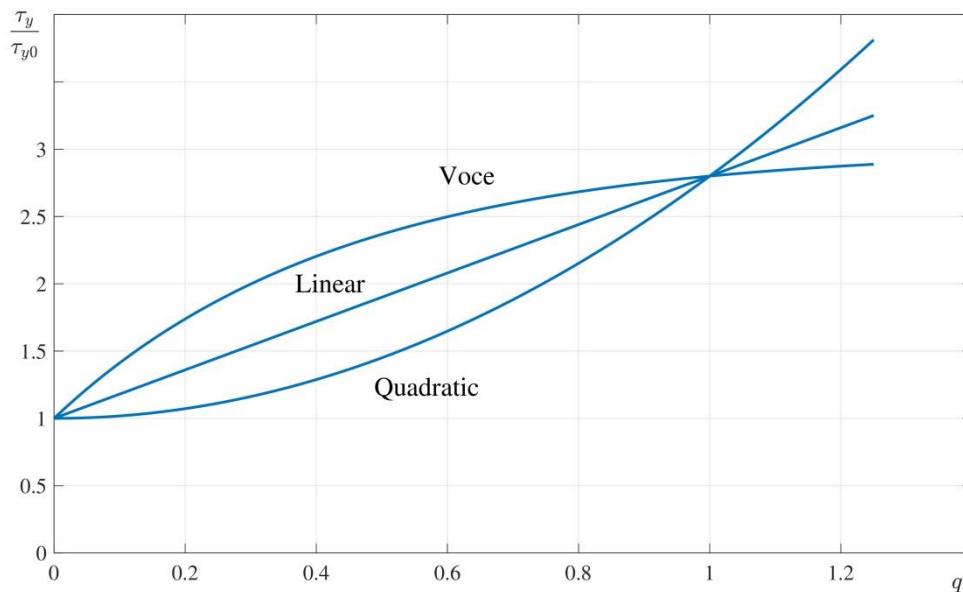


Рисунок 2.6.2 – Функции упрочнения

На рис. 2.6.3 приведена расчетная величина силового воздействия с использованием полученного аналитического решения. Одним и тем же величинам приложенной нагрузки соответствуют существенно различающиеся значения перемещений пуансона, зависящие от функции упрочнения. Это говорит о хорошей чувствительности такого теста и его пригодности для иден-

тификации параметров закона упрочнения. Полный переход образца в пластическое состояние происходит при наименьшем перемещении пуансона для модели Воше и при наибольшем – для квадратичного закона упрочнения.

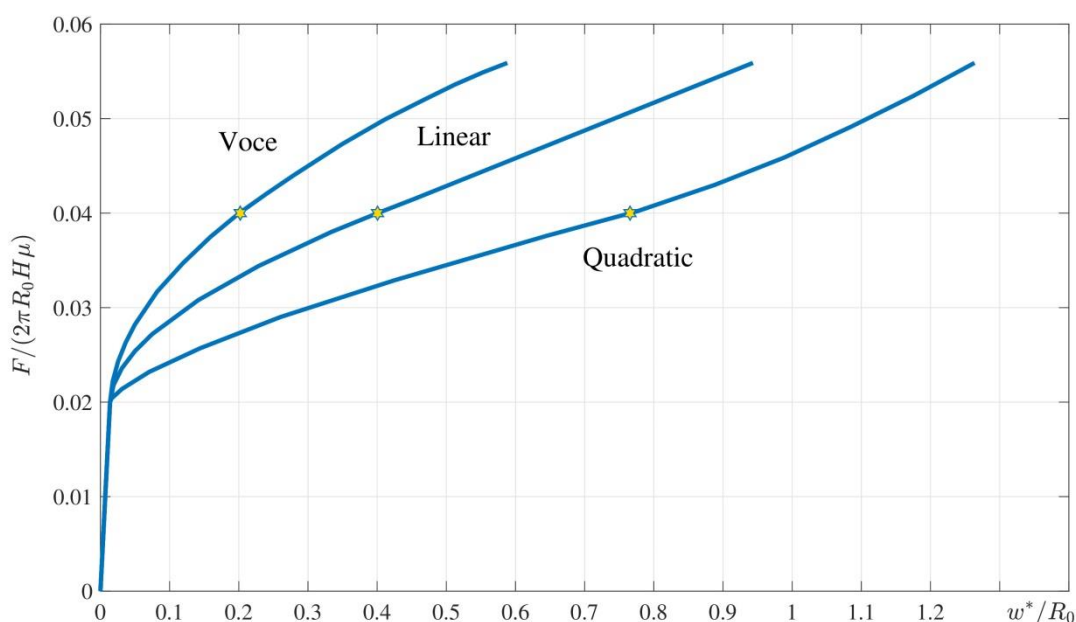


Рисунок 2.6.3 – Зависимость приложенной нагрузки от перемещения пуансона. Звездочками отмечен момент полного перехода образца в пластическое состояние. Самая правая точка каждого графика соответствует величине накопленной пластической деформации на внутренней поверхности образца равной 1. Линейный участок каждого графика соответствует чисто упругому деформированию

На рис. 2.6.4 приведены расчетные данные о распределении пластической деформации по сечению образца. Уровень пластических деформаций наименьший в материале с законом упрочнения Воше, наибольший – в материале с квадратичным законом упрочнения. При этом с ростом нагрузки распределение пластической деформации более однородно в материале с квадратичным законом упрочнения. На рис. 2.6.5 приведены графики искривления материальных волокон при антиплоском осесимметричном сдвиге для указанных моделей упрочнения.

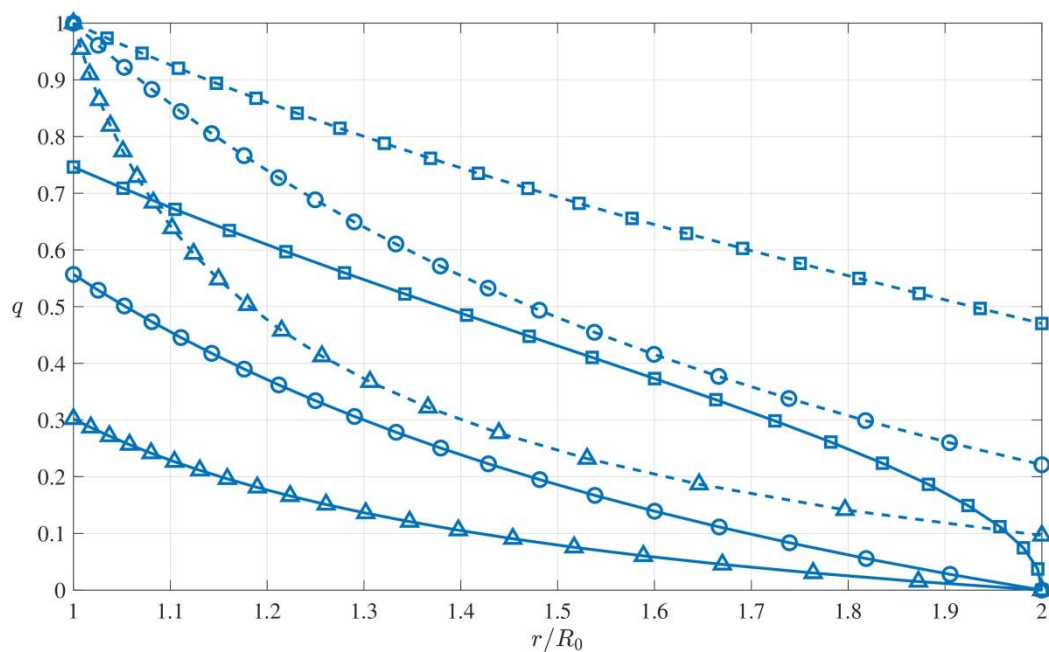


Рисунок 2.6.4 – Распределение пластической деформации по сечению образца для трех функций упрочнения: сплошные линии – в момент полного перехода образца в пластическое состояние, пунктирные линии – в тот момент, когда величина накопленной пластической деформации на внутренней поверхности образца достигает величины 1. Треугольные маркеры – модель Воце, квадратные – квадратичное упрочнение, круговые – линейная модель

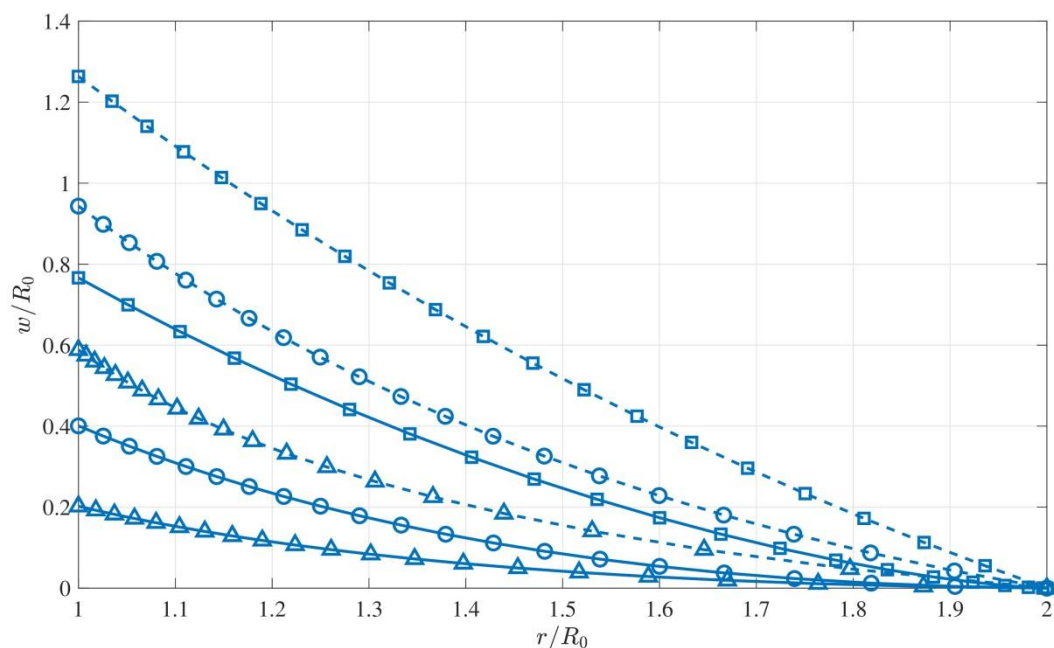


Рисунок 2.6.5 – Искривление материальных волокон, которые изначально располагались в радиальном направлении (безразмерное осевое перемещение $w(r/R_0)/R_0$): сплошные линии – в момент полного перехода образца в пластическое состояние, пунктирные линии – в тот момент, когда величина накопленной пластической деформации на внутренней поверхности образца достигает величины 1. Треугольные маркеры – модель Во́се, квадратные – квадратичное упрочнение, круговые – линейная модель

Выводы к разделу 2.6. Получено аналитическое решение задачи об осесимметричном антиплоском упругопластическом сдвиге. Полученные результаты описывают как стадию упругого деформирования с зарождающимся пластическим течением, так и дальнейшее нагружение материала, когда вся область деформирования образца охвачена пластическим течением.

Результаты расчетов показывают, что решение достаточно чувствительно к выбору закона упрочнения, поэтому описанная схема деформирования может быть использована для идентификации параметров законов изотропного упрочнения материалов, способных выдерживать большие упругие и пластические деформации.

Аналитические решения нелинейных упругопластических задач достаточно редки, еще одним возможным применением полученных результатов может выступать тестирование программ МКЭ-моделирования.

2.7. Круговой сдвиг в упруго-пластическом изотропно упрочняющемся материале

Одномерные сдвиговые деформации – круговой сдвиг (известный также как течение Куэтта в реологии жидкостей или деформация в цилиндрическом вискозиметре), кручение, антиплоский осесимметричный сдвиг – являются наиболее простыми для исследования в механике деформируемых тел. Для этих типов деформации были получены некоторые аналитические и численно-аналитические решения. Так, в рамках модели больших упругопластических деформаций [203] в работах [216, 217] были получены аналитические решения о вискозиметрическом течении в цилиндрическом слое. В [11, 218, 219] учитывается нагрев материала за счет тепла необратимого деформирования.

В этом разделе получено точное решение для задачи о больших деформациях кругового сдвига (вискозиметрической деформации) с учетом изотропного упрочнения материала. Это решение может использоваться для интерпретации экспериментальных данных с целью установления законов упрочнения, например, при использовании известного «in-plane torsion test» [220, 221].

Деформированное состояние, близкое к круговому сдвигу, реализуется в недавно предложенных схемах обработки материалов при высоком давлении [222–228]. Предложенное далее аналитическое решение может быть использовано для оценки напряженно-деформированного состояния при указанных схемах деформирования, с тем условием, что приложенное поле давления однородно и однородны механические свойства материала.

2.7.1. Постановка задачи. На рис. 2.7.1 представлена схема кругового сдвига в условиях плоской деформации. Полый цилиндр с внутренним радиусом R_0 и внешним радиусом R_1 деформирован так, что внешняя поверхность $r = R_1$ повернута относительно оси симметрии на угол α^* . Внутренняя

поверхность $r = R_0$ остается неподвижной. Для этого к внешней поверхности прикладывается крутящая нагрузка, которая создает на поверхности $r = R_1$ касательное напряжение $\sigma_{r\varphi}|_{r=R_1}$ в цилиндрической системе координат, с продольной осью z , совпадающей с осью симметрии. То есть, функция угла поворота материальных точек α удовлетворяет граничным условиям:

$$\alpha|_{r=R_1} = \alpha^*, \quad \alpha|_{r=R_0} = 0$$

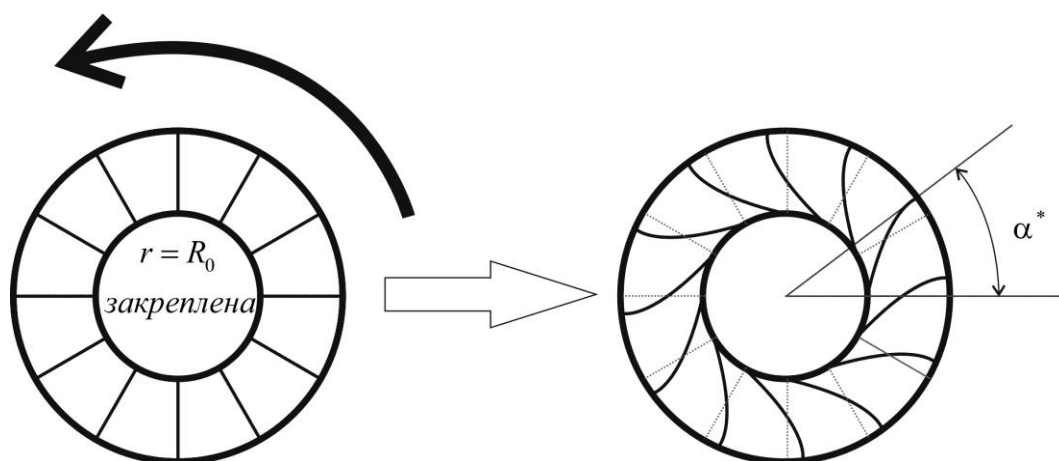


Рисунок 2.7.1 – Круговой сдвиг в условиях плоской деформации

Мы ставим целью определение следующих характеристик процесса:

- зависимость нагрузки $\sigma_{r\varphi}|_{r=R_1}$ от угла поворота α^* ;
- распределение пластической деформации в образце;
- искривление материальных волокон в деформированном образце в виде функции угла поворота α .

2.7.2. Модель материала. Будем использовать кинематику конечных упруго-пластических деформаций, описанную в главе 1, в частности, эволюционное уравнение для упругой компоненты левого тензора Коши – Грина

$$\partial_{old} \{ \mathbf{B}^e \} \stackrel{def}{=} \dot{\mathbf{B}}^e - \mathbf{L} \mathbf{B}^e - \mathbf{B}^e \mathbf{L}^T = -2\mathbf{B}^e \mathbf{D}^p \quad (2.7.1)$$

Для изначально изотропной упругой несжимаемой среды мы будем исполь-

зовать упругий закон Муни – Ривлина, связывающий тензор напряжений Коши с тензором упругой деформации [229]:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e}, \quad \Psi = C_1(I_1^{\mathbf{B}^e} - 3) + C_2(I_2^{\mathbf{B}^e} - 3); \quad \det \mathbf{B}^e = 1$$

Здесь $C_1, C_2 \geq 0$ материальные константы; модуль сдвига есть $\mu = 2(C_1 + C_2)$; функция добавочного гидростатического давления p обусловлена несжимаемостью материала. Мы пренебрегаем приобретенной в ходе деформирования анизотропией материала.

Учитывая

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1^{\mathbf{B}^e}} \frac{\partial I_1^{\mathbf{B}^e}}{\partial \mathbf{B}^e} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2^{\mathbf{B}^e}} \frac{\partial I_2^{\mathbf{B}^e}}{\partial \mathbf{B}^e} = C_1 \mathbf{I} + C_2 (\mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{B}^e - \mathbf{B}^e)$$

имеем

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2(C_1 + C_2 \operatorname{tr} \mathbf{B}^e) \mathbf{B}^e - 2C_2 (\mathbf{B}^e)^2$$

Поведение сплошной среды в пластическом диапазоне будем описывать ассоциированным с условием пластичности Треска законом течения, который связывает тензор скорости пластической деформации с тензором напряжений Коши:

$$\mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad f = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \tau_y \quad (2.7.2)$$

уравнение $f = 0$ (условие пластичности) задает поверхность текучести. Функция $\tau_y = \tau_y(q)$ (предел текучести материала на сдвиг) описывает изотропное деформационное упрочнение материала. Началу пластического течения в материале соответствует значение сдвигового предела текучести $\tau_y(0) = \tau_{y0}$. Здесь рассматриваются функции упрочнения $\tau_y(q)$ общего вида. При этом условия, которым должна удовлетворять функция $\tau_y(q)$ для того, чтобы в теле мог быть реализован пластический круговой сдвиг, будут ука-

заны отдельно.

2.7.3. Кинематика кругового сдвига. Введем цилиндрическую систему координат с продольной осью, совпадающей с осью полого цилиндра. Связь между начальным (R, θ, Z) и конечным (r, φ, z) положениями точки деформированной среды при круговом сдвиге в условиях плоской деформации задается равенствами $r = R$, $z = Z$, $\varphi = \theta + \alpha(R, t)$. Здесь $\alpha(R, t)$ непрерывная функция угла поворота материальных точек.

Координатное представление градиента деформации в смешанном базисе есть

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r \frac{\partial \alpha}{\partial r} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ненулевые компоненты левого тензора деформации Коши – Грина $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ в актуальном базисе есть

$$B_{rr} = B_{zz} = 1, B_{\varphi\varphi} = 1 + B_{r\varphi}^2, B_{r\varphi} = B_{\varphi r} = r \partial \alpha / \partial r \quad (2.7.3)$$

Вектор перемещения в актуальном базисе имеет вид $\mathbf{u} = r(1 - \cos \alpha) \mathbf{e}_r + r \sin \alpha \mathbf{e}_\varphi$. Вектор скорости определяется равенством $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{u}$, откуда $\mathbf{v} = v_\varphi \mathbf{e}_\varphi$, где $v_\varphi = r \partial \alpha / \partial t$ есть единственная ненулевая компонента вектора скорости.

2.7.4. Чисто упругое деформирование. При упругом деформировании $\mathbf{B}^e = \mathbf{B}$ и с учетом (2.7.3) компоненты напряжения имеют вид

$$\sigma_{rr} = -p + 2C_1 + 4C_2 \quad (2.7.4a)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + 2(C_1 + C_2)(r \partial \alpha / \partial r)^2 \quad (2.7.4b)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + 2C_2(r \partial \alpha / \partial r)^2 \quad (2.7.4c)$$

$$\sigma_{r\varphi} = 2(C_1 + C_2)r \partial\alpha/\partial r \quad (2.7.4d)$$

Условие равновесия $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ приводит к следующим уравнениям:

$$r \partial\sigma_{rr}/\partial r = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}, \quad r \partial\sigma_{r\varphi}/\partial r = -2\sigma_{r\varphi}$$

Если функция угла поворота α найдена, то первое из уравнений равновесия служит для определения функции $p(r, \alpha^*)$, интегрированием второго можно установить

$$\sigma_{r\varphi}/\mu = \omega/r^2, \quad \omega = \omega(\alpha^*)$$

функция ω имеет размерность m^2 .

Сравнив это равенство с (2.7.4d), имеем

$$\partial\alpha/\partial r = \omega/r^3, \quad \alpha(r, \alpha^*) = \omega_0(\alpha^*) - \omega(\alpha^*)/(2r^2)$$

Граничные условия $\alpha(R_0, \alpha^*) = 0$ и $\alpha(R_1, \alpha^*) = \alpha^*$ позволяют установить $\omega_0(\alpha^*) = \alpha^*/[1 - (R_0/R_1)^2]$ и $\omega(\alpha^*) = 2\alpha^*/(R_0^{-2} - R_1^{-2})$. Тогда выражение для угла закручивания в окончательном виде есть

$$\alpha(r, \alpha^*) = \alpha^* \frac{1 - (R_0/r)^2}{1 - (R_0/R_1)^2} \quad (2.7.5)$$

Мы будем полагать, что $\alpha^* \geq 0$, следовательно

$$r \frac{\partial\alpha}{\partial r} = 2\alpha^* \frac{(R_0/r)^2}{1 - (R_0/R_1)^2} \geq 0 \quad (2.7.6)$$

2.7.5. Пластическое деформирование. Зарождение пластического течения. Формулы (2.7.4) для компонент напряжения позволяют получить выражения для главных напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_I &= (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr})/2 + \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2/4 + \sigma_{r\varphi}^2} = \\ &= -p + 2C_1 + 4C_2 + (C_1 + C_2)(r\partial\alpha/\partial r)^2 + \\ &+ 2(C_1 + C_2)r\partial\alpha/\partial r\sqrt{1 + (r\partial\alpha/\partial r)^2/4}\end{aligned}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{zz} = -p + 2C_1 + 4C_2 + 2C_2(r\partial\alpha/\partial r)^2$$

$$\begin{aligned}\sigma_{III} &= (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr})/2 - \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2/4 + \sigma_{r\varphi}^2} = \\ &= -p + 2C_1 + 4C_2 + (C_1 + C_2)(r\partial\alpha/\partial r)^2 - \\ &- 2(C_1 + C_2)r\partial\alpha/\partial r\sqrt{1 + (r\partial\alpha/\partial r)^2/4}\end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}\sigma_I - \sigma_{II} &= \\ &= (C_1 - C_2)(r\partial\alpha/\partial r)^2 + 2(C_1 + C_2)r\partial\alpha/\partial r\sqrt{1 + (r\partial\alpha/\partial r)^2/4} > \\ &> (C_1 - C_2)(r\partial\alpha/\partial r)^2 + (C_1 + C_2)(r\partial\alpha/\partial r)^2 = \\ &= 2C_1(r\partial\alpha/\partial r)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{II} - \sigma_{III} &= \\ &= -(C_1 - C_2)(r\partial\alpha/\partial r)^2 + 2(C_1 + C_2)r\partial\alpha/\partial r\sqrt{1 + (r\partial\alpha/\partial r)^2/4} > \\ &> -(C_1 - C_2)(r\partial\alpha/\partial r)^2 + (C_1 + C_2)(r\partial\alpha/\partial r)^2 = \\ &= 2C_2(r\partial\alpha/\partial r)^2\end{aligned}$$

Тогда, если материальные константы C_1 и C_2 неотрицательны, то $\sigma_{II} = \sigma_{zz}$ есть промежуточное главное напряжение, максимальное главное напряжение $\sigma_1 = \sigma_I$, минимальное есть $\sigma_3 = \sigma_{III}$. Используя условие пластичности Треска $\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_y(q)$, где функция $\tau_y(q)$ описывает изотропное упрочнение материала в пластичности, запишем условие возникновения пластического течения, которое должно выполняться на упруго-пластической границе $r = r_{ep}$:

$$\left[(\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3)/2 \right] \Big|_{r=r_{ep}} = (r \partial \alpha / \partial r) \Big|_{r=r_{ep}} \sqrt{1 + \left[(r \partial \alpha / \partial r) \Big|_{r=r_{ep}} \right]^2} / 4 = \tilde{\tau}_{y0}$$

здесь и далее «~» означает безразмерную величину напряжения, полученную нормированием на модуль сдвига $\mu = 2(C_1 + C_2)$, т.е. $\tilde{\tau}_{y0} = \tau_{y0} / \mu$.

Отсюда

$$(r \partial \alpha / \partial r) \Big|_{r=r_{ep}} = \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)} \quad (2.7.7)$$

Учитывая (2.7.6), пластическое течение зарождается на внутренней границе полой трубы $r = R_0$ при угле поворота внешней поверхности

$$\alpha^* = \alpha_{cr1}^* = 0.5 \left[1 - (R_0 / R_1)^2 \right] \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)}$$

При $\alpha_{cr1}^* < \alpha^* < \alpha_{cr2}^*$ в теле существует две области: область $R_0 \leq r < r_{ep}$, в которой происходит упруго-пластическое деформирование, и область $r_{ep} < r \leq R_1$, которая деформирована чисто упруго (см. рис. 2.7.2). При $\alpha^* = \alpha_{cr2}^*$ упруго-пластическая граница достигает внешней границы полого цилиндра $r = R_1$ и далее все тело деформируется пластически. Выражение для α_{cr2}^* будет приведено позднее.

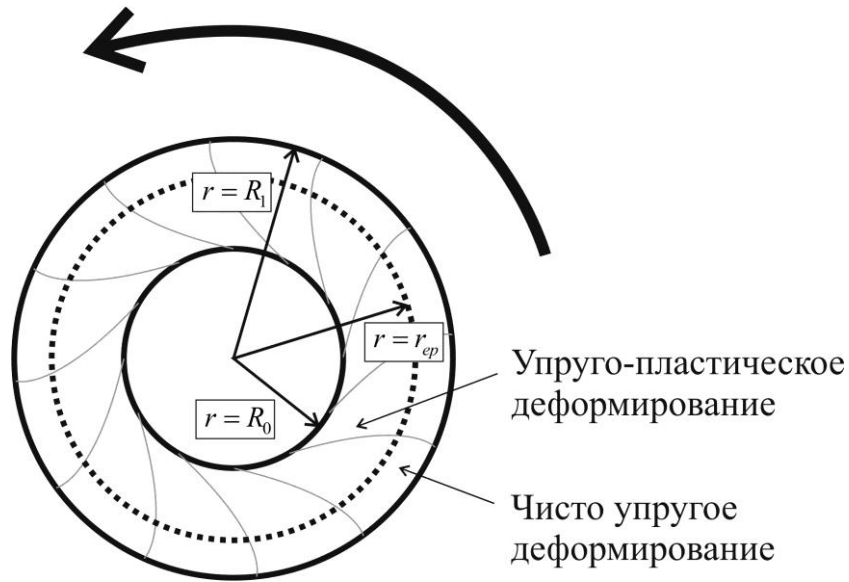


Рисунок 2.7.2 – Упруго-пластический круговой сдвиг

Функция угла поворота материальных точек α (непрерывная и гладкая на упруго-пластической границе $r = r_{ep}$) будет различаться в упругой и пластической областях:

$$\alpha = \begin{cases} \alpha^e, r_{ep} \leq r \leq R_1 \\ \alpha^p, R_0 \leq r \leq r_{ep} \end{cases}, \quad \alpha^e(r_{ep}) = \alpha^p(r_{ep}), \quad \left. \frac{\partial \alpha^e}{\partial r} \right|_{r=r_{ep}} = \left. \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right|_{r=r_{ep}}$$

Последнее равенство (условие гладкости) следует из непрерывности угловой скорости $v_\varphi = r(\partial \alpha / \partial t)$ на упруго-пластической границе.

Область упругого деформирования. В упругой области $r_{ep} < r \leq R_1$ сохраняется равенство $\mathbf{V}^e = \mathbf{V}$, где тензор $\mathbf{V}$ определяется по (2.7.3) при $\alpha = \alpha^e$, и, также при $\alpha = \alpha^e$, верны выражения (2.7.4) для компонент напряжения. Кроме того, справедливы равенства

$$\alpha^e(r, \alpha^*) = \omega_0^e(\alpha^*) - \omega^e(\alpha^*) / (2r^2)$$

$$\sigma_{r\varphi} / \mu = \omega^e / r^2 = r \partial \alpha^e / \partial r$$

Однако эти две функции, $\omega_0^e(\alpha^*)$ и $\omega^e(\alpha^*)$, уже не совпадают с $\omega_0(\alpha^*)$ и $\omega(\alpha^*)$ из чисто упругого решения, и, следовательно, угол поворота матери-

альных точек в упругой области уже не может быть определен по формуле (2.7.5) после зарождения пластического течения. Граничное условие $\alpha^e(R_1, \alpha^*) = \alpha^*$ как и прежде позволяет выразить одну из этих функций:

$$\omega^e(\alpha^*) = 2R_1^2 [\omega_0^e(\alpha^*) - \alpha^*] \quad (2.7.8)$$

и, следовательно, получить

$$\alpha^e(r, \alpha^*) = \omega_0^e(\alpha^*) - (R_1/r)^2 [\omega_0^e(\alpha^*) - \alpha^*] \quad (2.7.9)$$

Оставшаяся неизвестная функция $\omega_0^e(\alpha^*)$, определяющая кинематику в упругой области, не может быть определена без интегрирования уравнений в пластической области.

Область упруго-пластического деформирования. В этой области $\mathbf{B}^e \neq \mathbf{B}$; тензор упругой деформации определяется эволюционным уравнением (2.7.1):

$$\partial \mathbf{B}^e / \partial t = \mathbf{I} \mathbf{B}^e + \mathbf{B}^e \mathbf{I}^T - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B}^e - 2 \mathbf{B}^e \mathbf{D}^p \quad (2.7.10)$$

Мы будем искать координатное представление тензора упругой деформации $\mathbf{B}^e$ в области пластического течения в виде

$$[\mathbf{B}^e] = \begin{pmatrix} B_{rr}^e & B_{r\varphi}^e & 0 \\ B_{r\varphi}^e & B_{\varphi\varphi}^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det \mathbf{B}^e = B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - (B_{r\varphi}^e)^2 = 1 \quad (2.7.11)$$

Координатные представления тензоров $\mathbf{I}$ и $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B}^e$, фигурирующих в уравнении (2.7.10), есть

$$[\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 0 & -v_\varphi/r & 0 \\ \partial v_\varphi / \partial r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_\varphi = r(\partial \alpha^p / \partial t) \quad (2.7.12)$$

$$[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B}^e] = \frac{v_\varphi}{r} \begin{pmatrix} -2B_{r\varphi}^e & B_{rr}^e - B_{\varphi\varphi}^e & 0 \\ B_{rr}^e - B_{\varphi\varphi}^e & 2B_{r\varphi}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7.13)$$

Тензор скорости пластической деформации определяется ассоциированным законом (2.7.2). С учетом условия пластичности

$(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2/4 + \sigma_{r\varphi}^2} = \tau_y(q)$, а также упругого закона, который

позволяет выразить в пластической области компоненты напряжений в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2C_2 + 2(C_1 + C_2)B_{rr}^e, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2C_2 + 2(C_1 + C_2)B_{\varphi\varphi}^e, \\ \sigma_{zz} &= -p + 2C_1 + 2C_2(B_{rr}^e + B_{\varphi\varphi}^e), \quad \sigma_{r\varphi} = 2(C_1 + C_2)B_{r\varphi}^e \end{aligned} \quad (2.7.14)$$

ненулевые компоненты скорости пластической деформации могут быть выражены по ассоциированному закону в следующем виде

$$\begin{aligned} D_{\varphi\varphi}^p &= -D_{rr}^p = \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{4} = \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\mu}{2} \frac{B_{\varphi\varphi}^e - B_{rr}^e}{2}, \\ D_{r\varphi}^p &= \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\sigma_{r\varphi}}{2} = \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\mu}{2} B_{r\varphi}^e = \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\mu}{2} \sqrt{B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - 1} \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

если только, как и в упругой области, $\sigma_{II} = \sigma_{zz}$ есть промежуточное главное напряжение.

В этом можно удостовериться, записав с учетом (2.7.14), как и в предыдущем подразделе, разницу главных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_I - \sigma_{II} &= \\ &= 2(C_1 - C_2) \left[(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)/2 - 1 \right] + 2(C_1 + C_2) \sqrt{(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2/4 - 1} > \\ &> 2(C_1 - C_2) \left[(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)/2 - 1 \right] + 2(C_1 + C_2) \left[(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)/2 - 1 \right] = \\ &= 4C_1 \left[(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)/2 - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{II} - \sigma_{III} &= \\
&= -2(C_1 - C_2) \left[(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) / 2 - 1 \right] + 2(C_1 + C_2) \sqrt{(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 / 4 - 1} > \\
&> -2(C_1 - C_2) \left[(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) / 2 - 1 \right] + 2(C_1 + C_2) \left[(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) / 2 - 1 \right] = \\
&= 4C_2 \left[(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) / 2 - 1 \right]
\end{aligned}$$

Учитывая $(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) / 2 > 1$ и указанные ранее условия $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$, записанные выше разности положительны, и $\sigma_{II} = \sigma_{zz}$ остается промежуточным главным напряжением в пластической области.

Определим пластический множитель Λ , входящий в (2.7.15). Уравнение для накопленной пластической деформации $\dot{q} = \sqrt{(2/3) \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p}$ с учетом (2.7.15) принимает вид

$$(d\alpha^*/dt)(\partial q / \partial \alpha^*) = \Lambda \mu / (\sqrt{3} \tau_y) \sqrt{(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 / 4 - 1}$$

откуда

$$\Lambda = (d\alpha^*/dt)(\partial q / \partial \alpha^*) (\sqrt{3} \tau_y / \mu) \left[(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 / 4 - 1 \right]^{-1/2} > 0$$

и система (2.7.15) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
D_{\varphi\varphi}^p &= -D_{rr}^p = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d\alpha^*}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \left[(B_{\varphi\varphi}^e - B_{rr}^e) / 2 \right] \left[(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 / 4 - 1 \right]^{-1/2} \\
D_{r\varphi}^p &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d\alpha^*}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \sqrt{B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - 1} \left[(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 / 4 - 1 \right]^{-1/2}
\end{aligned} \tag{2.7.16}$$

Подставляя выражения (2.7.16), (2.7.13), (2.7.12) в (2.7.10) и учитывая

$$v_\varphi / r = \partial \alpha^p / \partial t = (d\alpha^*/dt)(\partial \alpha^p / \partial \alpha^*)$$

$$\partial v_\varphi / \partial r = (d\alpha^*/dt) \left[\partial \alpha^p / \partial \alpha^* + \partial (r \partial \alpha^p / \partial r) / \partial \alpha^* \right]$$

имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_{rr}^e}{\partial \alpha^*} &= -\sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \frac{B_{rr}^e \frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e}{2} - 1}{\sqrt{\left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e}{2}\right)^2 - 1}} \\
\frac{\partial B_{\varphi\varphi}^e}{\partial \alpha^*} &= 2B_{r\varphi}^e \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left(r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) - \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \frac{B_{\varphi\varphi}^e \frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e}{2} - 1}{\sqrt{\left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e}{2}\right)^2 - 1}} \\
\frac{\partial B_{r\varphi}^e}{\partial \alpha^*} &= B_{rr}^e \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left(r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) - \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \frac{B_{r\varphi}^e \frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e}{2}}{\sqrt{\left(\frac{B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e}{2}\right)^2 - 1}} \\
\frac{\partial B_{zz}^e}{\partial \alpha^*} &= 0, \quad \frac{\partial B_{\varphi z}^e}{\partial \alpha^*} = 0, \quad \frac{\partial B_{rz}^e}{\partial \alpha^*} = 0
\end{aligned} \tag{2.7.17}$$

Из последних трех равенств следует, что сделанное предположение (2.7.11) о виде тензора $\mathbf{B}^e$ в области пластического течения (в частности о том, что $B_{zz}^e = 1$), не противоречит эволюционному уравнению (2.7.1).

Из первых трех уравнений (2.7.17) любое одно может быть исключено посредством условия несжимаемости $B_{r\varphi}^e = \sqrt{B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - 1}$. Оставшиеся два уравнения из системы (2.7.17) содержат две компоненты упругой деформации, а также функцию угла поворота $\alpha^p(r, \alpha^*)$. Эти уравнения дополняются условием пластичности вида

$$\tilde{\tau}_y = \tau_y / \mu = (\sigma_1 - \sigma_3) / (2\mu) = \sqrt{(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 / 4 - 1} \tag{2.7.18}$$

и выражением

$$\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi} / \mu = B_{r\varphi}^e = \sqrt{B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - 1} \tag{2.7.19}$$

Отметим, что касательное напряжение в пластической области должно удовлетворять уравнению равновесия $r(\partial\sigma_{r\varphi}/\partial r) = -2\sigma_{r\varphi}$, то есть, иметь вид $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}/\mu = \omega^p r^{-2}$, где $\omega^p(\alpha^*)$ есть некоторая функция. И поскольку, касательное напряжение непрерывно на упруго-пластической границе, $\omega^p(\alpha^*) = \omega^e(\alpha^*)$, и

$$\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}/\mu = \omega^e/r^2 \quad (2.7.20)$$

то есть, имеет то же выражение в пластической области, что и в упругой. Безразмерное касательное напряжение в пластической области является продолжением функции $r(\partial\alpha^e/\partial r)$, определенной в упругой области, в пластическую область. При этом, естественно, $\tilde{\sigma}_{r\varphi} \neq r(\partial\alpha^p/\partial r)$.

Из уравнений (2.7.17) можно получить систему для $\tilde{\tau}_y$ и $\tilde{\sigma}_{r\varphi}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial \alpha^*} &= \tilde{\sigma}_{r\varphi} \frac{\sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left(r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) - \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2} \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_{r\varphi}}{\partial \alpha^*} &= \left[\sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\sigma}_{r\varphi}^2} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left(r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) - \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \tilde{\sigma}_{r\varphi} \frac{\sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y} \end{aligned}$$

здесь использовано выражение $B_{rr}^e = \sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\sigma}_{r\varphi}^2}$, которое может быть получено из (2.7.18) и (2.7.19).

Или, исключив $\partial(r\partial\alpha^p/\partial r)/\partial\alpha^*$:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left(r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) = \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial \alpha^*} + \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \right]$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{r\varphi}}{\partial \alpha^*} = \left[\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\sigma}_{r\varphi}^2} \right] \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial \alpha^*} + \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \right] -$$

$$-\sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \tilde{\sigma}_{r\varphi} \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y}$$

Если теперь искать решение этой связанной системы в виде функций

$\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\sigma}_{r\varphi}(q)$, $r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} = G(q)$, имеем последнюю систему в виде

$$\frac{dG}{dq} = \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + \sqrt{3} \right]$$

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{dq} = -\sqrt{3} \tilde{\sigma}_{r\varphi} \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y} +$$

$$+ \left[\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\sigma}_{r\varphi}^2} \right] \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + \sqrt{3} \right] \quad (2.7.21)$$

Учитывая, что $\tilde{\tau}_y$ есть известная функция накопленной пластической деформации, оба этих уравнения являются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями первого порядка; второе из них позволяет найти $\tilde{\sigma}_{r\varphi}(q)$, а первое непосредственным интегрированием найти $G(q)$.

Второе уравнение системы (2.7.21) линеаризуется заменой

$$\Omega(q) = \sqrt{1 - (\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2} :$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\Omega}{dq} = \lambda(q) - \hbar(q)\Omega$$

$$\lambda(q) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2}} + 1,$$

$$\hbar(q) = \frac{\sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y} \lambda(q) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{1}{\tilde{\tau}_y} + \frac{\sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y}$$

и имеет решение

$$\Omega(q) = e^{-\sqrt{3} \int_0^q \hbar(\xi) d\xi} \left(\Omega_0 + \sqrt{3} \int_0^q \lambda(\varsigma) e^{\sqrt{3} \int_0^\varsigma \hbar(\xi) d\xi} d\varsigma \right) \quad (2.7.22)$$

Константа интегрирования Ω_0 в (2.7.22) является начальным значением функции $\Omega(q)$ при $q=0$, которое определяется с помощью формулы (2.7.7):

$$\begin{aligned} \Omega_0 = \Omega(0) &= \text{const} = \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{\sigma}_{r\varphi}|_{r=r_{ep}}}{\tilde{\tau}_{y0}} \right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{B_{r\varphi}^e|_{r=r_{ep}}}{\tilde{\tau}_{y0}} \right)^2} = \sqrt{1 - \left[\frac{1}{\tilde{\tau}_{y0}} \left(r \frac{\partial \alpha^e}{\partial r} \right) \right]_{r=r_{ep}}^2} = \frac{\sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2} - 1}{\tilde{\tau}_{y0}} \end{aligned}$$

Замечание 1. Из (2.7.22) по правилу Лопиталя можно получить

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} \Omega(q) &= \\ &= \Omega_0 \lim_{q \rightarrow \infty} e^{-\sqrt{3} \int_0^q \hbar(\xi) d\xi} + \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3} \int_0^q \lambda(\varsigma) \exp \left(\sqrt{3} \int_0^\varsigma \hbar(\xi) d\xi \right) d\varsigma}{\exp \left(\sqrt{3} \int_0^q \hbar(\xi) d\xi \right)} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\lambda(q)}{\hbar(q)} \end{aligned}$$

Учитывая, что $d\Omega/dq > 0$, можно заключить, что $\Omega(q)$ ограничена:

$$\left\{ \Omega_0 = \frac{\sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2} - 1}{\tilde{\tau}_{y0}} \right\} \leq \left\{ \Omega(q) = \sqrt{1 - (\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2} \right\} \leq \left\{ \frac{\lambda(q)}{\hbar(q)} = \frac{\tilde{\tau}_y}{\sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2}} \right\}$$

откуда

$$2/\left(\sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2}+1\right)\geq\left(\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y\right)^2\geq 1/\left(1+\tilde{\tau}_y^2\right) \quad (2.7.23)$$

Формула (2.7.23) показывает, в каких пределах может лежать величина касательного напряжения в области упруго-пластического деформирования при круговом сдвиге.

Функция $G(q)$ может быть найдена из первого уравнения системы (2.7.21) как

$$G(q)=G_0+\sqrt{3}\int_0^q\frac{\tilde{\lambda}(\zeta)}{\sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}}d\zeta \quad (2.7.24)$$

Константа интегрирования G_0 в (2.7.24) является начальным значением $r(\partial\alpha^p/\partial r)$ при $q=0$, которое определяется по формуле (2.7.7):

$$G_0=G(0)=r\left(\partial\alpha^p/\partial r\right)\Big|_{r=r_{ep}}=\sqrt{2\left(\sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2}-1\right)}=\text{const}$$

Теперь следует проинтегрировать уравнение $r(\partial\alpha^p/\partial r)=G(q)$. Будем полагать, что угол поворота материальных точек в пластической области может быть представлен в виде $\alpha^p=\alpha^p(\alpha^*,q)$. Поскольку $\tilde{\sigma}_{r\varphi}=\tilde{\tau}_y(q)\sqrt{1-\Omega^2(q)}$, то учитывая (2.7.20), накопленная пластическая деформация должна быть функцией автомодельной переменной $\tilde{\sigma}_{r\varphi}(r,\alpha^*)=\omega^e(\alpha^*)r^{-2}$. Тогда

$$\begin{aligned} G(q) &= r \frac{\partial\alpha^p}{\partial r} = r \frac{\partial\alpha^p}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial r} = r \frac{\partial\alpha^p}{\partial q} \frac{dq}{d\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \frac{\partial\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{\partial r} = -2 \frac{\partial\alpha^p}{\partial q} \frac{dq}{d\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \tilde{\sigma}_{r\varphi} = \\ &= -2 \frac{\partial\alpha^p}{\partial q} \frac{\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{d\tilde{\sigma}_{r\varphi}/dq} = -2 \frac{\partial\alpha^p}{\partial q} \left[\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{1}{\tilde{\tau}_y} - \frac{\Omega}{1-\Omega^2} \frac{d\Omega}{dq} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Откуда

$$\frac{\partial \alpha^p}{\partial q} = \frac{G}{2} \left[\frac{\Omega}{1-\Omega^2} \frac{d\Omega}{dq} - \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{1}{\tilde{\tau}_y} \right] = -\frac{G}{2} \frac{d \ln(\tilde{\tau}_y \sqrt{1-\Omega^2})}{dq}$$

и, интегрируя по частям с учетом (2.7.24) и равенства $\frac{dG}{dq} = \sqrt{3} \frac{\dot{\lambda}(q)}{\sqrt{1-\Omega(q)^2}}$,

имеем:

$$\begin{aligned} \alpha^p(\alpha^*, q) &= \alpha_{ep}(\alpha^*) - \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1-\Omega(q)^2}}{\tilde{\tau}_{y0} \sqrt{1-\Omega_0^2}} - \\ &- \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^q \frac{\dot{\lambda}(\zeta)}{\sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1-\Omega(q)^2}}{\tilde{\tau}_y(\zeta) \sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}} d\zeta \\ \tilde{\tau}_{y0} \sqrt{1-\Omega_0^2} &= \sqrt{2(\sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2}-1)} = G_0 \end{aligned}$$

Из граничного условия $\alpha^p|_{r=R_0} = 0$ следует

$$\begin{aligned} \alpha_{ep}(\alpha^*) &= \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1-\Omega(q_0)^2}}{G_0} + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\dot{\lambda}(\zeta)}{\sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1-\Omega(q_0)^2}}{\tilde{\tau}_y(\zeta) \sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}} d\zeta \end{aligned}$$

где $q_0(\alpha^*) = q|_{r=R_0}$ есть величина накопленной пластической деформации на внутренней границе полого цилиндра. Эту величину удобно использовать в качестве параметра решения. Тогда зависимость угла поворота материальных точек в пластической области от локальной величины накопленной пластической деформации есть

$$\begin{aligned}
\alpha^p(\alpha^*, q) = & \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega(q_0)^2}}{\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega(q)^2}} + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega(q_0)^2}}{\tilde{\tau}_y(\zeta) \sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} d\zeta - \\
& - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^q \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega(q)^2}}{\tilde{\tau}_y(\zeta) \sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} d\zeta
\end{aligned} \tag{2.7.25}$$

Кинематика материальных точек в области пластического деформирования определяется формулой (2.7.25) и зависит от распределения накопленной пластической деформации $q(\alpha^*, r)$. Это распределение в свою очередь устанавливается по найденной функции $\Omega(q)$ (формула (2.7.22)) исходя из равенства $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega^2(q)}$ и формулы (2.7.20). Возможны два случая, в зависимости от того, занимает ли пластическая область весь объем материала или же существует упругая область.

Случай 1. В теле есть упругая область (параметр нагружения в диапазоне $\alpha_{cr1}^ < \alpha^* < \alpha_{cr2}^*$). Функция угла поворота точек материала в упругой области α^e задана формулой (2.7.9). Дифференцируя (2.7.9) по r , имеем*

$$r \partial \alpha^e / \partial r = 2(\omega_0^e - \alpha^*)(R_1/r)^2 \tag{2.7.26}$$

Из (2.7.26) и (2.7.7) можно получить равенство

$$2(\omega_0^e - \alpha^*)(R_1/r_{ep})^2 = \sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)} = G_0 \tag{2.7.27}$$

Значение угла поворота на упруго-пластической границе, рассчитанное по формуле (2.7.25) при $q = 0$ дает

$$\alpha^p(\alpha^*, 0) = \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega(q_0)^2}}{G_0} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega(q_0)^2}}{\tilde{\tau}_y(\zeta) \sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} d\zeta$$

С другой стороны, по (2.7.9) и (2.7.27)

$$\alpha^e(r_{ep}, \alpha^*) = \omega_0^e(\alpha^*) - (R_1/r_{ep})^2 [\omega_0^e(\alpha^*) - \alpha^*] = \omega_0^e(\alpha^*) - G_0/2$$

Непрерывность α на упруго-пластической границе приводит к равенству $\alpha^p(\alpha^*, 0) = \alpha^e(r_{ep}, \alpha^*)$, откуда

$$\omega_0^e = \frac{G_0}{2} \left[1 + \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega(q_0)^2}}{G_0} \right] +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega(q_0)^2}}{\tilde{\tau}_y(\zeta) \sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} d\zeta \quad (2.7.28)$$

Эта формула устанавливает связь между параметром решения $q_0(\alpha^*) = q|_{r=R_0}$ и функцией $\omega_0^e(\alpha^*)$, которая определяет кинематику материальных точек в упругой области по формуле (2.7.9).

Связь параметра нагружения α^* (угол поворота внешней поверхности полого цилиндра) с параметром q_0 устанавливается по (2.7.20) с учетом равенства $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega^2(q)}$, (2.7.8) и (2.7.28):

$$\alpha^* = \omega_0^e - 0.5(R_0/R_1)^2 \tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega^2(q_0)} \quad (2.7.29)$$

где ω_0^e связано с q_0 формулой (2.7.28).

Распределение накопленной пластической деформации можно найти из равенства $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega^2(q)}$ с учетом (2.7.20):

$$\tilde{\tau}_y(q)\sqrt{1-\Omega^2(q)} = (R_0/r)^2 \tilde{\tau}_y(q_0)\sqrt{1-\Omega^2(q_0)}$$

Из (2.7.27) и (2.7.29) закон движения упруго-пластической границы есть

$$r_{ep} = R_0 \sqrt{[\tilde{\tau}_y(q_0)/G_0] \sqrt{1-\Omega^2(q_0)}} \quad (2.7.30)$$

Согласно (2.7.30), все тело перейдет в пластическое состояние (упруго-пластическая граница достигнет R_1), как только накопленная пластическая деформация на внутренней поверхности полого цилиндра $(q_0)_{cr2}$ достигнет величины, при которой выполнится равенство $\tilde{\tau}_y((q_0)_{cr2})\sqrt{1-\Omega^2((q_0)_{cr2})} = (R_1/R_0)^2 G_0$. Это соответствует параметру нагружения

$$\alpha_{cr2}^* = G_0 \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{(q_0)_{cr2}} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{(R_1/R_0)^2 G_0}{\tilde{\tau}_y(\zeta)\sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}} d\zeta$$

После этого пластическое деформирование происходит во всем теле.

Случай 2. Все тело находится в состоянии пластического течения (параметр нагружения $\alpha^ \geq \alpha_{cr2}^*$). В этом случае по (2.7.25) с учетом граничного условия $\alpha^p|_{r=R_1} = \alpha^*$:*

$$\begin{aligned} \alpha^* = \alpha^p(\alpha^*, q_1) &= \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)\sqrt{1-\Omega(q_0)^2}}{\tilde{\tau}_y(q_1)\sqrt{1-\Omega(q_1)^2}} + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)\sqrt{1-\Omega(q_0)^2}}{\tilde{\tau}_y(\zeta)\sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}} d\zeta - \\ &- \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_1} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_1)\sqrt{1-\Omega(q_1)^2}}{\tilde{\tau}_y(\zeta)\sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}} d\zeta \end{aligned}$$

Здесь величина $q_1 = q|_{r=R_1}$ выражается с помощью $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)\sqrt{1-\Omega^2(q)}$ и (2.7.20):

$$\frac{\tilde{\tau}_y(q_1)\sqrt{1-\Omega^2(q_1)}}{\tilde{\tau}_y(q_0)\sqrt{1-\Omega^2(q_0)}} = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2$$

Подставляя это выражение в формулу выше, имеем

$$\alpha^* = \alpha^p(\alpha^*, q_1) = \left[G_0 + \sqrt{3} \int_0^{q_1} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}} d\zeta \right] \ln \frac{R_1}{R_0} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{q_1}^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)\sqrt{1-\Omega(q_0)^2}}{\tilde{\tau}_y(\zeta)\sqrt{1-\Omega(\zeta)^2}} d\zeta$$

Таким образом, формулы выше связывают параметр нагружения α^* с параметром q_0 .

Распределение накопленной пластической деформации можно найти из равенства $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)\sqrt{1-\Omega^2(q)}$ с учетом (2.7.20):

$$\tilde{\tau}_y(q)\sqrt{1-\Omega^2(q)} = (R_0/r)^2 \tilde{\tau}_y(q_0)\sqrt{1-\Omega^2(q_0)}$$

2.7.6. Существование решения. Деформация кругового сдвига накладывает достаточно жесткие условия на напряженное состояние, которое удовлетворяет условию равновесия. А именно, согласно (2.7.20), касательное напряжение должно монотонно возрастать при уменьшении радиальной координаты, следовательно (поскольку накопленная пластическая деформация q также монотонно возрастает при уменьшении радиальной координаты), должно выполняться неравенство $d\tilde{\sigma}_{r\varphi}/dq \geq 0$. Согласно (2.7.21) это приводит к тому, что должно выполняться следующее неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + 1 \geq (\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2 \left[1 - \tilde{\tau}_y \sqrt{\frac{1-(\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2}{1+\tilde{\tau}_y^2}} \right]^{-1} \quad (2.7.31)$$

Левая часть этого неравенства зависит только от физических свойств материала, а именно от функции упрочнения. Правая часть включает кас-

тельное напряжение, которое меняется во времени и в пространстве. Чтобы сформулировать условия для функции упрочнения $\tilde{\tau}_y(q)$, достаточные для того, чтобы выполнялось неравенство (2.7.31), воспользуемся оценкой (2.7.23) и получим для правой части (2.7.31):

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2}{1-\tilde{\tau}_y\sqrt{\frac{1-(\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2}{1+\tilde{\tau}_y^2}}} &\leq \frac{2/(\sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2}+1)}{1-\tilde{\tau}_y\sqrt{\frac{1-(\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2}{1+\tilde{\tau}_y^2}}} \leq \frac{2/(\sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2}+1)}{1-\tilde{\tau}_y\sqrt{\frac{1-1/(1+\tilde{\tau}_y^2)}{1+\tilde{\tau}_y^2}}} = \\ &= \frac{2(1+\tilde{\tau}_y^2)}{\sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2}+1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2}{1-\tilde{\tau}_y\sqrt{\frac{1-(\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2}{1+\tilde{\tau}_y^2}}} &\geq \frac{1/(1+\tilde{\tau}_y^2)}{1-\tilde{\tau}_y\sqrt{\frac{1-(\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2}{1+\tilde{\tau}_y^2}}} \geq \frac{1/(1+\tilde{\tau}_y^2)}{1-\tilde{\tau}_y\sqrt{\frac{1-2/(\sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2}+1)}{1+\tilde{\tau}_y^2}}} = \\ &= \frac{1}{1+\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\tau}_y\sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2}(\sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2}-1)(\tilde{\tau}_{y0})^{-1}} \end{aligned}$$

Тогда, если $\tilde{\tau}_y(q)$ такова, что

$$\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \geq \sqrt{3}\sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2} \left[\frac{2(1+\tilde{\tau}_y^2)}{\sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2}+1} - 1 \right] \quad (2.7.32)$$

то неравенство (2.7.31) заведомо выполняется, следовательно, $d\tilde{\sigma}_{r\varphi}/dq \geq 0$ и решение существует. Условие (2.7.32) является достаточным для реализации рассматриваемого паттерна деформации кругового сдвига в изотропном пластически упрочняемом материале.

С другой стороны, если выполнено

$$\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} < \sqrt{3}\sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2} \left(\frac{1}{1+\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\tau}_y\sqrt{1+\tilde{\tau}_y^2}(\sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2}-1)(\tilde{\tau}_{y0})^{-1}} - 1 \right)$$

то неравенство (2.7.31) заведомо не выполняется. В частности, для идеально-пластического (неупрочняемого) материала $\tilde{\tau}_y = \tilde{\tau}_{y0} = \text{const}$ и последнее неравенство имеет вид $0 < \sqrt{3}(1 - \sqrt{1+\tilde{\tau}_{y0}^2})$ и выполнено при любом значении $\tilde{\tau}_{y0}$. То есть в пластически неупрочняемом материале не может реализоваться круговой пластический сдвиг (последний вывод очевиден для модели жестко-пластического тела, но не очевиден для упруго-пластической задачи с конечными деформациями, в которой касательное напряжение может сильно отличаться от интенсивности напряжений).

Замечание 2. Достаточное условие (2.7.32) может служить для определения границ применимости решения для тех моделей упрочнения, для которых (2.7.32) выполняется только на некотором интервале накопленной пластической деформации $q \in [0, q_{cr}]$. Например, для линейной модели упрочнения $\tilde{\tau}_y = \tilde{\tau}_{y0}(1 + \chi q)$ решение существует, пока накопленная пластическая деформация не превысит значения q_{cr} , определяемого уравнением

$$(mk^2 - 1)k = n \quad (2.7.33)$$

$$k = \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2 (1 + \chi q_{cr})^2}, \quad m = \tilde{\tau}_{y0}\chi/\sqrt{3}, \quad n = 2/(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1)$$

Замечание 3. Круговой сдвиг в жестко-пластическом материале с ограниченным упрочнением исследовался в [230], где также отмечается, что решение существует до определенной конечной величины деформации.

2.7.7. Полное решение. Итак, полное решение для материала Муни – Ривлина с упругим потенциалом $\Psi = C_1(I_1^{\mathbf{B}^e} - 3) + C_2(I_2^{\mathbf{B}^e} - 3)$, $C_1, C_2 \geq 0$, с модулем сдвига $\mu = 2(C_1 + C_2)$, и условием пластичности Треска

$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_y(q)$, где $\tau_y(q)$ известная функция упрочнения, имеет следующий вид.

Таблица 2.7.1 – Полное решение

Чисто упругое деформирование	
Условие	$\alpha^* < \alpha_{cr1}^* = \left[1 - (R_0/R_1)^2\right](G_0/2), G_0 = \sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)}$
Решение	Угол поворота $\alpha = \frac{\alpha^*}{1 - (R_0/R_1)^2} \left[1 - \left(\frac{R_0}{r}\right)^2\right]$ Величина касательного напряжения на внешней поверхности $\sigma_{r\varphi}/\mu _{r=R_1} = 2\alpha^* \left[(R_1/R_0)^2 - 1\right]^{-1}$
Часть полого цилиндра деформирована упруго, часть пластически	
Условие	$\alpha_{cr1}^* \leq \alpha^* < \alpha_{cr2}^*$, $\alpha_{cr2}^* = G_0 \ln(R_1/R_0) + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{(q_0)_{cr2}} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{(R_1/R_0)^2 G_0}{\tilde{\tau}_y(\zeta) \sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} d\zeta,$ $\tilde{\tau}_y((q_0)_{cr2}) \sqrt{1 - \Omega^2((q_0)_{cr2})} = (R_1/R_0)^2 G_0,$ $\Omega(q) = e^{-\sqrt{3} \int_0^q \hbar(\xi) d\xi} \left(\Omega_0 + \sqrt{3} \int_0^q \lambda(\zeta) e^{\sqrt{3} \int_0^\zeta \hbar(\xi) d\xi} d\zeta \right),$ $\lambda(q) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} + 1, \hbar(q) = \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y} \lambda(q), \Omega_0 = \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1}{\tilde{\tau}_{y0}}$ Достаточное условие существования решения: $\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \geq \sqrt{3} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \left[\frac{2(1 + \tilde{\tau}_y^2)}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1} - 1 \right], q \in [0, q_0]$
Решение	$\alpha = \begin{cases} \alpha^e, r_{ep} \leq r \leq R_1 \\ \alpha^p, R_0 \leq r \leq r_{ep} \end{cases}$ Положение упруго-пластической границы $r_{ep} = R_0 \sqrt{[\tilde{\tau}_y(q_0)/G_0] \sqrt{1 - \Omega^2(q_0)}}$ Величина накопленной пластической деформации на внутренней поверхности полого цилиндра $q_0 = q _{r=R_0}$ есть параметр решения. Угол поворота в упругой области $\alpha^e = \omega_0^e - (R_1/r)^2 (\omega_0^e - \alpha^*)$. Связь параметра q_0 с параметром нагружения α^* (угол поворота внешней поверхности полого цилиндра) задана равенством

	$\alpha^* = \omega_0^e - \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 \tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega^2(q_0)}, \text{ где}$ $\omega_0^e = \frac{G_0}{2} \left[1 + \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega(q_0)^2}}{G_0} \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega(q_0)^2}}{\tilde{\tau}_y(\zeta) \sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} d\zeta$ Угол поворота в пластической области $\alpha^p = \omega_0^e - \frac{G_0}{2} \left[1 + \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega(q)^2}}{G_0} \right] - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^q \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega(q)^2}}{\tilde{\tau}_y(\zeta) \sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} d\zeta$ Здесь распределение накопленной пластической деформации определяется равенством $\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega^2(q)} = (R_0/r)^2 \tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega^2(q_0)}$ Величина касательного напряжения на внешней поверхности $\sigma_{r\varphi}/\mu _{r=R_1} = 2(\omega_0^e - \alpha^*)$
Весь полый цилиндр находится в пластическом состоянии	
Условие	$\alpha^* \geq \alpha_{cr2}^*$ Достаточное условие существования решения: $\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \geq \sqrt{3} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \left[\frac{2(1 + \tilde{\tau}_y^2)}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1} - 1 \right], \quad q \in [0, q_0]$
Решение	Угол поворота $\alpha = \alpha^p = \omega_0^e - \frac{G_0}{2} \left[1 + \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega(q)^2}}{G_0} \right] - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^q \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega(q)^2}}{\tilde{\tau}_y(\zeta) \sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} d\zeta$ Распределение накопленной пластической деформации определяется равенством $\tilde{\tau}_y(q) \sqrt{1 - \Omega^2(q)} = (R_0/r)^2 \tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega^2(q_0)}$ Связь параметра q_0 с параметром нагружения α^* (угол поворота внешней поверхности полого цилиндра) задана равенством $\alpha^* = \left[G_0 + \sqrt{3} \int_0^{q_1} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} d\zeta \right] \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{q_1}^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{\sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega(q_0)^2}}{\tilde{\tau}_y(\zeta) \sqrt{1 - \Omega(\zeta)^2}} d\zeta$ где величина $q_1 = q _{r=R_1}$ связана с q_0 равенством $\frac{\tilde{\tau}_y(q_1) \sqrt{1 - \Omega^2(q_1)}}{\tilde{\tau}_y(q_0) \sqrt{1 - \Omega^2(q_0)}} = \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2$ Величина касательного напряжения на внешней поверхности $\sigma_{r\varphi}/\mu _{r=R_1} = \tilde{\tau}_y(q_1) \sqrt{1 - \Omega^2(q_1)}$

2.7.8. Пример решения. Используя данные [231] о пластическом деформировании жесткого ПВХ (поливинилхлорид, «rigid quenched PVC» в цитируемой работе) при растяжении, можно получить следующее представление линейной функции упрочнения материала: $\tau_y = \tau_{y0}(1 + \chi q)$, $\tau_{y0} = 19$ МПа, $\chi = 1.6$. Модуль сдвига ПВХ $\mu = 1$ ГПа, безразмерная величина $\tilde{\tau}_{y0} = \tau_{y0}/\mu = 0.019$. Тогда $m = \tilde{\tau}_{y0}\chi/\sqrt{3} \approx 0.018$, $n = 2/\left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1\right) \approx 0.9999$, и решая (2.7.33), имеем $k \approx 1.009$, откуда $q_{cr} = \frac{1}{\chi} \left(\frac{\sqrt{Q^2 - 1}}{\tilde{\tau}_{y0}} - 1 \right) = 3.7$. Таким образом, представленное здесь решение можно использовать до достижения параметром $q_0 = q|_{r=R_0}$ величины 3.7 (как минимум).

Далее, константа $G_0 = \sqrt{2\left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1\right)} \approx \tilde{\tau}_{y0} = 0.019$. Пусть деформируется полый цилиндр с соотношением радиусов $R_1/R_0 = 2$. Угол поворота внешней поверхности, при котором наступит пластическое течение $\alpha_{cr1}^* = (G_0/2) \left[1 - (R_0/R_1)^2 \right] \approx 0.007$ радиан. Вычисляя интегралы в аналитическом решении из табл. 2.7.1, получаем следующие результаты.

На рис. 2.7.3 приведено искривление материальных волокон, изначально направленных радиально, при углах поворота внешней поверхности $\alpha^* = 0.007, 0.074, 0.254, 0.533, 0.708, 0.905, 1.443, 2.098$ (все значения в радианах). Угол $\alpha_{cr2}^* = 0.905$ радиан соответствует полному переходу образца в пластическое состояние. Первые пять значений угла соответствуют относительной протяженности пластической области $(r_{ep} - R_0)/(R_1 - R_0) = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 7/8$.

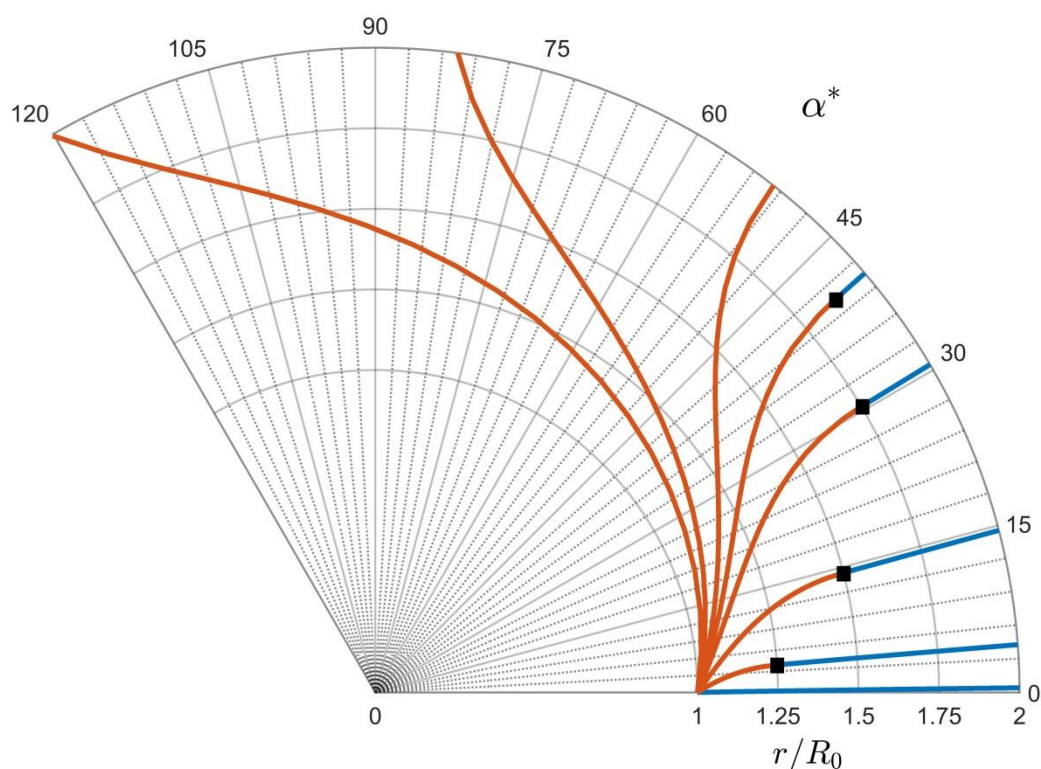


Рисунок 2.7.3 – Искривление изначально радиально направленных материальных волокон после кругового сдвига (угол поворота α^* в градусах). Символ «■» обозначает положение упруго-пластической границы

Связь между величиной касательного напряжения на внешней поверхности образца и углом поворота α^* приведена на рис. 2.7.4. Рисунок 2.7.5 показывает продвижение упруго-пластической границы в материале.

На рис. 2.7.6 приведено распределение накопленной пластической деформации по сечению образца при различных углах поворота внешней поверхности. На рис. 2.7.7 показана эволюция накопленной пластической деформации на внутренней и внешней поверхностях образца.

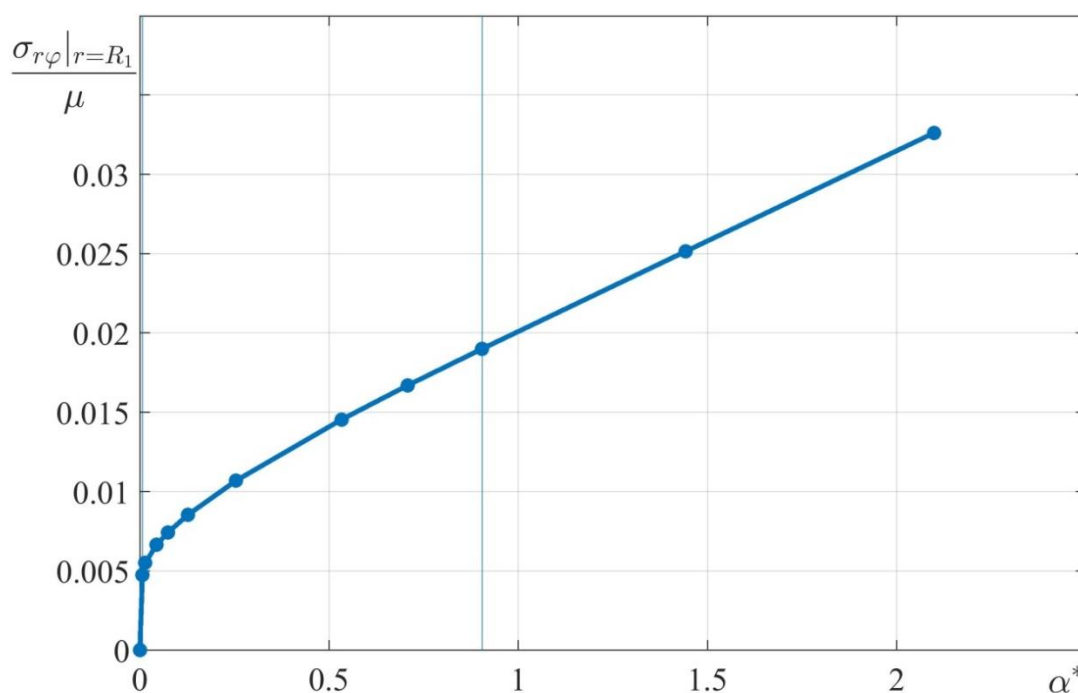


Рисунок 2.7.4 – Связь касательного напряжения на внешней поверхности образца с углом поворота α^* (в радианах). Вертикальная линия $\alpha^* = \alpha_{cr2}^* = 0.905$ радиан соответствует полному переходу образца в пластическое состояние

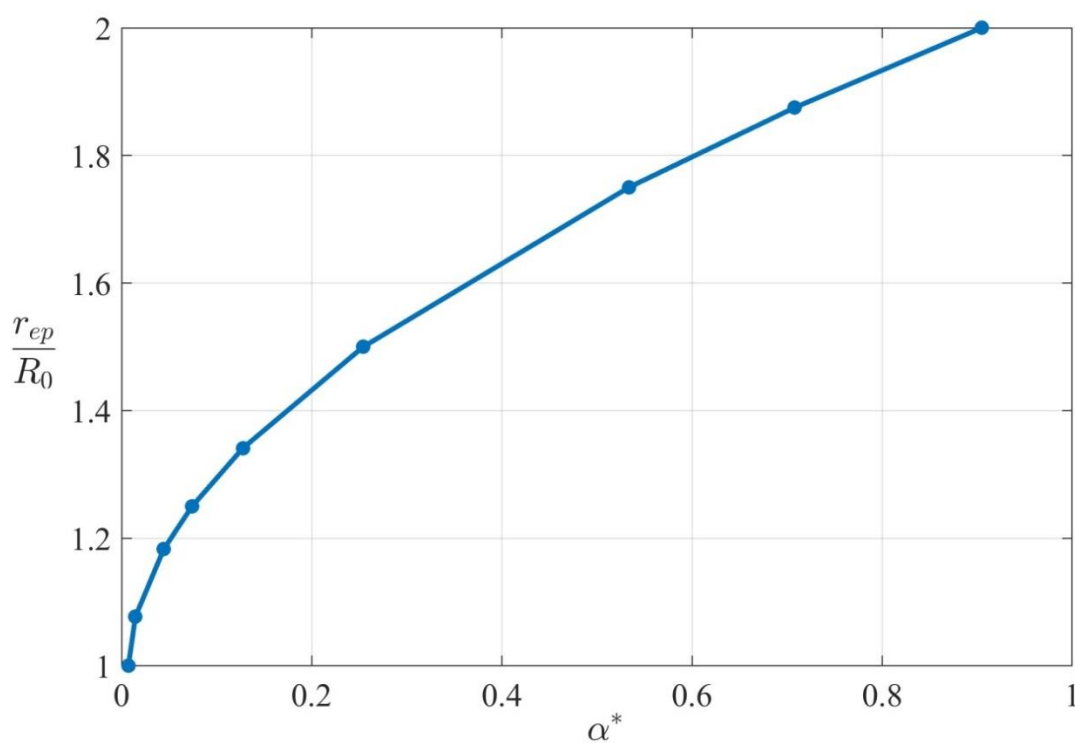


Рисунок 2.7.5 – Распространение упруго-пластической границы (угол поворота α^* в радианах)

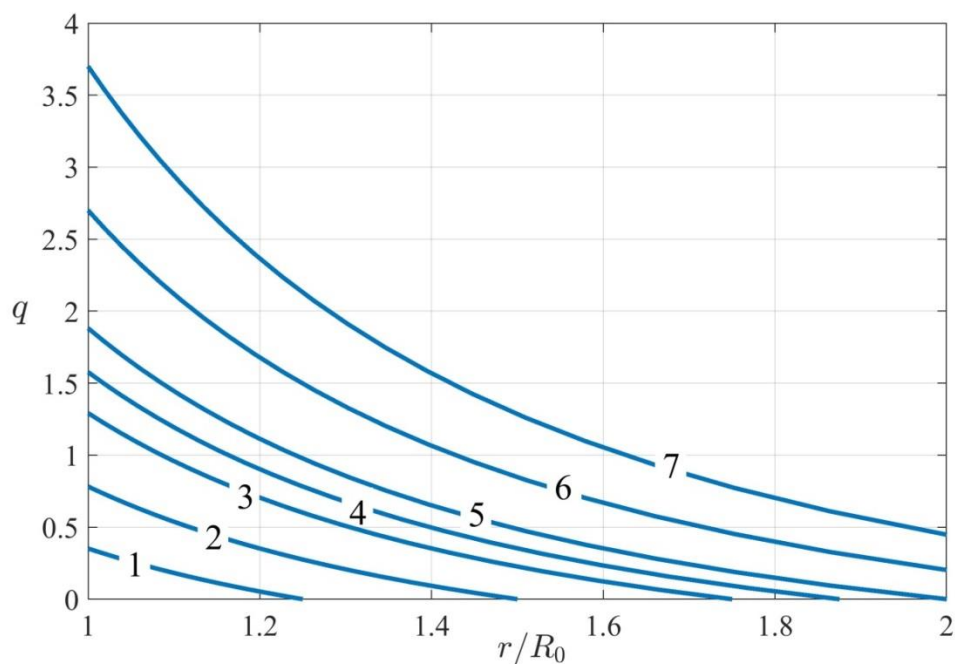


Рисунок 2.7.6 – Распределение накопленной пластической деформации по сечению образца: 1 – $\alpha^* = 0.074$, 2 – $\alpha^* = 0.254$, 3 – $\alpha^* = 0.534$, 4 – $\alpha^* = 0.708$, 5 – $\alpha^* = 0.905$, 6 – $\alpha^* = 1.443$, 7 – $\alpha^* = 2.098$ (угол поворота α^* в радианах)

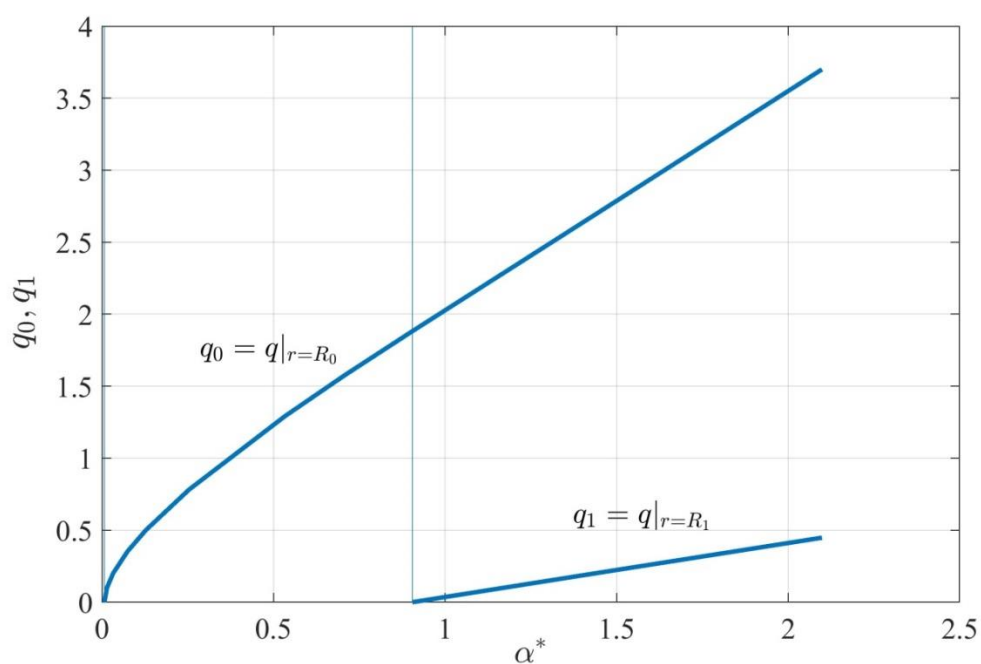


Рисунок 2.7.7 – Эволюция накопленной пластической деформации на граничных поверхностях (угол поворота α^* в радианах). Вертикальная линия $\alpha^* = \alpha_{cr2}^* = 0.905$ радиан соответствует полному переходу образца в пластическое состояние

Выводы к разделу 2.7. Получено аналитическое решение задачи плоской деформации об упруго-пластическом круговом сдвиге в полем цилиндре, упругие свойства которого описываются моделью Муни – Ривлина, а пластические – моделью Треска с произвольным изотропным упрочнением. Решение включает зависимость между углом поворота внешней границы и приложенным касательным напряжением; распределение накопленной пластической деформации по сечению образца; закон распространения упруго-пластической границы; формулы для перемещения материальных точек (угол поворота). Установлены достаточные для существования решения условия, налагаемые на функцию упрочнения (формула (2.7.32)). Приведен пример решения для ПВХ трубы с линейным упрочнением.

2.8. Предельная величина эффекта Свифта в гиперупруго-пластических материалах с насыщением предела текучести

Свифт [232] установил, что образцы из различных металлических материалов необратимо удлиняются в направлении оси, вокруг которой они скручены. Это явление, наряду с его парным эффектом, суть которого заключается в возникновении осевой силы при кручении с закреплёнными концами, известно как эффект Свифта (см. рис. 2.8.1).

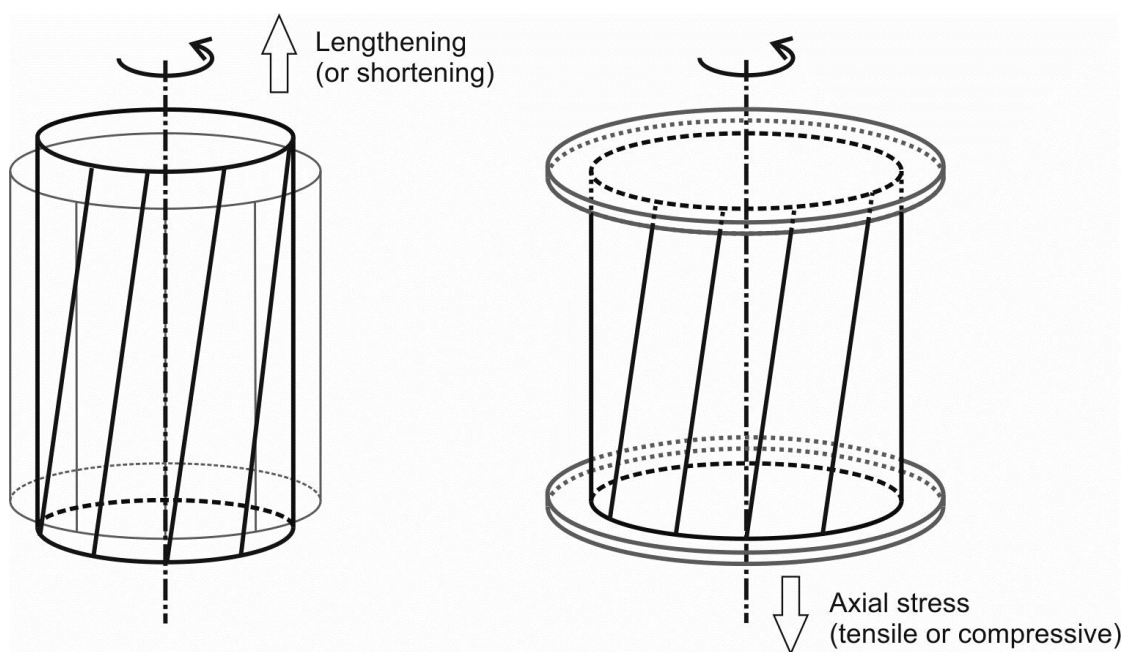


Рисунок 2.8.1 – Эффект Свифта при кручении со свободными концами (слева) и закреплёнными концами (справа)

Наиболее распространённая в механике твёрдого тела точка зрения на причины этого эффекта заключается во влиянии начальной или приобретенной анизотропии материалов.

Однако сравнительно недавние исследования [233–235] показали, что это объяснение может быть не единственно возможным. В упомянутых работах продемонстрирована сильная корреляция между асимметрией растяжения – сжатия (tension – compression asymmetry, TCA) при пластическом течении и возникновением эффекта Свифта. В частности, было показано, что образцы удлиняются, если предел текучести материала на растяжение ниже

предела текучести на сжатие, и укорачиваются в противном случае. Для модели пластичности Мизеса, где эти пределы текучести равны, расчеты, представленные в [235] для меди, показывают, что изменение длины образца при кручении практически равно нулю.

С другой стороны, возникновение осевой силы при кручении является хорошо известным эффектом второго порядка в нелинейной теории упругости [191, 192]. Изменение длины образца при упругом кручении было описано Пойнтингом [236]. Довольно интересно количественно оценить вклад нелинейных упругих эффектов и ТСА при пластическом течении в величину эффекта Свифта. В этом разделе представлена такая оценка. С использованием кинематики конечных упругопластических деформаций, описанной в главе 1, получена система дифференциальных уравнений, описывающих кручение с закрепленными концами для широкого класса несжимаемых материалов с насыщением предела текучести. Исследовано предельное напряженно-деформированное состояние, к которому стремится материал с ростом деформации кручения, и получены следующие результаты относительно предельного значения эффекта Свифта.

(1) Для модели пластичности Мизеса осевая сила пропорциональна $\hat{\varepsilon}^2$, $\hat{\varepsilon} = \hat{\tau}_y / \hat{\mu}$, где τ_y представляет собой предел текучести на сдвиг; $\mu = 2(\psi_1 + \psi_2)$ есть нелинейный аналог модуля сдвига, $\psi_1 = \partial\Psi/\partial I_1$, $\psi_2 = \partial\Psi/\partial I_2$, Ψ есть упругий потенциал. Напротив, для модели Казаку – Барлата [73], учитывающей ТСА, осевая сила пропорциональна $\hat{\varepsilon}$. Следовательно, для этой модели осевая сила и крутящий момент есть величины одного порядка, в отличие от нелинейно-упругого решения и упругопластического решения, основанного на модели Мизеса.

(2) Как для модели пластичности Мизеса, так и для модели Казаку – Барлата осевая сила в главном приближении зависит от $\hat{\mu}$, но не зависит от соотношения между ψ_1 и ψ_2 . Однако для модели [73] существует зависимость крутящего момента от соотношения между ψ_1 и ψ_2 , что проявляется,

если материал способен выдерживать значительные упругие деформации и его предел текучести при растяжении значительно ниже предела текучести при сжатии.

(3) Для жестких материалов ($\hat{\varepsilon} \ll 1$) с умеренно выраженной ТСА коэффициент модели [73] можно выразить простой формулой $\hat{c} = \hat{F}_z d / \hat{M}$, где d есть диаметр образца; осевая сила $\hat{F}_z$ положительна, если образец находится в состоянии растяжения, и отрицательна, если образец находится в состоянии сжатия.

(4) Для модели пластичности Друкера [237], которая включает инвариант девиатора J_3 , но не учитывает ТСА, предельное состояние ничем не отличается от предсказанного моделью Мизеса.

(5) Для неассоциированных пластических моделей эффект Свифта в первую очередь контролируется пластическим потенциалом, а не условием текучести.

Здесь и далее по тексту подраздела символ « $\wedge$ » обозначает предельное значение величины при неограниченном росте деформации кручения.

2.8.1. Модель материала. Мы используем кинематику конечных упругопластических деформаций, описанную в главе 1, в частности уравнение для изменения упругой части левого тензора деформации Коши – Грина $\mathbf{B}^e = \mathbf{F}^e (\mathbf{F}^e)^T$ при пластическом течении:

$$\frac{D_{Old} \mathbf{B}^e}{Dt} \stackrel{def}{=} \dot{\mathbf{B}}^e - \mathbf{L} \mathbf{B}^e - \mathbf{B}^e \mathbf{I}^T = -2 \mathbf{B}^e \mathbf{D}^p \quad (2.8.1)$$

Для тензора $\mathbf{D}^p$ принимается следующее уравнение:

$$\mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \Lambda \left(g_2 \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + g_3 \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = \Lambda \left[g_2 \mathbf{s} + g_3 (\mathbf{s}^2 - 2/3 J_2 \mathbf{I}) \right] \quad (2.8.2)$$

Здесь $g = g(J_2, J_3)$ есть пластический потенциал; $g_2(J_2, J_3) = \partial g / \partial J_2$, $g_3(J_2, J_3) = \partial g / \partial J_3$; $J_2 = (1/2) \text{tr} \mathbf{s}^2$, $J_3 = \det \mathbf{s}$, где $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - (\text{tr} \boldsymbol{\sigma} / 3) \mathbf{I}$ есть девиатор напряжений; $\Lambda > 0$ – скалярный пластический множитель.

Условие текучести описывается следующим уравнением:

$$f(J_2, J_3, \tau_y) = 0 \quad (2.8.3)$$

Функция f , которая может не совпадать с g , содержит сдвиговой предел текучести материала τ_y . Функция $\tau_y(q)$ описывает изотропное деформационное упрочнение, q представляет собой накопленную пластическую деформацию, определяемую уравнением $\dot{q} = \sqrt{(2/3)\text{tr}(\mathbf{D}^p)^2}$. Мы рассматриваем материалы с пределом текучести, достигающим насыщения, поэтому

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \tau_y(q) = \hat{\tau}_y < \infty$$

Уравнение для q позволяет получить следующее, принимая во внимание уравнение (2.8.2):

$$\dot{q} = \sqrt{(2/3)\text{tr}(\mathbf{D}^p)^2} = \frac{2}{3} \Lambda \sqrt{3g_2^2 J_2 + 9g_2 g_3 J_3 + g_3^2 J_2^2}.$$

Тогда уравнение (2.8.2) можно переписать как

$$\mathbf{D}^p = \frac{3}{2} \frac{g_2 \mathbf{s} + g_3 (\mathbf{s}^2 - 2/3 J_2 \mathbf{I})}{\sqrt{3g_2^2 J_2 + 9g_2 g_3 J_3 + g_3^2 J_2^2}} \dot{q} \quad (2.8.4)$$

Тензор напряжений Коши связан с тензором упругих деформаций $\mathbf{B}^e$ гиперупругим законом

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e} = \\ &= -p\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mu(1-\psi) I_2 \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mu(1+\psi) \mathbf{B}^e - \frac{1}{2} \mu(1-\psi) (\mathbf{B}^e)^{-1} \\ \det \mathbf{B}^e &= 1 \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

Здесь $\Psi = \Psi(I_1, I_2)$ представляет собой упругий потенциал;

$$\mu(I_1, I_2) = 2(\psi_1 + \psi_2), \quad \psi(I_1, I_2) = \frac{\psi_1 - \psi_2}{\psi_1 + \psi_2}, \quad \psi_1(I_1, I_2) = \partial \Psi / \partial I_1,$$

$$\psi_2(I_1, I_2) = \partial \Psi / \partial I_2; \quad I_1 = \text{tr} \mathbf{B}^e, \quad I_2 = (1/2) [\text{tr}^2 \mathbf{B}^e - \text{tr}(\mathbf{B}^e)^2];$$

скалярная функция p есть гидростатическое давление, обусловленное условием несжимаемости. В

частном случае материала Муни – Ривлина $\psi_1 = C_1 = \text{const}$, $\psi_2 = C_2 = \text{const}$.
Для обобщенного неогуковского материала $\psi = 1$.

2.8.2. Кручение с закреплёнными концами. Для сплошного кругового цилиндра с внешним радиусом R_1 и длиной L простое кручение с закреплёнными концами описывается уравнениями

$$r = R, \quad \varphi = \theta + \Theta Z/L, \quad z = Z$$

которые связывают цилиндрические координаты материальной точки в недеформированном состоянии (R, θ, Z) с координатами в деформированном состоянии (r, φ, z) . Здесь Θ представляет собой угол поворота конца $Z = L$ относительно неподвижного конца $Z = 0$. Длина и диаметр цилиндра остаются неизменными. Введем безразмерную радиальную координату $\tilde{r} = r/R_1$ и параметр нагрузки $\gamma = R_1 \Theta/L$, который представляет собой поверхностный сдвиг.

Тогда вектор скорости становится $\mathbf{v} = z\tilde{r}(d\gamma/dt)\mathbf{e}_\varphi$, а пространственный градиент скорости $\mathbf{l}$ и левый тензор деформации Коши – Грина $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ имеют следующие координатные представления

$$\begin{aligned} [\mathbf{l}] &= \frac{d\gamma}{dt} \begin{pmatrix} 0 & -z/R_1 & 0 \\ z/R_1 & 0 & \tilde{r} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [\mathbf{B}] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + (\gamma\tilde{r})^2 & \gamma\tilde{r} \\ 0 & \gamma\tilde{r} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

С увеличением угла поворота Θ цилиндр сначала деформируется упруго, затем на внешней границе возникает пластическое течение. В упругой области $0 \leq r < r_{ep}$ тензор упругих деформаций совпадает с тензором полных деформаций $\mathbf{B}^e = \mathbf{B}$; в области $r_{ep} \leq r \leq R_1$, где происходит пластическая деформация, тензор $\mathbf{B}^e$ определяется дифференциальным уравнением (2.8.1).

Упруго-пластическая граница $r = r_{ep}$ движется по направлению к оси симметрии.

В области упругопластической деформации тензор упругих деформаций имеет вид

$$[\mathbf{B}^e] = \begin{pmatrix} B_{rr}^e & 0 & 0 \\ 0 & B_{\varphi\varphi}^e & B_{\varphi z}^e \\ 0 & B_{\varphi z}^e & B_{zz}^e \end{pmatrix}, \det \mathbf{B}^e = 1$$

Нам также понадобится следующее выражение для конвективной части производной тензора упругих деформаций:

$$[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B}^e] = \frac{d\gamma}{dt} \frac{z}{R_1} \begin{pmatrix} 0 & B_{rr}^e - B_{\varphi\varphi}^e & -B_{\varphi z}^e \\ B_{rr}^e - B_{\varphi\varphi}^e & 0 & 0 \\ -B_{\varphi z}^e & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

И затем

$$[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B}^e - \mathbf{I}\mathbf{B}^e - \mathbf{B}^e\mathbf{I}^T] = \frac{d\gamma}{dt} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2B_{\varphi z}^e \tilde{r} & -B_{zz}^e \tilde{r} \\ 0 & -B_{zz}^e \tilde{r} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8.7)$$

Аналитические решения задачи упругопластического кручения при конечных деформациях для частных случаев определяющих соотношений можно найти в работах [2, 5, 179]. Здесь мы рассматриваем только предельное состояние, при котором упругая область сжимается в точку при бесконечном увеличении угла поворота Θ . Этому состоянию соответствуют определенные значения тензора упругих деформаций и девиатора напряжений⁶. В этом случае между предельными значениями компонент тензора упругих деформаций может быть найдена универсальная связь. Далее мы устанавливаем систему из двух пар алгебраических уравнений, которые определяют компоненты упругой деформации в предельном состоянии, а также величину предельного осевого напряжения и крутящего момента.

⁶В предельном состоянии эти величины однородны по объему образца, тогда как функция гидростатического давления p в (2.8.5) сингулярна на оси симметрии и тензор напряжений, соответственно, также является сингулярным.

2.8.3. Разрешающая система алгебраических уравнений. С учётом уравнения (2.8.7) дифференциальное уравнение для изменения тензора упругих деформаций (2.8.2) можно записать в виде системы

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_{rr}^e}{\partial t} &= -2B_{rr}^e D_{rr}^p \\
\frac{\partial B_{\varphi\varphi}^e}{\partial t} &= 2 \frac{d(\gamma\tilde{r})}{dt} B_{\varphi z}^e - 2(B_{\varphi\varphi}^e D_{\varphi\varphi}^p + B_{\varphi z}^e D_{\varphi z}^p) \\
\frac{\partial B_{zz}^e}{\partial t} &= -2(B_{\varphi z}^e D_{\varphi z}^p + B_{zz}^e D_{zz}^p) \\
\frac{\partial B_{\varphi z}^e}{\partial t} &= B_{zz}^e \frac{d(\gamma\tilde{r})}{dt} - (B_{zz}^e + B_{\varphi\varphi}^e) D_{\varphi z}^p + B_{\varphi z}^e D_{rr}^p
\end{aligned} \tag{2.8.8}$$

Согласно (2.8.4), ненулевые компоненты тензора скорости пластической деформации следующие:

$$\begin{aligned}
D_{rr}^p &= \frac{\partial q}{\partial t} \frac{1}{2} \frac{g_3(-2J_2 + 3s_{rr}s_{rr}) + 3g_2s_{rr}}{\sqrt{3g_2^2J_2 + 9g_2g_3J_3 + g_3^2J_2^2}} \\
D_{\varphi\varphi}^p &= \frac{\partial q}{\partial t} \frac{1}{2} \frac{g_3(J_2 + 3s_{rr}s_{zz}) + 3g_2s_{\varphi\varphi}}{\sqrt{3g_2^2J_2 + 9g_2g_3J_3 + g_3^2J_2^2}} \\
D_{zz}^p &= \frac{\partial q}{\partial t} \frac{1}{2} \frac{g_3(J_2 + 3s_{rr}s_{\varphi\varphi}) + 3g_2s_{zz}}{\sqrt{3g_2^2J_2 + 9g_2g_3J_3 + g_3^2J_2^2}} \\
D_{\varphi z}^p &= \frac{\partial q}{\partial t} \frac{3}{2} \frac{s_{\varphi z}(g_2 - g_3s_{rr})}{\sqrt{3g_2^2J_2 + 9g_2g_3J_3 + g_3^2J_2^2}} \\
D_{rr}^p + D_{\varphi\varphi}^p + D_{zz}^p &= 0, \quad s_{rr} + s_{\varphi\varphi} + s_{zz} = 0
\end{aligned} \tag{2.8.9}$$

При этом учитывается, что для рассматриваемой задачи $\dot{q} = \partial q / \partial t$.

Если выразить величину $d(\gamma\tilde{r})/dt$ из четвёртого уравнения (2.8.8) и подставить её во второе, то оно становится тождеством. Условие несжимаемости $\det \mathbf{B}^e = 1$ позволяет выразить одну из четырёх ненулевых компонент упругой деформации через остальные. Условие текучести (2.8.3) даёт ещё одно алгебраическое уравнение, связывающее компоненты упругой деформации (хотя соотношения в явном виде можно получить лишь в частных случаях, например, для пластичности по Мизесу с постоянными упругими моду-

лями). Компоненты девиаторного напряжения можно выразить через упругую деформацию с помощью закона упругости (2.8.5):

$$\frac{\mathbf{s}}{\mu} = \frac{1+\tilde{\psi}}{2} \left(\mathbf{B}^e - \frac{I_1}{3} \mathbf{I} \right) - \frac{1-\tilde{\psi}}{2} \left[\left(\mathbf{B}^e \right)^{-1} - \frac{I_2}{3} \mathbf{I} \right]$$

Таким образом, первое и третье уравнения системы (2.8.8) с учётом (2.8.9) представляют собой замкнутую связанную систему нелинейных ОДУ с независимой переменной q и начальными условиями (2.8.6). В частном случае (пластичность по Мизесу с произвольным изотропным упрочнением в сочетании с гиперупругим законом обобщённого неогукковского тела) для этой системы может быть найдено точное решение [5].

Далее исследуем предельное состояние образца при (бесконечно) большой деформации кручения. В предельном состоянии $\partial \mathbf{B}^e / \partial t = 0$ и исходя из (2.8.8) можно сформулировать следующие алгебраические уравнения:

$$\hat{D}_{rr}^p = 0, \quad \hat{B}_{\varphi z}^e \hat{D}_{\varphi z}^p = \hat{B}_{zz}^e \hat{D}_{\varphi\varphi}^p, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{d(\gamma \tilde{r})}{dt} = \left(1 + \frac{\hat{B}_{\varphi\varphi}^e}{\hat{B}_{zz}^e} \right) \hat{D}_{\varphi z}^p$$

Или, учитывая (2.8.9):

$$\begin{aligned} 3\hat{g}_2 \hat{s}_{rr} &= \hat{g}_3 (2\hat{J}_2 - 3\hat{s}_{rr} \hat{s}_{rr}) \\ \frac{\hat{B}_{\varphi z}^e}{\hat{B}_{zz}^e} &= \frac{\hat{g}_3 (\hat{J}_2 + 3\hat{s}_{rr} \hat{s}_{zz}) + 3\hat{g}_2 \hat{s}_{\varphi\varphi}}{3\hat{s}_{\varphi z} (\hat{g}_2 - \hat{g}_3 \hat{s}_{rr})} = \frac{1}{2} \frac{\hat{s}_{\varphi\varphi} - \hat{s}_{zz}}{\hat{s}_{\varphi z}} = \frac{1}{2} \frac{\hat{B}_{\varphi\varphi}^e - \hat{B}_{zz}^e}{\hat{B}_{\varphi z}^e} \\ \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{d(\gamma \tilde{r})}{dq} &= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\hat{B}_{\varphi\varphi}^e}{\hat{B}_{zz}^e} \right) \frac{\hat{s}_{\varphi z} (\hat{g}_2 - \hat{g}_3 \hat{s}_{rr})}{\sqrt{3\hat{g}_2^2 \hat{J}_2 + 9\hat{g}_2 \hat{g}_3 \hat{J}_3 + \hat{g}_3^2 \hat{J}_2^2}} \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

Последнее из этих уравнений определяет, насколько различаются полная и пластическая деформации.

Второе уравнение в (2.8.10)

$$\frac{\hat{B}_{zz}^e (\hat{B}_{\varphi\varphi}^e - \hat{B}_{zz}^e)}{(\hat{B}_{\varphi z}^e)^2} = 2 \quad (2.8.11)$$

представляет собой универсальное (в том смысле, что она не зависит от модели материала) соотношение между предельными значениями компонент упругой деформации. Интересно отметить, что, согласно уравнению (2.8.6), аналогичная зависимость справедлива и для тензора полной деформации:

$$\frac{B_{zz}(B_{\varphi\varphi} - B_{zz})}{(B_{\varphi z})^2} = 1$$

Учитывая условие несжимаемости

$$\det \hat{\mathbf{B}}^e = \hat{B}_{rr}^e \left[\hat{B}_{\varphi\varphi}^e \hat{B}_{zz}^e - (\hat{B}_{\varphi z}^e)^2 \right] = 1 \quad (2.8.12)$$

уравнение (2.8.11) можно также записать в виде

$$\hat{B}_{rr}^e (\hat{B}_{\varphi\varphi}^e + \hat{B}_{zz}^e) \hat{B}_{zz}^e = 2 \quad (2.8.13)$$

С учетом уравнений (2.8.12) и (2.8.13) мы выражаем компоненты $\hat{\mathbf{B}}^e$ через инварианты: $(\hat{B}_{rr}^e)^3 - \hat{I}_1 (\hat{B}_{rr}^e)^2 + \hat{I}_2 \hat{B}_{rr}^e - 1 = 0$, откуда

$$\hat{B}_{rr}^e = \hat{I}_1/3 + m^{1/3} - \left[\hat{I}_2/3 - (\hat{I}_1/3)^2 \right] m^{-1/3} \quad (2.8.14)$$

$$m = (\hat{I}_1/3)^3 - \frac{3}{2} (\hat{I}_1/3) (\hat{I}_2/3) + \frac{1}{2} + \sqrt{n},$$

$$n = (\hat{I}_1/3)^3 - \frac{3}{4} (\hat{I}_1/3)^2 (\hat{I}_2/3)^2 - \frac{3}{2} (\hat{I}_1/3) (\hat{I}_2/3) + (\hat{I}_2/3)^3 + \frac{1}{4},$$

$$\hat{B}_{zz}^e = \frac{2\hat{B}_{rr}^e}{\hat{B}_{rr}^e \hat{I}_2 - 1} = \frac{2}{\hat{B}_{rr}^e (\hat{I}_1 - \hat{B}_{rr}^e)}, \quad \hat{B}_{\varphi\varphi}^e = \frac{2}{\hat{B}_{rr}^e \hat{B}_{zz}^e} - \hat{B}_{zz}^e,$$

$$(\hat{B}_{\varphi z}^e)^2 + (\hat{B}_{zz}^e)^2 = \frac{1}{\hat{B}_{rr}^e}$$

Кроме того, поскольку $s_{r\varphi} = s_{rz} = 0$ и $\text{tr} \mathbf{s} = 0$, имеем $J_3 = s_{rr} (s_{rr}^2 - J_2)$.

Тогда первое уравнение в (2.8.10) вместе с условием текучести в предельном состоянии $f(\hat{J}_2, \hat{J}_3, \hat{\sigma}_y) = 0$ представляют собой два алгебраических уравнения относительно $\hat{J}_2$ и $\hat{J}_3$. Если пластический потенциал не зависит от инвари-

анта J_3 (т.е. $\hat{g}_3 = 0$), то из первого уравнения (2.8.10) следует, что $\hat{s}_{rr} = 0$ и, следовательно, $\hat{J}_3 = 0$.

Выражения для крутящего момента и осевого напряжения следующие:

$$\begin{aligned}\hat{M} &= 2\pi \int_0^R r^2 \hat{\sigma}_{\varphi z} dr = \frac{2}{3} \pi \hat{\mu} R_1^3 \hat{B}_{\varphi z}^e \left(\frac{1+\hat{\psi}}{2} + \hat{B}_{rr}^e \frac{1-\hat{\psi}}{2} \right) = \\ &= \frac{2}{3} \pi \hat{\mu} R_1^3 \left(\frac{1+\hat{\psi}}{2} \frac{1}{\hat{B}_{rr}^e} + \frac{1-\hat{\psi}}{2} \right) \sqrt{\hat{B}_{rr}^e - \left(\frac{2}{\hat{I}_1 - \hat{B}_{rr}^e} \right)^2} \\ \int \sigma_{zz} r dr &= \int (s_{zz} - s_{rr}) r dr + \int \sigma_{rr} r dr = \int (s_{zz} - s_{rr}) r dr + \left(\frac{1}{2} r^2 \sigma_{rr} - \frac{1}{2} \int \frac{d\sigma_{rr}}{dr} r^2 dr \right) = \\ &= \int (s_{zz} - s_{rr}) r dr + \frac{1}{2} r^2 \sigma_{rr} - \frac{1}{2} \int (s_{\varphi\varphi} - s_{rr}) r dr\end{aligned}$$

Здесь второе равенство получено интегрированием по частям, а третье равенство выведено из рассмотрения уравнения равновесия $r d\sigma_{rr}/dr = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$.

И далее

$$\begin{aligned}\langle \hat{\sigma}_{zz} \rangle &= \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} r \hat{\sigma}_{zz} dr = \hat{s}_{zz} - \hat{s}_{rr} - \frac{\hat{s}_{\varphi\varphi} - \hat{s}_{rr}}{2} = \frac{\hat{s}_{zz} - \hat{s}_{rr}}{2} + \frac{\hat{s}_{zz} - \hat{s}_{\varphi\varphi}}{2} = \frac{3}{2} \hat{s}_{zz} = \\ &= \hat{\mu} \frac{3}{2} \frac{1+\hat{\psi}}{2} \left(\hat{B}_{zz}^e - \frac{\hat{I}_1}{3} \right) - \hat{\mu} \frac{3}{2} \frac{1-\hat{\psi}}{2} \left(\hat{B}_{rr}^e \hat{B}_{\varphi\varphi}^e - \frac{\hat{I}_2}{3} \right) = \\ &= \hat{\mu} \frac{1+\hat{\psi}}{2} \left[\frac{3}{\hat{B}_{rr}^e (\hat{I}_1 - \hat{B}_{rr}^e)} - \frac{\hat{I}_1}{2} \right] - \hat{\mu} \frac{1-\hat{\psi}}{2} \left[\hat{B}_{rr}^e (\hat{I}_1 - \hat{B}_{rr}^e) - \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{B}_{rr}^e} - \frac{3}{\hat{I}_1 - \hat{B}_{rr}^e} \right]\end{aligned}$$

Основная система алгебраических уравнений выглядит следующим образом.

Таблица 2.8.1 – Система определяющих алгебраических уравнений

$g = g(J_2) \Rightarrow \hat{J}_3 = 0$	$\hat{s}_{rr} = 0$ $f(\hat{J}_2, 0, \hat{\sigma}_y) = 0$
$g = g(J_2, J_3)$	$3\hat{g}_2\hat{s}_{rr} = \hat{g}_3(2\hat{J}_2 - 3\hat{s}_{rr}\hat{s}_{rr})$ $f(\hat{J}_2, \hat{J}_3, \hat{\sigma}_y) = 0,$ где $\hat{J}_3 = \hat{s}_{rr}(\hat{s}_{rr}^2 - \hat{J}_2)$
$\Downarrow$ значения $\hat{J}_2$ и $\hat{s}_{rr}$ найдены	
$\frac{3\hat{s}_{rr}}{\hat{\mu}(1+\hat{\psi})/2} = (3\hat{B}_{rr}^e - \hat{I}_1) - \frac{1-\hat{\psi}}{1+\hat{\psi}} \left[\frac{2}{\hat{B}_{rr}^e} - \hat{B}_{rr}^e(\hat{I}_1 - \hat{B}_{rr}^e) \right] \quad (2.8.15)$ $\frac{3\hat{J}_2}{\hat{\mu}^2} = \left(\frac{1+\hat{\psi}}{2} \right)^2 (\hat{I}_1^2 - 3\hat{I}_2) - \frac{1+\hat{\psi}}{2} \frac{1-\hat{\psi}}{2} (9 - \hat{I}_1\hat{I}_2) + \left(\frac{1-\hat{\psi}}{2} \right)^2 (\hat{I}_2^2 - 3\hat{I}_1)$ Вместо последнего уравнения может быть удобнее использовать комбинацию $\frac{3(\hat{s}_{rr}/\hat{\mu})^2 - \hat{J}_2/\hat{\mu}^2}{[(1+\hat{\psi})/2]^2} = \quad (2.8.16)$ $= \left[\frac{1}{\hat{B}_{rr}^e} - (\hat{I}_1 - 2\hat{B}_{rr}^e)\hat{B}_{rr}^e \right] \left[1 + (\hat{I}_1 - \hat{B}_{rr}^e) \frac{1-\hat{\psi}}{1+\hat{\psi}} + \frac{1}{\hat{B}_{rr}^e} \left(\frac{1-\hat{\psi}}{1+\hat{\psi}} \right)^2 \right]$ где $(\hat{B}_{rr}^e)^3 - \hat{I}_1(\hat{B}_{rr}^e)^2 + \hat{I}_2\hat{B}_{rr}^e - 1 = 0$, корень этого уравнения определяется уравнением (2.8.14)	
$\Downarrow$ значения $\hat{I}_1$ и $\hat{I}_2$ найдены	
Предельные значения крутящего момента и осевого напряжения определяются по формулам $\hat{M} = \frac{2}{3} \pi \hat{\mu} R_1^3 \left(\frac{1+\hat{\psi}}{2} \frac{1}{\hat{B}_{rr}^e} + \frac{1-\hat{\psi}}{2} \right) \sqrt{\hat{B}_{rr}^e - \left(\frac{2}{\hat{I}_1 - \hat{B}_{rr}^e} \right)^2}$ $\langle \hat{\sigma}_{zz} \rangle = \hat{\mu} \frac{1+\hat{\psi}}{2} \left[\frac{3}{\hat{B}_{rr}^e(\hat{I}_1 - \hat{B}_{rr}^e)} - \frac{\hat{I}_1}{2} \right] - \hat{\mu} \frac{1-\hat{\psi}}{2} \left[\hat{B}_{rr}^e(\hat{I}_1 - \hat{B}_{rr}^e) - \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{B}_{rr}^e} - \frac{3}{\hat{I}_1 - \hat{B}_{rr}^e} \right]$	

Нет никаких проблем численно решить эту систему нелинейных алгебраических уравнений для любой комбинации закона гиперупругости, условия текучести и пластического потенциала. Однако для получения результатов, удобных для анализа, имеет смысл найти приближенные аналитические решения.

2.8.4. Особые случаи. 1. Модель пластичности Мизеса $f = g = J_2 - \tau_y^2$.

Имеем $\hat{s}_{rr} = 0$, $\hat{J}_2 = \hat{\tau}_y^2$ и далее:

$$3\hat{B}_{rr}^e - \hat{I}_1 = \frac{1-\hat{\psi}}{1+\hat{\psi}} \left[\frac{2}{\hat{B}_{rr}^e} - \hat{B}_{rr}^e (\hat{I}_1 - \hat{B}_{rr}^e) \right]$$

$$\left[\frac{1}{\hat{B}_{rr}^e} - (\hat{I}_1 - 2\hat{B}_{rr}^e) \hat{B}_{rr}^e \right] \left[1 + (\hat{I}_1 - \hat{B}_{rr}^e) \frac{1-\hat{\psi}}{1+\hat{\psi}} + \frac{1}{\hat{B}_{rr}^e} \left(\frac{1-\hat{\psi}}{1+\hat{\psi}} \right)^2 \right] = - \frac{\hat{\varepsilon}^2}{[(1+\hat{\psi})/2]^2}$$

Здесь обозначено $\hat{\varepsilon} = \hat{\tau}_y / \hat{\mu}$.

Будем искать приближенное решение этих уравнений в виде

$$\hat{B}_{rr}^e \approx 1 + b_2 \hat{\varepsilon}^2, \quad 1/\hat{B}_{rr}^e \approx 1 - b_2 \hat{\varepsilon}^2, \quad \hat{I}_1 \approx 3 + i_2 \hat{\varepsilon}^2 \quad (2.8.17)$$

Далее, требуя, чтобы разность между левой и правой частями уравнений выше была на порядок выше, чем $\hat{\varepsilon}^2$, и сравнивая коэффициенты при степенях $\hat{\varepsilon}^0$, $\hat{\varepsilon}^1$, и $\hat{\varepsilon}^2$, имеем $i_2 = 1$ и $b_2 = \hat{\psi}/3$.

Тогда с точностью до $\hat{\varepsilon}^2$

$$\frac{\hat{M}}{(2/3)\pi R_1^3 \hat{\mu}} \approx \hat{\varepsilon}, \quad \frac{\langle \hat{\sigma}_{zz} \rangle}{\hat{\mu}} \approx -\frac{3}{2} \hat{\varepsilon}^2$$

Модель Мизеса предсказывает сжимающее осевое напряжение, пропорциональное $\hat{\varepsilon}^2$, которое в главном приближении не зависит от соотношения между $\psi_1 = \partial\Psi/\partial I_1$ и $\psi_2 = \partial\Psi/\partial I_2$. Это достаточно удивительно, поскольку как универсальное нелинейно-упругое решение [191], так и упругопластическое решение [2] для модели пластичности Треска в сочетании с гиперупругой моделью Муни – Ривлина ($\psi_1 = C_1 = const$, $\psi_2 = C_2 = const$) предсказывают заметную зависимость осевого напряжения от соотношения упругих констант. В последнем случае, например,

$$\frac{\langle \hat{\sigma}_{zz} \rangle}{\mu} = -\frac{3}{2} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} + \frac{\psi}{2} \left(\sqrt{1+\varepsilon^2} - 1 \right) \approx -\frac{6-\psi}{4} \varepsilon^2.$$

2. Модель пластичности Казаку – Барлата [73]

$$f = g = J_2^{3/2} - cJ_3 - \tau_y^3, \quad c \in \left[-3\sqrt{3}/2, 3\sqrt{3}/4 \right].$$

Последнее условие есть условие выпуклости. Параметр модели c связан с пределом текучести при растяжении σ_{yT} и сжатии σ_{yC} следующим образом:

$$c = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_{yT}^3 - \sigma_{yC}^3}{\sigma_{yT}^3 + \sigma_{yC}^3}$$

Имеем $g_2 = (3/2)J_2^{1/2}$, $g_3 = -c$ и далее с учетом уравнения

$$J_3 = s_{rr} \left(s_{rr}^2 - J_2 \right):$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\hat{s}_{rr}}{\sqrt{\hat{J}_2}} = -\hat{c} \left(\frac{2}{3} - \frac{\hat{s}_{rr}}{\sqrt{\hat{J}_2}} \frac{\hat{s}_{rr}}{\sqrt{\hat{J}_2}} \right) \\ 1 - \hat{c} \frac{\hat{s}_{rr}}{\sqrt{\hat{J}_2}} \left(\frac{\hat{s}_{rr}}{\sqrt{\hat{J}_2}} \frac{\hat{s}_{rr}}{\sqrt{\hat{J}_2}} - 1 \right) = \left(\frac{\hat{\tau}_y}{\sqrt{\hat{J}_2}} \right)^3 \end{cases}$$

Следовательно, $\hat{c}$ имеет тот же знак, что и $\hat{J}_3$, и противоположный знак с $\hat{s}_{rr}$; параметр ТСА здесь обозначен символом « $\wedge$ », поскольку он, вообще говоря, может зависеть от накопленной пластической деформации и отличаться в предельном состоянии от своего начального значения; решение этой системы имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\hat{s}_{rr}}{\hat{\mu}} = -\frac{4}{9} \hat{c} K_1 \hat{\varepsilon}, & K_1 = K_0 K_2, \quad K_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (32/27) \hat{c}^2}} \\ \frac{\sqrt{\hat{J}_2}}{\hat{\mu}} = K_2 \hat{\varepsilon}, & K_2 = \left[K_0 \left(1 - \frac{4}{27} \hat{c}^2 \right) \right]^{-1/3} \end{cases}$$

При $\hat{c} \rightarrow 0$ имеем $K_0 \rightarrow 1$, $K_1 \rightarrow 1$, $K_2 \rightarrow 1$.

Далее ищем приближенное решение уравнений (2.8.15) и (2.8.16) в следующем виде:

$$\hat{B}_{rr}^e \approx 1 + b_1 \hat{\varepsilon} + b_2 \hat{\varepsilon}^2, \quad 1/\hat{B}_{rr}^e \approx 1 - b_1 \hat{\varepsilon} + (b_1^2 - b_2) \hat{\varepsilon}^2, \quad \hat{I}_1 = 3 + i_2 \hat{\varepsilon}^2 \quad (2.8.18)$$

Действуя, как и в предыдущем пункте, находим:

$$b_1 = -\frac{4}{9}\hat{\varepsilon}K_1, \quad b_2 = \frac{1-\hat{\psi}}{2}b_1^2 + \frac{\hat{\psi}}{3}i_2, \quad i_2 = K_2^2.$$

При $\hat{c} \rightarrow 0$ имеем (2.8.18) $\rightarrow$ (2.8.17).

Тогда с точностью до $\hat{\varepsilon}^2$

$$\begin{aligned} \frac{\langle \hat{\sigma}_{zz} \rangle}{\hat{\mu}} &\approx -\frac{3}{4}b_1\hat{\varepsilon} - \frac{3}{8}(4i_2 - 3b_1^2)\hat{\varepsilon}^2 = \frac{1}{3}\hat{c}K_0K_2\hat{\varepsilon} - \frac{3}{2}K_2^2 \left[1 - \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\hat{c}K_0 \right)^2 \right] \hat{\varepsilon}^2 \\ \frac{\hat{M}}{(2/3)\pi R_1^3 \hat{\mu}} &\approx \frac{\hat{\varepsilon}}{2} \sqrt{4i_2 - 3b_1^2} - \hat{\varepsilon}^2 b_1 \frac{(i_2 - b_1^2)(3\hat{\psi} - 1)}{2\sqrt{4i_2 - 3b_1^2}} = \\ &= \hat{\varepsilon}K_2 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\hat{c}K_0 \right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}(3\hat{\psi} - 1)\hat{\varepsilon}^2 K_2^2 \frac{\left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\hat{c}K_0 \right)^2 \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\hat{c}K_0 \right)^2}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\hat{c}K_0 \right) \end{aligned}$$

На рис. 2.8.2 показаны графики безразмерной функции $\pi R_1^2 \langle \hat{\sigma}_{zz} \rangle d / \hat{M}$, где $d = 2R_1$ есть диаметр образца, определяемой приведенными выше соотношениями для обобщенного неогуковского материала ($\psi = 1$).

Для малой упругой деформации ($\hat{\varepsilon} \ll 1$) имеем следующее

$$2R_1 \frac{\pi R_1^2 \langle \hat{\sigma}_{zz} \rangle}{\hat{M}} = \frac{\hat{F}_z d}{\hat{M}} \approx \hat{c}K_0 \left[1 - \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\hat{c}K_0 \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Правая часть этого уравнения является функцией одного только параметра ТСА $\hat{c}$ или, другими словами, параметра $\hat{\sigma}_{yT} / \hat{\sigma}_{yC}$ (показана на рис. 2.8.2 пунктирной линией).

При умеренном ТСА и небольшой упругой деформации имеем $c \approx \hat{F}_z d / \hat{M}$.

Эффект, связанный с влиянием $\hat{\psi}$ на крутящий момент, проявляется только в сочетании с ТСА, когда $\hat{\sigma}_{yT}$ значительно ниже, чем $\hat{\sigma}_{yC}$.

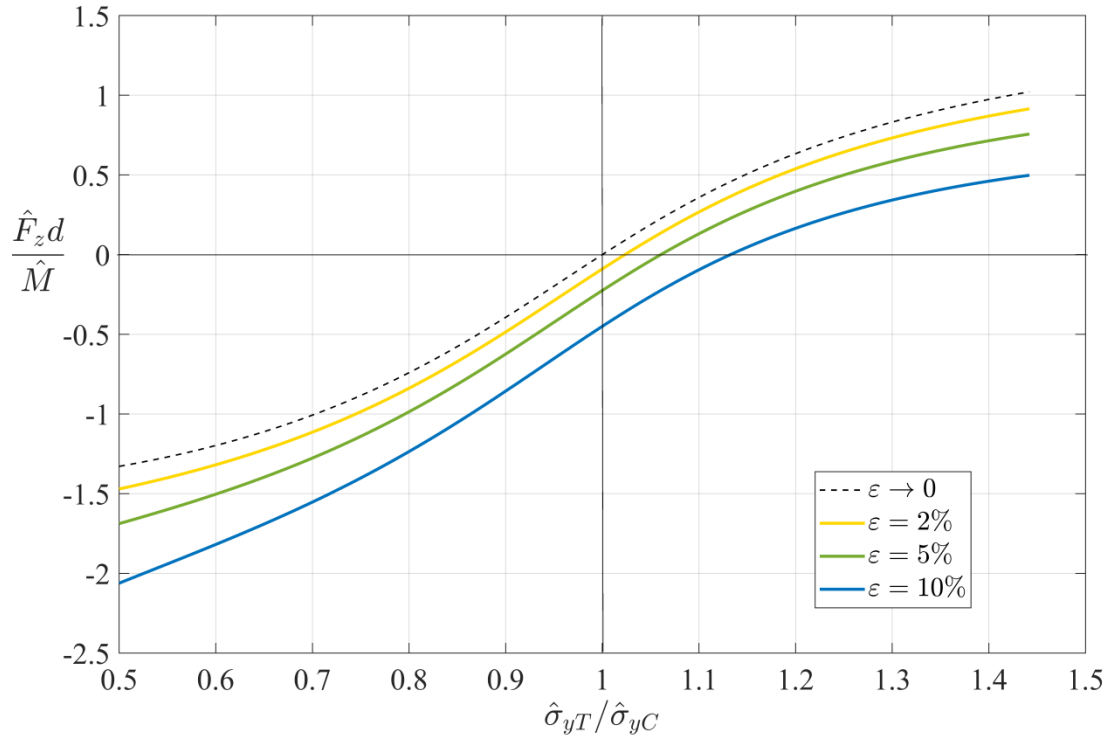


Рисунок 2.8.2 – Совместное влияние ТСА по модели пластичности Казаку – Барлата [73] и упругих свойств материала (параметр $\varepsilon = \tau_y/\mu$) на предельное осевое напряжение при кручении с закрепленными концами

3. Неассоциированная модель пластичности $f = J_2^{3/2} - c_f J_3 - \tau_y^3$ и $g = J_2^{3/2} - c_g J_3$. Имеем $g_2 = (3/2)J_2^{1/2}$, $g_3 = -c_g$ и далее:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\hat{s}_{rr}}{\sqrt{\hat{J}_2}} = -\hat{c}_g \left(\frac{2}{3} - \frac{\hat{s}_{rr}}{\sqrt{\hat{J}_2}} \frac{\hat{s}_{rr}}{\sqrt{\hat{J}_2}} \right) \\ 1 - \hat{c}_f \frac{\hat{s}_{rr}}{\sqrt{\hat{J}_2}} \left(\frac{\hat{s}_{rr}}{\sqrt{\hat{J}_2}} \frac{\hat{s}_{rr}}{\sqrt{\hat{J}_2}} - 1 \right) = \left(\frac{\hat{\tau}_y}{\sqrt{\hat{J}_2}} \right)^3 \end{cases}$$

параметр $\hat{c}_g$ имеет тот же знак, что и $\hat{J}_3$, и противоположен по знаку $\hat{s}_{rr}$; решение этой системы есть

$$\begin{cases} \frac{\hat{s}_{rr}}{\hat{\mu}} = -\frac{4}{9} \hat{c}_g K_1 \hat{\varepsilon}, & K_1 = K_0 K_2, \quad K_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (32/27) \hat{c}_g^2}} \\ \frac{\sqrt{\hat{J}_2}}{\hat{\mu}} = K_2 \hat{\varepsilon}, & K_2 = \left\{ 1 + \frac{\hat{c}_f}{\hat{c}_g} \left[K_0 \left(1 - \frac{4}{27} \hat{c}_g^2 \right) - 1 \right] \right\}^{-1/3} \end{cases}$$

При $\hat{c}_g \rightarrow 0$ имеем $K_1 \rightarrow 1$, $K_2 \rightarrow 1$; при $\hat{c}_f \rightarrow 0$ имеем $K_1 \rightarrow K_0$, $K_2 \rightarrow 1$.

Как и в предыдущем пункте,

$$\hat{B}_{rr}^e \approx 1 + b_1 \hat{\varepsilon} + b_2 \hat{\varepsilon}^2, \quad 1/\hat{B}_{rr}^e \approx 1 - b_1 \hat{\varepsilon} + (b_1^2 - b_2) \hat{\varepsilon}^2, \quad \hat{I}_1 = 3 + i_2 \hat{\varepsilon}^2$$

$$b_1 = -\frac{4}{9} \hat{c}_g K_1, \quad b_2 = \frac{1 - \hat{\psi}}{2} b_1^2 + \frac{\hat{\psi}}{3} i_2, \quad i_2 = K_2^2$$

И с точностью до $\hat{\varepsilon}^2$

$$\langle \hat{\sigma}_{zz} \rangle / \hat{\mu} \approx (\hat{c}_g / 3) K_0 K_2 \hat{\varepsilon} - (3/2) K_2^2 [1 - (4/27) \hat{c}_g^2 K_0^2] \hat{\varepsilon}^2$$

$$\frac{\hat{M}}{(2/3) \pi R_1^3 \hat{\mu}} \approx \hat{\varepsilon} K_2 \sqrt{1 - (4/27) \hat{c}_g^2 K_0^2} + \frac{3\hat{\psi} - 1}{9} \hat{c}_g K_0 K_2^2 \frac{1 - (16/81) \hat{c}_g^2 K_0^2}{\sqrt{1 - (4/27) \hat{c}_g^2 K_0^2}} \hat{\varepsilon}^2$$

Интересно отметить, что линейный по $\hat{\varepsilon}$ член сохраняется в выражении для осевого напряжения даже в случае, когда $\hat{c}_f \rightarrow 0$ (т.е. когда материал не проявляет ТСА), но $\hat{c}_g \neq 0$. Таким образом, эффект Свифта в случае неассоциированных моделей пластичности определяется в основном не условием текучести, а пластическим потенциалом (а именно, видом зависимости пластического потенциала от J_3).

В то же время отметим, что наличие инварианта J_3 в пластическом потенциале не гарантирует, что система дифференциальных уравнений (2.8.8) имеет стационарную точку, отличную от той, что получена для модели Мизеса (которая характеризуется равенством $\hat{s}_{rr} = 0$). Следующий пример иллюстрирует это.

4. Модель пластичности Друкера [237] $f = g = J_2^3 - c J_3^2 - \tau_y^6$,

$c \in [-27/8, 9/4]$. Имеем $g_3 = -2c J_3$ и $g_2 = 3J_2^2$. Если $\hat{J}_3 \neq 0$, то

$$-\frac{3\hat{J}_2^2}{2\hat{c}\hat{J}_3} = -\frac{3\hat{J}_2^2}{2\hat{c}\hat{s}_{rr}(\hat{s}_{rr}^2 - \hat{J}_2)} = \hat{s}_{rr} \left(\frac{2}{3} \frac{\hat{J}_2}{\hat{s}_{rr}^2} - 1 \right)$$

следовательно

$$\hat{c} \left(\frac{\hat{s}_{rr}^2}{\hat{J}_2} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\hat{s}_{rr}^2}{\hat{J}_2} - 1 \right) = \frac{3}{2} \text{ и, } \frac{\hat{s}_{rr}^2}{\hat{J}_2} = \frac{5}{6} \pm \frac{1}{6} \sqrt{1 + \frac{54}{\hat{c}}}$$

Знак «+» в этом решении выбран исходя из условия $\hat{s}_{rr}^2/\hat{J}_2 > 0$. Решение является сингулярным при $\hat{c} \rightarrow 0$, поэтому оно не переходит в решение $\hat{s}_{rr} = 0$ для модели Мизеса. И оно не существует при $\hat{c} \in [-27/8, 0]$. Далее, даже если $\hat{c} \in (0, 9/4]$, то подстановка этого решения в условие текучести $J_2^3 - cJ_3^2 = \tau_y^6$ с учётом $J_3 = s_{rr}(s_{rr}^2 - J_2)$ приводит к уравнению

$$1 - \frac{\hat{c}}{6^3} \left(\sqrt{1 + \frac{54}{\hat{c}}} + 5 \right) \left(\sqrt{1 + \frac{54}{\hat{c}}} - 1 \right)^2 = \frac{\hat{\tau}_y^6}{\hat{J}_2^3},$$

которое не может быть удовлетворено, поскольку его левая часть, очевидно, отрицательна.

Таким образом, для модели Друкера не существует стационарного решения, которое отличалось бы от решения, полученного для модели Мизеса. Обе эти модели приводят к одному и тому же предельному напряженному состоянию. Это можно проверить прямым численным интегрированием уравнений (2.8.8). На рис. 2.8.3 показано численное решение (2.8.8) для следующих моделей.

(А): Неассоциированная модель пластичности с условием текучести Мизеса и пластическим потенциалом Казаку – Барлата⁷ [73] в сочетании с неогуковским законом упругости $\Psi = (\mu/2)(I_1 - 3)$, то есть $\psi = 1$ (гиперупруго-пластическая модель А1), или с законом упругости $\Psi = (\mu/2)(I_2 - 3)$, то есть $\psi = -1$ (частный случай гиперупругой модели Огдена, см. [238]) (гиперупруго-пластическая модель А2). Это своего рода предельные случаи общего гиперупругого закона (2.8.5).

(В): Неассоциированная модель пластичности с условием текучести Мизеса и пластическим потенциалом Друкера [237] в сочетании с вышеупо-

⁷ Эти примеры носят исключительно иллюстративный характер и не имеют конкретного применения, но позволяют оценить, насколько быстро решение системы (2.8.8) приближается к предельным соотношениям. Условие текучести Мизеса использовано для удобства, поскольку в этом случае все компоненты упругой деформации могут быть явно выражены через B_{rr}^e и B_{zz}^e , и встроенная процедура NDSolve в Wolfram Mathematica может быть использована для численных расчётов без необходимости использования вложенных итерационных процедур.

мянутыми гиперупругими моделями (соответственно, гиперупруго-пластические модели В1 и В2).

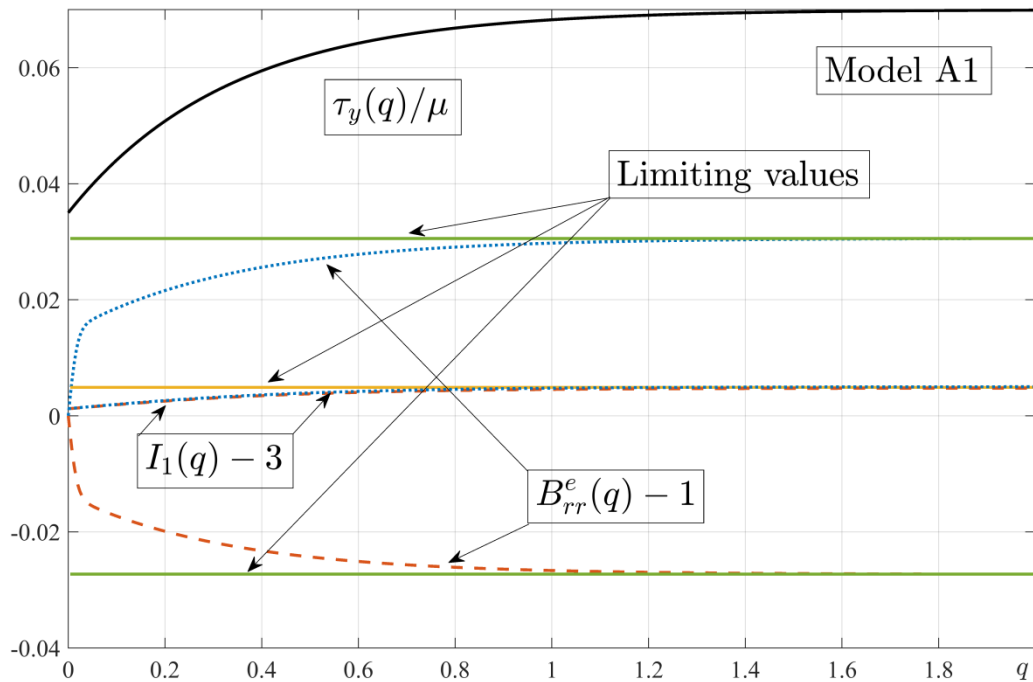
Все упомянутые выше модели используют закон Воге для описания изотропного упрочнения с насыщением предела текучести:

$$\tau_y = \hat{\tau}_y + (\tau_{y0} - \hat{\tau}_y) e^{-hq}$$

с параметрами $\tau_{y0}/\mu = 0.035$, $\hat{\tau}_y/\mu = 0.070$, $h = 3$.

Коэффициенты c в пластических потенциалах [73] и [237] принимаются равными ± 1.25 .

Численные результаты быстро сходятся к предельным значениям, которые несколько отличаются от приближенных формул. Эти различия обусловлены тем, что в приближенных формулах отбрасываются члены более высокого порядка, чем $\hat{\varepsilon}^2$. Как и ожидалось, модели В1 и В2 демонстрируют то же предельное состояние, что и модель Мизеса.



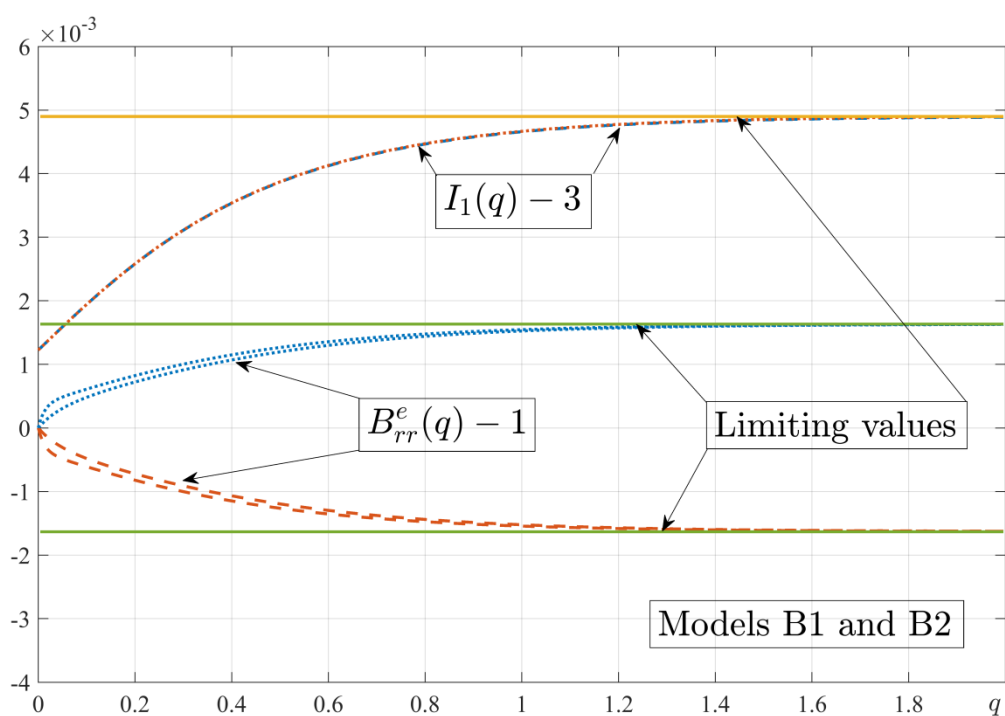
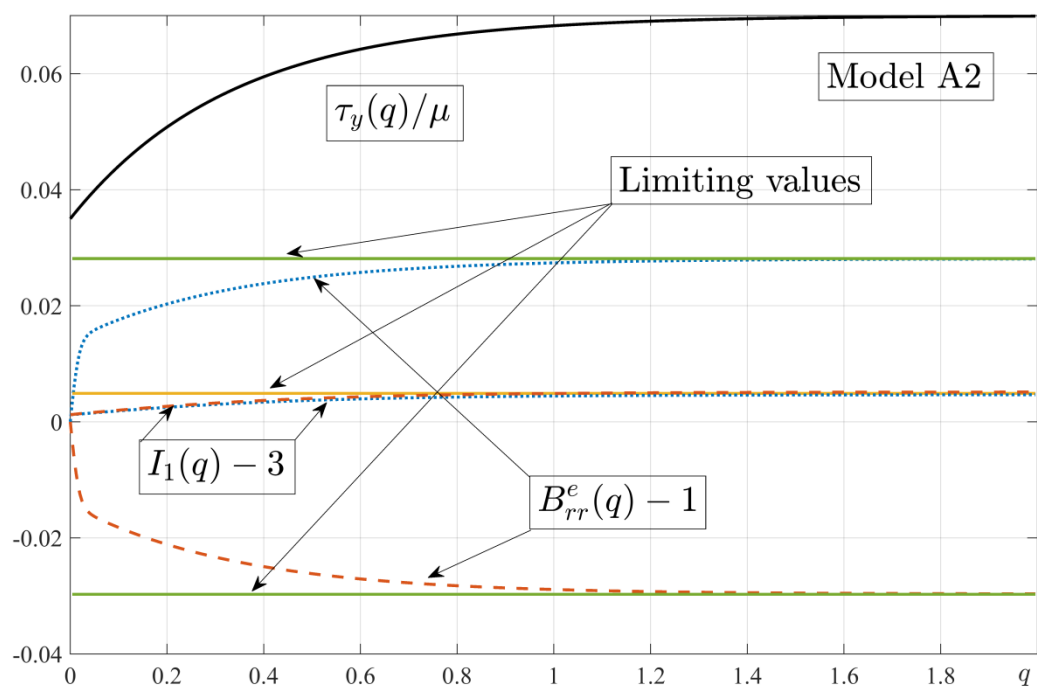


Рисунок 2.8.3 – Сравнение численного решения системы (2.8.8) с предельными значениями. Синие линии соответствуют $s = -1.25$, красные линии соответствуют $s = +1.25$. Чёрные сплошные линии показывают упрочнение по BoSe

Выводы к разделу 2.8. Система алгебраических уравнений, представленная в таблице выше, описывает предельное значение эффекта Свифта для произвольного несжимаемого гиперупруго-пластического материала с упругим потенциалом $\Psi(I_1, I_2)$ и пластической моделью, зависящей от инвариантов девиатора J_2 и J_3 . Рассмотрены случаи модели пластичности Мизеса, Друкера и Казаку – Барлата, что позволило сделать качественные и количественные выводы о поведении материалов. Эти выводы могут быть полезны для определения параметров законов пластичности. В случае модели пластичности Мизеса эффект Свифта в первую очередь связан с нелинейными упругими эффектами. Напротив, в модели Казаку – Барлата влияние асимметрии растяжения – сжатия и нелинейных упругих эффектов комплексное. Для материалов, способных выдерживать большие упругие деформации, знак осевого напряжения может не совпадать со знаком параметра модели, контролирующего ТСА.

ГЛАВА 3. ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ И ВЯЗКОУПРУГОЙ РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

3.1. Релаксация напряжений в нелинейно вязкоупругом закрученном круговом стержне

Кручение является широко распространенным методом механических испытаний и, в частности, служит для идентификации параметров уравнений ползучести различных материалов, в том числе способных выдерживать большие деформации [239]. Сочетание испытаний на кручение образцов с однородной и неоднородной деформацией (например, сплошной цилиндр и тонкостенная труба) дает более устойчивые результаты определения параметров материала, чем каждое из них по отдельности [208], поэтому кручение стержня также можно использовать в синтетических тестах.

Известно решение [240] для кручения круглых стержней в режиме ползучести. Это решение геометрически линейно, в нем используется допущение, что упругая деформация мала, линейно связана с напряжением, а общая деформация представляет собой сумму упругой и неупругой деформации. Аналитические решения получены в [240] для законов ползучести Нортона – Бейли, Прандтля – Гарофало и Науменко – Альтенбаха – Гораша [241]. Однако биоматериалы, равно как и полимеры, проявляют ползучесть при нормальных температурах, а законы упругости таких материалов сильно нелинейны и часто включают нелинейную реакцию на сдвиг [242–245]. Более того, многие из таких материалов способны выдерживать упругую деформацию в сотни процентов [246, 247]. В этом случае использование аддитивного разделения деформации на упругую и неупругую части может быть не лучшим выбором.

В данном разделе рассмотрена задача о релаксации напряжений в скрученном нелинейно-упругом стержне при конечных деформациях. Приведены общие решения этой задачи в том смысле, что исходная задача сводится к вычислению интегралов и обращению функций. В отличие от [240], из-за

геометрической нелинейности задачи получить явное решение удастся только в некоторых простых случаях (в частности, для материала Муни – Ривлина с линейной моделью ползучести). Тем не менее полученные результаты позволяют с малыми вычислительными затратами рассчитать релаксацию крутящего момента, а также осевую силу (эффекты второго порядка) для широкого класса несжимаемых материалов, описываемых законом ползучести общего вида и гиперупругим потенциалом. Это может иметь приложение в контексте использования алгоритмов оптимизации для определения параметров материалов в законах ползучести, так как при использовании этих алгоритмов необходимо многократно вычислять невязку между реальным (наблюдаемым в эксперименте) и расчетным откликом материала [239, 248].

3.1.1. Определяющие соотношения. Используется кинематика конечных деформаций, изложенная в главе 1, в частности, уравнение

$$D_{CR}(\mathbf{c}^e) \equiv \dot{\mathbf{c}}^e + \mathbf{I}^T \mathbf{c}^e + \mathbf{c}^e \mathbf{I} = 2\mathbf{c}^e \mathbf{D}^c = 2\mathbf{D}^c \mathbf{c}^e \quad (3.1.1)$$

Примем следующие гиперупругие соотношения для несжимаемых материалов

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} - 2\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} \mathbf{c}^e = -p\mathbf{I} - 2\left(\psi_1 + \psi_2 I_1^{\mathbf{c}^e}\right) \mathbf{c}^e + 2\psi_2 \left(\mathbf{c}^e\right)^2, \quad (3.1.2)$$

$$\Psi = \Psi\left(I_1^{\mathbf{c}^e}, I_2^{\mathbf{c}^e}\right), \quad \psi_1\left(I_1^{\mathbf{c}^e}, I_2^{\mathbf{c}^e}\right) = \partial \Psi / \partial I_1^{\mathbf{c}^e}, \quad \psi_2\left(I_1^{\mathbf{c}^e}, I_2^{\mathbf{c}^e}\right) = \partial \Psi / \partial I_2^{\mathbf{c}^e}$$

Скорость деформации ползучести задается выражением

$$\mathbf{D}^c = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.1.3)$$

где $\Phi = D_0 \sigma_0 T(\tilde{t}) \int_0^{\tilde{\sigma}_{eq}} F(\xi) d\xi$ есть изотропный потенциал ползучести, $\tilde{t} = t/t_0$, $\tilde{\sigma}_{eq} = \sigma_{eq}/\sigma_0$. Мы ограничиваемся только классическими потенциалами ползучести, которые есть функции только эффективного напряжения σ_{eq} [249]. Безразмерная функция $T(\tilde{t})$ описывает упрочнение или разупроч-

нение со временем; функция F также безразмерная. Параметры σ_0 и t_0 имеют размерность напряжения и времени соответственно, множитель D_0 имеет размерность c^{-1} (D_0 может зависеть от температуры материала, но следует иметь в виду, что для всех результатов ниже полагается, что D_0 , равно как и остальные параметры материала в определяющих соотношениях (3.1.2), (3.1.3), не зависят от времени и пространственных координат).

Следует отметить, что эволюционное уравнение для $\mathbf{c}^e$, подобное (3.1.1), использовалось в работе [16] для вязкоупругой среды.

3.1.2. Формулировка проблемы. Круговой цилиндр радиуса R_1 и длины L предварительно закручен на угол скрутки Θ (рис. 3.1.1). Введем безразмерные переменные $\gamma = \Theta R_1 / L$ (поверхностная деформация сдвига) и безразмерный радиус $\tilde{r} = r / R_1$. С момента времени $t = 0$ начинается релаксация напряжений в цилиндре, вызванная ростом деформации ползучести, в то время как γ не меняется (мы рассматриваем случай цилиндра с закрепленными от осевого смещения торцами, так что длина и диаметр цилиндра не меняются). Тогда в актуальном цилиндрическом базисе перемещение точек материала относительно недеформированного состояния есть $\mathbf{u} = r[1 - \cos(\Theta z / L)]\mathbf{e}_r + r \sin(\Theta z / L)\mathbf{e}_\varphi$. Боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений, $\sigma_{rr}|_{r=R_1} = 0$. Главная цель – найти эволюцию крутящего момента $M = 2\pi \int_0^{R_1} r^2 \sigma_{\varphi z} dr$ и сжимающей осевой силы $Q = -2\pi \int_0^{R_1} r \sigma_{zz} dr$ при релаксации напряжений.

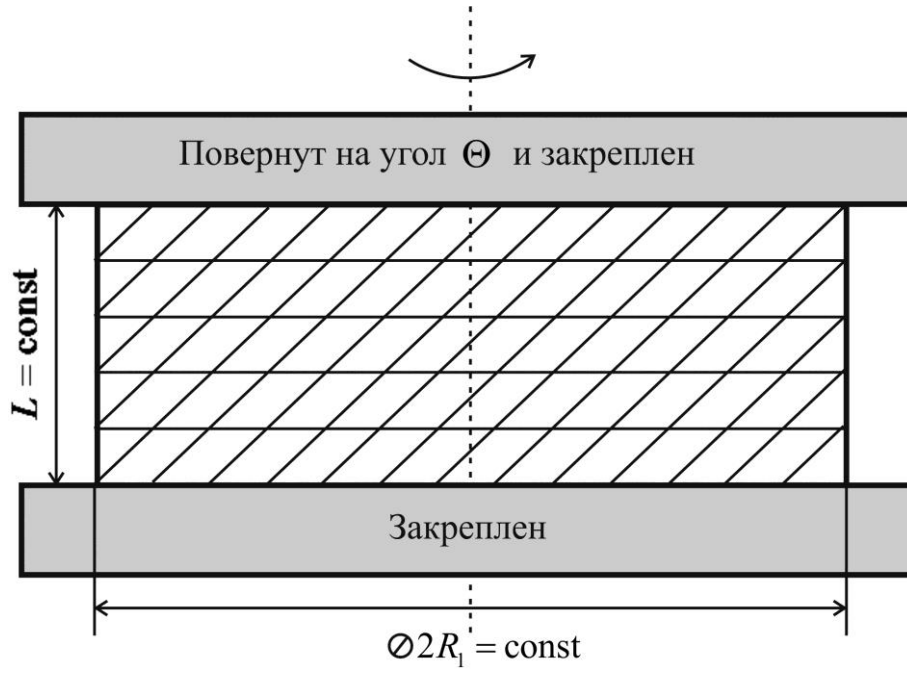


Рисунок 3.1.1 – Схема кручения с закреплёнными торцами (линии сетки воспроизводят деформированные материальные направления)

Предварительная упругая деформация описывается универсальным решением Ривлина [191]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -p - 2\psi_1 c_{rr}^e - 2\psi_2 c_{rr}^e (c_{\varphi\varphi}^e + c_{zz}^e) \\
 \sigma_{zz} &= -p - 2\psi_1 c_{zz}^e + 2\psi_2 \left[(c_{\varphi z}^e)^2 - (c_{rr}^e + c_{\varphi\varphi}^e) c_{zz}^e \right] \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= -p - 2\psi_1 c_{\varphi\varphi}^e + 2\psi_2 \left[(c_{\varphi z}^e)^2 - (c_{rr}^e + c_{zz}^e) c_{\varphi\varphi}^e \right] \\
 \sigma_{\varphi z} &= -2c_{\varphi z}^e (\psi_1 + \psi_2 c_{rr}^e)
 \end{aligned}
 \tag{3.1.4}$$

где

$$c_{rr}^e = c_{rr} = 1, \quad c_{\varphi\varphi}^e = c_{\varphi\varphi} = 1, \quad c_{zz}^e = c_{zz} = 1 + (\gamma \tilde{r})^2, \quad c_{\varphi z}^e = c_{\varphi z} = -\gamma \tilde{r},
 \tag{3.1.5}$$

а функция p определяется интегрированием уравнения равновесия $\tilde{r} \partial \sigma_{rr} / \partial \tilde{r} = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$ с граничным условием $\sigma_{rr}|_{\tilde{r}=1} = 0$.

При деформации ползучести компоненты тензора упругой деформации меняются в соответствии с эволюционным уравнением (3.1.1), при этом

уравнения (3.1.5) дают начальные значения для компонент этого тензора; уравнения (3.1.4) также выполняются. В силу несжимаемости материала выполняется равенство $\det \mathbf{c}^e = 1$, следовательно $c_{\varphi z}^e = -\sqrt{c_{\varphi\varphi}^e c_{zz}^e - 1/c_{rr}^e}$. Введем новые переменные $\Sigma = (c_{zz}^e + c_{\varphi\varphi}^e)/2$, $\Delta = (c_{zz}^e - c_{\varphi\varphi}^e)/2 > 0$ с начальными значениями

$$\Delta|_{t=0} = (\gamma\tilde{r})^2/2, \quad \Sigma|_{t=0} = 1 + (\gamma\tilde{r})^2/2. \quad (3.1.6)$$

Тогда

$$c_{\varphi z}^e = -\sqrt{\Sigma^2 - \Delta^2 - 1/c_{rr}^e} \quad (3.1.7)$$

и (3.1.4) может быть переписано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p - 2c_{rr}^e (\psi_1 + 2\psi_2 \Sigma) \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p - 2(\Sigma - \Delta)(\psi_1 + \psi_2 c_{rr}^e) - 2\psi_2/c_{rr}^e \\ \sigma_{zz} &= -p - 2(\Sigma + \Delta)(\psi_1 + \psi_2 c_{rr}^e) - 2\psi_2/c_{rr}^e \\ \sigma_{\varphi z} &= 2(\psi_1 + \psi_2 c_{rr}^e) \sqrt{\Sigma^2 - \Delta^2 - 1/c_{rr}^e} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Крутящий момент может быть выражен как

$$M = 4\pi R_1^3 \int_0^1 \sqrt{\Sigma^2 - \Delta^2 - 1/c_{rr}^e} (\psi_1 + \psi_2 c_{rr}^e) \tilde{r}^2 d\tilde{r} \quad (3.1.9)$$

Для расчета осевой силы мы преобразуем интеграл выше, используя (3.1.8):

$$\begin{aligned} \int \sigma_{zz} \tilde{r} d\tilde{r} &= \int \sigma_{rr} \tilde{r} d\tilde{r} + \int (i_2 - i_1) \tilde{r} d\tilde{r}, \\ i_1 &= 2(\psi_2 c_{rr}^e + \psi_1) \Delta, \quad i_2 = 2(\psi_2 c_{rr}^e - \psi_1) \Sigma - 2(\psi_2/c_{rr}^e - \psi_1 c_{rr}^e) \end{aligned}$$

Далее, применяя интегрирование по частям для первого интеграла в правой части выражения выше и используя уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \tilde{r}} = -\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\tilde{r}} = \frac{i_1 + i_2}{\tilde{r}},$$

найдем

$$\int \sigma_{zz} \tilde{r} d\tilde{r} = \frac{1}{2} \tilde{r}^2 \sigma_{rr} - \frac{1}{2} \int (3i_1 - i_2) \tilde{r} d\tilde{r}$$

Учитывая, что $\sigma_{rr}|_{\tilde{r}=1} = 0$, осевая сила может быть предствалена в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q &= -2\pi R_1^2 \int_0^1 \sigma_{zz} \tilde{r} d\tilde{r} = -2\pi R_1^2 \underbrace{\left[\sigma_{rr} \tilde{r}^2 / 2 \right]_0^1}_0 + \pi R_1^2 \int_0^1 (3i_1 - i_2) \tilde{r} d\tilde{r} = \\ &= \pi R_1^2 \int_0^1 (3i_1 - i_2) \tilde{r} d\tilde{r} \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Для несжимаемых нелинейно-упругих материалов в общем случае ψ_1 и ψ_2 есть функции первого и второго инвариантов тензора упругой деформации; для рассматриваемой деформации кручения $I_1^e = 2\Sigma + c_{rr}^e$ и $I_2^e = 2\Sigma c_{rr}^e + 1/c_{rr}^e$. Тогда необходимо найти Σ , Δ и c_{rr}^e как функции времени и радиальной координаты.

Здесь представлены результаты для двух вариантов определяющих уравнений ползучести. Первый основан на эквивалентном напряжении Треска $\sigma_{eq} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, где σ_1 и σ_3 есть наибольшее и наименьшее собственные значения тензора напряжений; второй основан на эквивалентном напряжении Мизеса $\sigma_{eq} = \sqrt{J_2}$, где J_2 второй инвариант девиатора напряжений. При использовании эквивалентного напряжения Треска система уравнений очень упрощается. Это вызвано тем, что радиальная компонента упругой деформации не меняется при релаксации напряжений.

3.1.3. Решение для уравнений ползучести, основанных на эквивалентном напряжении Треска. Полагаем, что в цилиндрическом базисе ра-

диальное напряжение есть промежуточное главное, $\sigma_2 = \sigma_{rr}$. Чуть позже мы обсудим, какие ограничения накладывает это предположение на упругий потенциал Ψ . Тогда из уравнения ползучести (3.1.3) с $\sigma_{eq} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ следует, что компонента D_{rr}^c нулевая и $D_{zz}^c = -D_{\varphi\varphi}^c$. Учитывая, что при релаксации напряжений в полностью закрепленном от перемещений стержне выполнено $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, производная Коттер – Ривлина в уравнении (3.1.1) становится просто частной производной по времени, а само уравнение (3.1.1), описывающее эволюцию тензора упругих деформаций, принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{c}^e}{\partial t} = 2\mathbf{D}^c \mathbf{c}^e$$

или, покомпонентно:

$$\frac{\partial c_{rr}^e}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial c_{\varphi\varphi}^e}{\partial t} = 2(D_{\varphi z}^c c_{\varphi z}^e + D_{\varphi\varphi}^c c_{\varphi\varphi}^e), \quad \frac{\partial c_{zz}^e}{\partial t} = 2(D_{\varphi z}^c c_{\varphi z}^e - D_{\varphi\varphi}^c c_{zz}^e). \quad (3.1.11)$$

Тогда радиальная компонента тензора упругой деформации не меняется, $c_{rr}^e = 1$.

Собственные значения тензора напряжений удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3} - \sigma_2 &= (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})/2 - \sigma_{rr} \pm \sqrt{[(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})/2]^2 + \sigma_{\varphi z}^2} = \\ &= 2(\psi_2 - \psi_1)(\Sigma - 1) \pm 2\sqrt{\Sigma^2 - 1}|\psi_2 + \psi_1| \end{aligned}$$

Таким образом, для того чтобы радиальное напряжение было промежуточным главным напряжением, достаточно выполнения двух неравенств:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2(\psi_2 - \psi_1)(\Sigma - 1) + 2\sqrt{\Sigma^2 - 1}|\psi_2 + \psi_1| > 0,$$

$$\sigma_3 - \sigma_2 = 2(\psi_2 - \psi_1)(\Sigma - 1) - 2\sqrt{\Sigma^2 - 1}|\psi_2 + \psi_1| < 0$$

Эти неравенства всегда выполняются, если выполняются следующие ограничения:

$$\Sigma > 1, \frac{\partial \Psi}{\partial I_1^e} \geq 0, \frac{\partial \Psi}{\partial I_2^e} > 0.$$

А последние есть хорошо известные Е-неравенства [250].

Возвращаясь к закону ползучести (3.1.3), определим ненулевые компоненты $\mathbf{D}^c$:

$$D_{\varphi z}^c = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\sigma_{\varphi z}}{2\sigma_{eq}} \text{ и } D_{\varphi\varphi}^c = -D_{zz}^c = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{1}{2\sigma_{eq}} \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}}{2} \quad (3.1.12)$$

где

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sigma_{\varphi z} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}}{2\sigma_{\varphi z}} \right)^2} \quad (3.1.13)$$

Согласно (3.1.8) касательное напряжение равно

$$\sigma_{\varphi z} = 2(\psi_1 + \psi_2) \sqrt{\Sigma^2 - 1 - \Delta^2}, \quad (3.1.14)$$

разность $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}$ есть

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} = 4(\psi_1 + \psi_2) \Delta,$$

и тогда имеет место следующее равенство:

$$\frac{D_{\varphi z}^c}{D_{\varphi\varphi}^c} = \frac{2\sigma_{\varphi z}}{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}} = \frac{\sqrt{\Sigma^2 - 1 - \Delta^2}}{\Delta}. \quad (3.1.15)$$

Из (3.1.11) имеем

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -2D_{\varphi\varphi}^c \Sigma \quad (3.1.16)$$

и с учетом (3.1.7), (3.1.15)

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -2D_{\varphi z}^c \sqrt{\Sigma^2 - 1 - \Delta^2} - 2D_{\varphi\varphi}^c \Delta = -2D_{\varphi\varphi}^c \frac{\Sigma^2 - 1}{\Delta} \quad (3.1.17)$$

Исключая $D_{\varphi\varphi}^c$ из уравнений (3.1.16) и (3.1.17), имеем

$$\frac{\Sigma}{\Sigma^2 - 1} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial t}.$$

Интегрируя это уравнение по времени t с начальными условиями (3.1.6), получим $\ln(\Sigma^2 - 1) = 2 \ln \Delta - \ln \left[(\gamma \tilde{r}/2)^2 \left(1 + (\gamma \tilde{r}/2)^2 \right)^{-1} \right]$, или

$$\Delta^2 = \frac{(\gamma \tilde{r}/2)^2}{1 + (\gamma \tilde{r}/2)^2} (\Sigma^2 - 1). \quad (3.1.18)$$

Компонента $D_{\varphi\varphi}^c$ тензора скорости деформации ползучести, фигурирующая в (3.1.16), исключается по (3.1.12) с учетом (3.1.13) и (3.1.15):

$$D_{\varphi\varphi}^c = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{\Sigma^2 - 1}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}}.$$

Теперь (3.1.16) может быть записано как

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\sqrt{\Sigma^2 - 1} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}}$$

или

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} = -\sqrt{\Sigma^2 - 1} \tilde{\mu}^{-1} F(\tilde{\sigma}_{eq}), \quad \tau = D_0 t_0 \tilde{\mu} \int_0^{\tilde{t}} T(\zeta) d\zeta \quad (3.1.19)$$

Здесь введен безразмерный параметр масштаба времени τ , который будет использоваться везде ниже вместо физического времени t ; $\tilde{t} = t/t_0$, $\tilde{\sigma}_{eq} = \sigma_{eq}/\sigma_0$, $\tilde{\mu} = \mu/\sigma_0$, $\mu = \text{const}$ есть модуль сдвига материала в недеформированном состоянии.

Эквивалентное напряжение (3.1.13) может быть выражено с учетом (3.1.14), (3.1.15) и (3.1.18) как

$$\tilde{\sigma}_{eq} = \frac{\sigma_{\varphi z}}{\sigma_0} \sqrt{\frac{\Sigma^2 - 1}{\Sigma^2 - 1 - \Delta^2}} = \frac{\sigma_{\varphi z}}{\mu} \tilde{\mu} \sqrt{1 + (\gamma \tilde{r}/2)^2} = 2(\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2) \tilde{\mu} \sqrt{\Sigma^2 - 1}, \quad (3.1.20)$$

$$\tilde{\psi}_1 = \psi_1 / \mu, \quad \tilde{\psi}_2 = \psi_2 / \mu$$

Учитывая, что $\psi_1 = \psi_1(I_1^e, I_2^e)$, $\psi_2 = \psi_2(I_1^e, I_2^e)$ и равенства $I_1^e = I_2^e = 1 + 2\Sigma$ выполняются для рассматриваемого паттерна деформации, эквивалентное напряжение является функцией только переменной Σ , и уравнение (3.1.19) есть обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными с начальным условием (3.1.6). Крутящий момент и осевая сила как функции времени могут быть выражены в явном виде только в редких частных случаях, например для линейной ползучести. Однако в общем случае несложно численно проинтегрировать (3.1.19) совместно с (3.1.20), а затем вычислить интегралы в (3.1.9), (3.1.10) с учетом (3.1.18).

Приближение малых деформаций. В приближении малых деформаций $2(\psi_1 + \psi_2) = \mu = \text{const}$. Далее, пусть $\Sigma = 1 + \varepsilon^2/2$, $0 \leq \varepsilon \leq \gamma\tilde{r} \ll 1$, тогда $\sqrt{\Sigma^2 - 1} \approx \varepsilon$, и согласно (3.1.20) $\tilde{\sigma}_{eq} \approx \tilde{\mu}\varepsilon$. В этом случае

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} \approx \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \approx \tilde{\mu}^{-2} \tilde{\sigma}_{eq} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tau},$$

а с другой стороны, согласно (3.1.19) и (3.1.20)

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} = -\tilde{\mu}^{-2} \tilde{\sigma}_{eq} F(\tilde{\sigma}_{eq}),$$

следовательно

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tau} = -F(\tilde{\sigma}_{eq}), \quad \int_{\tilde{\sigma}_{eq}}^{\tilde{\mu}\gamma\tilde{r}} \frac{d\xi}{F(\xi)} = \tau.$$

Поскольку в приближении малых деформаций $\sigma_{\varphi z} \approx \sigma_{eq}$ по (3.1.20), то крутящий момент равен $M = 2\pi R_1^3 \int_0^1 \sigma_{eq} \tilde{r}^2 d\tilde{r}$. Теперь, если мы рассмотрим потенциал Φ с $T(\tilde{t}) = \tilde{t}^{k-1}$, $F(\tilde{\sigma}_{eq}) = \tilde{\sigma}_{eq}^{m+1}$ что соответствует закону ползучести Нортона – Бейли, можем получить решение Кобелева

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{eq} &= \tilde{\mu}\gamma(\tilde{r}^{-m} + \beta)^{-1/m}, \quad \beta = \tau m(\tilde{\mu}\gamma)^m, \quad \tau = D_0 \tilde{\mu} t_0 k^{-1} \tilde{t}^k \\ \frac{M}{M_0} &= 4 \int_0^1 \xi^2 (\xi^{-m} + \beta)^{-1/m} d\xi = {}_2F_1\left(\frac{1}{m}, \frac{4}{m}; 1 + \frac{4}{m}, -\beta\right)\end{aligned}\quad (3.1.21)$$

где положительные k , m есть материальные константы, $M_0 = (\pi/2)\mu\gamma R_1^3$, ${}_2F_1$ гипергеометрическая функция.

Решение в замкнутой форме для материала Муни – Ривлина с линейной ползучестью. Решение для линейной ползучести является в основном иллюстративным примером; однако такая модель может применяться, если информации о поведении материала недостаточно [251]. Кроме того, это решение может быть использовано для обобщенных вязкоупругих материалов Максвелла.

Рассмотрим модель материала, включающую линейный закон ползучести $F(\tilde{\sigma}_{eq}) = \tilde{\sigma}_{eq}$ и гиперупругий потенциал Муни – Ривлина $\Psi = C_1(I_1^{\mathbf{B}^e} - 3) + C_2(I_2^{\mathbf{B}^e} - 3) = C_1(I_2^{\mathbf{c}^e} - 3) + C_2(I_1^{\mathbf{c}^e} - 3)$, с $\psi_1 = C_2$, $\psi_2 = C_1$ и $2(\psi_1 + \psi_2) = \mu = \text{const}$. Следует отметить, что для несжимаемого материала инварианты тензора $\mathbf{c}^e = (\mathbf{B}^e)^{-1}$ связаны с инвариантами $\mathbf{B}^e$ как $I_2^{\mathbf{c}^e} = I_1^{\mathbf{B}^e}$, $I_1^{\mathbf{c}^e} = I_2^{\mathbf{B}^e}$ [192]. Тогда (3.1.19) принимает вид

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} = 1 - \Sigma^2$$

и его решение, удовлетворяющее начальному условию (3.1.6), есть

$$\Sigma = \coth\left(\tau + \text{acoth}\left[1 + (\gamma\tilde{r})^2/2\right]\right) = \frac{\left[1 + (\gamma\tilde{r})^2/2\right] \cosh \tau + \sinh \tau}{\left[1 + (\gamma\tilde{r})^2/2\right] \sinh \tau + \cosh \tau}.$$

Тогда согласно (3.1.9) крутящий момент равен

$$\begin{aligned}\frac{M}{M_0} &= \frac{4}{\gamma} \int_0^1 \sqrt{\frac{\Sigma^2 - 1}{1 + (\gamma \tilde{r}/2)^2}} \tilde{r}^2 d\tilde{r} = \frac{8}{\gamma^4} \int_0^\gamma \frac{\xi^3 d\xi}{2e^\tau + \xi^2 \sinh \tau} \\ &= \frac{8}{\gamma^2} \frac{e^{-\tau}}{1 - e^{-2\tau}} \left\{ 1 - \frac{4}{\gamma^2 (1 - e^{-2\tau})} \ln \left[1 + \frac{\gamma^2 (1 - e^{-2\tau})}{4} \right] \right\}\end{aligned}\quad (3.1.22)$$

Здесь так же $M_0 = (\pi/2)\mu\gamma R_1^3$ есть крутящий момент в момент времени $t = 0$.

Релаксация крутящего момента для различных значений начальной поверхностной деформации сдвига γ показана на рис. 3.1.2. Для сравнения приведен график крутящего момента, соответствующий решению [240] для линейной ползучести, $M = M_0 e^{-\tau}$. Следует отметить, что согласно (3.1.22)

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} (M/M_0) = e^{-\tau}.$$

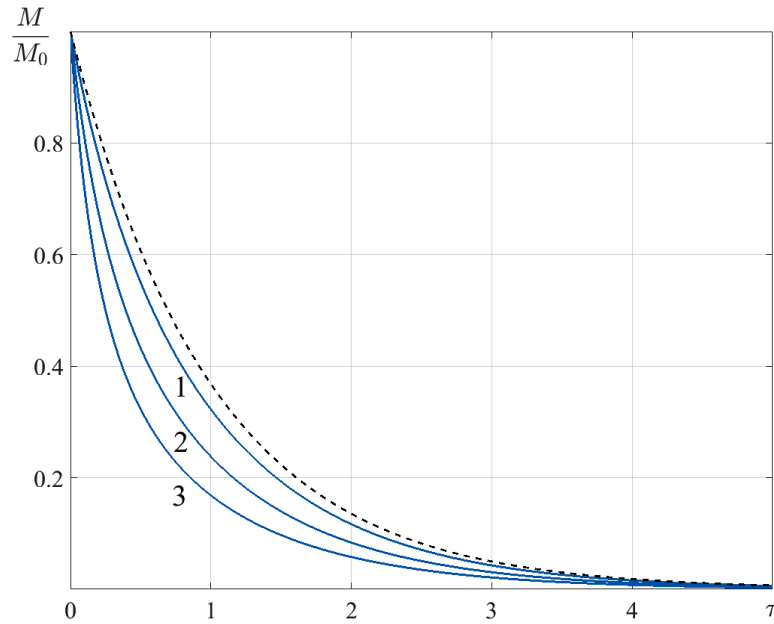


Рисунок 3.1.2 – Релаксация крутящего момента (3.1.22) для линейной ползучести при различных значениях начальной (упругой) поверхностной деформации $\gamma = \Theta R_1/L$: кривые 1, 2, 3 – для $\gamma = 1, 2, 3$ соответственно; штриховая линия соответствует решению в малых деформациях (3.1.21) [240]

Для осевой силы (3.1.10) с учетом того, что $(\Sigma + 1)(\Sigma - 1)^{-1} = \left(1 + (\gamma \tilde{r}/2)^{-2}\right) e^{2\tau}$, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{Q}{Q_0} &= \frac{4}{\gamma^2(3-\tilde{C})} \int_0^1 \left[3\gamma\tilde{r} \sqrt{\frac{\Sigma^2-1}{1+(\gamma\tilde{r}/2)^2}} - 2\tilde{C}(\Sigma-1) \right] \tilde{r} d\tilde{r} \\
&= \frac{4}{\gamma(3-\tilde{C})} \int_0^1 \sqrt{\frac{\Sigma^2-1}{1+(\gamma\tilde{r}/2)^2}} (3-\tilde{C}e^{-\tau}) \tilde{r}^2 d\tilde{r} = \frac{M}{M_0} \frac{3-\tilde{C}e^{-\tau}}{3-\tilde{C}}
\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Здесь $Q_0 = (\pi/8)R_1^2\gamma^2(3-\tilde{C})\mu$ осевая сила в момент времени $t=0$, $\tilde{C} = 2(C_1 - C_2)\mu^{-1}$. Релаксация осевой силы в материале Муни – Ривлина происходит медленнее, чем релаксация крутящего момента, если $C_1 > C_2$ (см. рис. 3.1.3).

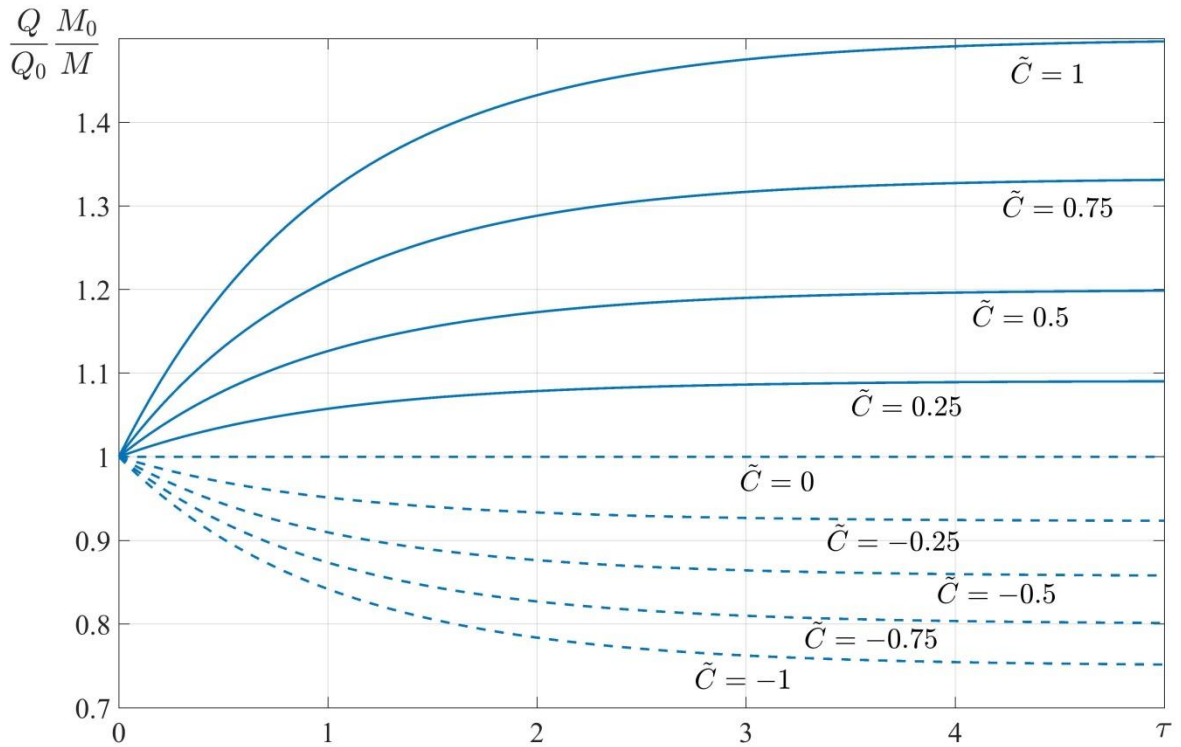


Рисунок 3.1.3 – Эволюция отношения осевой силы к крутящему моменту для линейной ползучести при различных соотношениях констант Муни – Ривлина $\tilde{C} = (C_1 - C_2)(C_1 + C_2)^{-1}$; $\tilde{C} = 1$ соответствует неогуковскому телу

Связь с обобщенными вязкоупругими материалами Максвелла. Рассматриваемая модель ползучести, основанная на эквивалентном напряжении Треска, может служить аппроксимацией линейного вязкостного демпфера с

определяющим уравнением $\mathbf{D}^e = \text{dev} \boldsymbol{\sigma} / (2\eta)$, где $\eta = \sigma_0 / D_0$. В этом случае решение, полученное в предыдущем подразделе, приближенно описывает одиночный элемент Максвелла при конечной деформации (см. рис. 3.1.4, а). Это решение легко может быть использовано для описания релаксации напряжений в скрученном стержне, материальной моделью которого является обобщенная модель Максвелла (рис. 3.1.4, б). Пусть N тел Максвелла (каждое из которых это последовательно соединенные вязкий демпфер и гиперупругая пружина) с параметрами $\langle \mu^i, \tilde{C}^i; \eta^i \rangle$, $i = \overline{1, N}$, соединены параллельно с пружиной Муни – Ривлина с упругими модулями $\langle \mu^e, \tilde{C}^e \rangle$. Тогда полное напряжение в системе есть сумма напряжений в каждой ветви, а полная деформация одинаковая во всех ветвях. Здесь μ^i и $\tilde{C}^i$ это упругие константы, связанные с константами Муни – Ривлина указанными ранее равенствами, η^i есть коэффициенты вязкости, которые связаны с временами релаксации формулой $t_{rel}^i = \eta^i / \mu^i$.

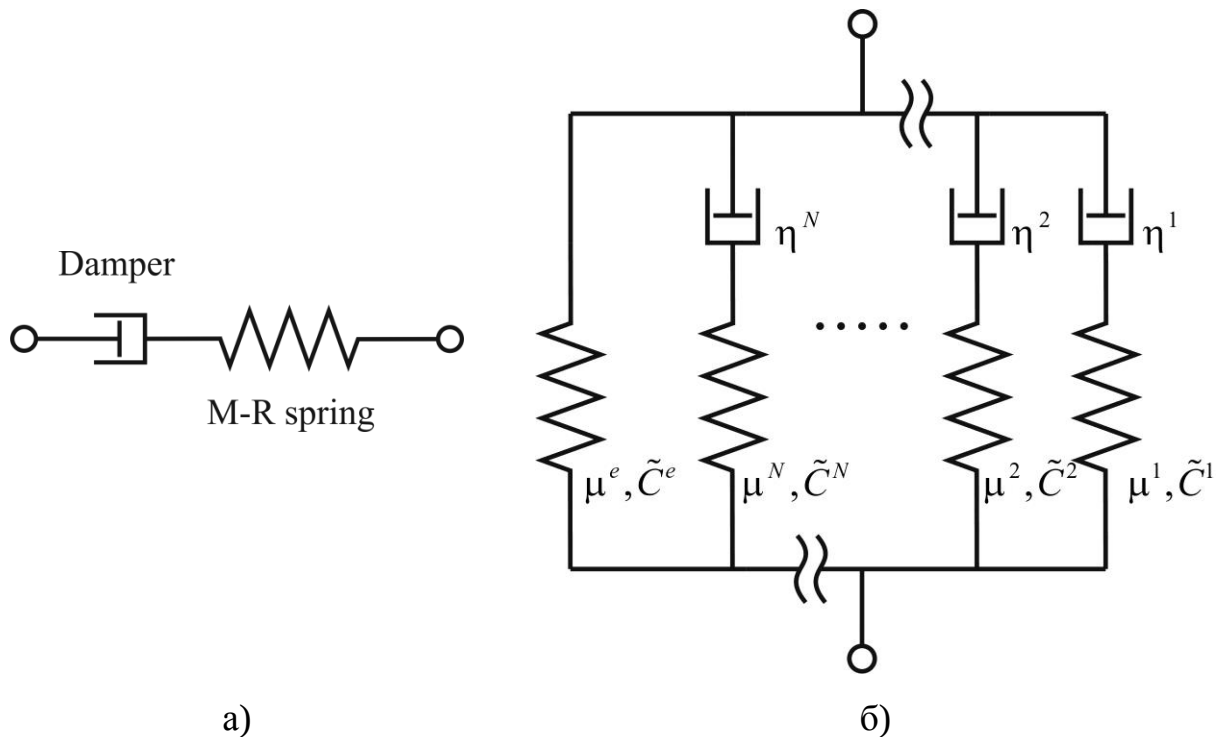


Рисунок 3.1.4 – Вязкоупругое тело Максвелла (а), включающее линейно вязкий демпфер и пружину Муни – Ривлина; обобщенная модель Максвелла (б)

Из (3.1.22) и (3.1.23) следует, что релаксацию крутящего момента и осевой силы для обобщенных вязкоупругих материалов Максвелла описывают приведенные ниже уравнения:

$$M = M^e + \sum_{i=1}^N M^i,$$

$$M^i = M_0^i \frac{8e^{-t/t_{rel}^i}}{\gamma^2(1 - e^{-2t/t_{rel}^i})} \left\{ 1 - \frac{4}{\gamma^2(1 - e^{-2t/t_{rel}^i})} \ln \left[1 + \frac{\gamma^2(1 - e^{-2t/t_{rel}^i})}{4} \right] \right\},$$

$$M_0^i = \frac{\pi}{2} \gamma R_1^3 \mu^i, \quad M^e = \frac{\pi}{2} \gamma R_1^3 \mu^e \quad (3.1.24)$$

$$Q = Q^e + \sum_{i=1}^N Q^i, \quad Q^i = Q_0^i \frac{M^i}{M_0^i} \frac{3 - \tilde{C}^i e^{-t/t_{rel}^i}}{3 - \tilde{C}^i},$$

$$Q_0^i = \frac{\pi}{8} R_1^2 \gamma^2 (3 - \tilde{C}^i) \mu^i, \quad Q^e = \frac{\pi}{8} R_1^2 \gamma^2 (3 - \tilde{C}^e) \mu^e$$

Для сравнения, приближение малых деформаций ($\gamma \ll 1$) уравнения (3.1.24) дает $M/M_0 = \hat{\mu}^e + \sum_{i=1}^N \hat{\mu}^i e^{-t/t_{rel}^i}$, где $M_0 = (\pi/2) \gamma R_1^3 \mu$, $\mu = \mu^e + \sum_{i=1}^N \mu^i$, $\hat{\mu}^i = \mu^i / \mu$. В отличие от (3.1.24), правая часть этого равенства не зависит от предварительной деформации γ .

Совокупность упругой модели Муни – Ривлина и уравнения ползучести Науменко – Альтенбаха – Гораша. Упомянутая модель ползучести описывает поведение материала, близкое к линейному при малых напряжениях, но с нелинейным увеличением скорости ползучести при высоких напряжениях. Модель может быть представлена как $F(\tilde{\sigma}_{eq}) = \tilde{\sigma}_{eq} + \tilde{\sigma}_{eq}^{m+1}$. Для нее в [240] представлено аналитическое решение задачи о релаксации напряжений в закрученном стержне:

$$\begin{aligned}
\frac{M}{M_0} &= 4e^{-\tau} \int_0^1 \xi^2 \left[(\tilde{\mu}\gamma)^m (1 - e^{-m\tau}) + \xi^{-m} \right]^{-1/m} d\xi = \\
&= e^{-\tau} {}_2F_1\left(\frac{1}{m}, \frac{4}{m}; 1 + \frac{4}{m}, -(\tilde{\mu}\gamma)^m (1 - e^{-m\tau})\right)
\end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Представленный геометрически нелинейный анализ дает следующий результат:

$$\begin{aligned}
\frac{M}{M_0} &= \frac{4}{\gamma} \int_0^1 \sqrt{\frac{\Sigma^2 - 1}{1 + (\gamma\tilde{r}/2)^2}} \tilde{r}^2 d\tilde{r}, \\
\frac{Q}{Q_0} &= \frac{8}{\gamma^2(3 - \tilde{C})} \int_0^1 \left[3 \sqrt{\frac{\Sigma^2 - 1}{1 + (\gamma\tilde{r}/2)^2}} - \tilde{C}(\Sigma - 1) \right] \tilde{r} d\tilde{r}
\end{aligned}$$

Здесь $\Sigma(\tilde{r}, \tau)$ определяется уравнением (3.1.19), которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} = -(\Sigma^2 - 1) \left[1 + \left(\tilde{\mu} \sqrt{\Sigma^2 - 1} \right)^m \right], \quad \Sigma|_{\tau=0} = 1 + (\gamma\tilde{r})^2 / 2$$

В уравнении выше $\tau = D_0 \tilde{\mu} t$. Сравнение аналитического результата в приближении малых деформаций и численного решения для конечных деформаций показано на рис. 3.1.5. Как и в случае линейной ползучести, крутящий момент может значительно отличаться от предсказанного геометрически линейной теорией, если предварительная деформация велика.

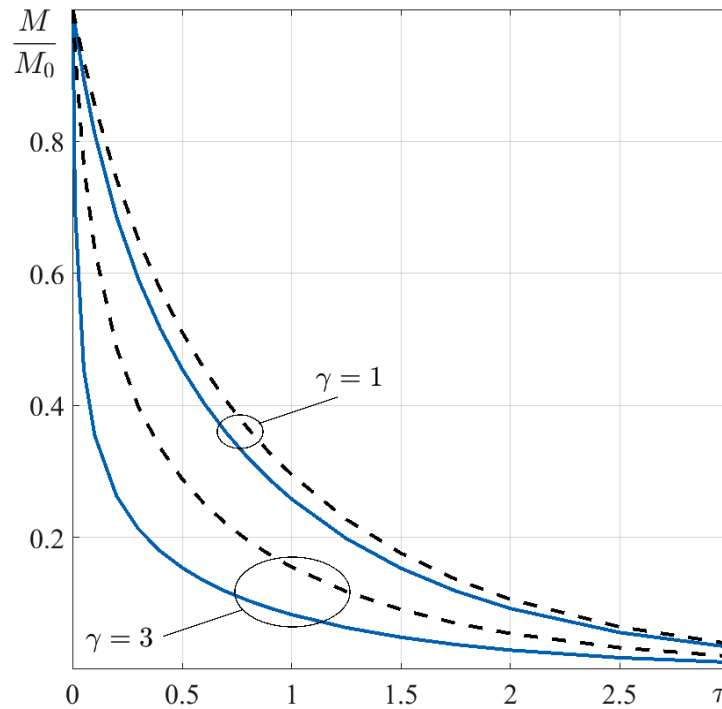


Рисунок 3.1.5 – Релаксация крутящего момента для комбинации упругой модели Муни – Ривлина и закона ползучести Науменко – Альтенбаха – Гораша с $m=2$ и $\tilde{\mu}=1$ для двух значений предварительной деформации ($\gamma = \Theta R_1/L = 1$ и $\gamma = \Theta R_1/L = 3$). Штриховые линии соответствуют приближению малых деформаций (3.1.25) [240], сплошные линии соответствуют представленному решению для конечных деформаций

3.1.4. Решение для законов ползучести на основе эквивалентного напряжения Мизеса. Для потенциалов ползучести, основанных на эквивалентном напряжении Мизеса $\sigma_{eq} = \sqrt{J_2}$, закон ползучести (3.1.3) принимает вид

$$\mathbf{D}^c = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})}{\sigma_{eq}}$$

Согласно упругому закону (3.1.2), девиатор напряжений выражается как $\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = -2(\psi_1 + \psi_2 I_1^c) \text{dev}(\mathbf{c}^e) + 2\psi_2 \text{dev}(\mathbf{c}^e)^2$.

Тогда эволюционное уравнение (3.1.1) для тензора упругих деформаций $\partial \mathbf{c}^e / \partial t = 2\mathbf{D}^c \mathbf{c}^e$ приводит к следующей автономной системе ОДУ для переменных c_{rr}^e, Σ, Δ :

$$\frac{\partial c_{rr}^e}{\partial \tau} = \frac{4}{3} \left[\tilde{\psi}_2 \left(1 - (c_{rr}^e)^2 \Sigma \right) + \tilde{\psi}_1 c_{rr}^e (\Sigma - c_{rr}^e) \right] \tilde{\sigma}_{eq}^{-1} F(\tilde{\sigma}_{eq}), \quad (3.1.26a)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} = -\frac{2}{3} \left[\tilde{\psi}_2 \left(2c_{rr}^e \Sigma^2 + \frac{\Sigma}{c_{rr}^e} - 3 \right) + \tilde{\psi}_1 \left(4\Sigma^2 - c_{rr}^e \Sigma - \frac{3}{c_{rr}^e} \right) \right] \tilde{\sigma}_{eq}^{-1} F(\tilde{\sigma}_{eq}), \quad (3.1.26b)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \tau} = -\frac{2}{3} \Delta \left[\tilde{\psi}_2 \left(2c_{rr}^e \Sigma + \frac{1}{c_{rr}^e} \right) + \tilde{\psi}_1 (4\Sigma - c_{rr}^e) \right] \tilde{\sigma}_{eq}^{-1} F(\tilde{\sigma}_{eq}) \quad (3.1.26c)$$

В отличие от моделей ползучести, основанных на эквивалентном напряжении Треска, компонента упругой деформации c_{rr}^e теперь отличается от 1. Эквивалентное напряжение является следующей функцией переменных Σ и c_{rr}^e :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{eq} &= \sqrt{J_2} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \tilde{\mu} \sqrt{\left[\frac{\tilde{\psi}_2}{c_{rr}^e} - \tilde{\psi}_1 c_{rr}^e - \Sigma (\tilde{\psi}_2 c_{rr}^e - \tilde{\psi}_1) \right]^2 + 3 \left(\Sigma^2 - \frac{1}{c_{rr}^e} \right) (\tilde{\psi}_2 c_{rr}^e + \tilde{\psi}_1)^2} \end{aligned}$$

($\tilde{\psi}_1$ и $\tilde{\psi}_2$ есть функции только Σ). Таким образом, уравнения (3.1.26a) и (3.1.26b) замкнуты относительно функций $\Sigma(\tilde{r}, t)$, $c_{rr}^e(\tilde{r}, t)$. Переменную Δ можно найти прямым интегрированием уравнения (3.1.26c).

Эта система может быть легко проинтегрирована численно для любой модели материала, которая представляет собой совокупность упругого потенциала и потенциала ползучести формы $\Phi = D_0 \sigma_0 T(\tilde{t}) \int_0^{\tilde{\sigma}_{eq}} F(\xi) d\xi$.

Некоторые аналитические результаты для $I_2^e - (I_1^{\mathbf{B}^e} -)$ гиперупругости. Когда упругий потенциал является функцией только инва-

рианта I_2^e , т.е. когда $\psi_1 = 0$ (этот случай включает неогуковскую модель, а также модели [207, 242, 252, 253]), некоторые аналитические результаты могут быть получены для системы (3.1.26). Прежде всего, можно убедиться, что уравнение (3.1.26с) становится тождественным, если выполняется следующее равенство

$$\Delta = \Sigma - c_{rr}^e \quad (3.1.27)$$

Это означает, что $c_{rr}^e = c_{\varphi\varphi}^e$. Таким образом, при нелинейно-упругом деформировании выполнено $c_{rr}^e = c_{\varphi\varphi}^e = 1$; при вязкоупругой релаксации в материале с потенциалом ползучести на основе эквивалентного напряжения Треска выполнено $c_{rr}^e = 1$, $c_{\varphi\varphi}^e \neq 1$; при релаксации напряжений в вязкоупругом материале с функцией энергии деформации, основанной на инварианте $I_1^{\mathbf{B}^e}$, и потенциалом ползучести, основанном на эквивалентном напряжении Мизеса, выполнено $c_{rr}^e = c_{\varphi\varphi}^e \neq 1$.

Здесь удобно ввести новую переменную s такую, что

$$\Sigma = c_{rr}^e \left[1 + \frac{(\gamma\tilde{r})^2}{2} s \right]. \quad (3.1.28)$$

Эволюционное уравнение для s следует из (3.1.26а) и (3.1.26б) с (3.1.27):

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{2}{(\gamma\tilde{r})^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\Sigma}{c_{rr}^e} - 1 \right) = -2 \frac{\tilde{\psi}_2 s}{c_{rr}^e \tilde{\sigma}_{eq}} F(\tilde{\sigma}_{eq}). \quad (3.1.29)$$

Из (3.1.26а), (3.1.28) и (3.1.29) следует, что

$$\frac{\partial c_{rr}^e}{\partial s} = -\frac{2}{3} \frac{c_{rr}^e}{s} \left[1 - (c_{rr}^e)^3 \left(1 + \frac{(\gamma\tilde{r})^2}{2} s \right) \right].$$

Это уравнение можно проинтегрировать с начальным условием $c_{rr}^e = 1$ при $s = 1$:

$$c_{rr}^e = \left[1 + (\gamma \tilde{r})^2 s(1-s) \right]^{-1/3}. \quad (3.1.30)$$

Далее, выражение для эквивалентного напряжения имеет вид

$$\tilde{\sigma}_{eq} = \sqrt{J_2} = 2\tilde{\psi}_2 \tilde{\mu} s \left[\frac{\gamma \tilde{r}}{(\gamma \tilde{r})^{-2} + s(1-s)} \right]^{2/3} \left[(\gamma \tilde{r})^{-2} + (1-s+s^2)/3 \right]^{1/2} \quad (3.1.31)$$

и уравнение (3.1.29) принимает вид

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tilde{\mu}} \frac{(\gamma \tilde{r})^{-2} + s(1-s)}{\sqrt{(\gamma \tilde{r})^{-2} + (1-s+s^2)/3}} F(\tilde{\sigma}_{eq}). \quad (3.1.32)$$

Решение этого уравнения

$$\tau = \tilde{\mu} \int_s^1 \frac{\sqrt{(\gamma \tilde{r})^{-2} + (1-\xi+\xi^2)/3}}{\left[(\gamma \tilde{r})^{-2} + \xi(1-\xi) \right] F(\tilde{\sigma}_{eq})} d\xi. \quad (3.1.33)$$

Еще раз отметим, что $F(\tilde{\sigma}_{eq})$ является функцией эквивалентного напряжения σ_{eq} , которое, в свою очередь, согласно (3.1.31), зависит от s .

Выражение (3.1.31) включает функцию $\tilde{\psi}_2$, которая в общем случае зависит

от $I_2^e = 2\Sigma c_{rr}^e + 1/c_{rr}^e$; согласно (3.1.28) и (3.1.30)

$I_2^e = \left[3 + (\gamma \tilde{r})^2 (1+s-s^2) \right] \left[1 + (\gamma \tilde{r})^2 s(1-s) \right]^{-2/3}$, так что $\tilde{\psi}_2$ также может быть

выражена через s . Обратим внимание, что подынтегральная функция в (3.1.33) может быть весьма громоздкой. Даже для комбинации неогуковской гиперупругой модели с $\psi_2 = \mu/2 = \text{const}$ и линейной модели ползучести с

$F(\tilde{\sigma}_{eq}) = \tilde{\sigma}_{eq}$ мы имеем (3.1.33) как:

$$\tau = \int_s^1 \left[1 + (\gamma \tilde{r})^2 \xi(1-\xi) \right]^{-1/3} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Интеграл в этом выражении может быть представлен через гипергеометрическую функцию Аппеля, но $s(\tilde{r}, \tau)$ не может быть найдена явно. Од-

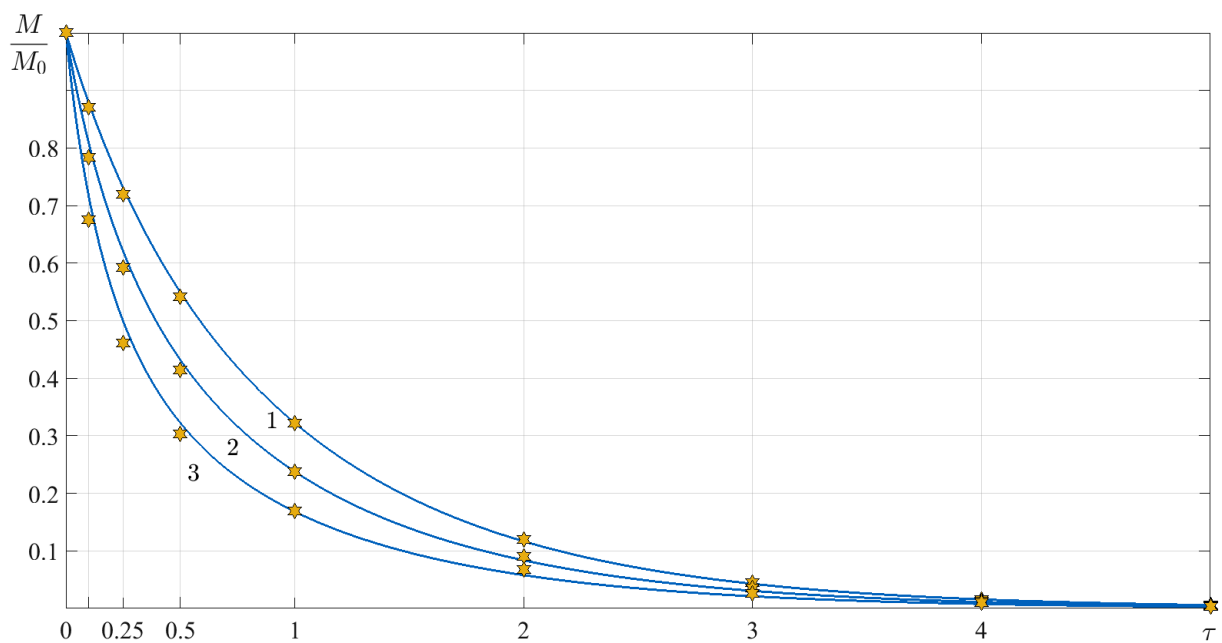
нако нетрудно получить функцию $s(\tilde{r}, \tau)$ численно для любой модели материала, используя (3.1.32). Тогда согласно (3.1.27), (3.1.28), (3.1.30) можно получить Δ , Σ и c_{rr}^e . А затем по формулам (3.1.9), (3.1.10), которые в данном случае принимают вид

$$\frac{M}{M_0} = 4 \int_0^1 s \left[1 + (\gamma \tilde{r})^2 s(1-s) \right]^{-2/3} \tilde{r}^3 d\tilde{r},$$

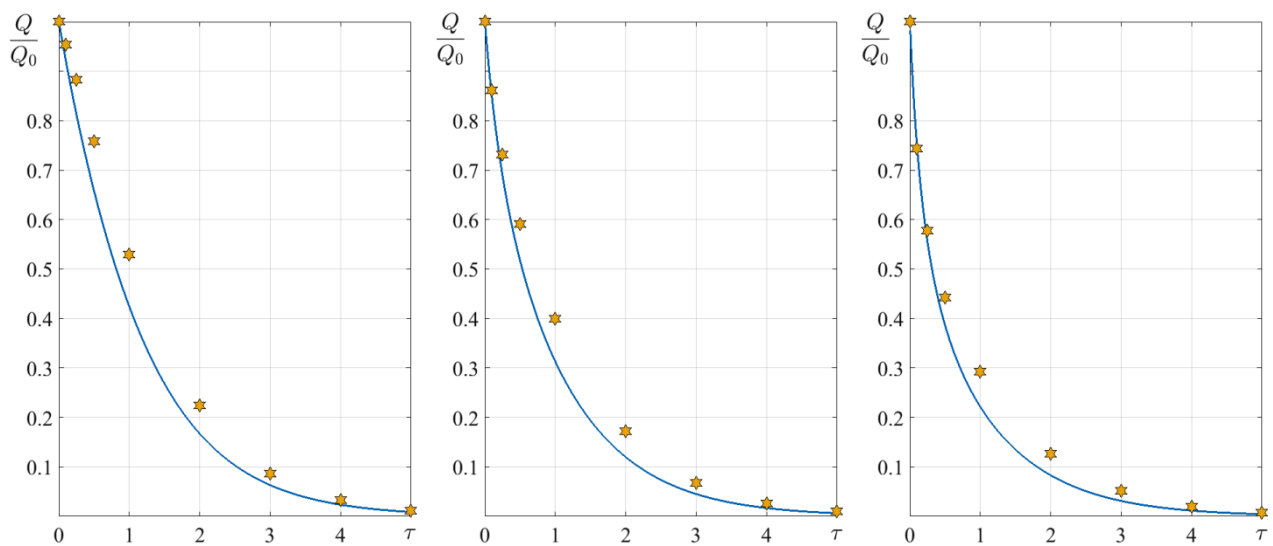
$$\frac{Q}{Q_0} = 4 \int_0^1 s(2-s) \left[1 + (\gamma \tilde{r})^2 s(1-s) \right]^{-2/3} \tilde{r}^3 d\tilde{r},$$

рассчитать крутящий момент и осевую силу.

На рис. 3.1.6 показаны такие результаты для неогуковского материала с линейным законом ползучести в сравнении с аналитическими результатами, полученными в предыдущем подразделе для эквивалентного напряжения Треска. Наличие радиального упругого растяжения в случае закона ползучести на основе эквивалентного напряжения Мизеса несколько меняет значение осевой силы по сравнению с соотношениями на основе эквивалентного напряжения Треска, в то время как крутящий момент остается практически одинаковым.



а)



б)

в)

г)

Рисунок 3.1.6 – Релаксация крутящего момента и осевой силы в вязкоупругом материале с неогуковской функцией энергии деформации и линейной зависимостью для скорости ползучести: сплошные линии соответствуют эквивалентному напряжению Треска, шестиугольники соответствуют эквивалентному напряжению Мизеса;

а) крутящий момент для различных значений предварительной поверхностной деформации ($\gamma = \Theta R_1 / L = 1, 2, 3$);

б), в), г) осевая сила для $\gamma = 1, 2, 3$ соответственно

Выводы к разделу 3.1. В данном разделе исследована релаксация напряжений при ползучести в скрученном стержне с конечными деформациями. Для любого несжимаемого изотропного гиперупругого материала с произвольным законом ползучести на основе эквивалентного напряжения Треска решение задачи определения крутящего момента и осевой силы сводится к интегрированию ОДУ (3.1.19). Для достаточно общего вида потенциала ползучести $\Phi = D_0 \sigma_0 T(\tilde{t}) \int_0^{\tilde{\sigma}_{eq}} F(\xi) d\xi$, где σ_{eq} – эквивалентное напряжение Треска, это уравнение сепарабельно. Решение в замкнутой форме для материала Муни – Ривлина с линейной моделью ползучести представлено уравнениями (3.1.22) и (3.1.23)). Это решение использовано для описания релаксации напряжения в обобщенном вязкоупругом материале Максвелла (уравнения (3.1.24) для крутящего момента и осевой силы в скрученном стержне). Для потенциалов ползучести, основанных на эквивалентном напряжении Мизеса, получена автономная нелинейная система (3.1.26), которая может быть проинтегрирована аналитически для упругих потенциалов, зависящих только от первого инварианта тензора деформаций Коши – Грина (обобщенное неогуковское тело). Полученное решение переходит в решение малых деформаций [240] при (бесконечно) малой предварительной упругой деформации стержня ($\gamma = \Theta R_1 / L \ll 1$). Судя по крутящему моменту (см. рис. 3.1.2, 3.1.5), решение Кобелева является хорошим приближением даже для умеренных деформаций, по крайней мере, для материалов с линейной упругой реакцией на сдвиг. В то же время полученные результаты для больших деформаций ($\gamma > 1$) заметно отличаются от решения Кобелева даже для неогукова тела или материала Муни – Ривлина. Можно ожидать, что для экспоненциальных законов упругости, таких как [242], разница окажется еще более существенной.

3.2. Релаксация напряжений в изогнутой вязкоупругой разнсопротивляющейся пластине

Разница в механических свойствах при растяжении и сжатии может быть очень заметной для ряда материалов. Исследования асимметрии на растяжение / сжатие в упругом диапазоне восходит к работам [254–256] (см. также [257–261]). В последние годы появились модели, описывающие этот эффект в диапазоне больших деформаций, например [262]. Разница в сопротивлении пластическому деформированию при растяжении и сжатии описывается, например, моделями [73, 263, 264]. Подобные эффекты наблюдаются также в режиме ползучести и описываются в ряде работ [265–276], включающих как теоретические исследования, так и численные расчеты, сопоставленные с экспериментальными данными. Однако, аналитические решения даже относительно простых эталонных задач достаточно редки, например в уже упомянутой работе [262] приведены решения для радиально-сферической деформации, для изгиба пластины и совместного действия радиальной, продольной деформации и деформации кручения цилиндра.

На рис. 3.2.1 приведена иллюстрация разнсопротивляемости вязкой деформации растяжения и сжатия. Изображены диаграммы "скорость деформации – напряжение" для двух линейно-вязких материалов. Для каждого из них эффективные коэффициенты вязкости при сжатии и растяжении различаются в четыре раза, но для одного из них выше вязкость при сжатии, а для второго наоборот.

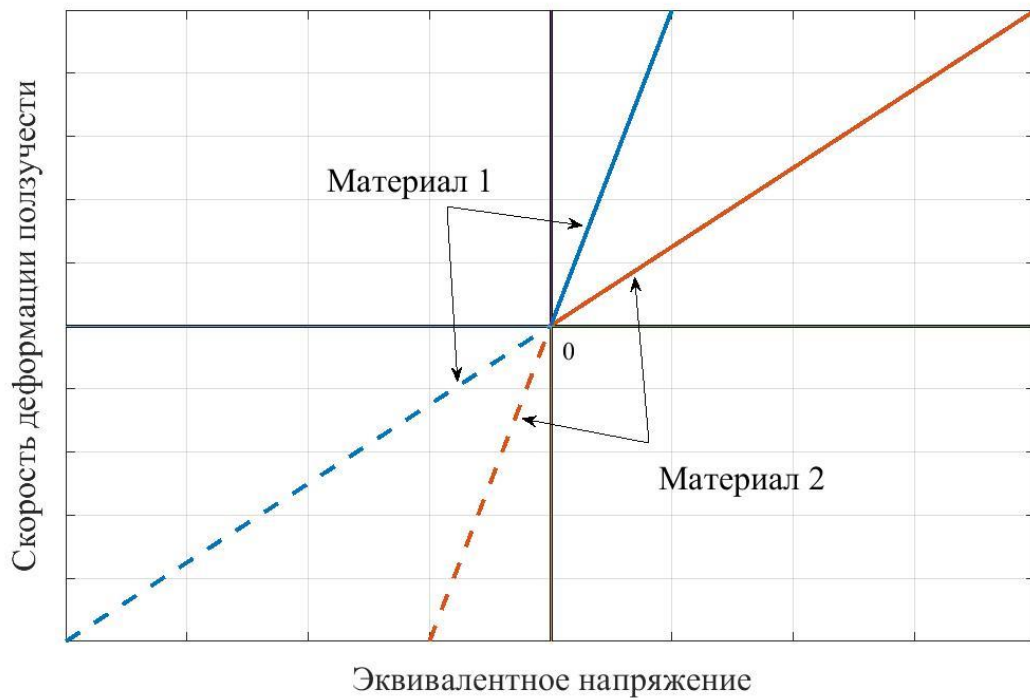


Рисунок 3.2.1 – Разносопротивляемость вязкой деформации сжатия / растяжения

3.2.1. Разносопротивляемость вязкому деформированию на базе гладких потенциалов ползучести. В представленном далее подразделе получены простые аналитические решения для проблемы релаксации напряжений в изогнутой пластине, в которых использованы две различные модели, основанные на эквивалентном напряжении [73] и [263]. Мы ограничиваемся случаем, в котором вязкие свойства материала различны при растяжении и сжатии, а упругие свойства описываются моделью Генки для несжимаемого гиперупругого материала.

Модель материала. Используется кинематика конечных деформаций, изложенная в главе 1. Сформулируем вязкоупругую модель материала в виде совокупности упругого потенциала Ψ и потенциала ползучести Φ :

$$\Psi = -2\mu I_2^{\mathbf{h}^e}, \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{h}^e} = -p\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{h}^e \quad \text{или} \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - (1/3)\mathbf{I} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{h}^e \quad (3.2.1)$$

$$\Phi = \frac{\sigma_{eq}^2}{2\eta}, \quad \mathbf{D}^c = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.2.2)$$

Здесь μ имеет тот же смысл, что модуль сдвига в линейной теории упругости; $I_2^{\mathbf{h}^e} = -(1/2)\text{tr}(\mathbf{h}^e)^2$ есть квадратичный инвариант логарифмического тензора деформации Генки $\mathbf{h}^e = \ln \left[\mathbf{F}^e (\mathbf{F}^e)^T \right]^{1/2}$, для несжимаемого материала $\text{tr} \mathbf{h}^e = 0$; $\mathbf{D}^c$ есть тензор скорости необратимой деформации; η есть коэффициент вязкости; σ_{eq} есть эквивалентное напряжение.

Если в (3.2.2) принять, что $\sigma_{eq} = \sqrt{J_2}$, где $J_2 = (1/2)\text{tr} \mathbf{s}^2$, $\mathbf{s}$ есть девиатор напряжений, то получим обычную линейную вязкую модель без разностойкости растяжению – сжатию (tension – compression asymmetry, ТСА).

Для того чтобы отразить в модели ТСА, мы используем для эквивалентного напряжения два различных анзаца.

Первый, использованный в [73] для описания ТСА для пластических течений, есть

$$\sigma_{eq} = \left[J_2^{3/2} - (3\sqrt{3}/2)\alpha J_3 \right]^{1/3}, \quad \alpha \in [-1, 1]$$

где $J_3 = \det \mathbf{s}$, α отвечает за ТСА (при $\alpha = 0$ $\sigma_{eq} = \sqrt{J_2}$).

Учитывая, что

$$\frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{s}, \quad \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{s}^2 - \frac{2}{3} J_2 \mathbf{I},$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial J_2} = \frac{1}{2} \sigma_{eq}^{-2} \sqrt{J_2}, \quad \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial J_3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \sigma_{eq}^{-2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} = \frac{\sigma_{eq}}{\eta}$$

мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^c &= \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \left(\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{J_2} \mathbf{s} - \sqrt{3} \alpha [\mathbf{s}^2 - (2/3) J_2 \mathbf{I}]}{2 \eta \sigma_{eq}} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Для одноосного нагружения по оси x (сжатия или растяжения) мы имеем:

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{diag}\{\sigma_x, 0, 0\}, \quad \mathbf{s} = \sigma_x \text{diag}\{2/3, -1/3, -1/3\}, \quad J_2 = \frac{1}{3} \sigma_x^2,$$

$$J_3 = \frac{2}{27} \sigma_x^3$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{3}} [\text{sign}(\sigma_x) - \alpha]^{1/3}$$

$$D_x^c = \frac{\sigma_x}{3\eta} [\text{sign}(\sigma_x) - \alpha]^{2/3} \quad (3.2.4)$$

Т.е. скорость необратимой деформации при сжатии и растяжении будет различаться.

Второй вариант определения эквивалентного напряжения [263] есть

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} (n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_3 s_3^2)}$$

где s_1, s_2, s_3 есть упорядоченные по убыванию главные значения девиатора напряжений; коэффициенты

$$n_k = \begin{cases} n^+, & s_k \geq 0 \\ n^-, & s_k < 0 \end{cases}, \quad k=1,2,3 \quad (3.2.5)$$

отвечают за ТСА.

Для одноосного растяжения

$$\sigma_1 = \sigma_x > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0; s_1 = 2/3\sigma_x > 0, s_2 = s_3 = -1/3\sigma_x < 0$$

и

$$D_x^c = \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{2\eta} \left(n^+ s_1 \frac{\partial s_1}{\partial \sigma_x} + n^- s_2 \frac{\partial s_2}{\partial \sigma_x} + n^- s_3 \frac{\partial s_3}{\partial \sigma_x} \right) = \frac{\sigma_x}{3\eta} \frac{2n^+ + n^-}{3}$$

Аналогично, для одноосного сжатия

$$\sigma_3 = \sigma_x < 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0; s_3 = 2/3\sigma_x < 0, s_1 = s_2 = -1/3\sigma_x > 0$$

и

$$D_x^c = \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_3} = \frac{1}{2\eta} \left(n^+ s_1 \frac{\partial s_1}{\partial \sigma_3} + n^+ s_2 \frac{\partial s_2}{\partial \sigma_3} + n^- s_3 \frac{\partial s_3}{\partial \sigma_3} \right) = \frac{\sigma_x}{3\eta} \frac{n^+ + 2n^-}{3}$$

Положив в предыдущих формулах

$$n^+ = 2(1-\alpha)^{2/3} - (1+\alpha)^{2/3}, n^- = 2(1+\alpha)^{2/3} - (1-\alpha)^{2/3} \quad (3.2.6)$$

мы получим те же выражения для скорости деформации, что и (3.2.4). Обе модели также могут быть записаны с использованием параметров $\eta^+ = \eta(1-\alpha)^{-2/3}$, $\eta^- = \eta(1+\alpha)^{-2/3}$ (коэффициенты вязкости при одноосном растяжении и сжатии) вместо α и η .

Изгиб пластины. Предварительная деформация пластины описывается следующими уравнениями кинематики изгиба в условиях плоской деформации (см. [277, 278]) (рис. 3.2.1):

$$r = \sqrt{B + \frac{2X_1}{A}}, \varphi = AX_2, z = X_3$$

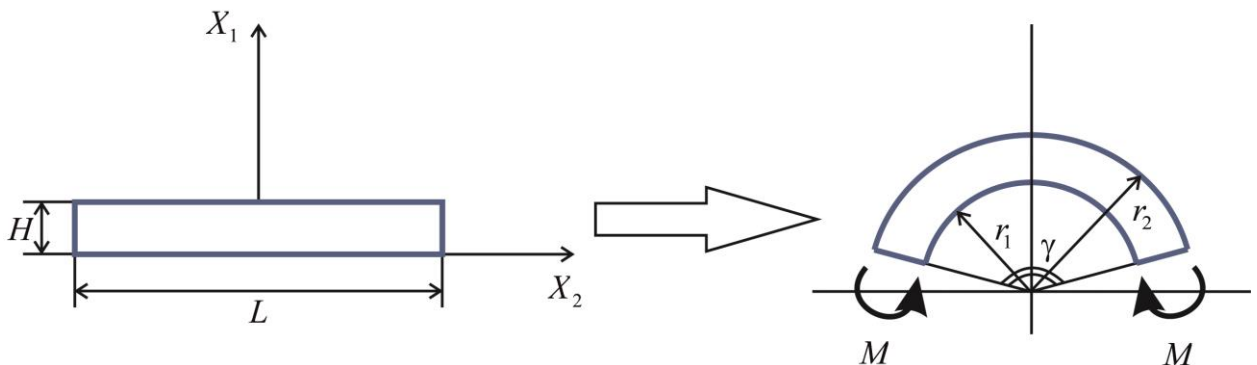


Рисунок 3.2.1 – К изгибу пластины

Внутренний и внешний радиусы кривизны изогнутой пластины могут быть выражены в виде

$$r_1 = \sqrt{B}, \quad r_2 = \sqrt{B + \frac{2H}{A}}; \quad A = \frac{\gamma}{L}, \quad B = \frac{1}{A^2} \left(\sqrt{1 + (AH)^2} - AH \right)$$

Здесь γ угол изгиба, L и H – длина и толщина пластины соответственно (см. рис. 3.2.1). Кроме того, справедливо равенство $r_1 r_2 = A^{-2}$ [277].

Предварительное деформирование чисто упругое, в момент времени $t = 0$ начинается релаксация напряжений, которая приводит к уменьшению изгибающего момента. Градиент деформации в момент $t = 0$ есть $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e = \text{diag} \left\{ (Ar)^{-1}, Ar, 1 \right\}$, тензор деформации Генки есть $\mathbf{h}^e = \text{diag} \left\{ -\ln(Ar), \ln(Ar), 0 \right\}$.

Изгибающий момент на единицу длины в направлении $z = X_3$ есть

$$\begin{aligned} M &= \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\varphi\varphi} r dr = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{rr} r dr + 2\mu \int_{r_1}^{r_2} (h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e) r dr = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left[r^2 \sigma_{rr} \right]_{r_1}^{r_2}}_0 - \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} r^2 dr + 2\mu \int_{r_1}^{r_2} (h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e) r dr = \\ &= -\mu \int_{r_1}^{r_2} (h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e) r dr + 2\mu \int_{r_1}^{r_2} (h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e) r dr = \mu \int_{r_1}^{r_2} (h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e) r dr \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Здесь в первой строке использован упругий закон (3.2.1); во второй строке использовано интегрирование по частям и тот факт, что поверхности пластины свободны от напряжений, т.е. $\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$; в третьей строке использовано уравнение равновесия $r d\sigma_{rr}/dr = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$.

Формула (3.2.7) верна и при релаксации напряжений, так что когда мы определим, как меняется разность $(h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e)$ при релаксации напряжений, тогда узнаем, как меняется изгибающий момент.

В рассматриваемой задаче тензора деформаций и напряжений диагональные, кроме того, при релаксации $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ и $\dot{\mathbf{h}}^e = \partial \mathbf{h}^e / \partial t$, поэтому формулы главы 1 для эволюции тензоров упругой деформации сильно упрощаются:

$$\partial \mathbf{h}^e / \partial t = -\mathbf{D}^e \quad (3.2.8)$$

$$\text{Релаксация напряжений для модели с } \sigma_{eq} = \left[J_2^{3/2} - (3\sqrt{3}/2)\alpha J_3 \right]^{1/3}.$$

Из (3.2.8) с учетом (3.2.3) и равенства $\mathbf{s} = 2\mu \mathbf{h}^e$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{h}^e)^2}} \frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial t} = -\frac{\mu}{\eta} \frac{\bar{\mathbf{h}}^e - \sqrt{6}\alpha \left[(\bar{\mathbf{h}}^e)^2 - (1/3)\mathbf{I} \right]}{\left(1 - 3\sqrt{6}\alpha \det \bar{\mathbf{h}}^e \right)^{1/3}}, \quad \bar{\mathbf{h}}^e = \frac{\mathbf{h}^e}{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{h}^e)^2}} \quad (3.2.9)$$

здесь учтено выражение для эквивалентного напряжения

$$\sigma_{eq} = \left[J_2^{3/2} - (3\sqrt{3}/2)\alpha J_3 \right]^{1/3} = \sqrt{2}\mu \left[\text{tr}(\mathbf{h}^e)^2 \right]^{1/2} \left(1 - 3\sqrt{6}\alpha \det \bar{\mathbf{h}}^e \right)^{1/3}$$

Замечание 1 (материал без ТСА). Для линейной вязкоупругой модели с $\alpha = 0$ система (3.2.9) очень упрощается, $\partial \mathbf{h}^e / \partial t = -(\mu/\eta) \mathbf{h}^e$. В этом случае

$$h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e = 2 \ln(Ar) e^{-\frac{\mu}{\eta} t} \text{ и } M = M_0 e^{-\frac{\mu}{\eta} t}, \quad M_0 = 2\mu \int_{r_1}^{r_2} \ln(Ar) r dr.$$

В системе трех эволюционных дифференциальных уравнений (3.2.9) независимы только два, т.к. $\text{tr} \mathbf{h}^e = 0$. При этом система (3.2.9) нелинейная и связанная. Мы преобразуем её следующим путем.

Из (3.2.9) следует уравнение эволюции для тензора $\bar{\mathbf{h}}^e$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\mathbf{h}}^e}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{h}^e)^2}} \frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial t} - \frac{\bar{\mathbf{h}}^e}{2 \text{tr}(\mathbf{h}^e)^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\text{tr}(\mathbf{h}^e)^2 \right] = \\
&= -\frac{\mu}{\eta} \frac{\bar{\mathbf{h}}^e - \sqrt{6}\alpha \left[(\bar{\mathbf{h}}^e)^2 - (1/3)\mathbf{I} \right]}{\left(1 - 3\sqrt{6}\alpha \det \bar{\mathbf{h}}^e \right)^{1/3}} - \frac{\bar{\mathbf{h}}^e}{2 \text{tr}(\mathbf{h}^e)^2} \text{tr} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{h}^e)^2 \right] = \\
&= -\sqrt{6}\alpha \frac{\mu}{\eta} \left(1 - 3\sqrt{6}\alpha \det \bar{\mathbf{h}}^e \right)^{-1/3} \left[\bar{\mathbf{h}}^e \text{tr}(\bar{\mathbf{h}}^e)^3 - (\bar{\mathbf{h}}^e)^2 + \frac{\mathbf{I}}{3} \right]
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Здесь учтено, что $\text{tr} \bar{\mathbf{h}}^e = 0$ поскольку $\text{tr} \mathbf{h}^e = 0$, и $\text{tr}(\bar{\mathbf{h}}^e)^2 = 1$, а также

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{h}^e)^2 = 2\mathbf{h}^e \frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial t} = -2 \frac{\mu}{\eta} \bar{\mathbf{h}}^e \frac{\bar{\mathbf{h}}^e - \sqrt{6}\alpha \left[(\bar{\mathbf{h}}^e)^2 - (1/3)\mathbf{I} \right]}{\left(1 - 3\sqrt{6}\alpha \det \bar{\mathbf{h}}^e \right)^{1/3}}$$

В системе уравнений (3.2.10) независимых уравнений на одно меньше, чем в (3.2.9), поскольку $\text{tr} \bar{\mathbf{h}}^e = 0$ и $\text{tr}(\bar{\mathbf{h}}^e)^2 = 1$. Теперь мы можем сформировать эквивалентную (3.2.9) систему уравнений, которая уже несвязанная. Для этого из (3.2.10) возьмем уравнение для $\bar{h}_{zz}^e$ (эту величину мы будем использовать в качестве подобного времени параметра); из (3.2.9) мы выразим производную разности $(h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e)$ по $\bar{h}_{zz}^e$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{h}_{zz}^e}{\partial \tau} &= -\sqrt{6}\alpha \frac{3\bar{h}_{zz}^{e4} - (5/2)\bar{h}_{zz}^{e2} + 1/3}{\left[1 - 3\sqrt{6}\alpha \bar{h}_{zz}^e (\bar{h}_{zz}^{e2} - 1/2) \right]^{1/3}} \\
\frac{\partial (h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e)}{\partial \bar{h}_{zz}^e} &= \frac{\partial (h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e) / \partial t}{\partial \bar{h}_{zz}^e / \partial t} = \frac{(1 + \sqrt{6}\alpha \bar{h}_{zz}^e)(h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e)}{\sqrt{6}\alpha \left[3\bar{h}_{zz}^{e4} - (5/2)\bar{h}_{zz}^{e2} + 1/3 \right]}
\end{aligned}$$

Из первого уравнений следует, что изменение $\bar{h}_{zz}^e$ связано чисто с эффектом ТСА, т.к. при $\alpha = 0$ $\bar{h}_{zz}^e = \text{const}$. Здесь введено безразмерное время $\tau = t \mu / \eta$;

учтено, что поскольку тензор $\bar{\mathbf{h}}^e$ диагональный и $\text{tr} \bar{\mathbf{h}}^e = 0$, а также $\text{tr}(\bar{\mathbf{h}}^e)^2 = 1$, то $\text{tr}(\bar{\mathbf{h}}^e)^3 = 3\bar{h}_{rr}^e \left[(\bar{h}_{rr}^e)^2 - 1/2 \right] = 3\bar{h}_{\varphi\varphi}^e \left[(\bar{h}_{\varphi\varphi}^e)^2 - 1/2 \right] = 3\bar{h}_{zz}^e \left[(\bar{h}_{zz}^e)^2 - 1/2 \right] = 3\det \bar{\mathbf{h}}^e$

Начальные условия для этой системы есть $\bar{h}_{zz}^e = 0$ и $h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e = 2\ln(Ar)$ при $t = 0$. Эту систему уравнений можно проинтегрировать:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{6}\alpha} \int_{\bar{h}_{zz}^e}^0 \frac{\sqrt{1 + 3\sqrt{6}\alpha\xi(1/2 - \xi^2)}}{1/3 - (5/2)\xi^2 + 3\xi^4} d\xi \quad (3.2.11)$$

$$h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e = 2\ln(Ar) \exp \left\{ - \int_{\bar{h}_{zz}^e}^0 \frac{1/(\sqrt{6}\alpha) + \zeta}{1/3 - (5/2)\zeta^2 + 3\zeta^4} d\zeta \right\}$$

Из (3.2.11) следует, что величина $\bar{h}_{zz}^e$ не зависит от координаты r , а зависит только от времени. Тогда согласно (3.2.7):

$$\frac{M}{M_0} = \exp \left\{ - \int_{\bar{h}_{zz}^e}^0 \frac{1/(\sqrt{6}\alpha) + \zeta}{1/3 - (5/2)\zeta^2 + 3\zeta^4} d\zeta \right\}, \quad M_0 = 2\mu \int_{r_1}^{r_2} \ln(Ar) r dr \quad (3.2.12)$$

Уравнения (3.2.11) и (3.2.12) определяют релаксацию изгибающего момента для этой модели.

Релаксация напряжений для модели с $\sigma_{eq} = \left[(1/2)(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_3 s_3^2) \right]^{1/2}$

. В изогнутой пластине для точек материала, находящихся дальше от центра координат, чем нейтральная поверхность $Ar = 1$, верно, что

$$s_1 = s_{\varphi\varphi} > 0, \quad n_1 = n^+, \quad s_3 = s_{rr} < 0, \quad n_3 = n^-, \quad Ar > 1,$$

а для точек, находящихся с другой стороны нейтральной поверхности

$$s_1 = s_{rr} > 0, \quad n_1 = n^+, \quad s_3 = s_{\varphi\varphi} < 0, \quad n_3 = n^-, \quad Ar < 1$$

Как и в предыдущем подразделе, знак $s_2 = s_{zz}$ зависит от того, сильнее материал сопротивляется сжатию или растяжению, а именно $n_2 = \max\{n^+, n^-\}$

Тогда по (3.2.8) и (3.2.2) с учетом $\mathbf{s} = 2\mu\mathbf{h}^e$ и $h_{zz}^e = -(h_{rr}^e + h_{\varphi\varphi}^e)$ можно получить линейную систему ОДУ, которая вместе с решением приведена ниже в таблице 3.2.1.

Таблица 3.2.1 – Компоненты упругой деформации

$n^+ > n^-$	$Ar > 1$	$\frac{\partial h_{rr}^e}{\partial \tau} = -\frac{2n^- + n^+}{3} h_{rr}^e$ $\frac{\partial h_{\varphi\varphi}^e}{\partial \tau} + n^+ h_{\varphi\varphi}^e = -\frac{n^+ - n^-}{3} h_{rr}^e$	$h_{rr}^e = -\ln(Ar) e^{-\frac{2n^- + n^+}{3}\tau}$ $h_{\varphi\varphi}^e = e^{-n^+\tau} \frac{\ln(Ar)}{2} \left[1 + e^{\frac{2(n^+ - n^-)}{3}\tau} \right]$
	$Ar < 1$	$\frac{\partial h_{\varphi\varphi}^e}{\partial \tau} = -\frac{2n^- + n^+}{3} h_{\varphi\varphi}^e$ $\frac{\partial h_{rr}^e}{\partial \tau} + n^+ h_{rr}^e = -\frac{n^+ - n^-}{3} h_{\varphi\varphi}^e$	$h_{\varphi\varphi}^e = \ln(Ar) e^{-\frac{2n^- + n^+}{3}\tau}$ $h_{rr}^e = -e^{-n^+\tau} \frac{\ln(Ar)}{2} \left[1 + e^{\frac{2(n^+ - n^-)}{3}\tau} \right]$
$n^+ < n^-$	$Ar > 1$	$\frac{\partial h_{\varphi\varphi}^e}{\partial \tau} = -\frac{2n^+ + n^-}{3} h_{\varphi\varphi}^e$ $\frac{\partial h_{rr}^e}{\partial \tau} + n^- h_{rr}^e = -\frac{n^- - n^+}{3} h_{\varphi\varphi}^e$	$h_{\varphi\varphi}^e = \ln(Ar) e^{-\frac{2n^+ + n^-}{3}\tau}$ $h_{rr}^e = -e^{-n^-\tau} \frac{\ln(Ar)}{2} \left[1 + e^{\frac{2(n^- - n^+)}{3}\tau} \right]$
	$Ar < 1$	$\frac{\partial h_{rr}^e}{\partial \tau} = -\frac{2n^+ + n^-}{3} h_{rr}^e$ $\frac{\partial h_{\varphi\varphi}^e}{\partial \tau} + n^- h_{\varphi\varphi}^e = -\frac{n^- - n^+}{3} h_{rr}^e$	$h_{rr}^e = -\ln(Ar) e^{-\frac{2n^+ + n^-}{3}\tau}$ $h_{\varphi\varphi}^e = e^{-n^-\tau} \frac{\ln(Ar)}{2} \left[1 + e^{\frac{2(n^- - n^+)}{3}\tau} \right]$

Выражение для момента можно записать в следующем виде:

$$h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e = \frac{\ln(Ar)}{2} \left(\exp\{-\max\{n^+, n^-\}\tau\} + \right. \\ \left. + 3\exp\left\{-\frac{\max\{n^+, n^-\} + 2\min\{n^+, n^-\}}{3}\tau\right\} \right) \\ \frac{M}{M_0} = \frac{\mu}{M_0} \int_{r_1}^{r_2} (h_{\varphi\varphi}^e - h_{rr}^e) r dr = \\ = \frac{1}{4} \exp\{-\max\{n^+, n^-\}\tau\} + \frac{3}{4} \exp\left\{-\frac{\max\{n^+, n^-\} + 2\min\{n^+, n^-\}}{3}\tau\right\} \quad (3.2.13)$$

Коэффициенты n^+ и n^- могут быть выражены через параметр разносопротивляемости α по формуле (3.2.6).

На рисунке 3.2.2 приведены графики релаксации изгибающего момента для обеих моделей.

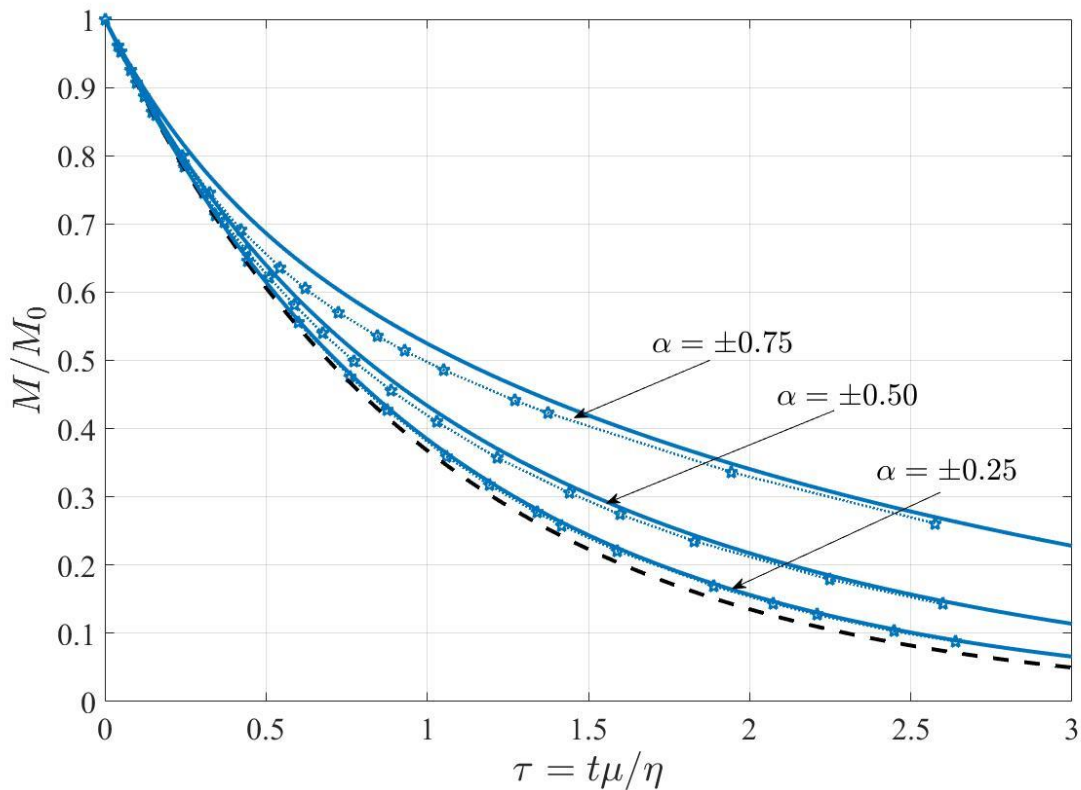


Рисунок 3.2.2 – Релаксация изгибающего момента: сплошные линии соответствуют модели с $\sigma_{eq} = \left[J_2^{3/2} - \left(3\sqrt{3}/2 \right) \alpha J_3 \right]^{1/3}$; штриховые линии с маркерами соответствуют модели с $\sigma_{eq} = \left[(1/2)(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_3 s_3^2) \right]^{1/2}$ (коэффициенты n_1, n_2, n_3 определяются формулами (3.2.5), (3.2.6)). Штриховая линия соответствует материалу без асимметрии на сжатие – растяжение ($\alpha = 0$)

Модели прогнозируют несколько различное количественно влияние ТСА на релаксацию изгибающего момента. Разница более заметна в начале процесса релаксации. Тем не менее, обе модели прогнозируют, что разнсопротивляемость замедляет релаксацию изгибающего момента.

3.2.2. Разнсопротивляемость вязкой деформации на базе кусочно-линейного потенциала ползучести. В предыдущем подразделе получены аналитические решения о релаксации напряжений в изогнутой в условиях плоской деформации пластине для двух линейно-вязких моделей разнсопротивляющегося материала с гладкими потенциалами ползучести. В этом

подразделе получено решение этой же задачи для потенциала ползучести, являющегося функцией эквивалентного напряжения σ_{eq} , кусочно-линейного в пространстве главных напряжений. Поверхность $\sigma_{eq} = \text{const}$ представляет собой шестигранник лежащий на гидростатической оси (для двух предельных значений параметра разнсопротивляемости шестигранник вырождается в треугольную призму) [135, 279–281]. Процесс релаксации напряжений в изогнутой пластине проходит в две стадии. На первой стадии напряженное состояние в той части изогнутой пластины, которая сжата в продольном направлении x_2 (см. рис. 3.2.1), соответствует одной из граней шестигранника, а напряженное состояние в точках растянутой части пластины соответствует противоположной грани шестигранника. В определенный момент времени напряженное состояние каждой точки пластины выходит на смежное с соответствующей гранью шестигранника ребро и начинается вторая стадия релаксации. Приведено замкнутое аналитическое решение для релаксации изгибающего момента; обсуждаются свойства полученного решения в сравнении с моделями разнсопротивляемости предыдущего подраздела.

Модель материала. Итак, необратимая (вязкая) деформация материала описывается линейным законом ползучести вида

$$\Phi = \frac{\sigma_{eq}^2}{2\eta}, \quad \mathbf{D}^c = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{d\Phi}{d\sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.2.14)$$

Будем использовать следующее определение эквивалентного напряжения [135, 279–281]

$$\sigma_{eq} = \frac{3}{2} \frac{s_1 - \beta s_3}{2 + \beta} = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 + \frac{-1 + \beta}{2 + \beta} \sigma_2 + \frac{-1 - 2\beta}{2 + \beta} \sigma_3 \right), \quad (3.2.15)$$

где параметр материала $\beta \geq 0$ отвечает за разнсопротивляемость вязкой деформации, s_1 и s_3 есть наибольшее и наименьшее собственные значения девиатора напряжений $\mathbf{s}$. Сечения поверхностей $\sigma_{eq} = \text{const}$ девиаторной плос-

костью при различных значениях параметра β изображены на рис. 3.2.3. При $\beta = 1$ эквивалентное напряжение $\sigma_{eq} = (s_1 - s_3)/2$ соответствует призме Треска (материал не проявляет разнсопротивляемость). Предельным значениям параметра разнсопротивляемости $\beta = 0$ и $\beta \rightarrow \infty$ соответствуют треугольные призмы Мариотта и Ивлева [282] с $\sigma_{eq} = 3s_1/4$ и $\sigma_{eq} = -3s_3/2$. Для этих предельных поверхностей эквивалентные напряжения при одноосных напряженных состояниях сжатия и растяжения одинаковой по модулю нагрузкой различаются в два раза (при $\beta = 0$ больше эквивалентное напряжение в случае растяжения, при $\beta \rightarrow \infty$ наоборот). Промежуточным значениям β соответствуют шестиугольные призмы.

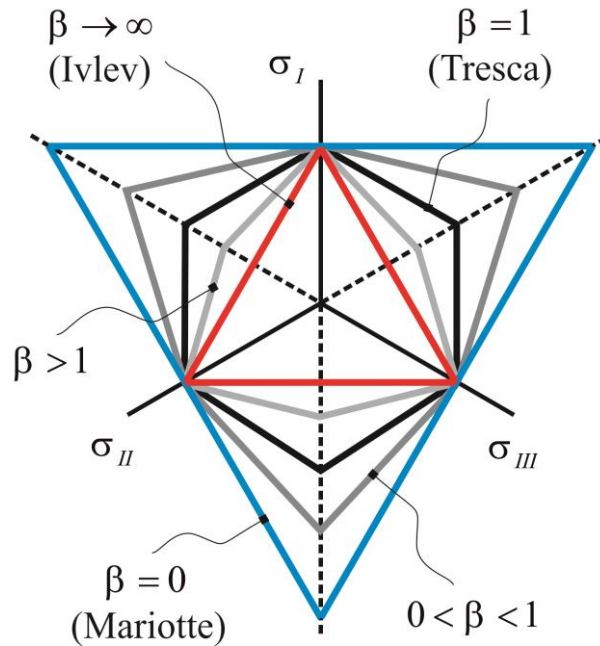


Рисунок 3.2.3 – Сечение девиаторной плоскостью поверхностей $\sigma_{eq} = \text{const}$ (формула (3.2.15))

Используемая модель с эквивалентным напряжением (3.2.15) описывает разнсопротивляемость вязкой деформации. Действительно, при одноосном растяжении $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_x > 0$, $s_1 = 2\sigma_x/3$, $s_2 = s_3 = -\sigma_x/3$. При одноосном сжатии $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_x < 0$, $s_1 = s_2 = -\sigma_x/3$, $s_3 = 2\sigma_x/3$. Тогда по

(3.2.15) при растяжении $\sigma_{eq} = \sigma_x/2$ и скорость деформации ползучести в направлении действия растягивающей силы есть

$$D_{tension}^c = \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_1} = \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \left(\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial s_3} \frac{\partial s_3}{\partial \sigma_1} \right) = \frac{\sigma_x}{4\eta}$$

а при сжатии $\sigma_{eq} = -\frac{1+2\beta}{2+\beta} \frac{\sigma_x}{2} > 0$ и скорость деформации ползучести в направлении действия сжимающей силы есть

$$D_{compression}^c = \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_3} = \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \left(\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \sigma_3} + \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial s_3} \frac{\partial s_3}{\partial \sigma_3} \right) = \frac{\sigma_x}{4\eta} \left(\frac{1+2\beta}{2+\beta} \right)^2$$

Здесь σ_x есть нормальное напряжение на площадке, перпендикулярной направлению сжатия / растяжения; $\sigma_x > 0$ для растяжения, $\sigma_x < 0$ для сжатия.

Если $\beta = B > 1$, то скорости необратимой деформации при одноосном нагружении сжатия и растяжения одинаковой по модулю нагрузкой соотносятся как

$$\left| \frac{D_{compression}^c}{D_{tension}^c} \right| = \left(\frac{1+2B}{2+B} \right)^2 = C > 1$$

Если же $\beta = 1/B < 1$, то

$$\left| \frac{D_{compression}^c}{D_{tension}^c} \right| = \left(\frac{2+B}{1+2B} \right)^2 = \frac{1}{C} < 1$$

То есть, если для материала 2 на рис. 3.2.1 $\beta = B$, то для материала 1 $\beta = 1/B$. Учитывая, что $\beta \geq 0$, используемая модель способна описать разносопротивляемость вязкой деформации в ограниченном, хотя и достаточно широком, диапазоне: при $\beta = 0$ $\left| D_{compression}^c / D_{tension}^c \right| = 1/4$, при $\beta \rightarrow \infty$ $\left| D_{compression}^c / D_{tension}^c \right| = 4$.

Релаксация напряжений в пластине. Начальный этап. С момента времени $t = 0$ начинается релаксация напряжений в пластине, которая приводит к снижению приложенного изгибающего момента. Аналогично предыдущему подразделу, эволюция тензора упругой деформации описывается уравнением $\partial \mathbf{h}^e / \partial t = -\mathbf{D}^c$ и также

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = -2\mu \mathbf{D}^c \quad (3.2.16)$$

Согласно (3.2.1) в упруго изогнутой пластине в начальный момент времени во внутреннем слое ($r < 1/A$) $s_{rr} = s_1 > 0$, $s_{\varphi\varphi} = s_3 < 0$, $s_{zz} = s_2 = 0$. Во внешнем слое ($r > 1/A$) наоборот, $s_{rr} = s_3 < 0$, $s_{\varphi\varphi} = s_1 > 0$, $s_{zz} = s_2 = 0$. Тогда по (3.2.14) и (3.2.15) имеем следующие равенства для компонент скорости необратимой деформации.

Во внутреннем слое

$$D_{rr}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta} > 0, D_{\varphi\varphi}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta} \frac{-1-2\beta}{2+\beta} < 0, D_{zz}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta} \frac{-1+\beta}{\beta+2} \quad (3.2.17)$$

Во внешнем слое

$$D_{rr}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta} \frac{-1-2\beta}{\beta+2} < 0, D_{\varphi\varphi}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta} \frac{2+\beta}{\beta+2} > 0, D_{zz}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta} \frac{-1+\beta}{\beta+2} \quad (3.2.18)$$

Знак D_{zz}^c определяется величиной β : если $\beta > 1$, то $D_{zz}^c > 0$; если $0 \leq \beta < 1$, то $D_{zz}^c < 0$. При этом поскольку $-1-2\beta < -1+\beta < 2+\beta$, то D_{zz}^c в любом случае является промежуточным главным значением тензора скорости необратимой деформации. Во внутреннем слое $D_{rr}^c = D_1^c$, $D_{\varphi\varphi}^c = D_3^c$; во внешнем слое наоборот, $D_{rr}^c = D_3^c$, $D_{\varphi\varphi}^c = D_1^c$. Здесь и далее D_1^c , D_3^c , D_2^c есть наибольшее, наименьшее и промежуточные главные значения тензора $\mathbf{D}^c$. Выражения (3.2.17) и (3.2.18) верны до тех пор, пока s_{zz} остается промежуточным главным значением девиатора напряжений. Пока это верно, координатное

направление, соответствующее максимальному главному значению девиатора напряжений, совпадает с координатным направлением максимального главного значения тензора скорости необратимой деформации (и то же самое для минимальных главных значений). В этом случае из (3.2.16) с учетом (3.2.14) и (3.2.15) для произвольных чисел a и b можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial(as_1 - bs_2 - cs_3)}{\partial t} &= -2\mu(aD_1^c - bD_2^c - cD_3^c) = \\ &= -\sigma_{eq} \frac{\mu}{\eta} \left(a + b \frac{1-\beta}{2+\beta} + c \frac{1+2\beta}{2+\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Если в (3.2.19) выбрать $a = \frac{3}{2} \frac{1}{2+\beta}$, $b = 0$ и $c = \frac{3}{2} \frac{\beta}{2+\beta}$, то имеем

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} \frac{s_1 - \beta s_3}{2+\beta} \right) = -\sigma_{eq} \frac{\mu}{\eta} \frac{3(1+\beta+\beta^2)}{(2+\beta)^2} \quad (3.2.20)$$

а если выбрать $a = 1$, $b = 0$ и $c = 1$, то можно получить

$$\frac{\partial(s_1 - s_3)}{\partial t} = -3\sigma_{eq} \frac{\mu}{\eta} \frac{1+\beta}{2+\beta} \quad (3.2.21)$$

Первое из этих уравнений есть обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, которое позволяет найти эволюцию эквивалентного напряжения (3.2.15):

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}^0 e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)\mu}{(2+\beta)^2} \frac{t}{\eta}}, \quad \sigma_{eq}^0(r) = 3\mu \frac{1+\beta}{2+\beta} |\ln(Ar)| \quad (3.2.22)$$

Здесь для определения константы интегрирования использовано начальное условие – распределение эквивалентного напряжения в начальный момент времени $\sigma_{eq}(r, 0) = \sigma_{eq}^0(r)$, которое определяется упругим решением.

Уравнение (3.2.21) удовлетворяется непосредственным интегрированием и позволяет найти разность $(s_1 - s_3)$ как функцию времени:

$$s_1 - s_3 = 4\mu \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{(1+\beta)^2}{1+\beta+\beta^2} \left[e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)\mu}{(2+\beta)^2\eta}t} - 1 \right] \right\} |\ln(Ar)|$$

Начальное условие при этом также определяется упругим решением: в момент времени $t=0$ разница максимального и минимального главных напряжений есть $4\mu |\ln(Ar)|$.

Во внутреннем слое ($r < 1/A$) $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = -(s_1 - s_3)$, во внешнем слое ($r > 1/A$) $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = s_1 - s_3$. Следовательно, может быть найдена релаксация изгибающего момента:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} (s_{\varphi\varphi} - s_{rr}) r dr = -\frac{1}{2} \int_{r_1}^{1/A} (s_1 - s_3) r dr + \frac{1}{2} \int_{1/A}^{r_2} (s_1 - s_3) r dr = \\ &= M_0 \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{(1+\beta)^2}{1+\beta+\beta^2} \left[e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)\mu}{(2+\beta)^2\eta}t} - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

где $M_0 = 2\mu \int_{r_1}^{r_2} \ln(Ar) r dr$. Для материала без разнсопротивляемости вязкой

деформации ($\beta = 1$) формула выше принимает вид $M = M_0 e^{-\mu t/\eta}$.

Далее нам потребуются также формулы, описывающие эволюцию величин $(s_1 - s_2)$ и $(s_2 - s_3)$. Из (3.2.19) при $a=1$, $b=1$, $c=0$ и $a=0$, $b=-1$, $c=1$ с учетом (3.2.20) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial(s_1 - s_2)}{\partial t} &= -\frac{\mu}{\eta} \frac{3}{2+\beta} \sigma_{eq} = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial t} \frac{2+\beta}{1+\beta+\beta^2} \\ \frac{\partial(s_2 - s_3)}{\partial t} &= -\frac{\mu}{\eta} \frac{3\beta}{2+\beta} \sigma_{eq} = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial t} \frac{\beta(2+\beta)}{1+\beta+\beta^2} \end{aligned}$$

Интегрируя эти выражения с учетом (3.2.22) и начальных условий

$$(s_1 - s_2)|_{t=0} = (s_2 - s_3)|_{t=0} = 2\mu |\ln(Ar)| = \frac{2}{3} \frac{2+\beta}{1+\beta} \sigma_{eq}^0, \text{ имеем}$$

$$s_1 - s_2 = \sigma_{eq}^0 \frac{2+\beta}{1+\beta+\beta^2} \left(e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)\mu t}{(2+\beta)^2 \eta}} - \frac{(1+2\beta)(1-\beta)}{3(1+\beta)} \right)$$

$$s_2 - s_3 = \sigma_{eq}^0 \frac{\beta(2+\beta)}{1+\beta+\beta^2} \left(e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)\mu t}{(2+\beta)^2 \eta}} - \frac{(\beta+2)(\beta-1)}{3\beta(1+\beta)} \right)$$

Релаксация напряжений в пластине. Конечный этап. Из формул выше следует, что если $\beta > 1$, то в момент времени

$$t^* = \frac{\eta}{\mu} \frac{(2+\beta)^2}{3(1+\beta+\beta^2)} \ln \frac{3\beta(1+\beta)}{(\beta+2)(\beta-1)} \quad (3.2.24)$$

напряженное состояние выходит на ребро поверхности ползучести с $s_2 = s_3$;

а если $0 \leq \beta < 1$, то в момент времени

$$t^* = \frac{\eta}{\mu} \frac{(2+\beta)^2}{3(1+\beta+\beta^2)} \ln \frac{3(1+\beta)}{(1+2\beta)(1-\beta)} \quad (3.2.25)$$

напряженное состояние выходит на ребро поверхности ползучести с $s_2 = s_1$.

Причем это происходит одномоментно во всех точках пластины.

После этого начинается второй этап релаксации. Изгибающий момент, соответствующий переходу во вторую стадию релаксации, может быть найден по формуле (3.2.23):

$$M^* = M(t^*) = \begin{cases} \frac{\beta-1}{2\beta} M_0, & \beta > 1 \\ \frac{1-\beta}{2} M_0, & 0 \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (3.2.26)$$

На втором этапе релаксации, если $\beta > 1$, то $s_2 = s_3 = -s_1/2$ и

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = -2\mu D_1^c = -2\mu \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_1} = -\mu \frac{\sigma_{eq}}{\eta} = -\frac{3}{4} \frac{\mu}{\eta} s_1$$

Здесь учтено, что в этом случае $\sigma_{eq} = 3s_1/4$. Интегрируя, имеем

$$s_1 = s_1|_{t=t^*} e^{-\frac{3}{4}\frac{\mu}{\eta}(t-t^*)} = \frac{4}{3} \sigma_{eq}^* e^{-\frac{3}{4}\frac{\mu}{\eta}(t-t^*)} = \frac{4(\beta+2)(\beta-1)}{9\beta(1+\beta)} \sigma_{eq}^0 e^{-\frac{3}{4}\frac{\mu}{\eta}(t-t^*)}$$

$$\sigma_{eq}^* = \sigma_{eq}(t^*)$$

И далее, во внутреннем слое ($r < 1/A$) $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = -(s_1 - s_3) = -3s_1/2$, а во внешнем слое ($r > 1/A$) $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = s_1 - s_3 = 3s_1/2$. Крутящий момент:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} (s_{\varphi\varphi} - s_{rr}) r dr = -\frac{3}{4} \int_{r_1}^{1/A} s_1 r dr + \frac{3}{4} \int_{1/A}^{r_2} s_1 r dr = \\ &= \frac{(\beta+2)(\beta-1)}{3\beta(1+\beta)} e^{-\frac{3}{4}\frac{\mu}{\eta}(t-t^*)} \left(\int_{1/A}^{r_2} \sigma_{eq}^0 r dr - \int_{r_1}^{1/A} \sigma_{eq}^0 r dr \right) = \frac{\beta-1}{2\beta} e^{-\frac{3}{4}\frac{\mu}{\eta}(t-t^*)} M_0 \end{aligned}$$

Если $0 \leq \beta < 1$, то на втором этапе релаксации $s_1 = s_2 = -s_3/2$ и

$$\frac{\partial s_3}{\partial t} = -2\mu D_3^c = -2\mu \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_3} = \frac{\mu}{\eta} \frac{1+2\beta}{2+\beta} \sigma_{eq} = -\frac{3}{4} \frac{\mu}{\eta} \left(\frac{1+2\beta}{2+\beta} \right)^2 s_3$$

Здесь учтено что $\sigma_{eq} = -\frac{3}{4} \frac{1+2\beta}{2+\beta} s_3$. Интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} s_3 &= s_3|_{t=t^*} e^{-\frac{3}{4}\frac{\mu}{\eta} \left(\frac{1+2\beta}{2+\beta} \right)^2 (t-t^*)} = -\frac{4}{3} \frac{2+\beta}{1+2\beta} \sigma_{eq}^* e^{-\frac{3}{4}\frac{\mu}{\eta} \left(\frac{1+2\beta}{2+\beta} \right)^2 (t-t^*)} = \\ &= -\frac{4}{9} \frac{(2+\beta)(1-\beta)}{1+\beta} \sigma_{eq}^0 e^{-\frac{3}{4}\frac{\mu}{\eta} \left(\frac{1+2\beta}{2+\beta} \right)^2 (t-t^*)} \end{aligned}$$

И далее, во внутреннем слое ($r < 1/A$) $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = -(s_1 - s_3) = 3s_3/2$, во внешнем слое ($r > 1/A$) $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = s_1 - s_3 = -3s_3/2$. Крутящий момент:

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} (s_{\varphi\varphi} - s_{rr}) r dr = \frac{3}{4} \int_{r_1}^{1/A} s_3 r dr - \frac{3}{4} \int_{1/A}^{r_2} s_3 r dr = \\
&= \frac{(2+\beta)(1-\beta)}{3(1+\beta)} e^{-\frac{3\mu(1+2\beta)}{4\eta(2+\beta)^2}(t-t^*)} \left(\int_{1/A}^{r_2} \sigma_{eq}^0 r dr - \int_{r_1}^{1/A} \sigma_{eq}^0 r dr \right) = \\
&= \frac{1-\beta}{2} e^{-\frac{3\mu(1+2\beta)}{4\eta(2+\beta)^2}(t-t^*)} M_0
\end{aligned}$$

Итак, эволюция изгибающего момента в процессе релаксации в целом описывается уравнениями:

- при $0 \leq \beta < 1$

$$\frac{M}{M_0} = \begin{cases} 1 + \frac{3}{4} \frac{(1+\beta)^2}{1+\beta+\beta^2} \left[e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)\mu}{(2+\beta)^2\eta}t} - 1 \right], & t \leq t^* \\ \frac{1-\beta}{2} e^{-\frac{3\mu(1+2\beta)}{4\eta(2+\beta)^2}(t-t^*)}, & t \geq t^* \end{cases} \quad (3.2.27)$$

$$\text{где } t^* = \frac{\eta}{\mu} \frac{(2+\beta)^2}{3(1+\beta+\beta^2)} \ln \frac{3(1+\beta)}{(1+2\beta)(1-\beta)};$$

- при $\beta > 1$

$$\frac{M}{M_0} = \begin{cases} 1 + \frac{3}{4} \frac{(1+\beta)^2}{1+\beta+\beta^2} \left[e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)\mu}{(2+\beta)^2\eta}t} - 1 \right], & t \leq t^* \\ \frac{\beta-1}{2\beta} e^{-\frac{3\mu}{4\eta}(t-t^*)}, & t \geq t^* \end{cases} \quad (3.2.28)$$

$$\text{где } t^* = \frac{\eta}{\mu} \frac{(2+\beta)^2}{3(1+\beta+\beta^2)} \ln \frac{3\beta(1+\beta)}{(\beta+2)(\beta-1)}$$

В частности, для предельных значений параметра разнсопротивляемости:

$$\text{ - при } \beta = 0 \quad \frac{M}{M_0} = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{-\frac{3\mu}{4\eta} t}, & t \leq \frac{4 \ln 3}{3} \frac{\eta}{\mu} \\ \frac{3^{1/4}}{2} e^{-\frac{3\mu}{16\eta} t}, & t \geq \frac{4 \ln 3}{3} \frac{\eta}{\mu} \end{cases}$$

$$\text{ - при } \beta \rightarrow \infty \quad \frac{M}{M_0} = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{-\frac{3\mu}{\eta} t}, & t \leq \frac{\ln 3}{3} \frac{\eta}{\mu} \\ \frac{3^{1/4}}{2} e^{-\frac{3\mu}{4\eta} t}, & t \geq \frac{\ln 3}{3} \frac{\eta}{\mu} \end{cases}$$

Траектория напряженного состояния в пространстве девиаторных напряжений изображена на рис. 3.2.4.

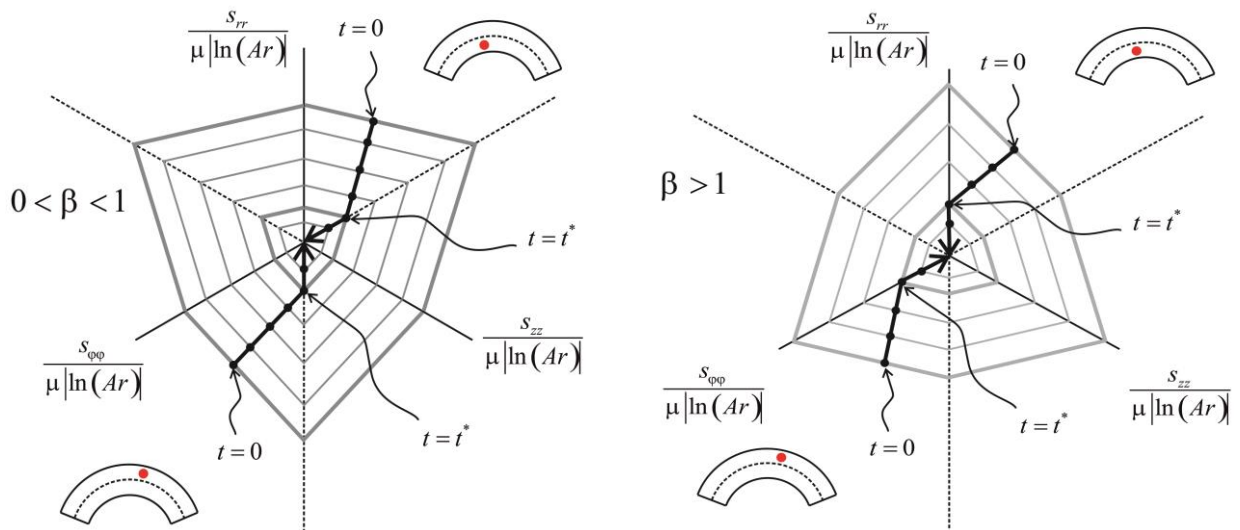


Рисунок 3.2.4 – Траектория напряженного состояния произвольной точки пластины. Слева для материала с $0 \leq \beta < 1$, справа для материала с $\beta > 1$.

Верхняя траектория на каждом графике соответствует точкам пластины внутренней области $Ar < 1$, нижняя – точкам внешней области $Ar > 1$ (точки на нейтральной поверхности $Ar = 1$ свободны от напряжений)

3.2.3. Обсуждение результатов. Сравнение моделей. Оба решения подраздела 3.2.1, основанные на гладких потенциалах ползучести, имеют одну особенность: они прогнозируют идентичную релаксацию для, вообще говоря, разных материалов, схематично представленных на рис. 3.2.1. То есть для этих решений имеет значение, во сколько раз различается эффективная

вязкость материала при растяжении и сжатии, но не имеет значения, какая из них больше, а какая меньше [13]. Эту особенность непросто проверить экспериментально, поскольку для этого нужны два материала с одинаковым упругим модулем, вязкая деформация которых соответствует схеме на рис. 3.2.1. Тем не менее, такое поведение решений кажется достаточно странным.

В отличие от них, полученное в предыдущем подразделе решение для кусочно-линейного потенциала ползучести, прогнозирует разную релаксацию для этих материалов. Графики релаксации изгибающего момента, рассчитанные по формулам (3.2.27), (3.2.28) для обоих материалов, приведены на рис. 3.2.5.

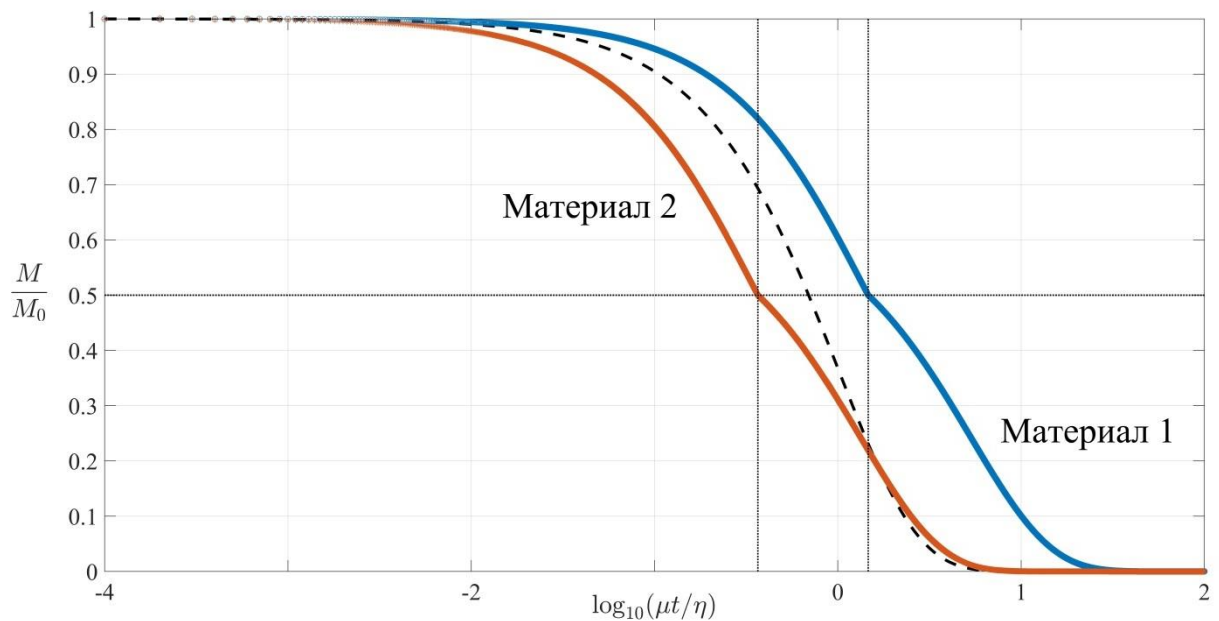


Рисунок 3.2.5 – Релаксация изгибающего момента M в пластине. Линейная модель с разнсопротивляемостью вязкой деформации (3.2.14), (3.2.15); решение по формулам (3.2.27), (3.2.28). Параметры материалов: для материала 1 $\beta = 0$, для материала 2 $\beta \rightarrow \infty$. Пунктирная линия соответствует решению для материала без разнсопротивляемости $M/M_0 = e^{-\mu t/\eta}$. Вертикальные линии соответствуют моментам времени t^* перехода между этапами релаксации (формулы (3.2.24) и (3.2.25)), когда напряженное состояние выходит на ребро функции ползучести; горизонтальная линия соответствует значениям M в эти моменты времени (формула (3.2.26))

Рассматриваемая модель прогнозирует, что в материале 1 (см. рис. 3.2.1), для которого сопротивление вязкой деформации растяжения ниже, чем деформации сжатия (скорость деформации при растяжении выше, чем при сжатии, при одинаковой по модулю нагрузке), релаксация изгибающего момента происходит медленнее, чем в материале 2.

На обоих графиках (см. рис. 3.2.5) прослеживаются точки перегиба, соответствующие переходу между этапами релаксации, в которых напряженное состояние пластины выходит на ребро кусочно-линейной функции ползучести.

Выводы к разделу 3.2. Получено аналитическое решение для релаксации напряжений в изогнутой вязкоупругой пластине с асимметрией вязкого отклика. Использованы три модели разнсопротивляемости, две из которых основаны на потенциале ползучести с эквивалентными напряжениями, представляющими собой гладкие функции главных напряжений, одна – основана на эквивалентном напряжении, представляющем собой кусочно-линейную функцию главных напряжений. Результаты сравнены между собой. Кусочно-линейная модель проявляет свойства, не характерные для гладких моделей.

Поскольку линейно-вязкая модель это достаточно грубое приближение реологии реальных материалов, на практике часто используется обобщенная вязкоупругая модель Максвелла (см., например, [239]). Эта модель представляет собой параллельно соединенные линейно-вязкие элементы с разными свойствами. В каждом таком элементе общая деформация одна и та же, а общее напряжение в системе есть сумма напряжений в каждой ветви. В таком случае, полученные здесь решения (3.2.11)–(3.2.12), (3.2.13) и (3.2.27) – (3.2.28) легко могут быть использованы для обобщенной модели Максвелла (см. [4]), которая в таком случае будет учитывать разнсопротивляемость вязкому деформированию.

3.3. Гиперупругая модель композита, армированного короткими волокнами

Волокнистые композиты представляют собой материалы, которые состоят из матрицы (полимерной, металлической или керамической) и армирующих волокон (углеродных, стеклянных [283, 284] или натуральных [285–288], в том числе шерсти, растительных волокон и т.д.). Волокнистые композиты имеют широкую сферу применения в различных отраслях благодаря сочетанию низкой плотности и высокой прочности и жесткости (по сравнению с материалом матрицы). Функции матрицы – передача внешних нагрузок на волокна, связь между волокнами и их защита. Несущая способность в свою очередь обеспечивается в основном армирующими волокнами.

Одной из важнейших задач механики композитов является прогнозирование упругих, пластических и прочностных свойств композита в зависимости от свойств базовых материалов и параметров армирования (объемная доля включений, их упаковка и геометрические характеристики).

Композиты с армирующими элементами в виде волокон, продольный размер которых существенно меньше размеров изделия (но при этом кратно превышает поперечный размер волокон), расположенных однонаправленно в материале матрицы, называются *Unidirectional Discontinuous Fiber Composites* (UDFC) или *Unidirectional Short-Fiber Composites*. Такие композиты выдерживают существенную нагрузку в направлении волокон.

Существуют различные модели для оценки упругих характеристик волокнистых композитов. Ряд моделей основан на использовании принципа эквивалентного включения Эшелби [289–294]. Другие микромеханические модели [295–302] построены на основе рассмотрения представительного объема материала по принципам модели Shear Lag (SL) [295]. Есть также ряд эмпирических и полуэмпирических моделей [303, 304]. Две простейшие модели – правило смесей (*Rule of Mixtures*, RoM) и обратное правило смесей (*Inverse*

Rule of Mixtures, IROM), которые дают следующую оценку для упругого модуля композита с объемным содержанием волокна V_f :

$$E_c^{ROM} = V_f E_f + (1 - V_f) E_m \quad (3.3.1)$$

$$E_c^{IROM} = \frac{E_m E_f}{E_m V_f + E_f (1 - V_f)}$$

Здесь и далее E_c , E_m , E_f есть модуль Юнга композита, матрицы и волокна соответственно. Ни RoM, ни IROM не содержат никаких геометрических характеристик волокон.

Другая известная модель это полуэмпирическая модель Halpin – Tsai (HT) [304]:

$$E_c^{HT} = E_m \frac{1 + 2s\eta V_f}{1 - \eta V_f}, \quad \eta = \frac{E_f/E_m - 1}{E_f/E_m + 2s} \quad (3.3.2)$$

Здесь геометрический параметр s есть отношение длины волокна к его диаметру для волокон цилиндрической формы.

Микромеханическая модель SL в ее классическом виде приводит к следующему выражению:

$$E_c^{SL} = V_f \left[1 - \frac{\tanh(ns)}{ns} \right] E_f + (1 - V_f) E_m, \quad n = \sqrt{\frac{4\mu_m}{E_f |\ln V_f|}} \quad (3.3.3)$$

Здесь μ_m есть модуль сдвига материала матрицы. Эта модель подробно рассмотрена в следующем разделе.

3.3.1. Shear lag model. Представительный объем композита изображен на рис. 3.3.1. Модель SL не учитывает сужение в радиальном направлении, представленная в исследовании модель учитывает. Для матрицы и волокна принимается линейный упругий закон Гука.

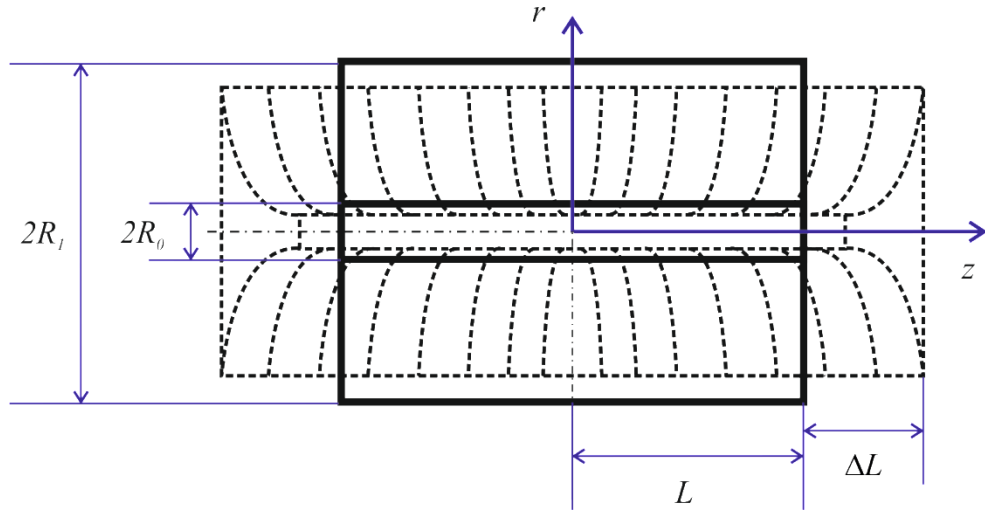


Рисунок 3.3.1 – Представительный объем: одиночное волокно и окружающий его материал матрицы

Распределение касательного напряжения по радиальной координате

$$\sigma_{rz}^m = (R_0/R) \sigma_{rz}^m \Big|_{R=R_0}.$$

Сдвиговая деформация в материале матрицы

$$\frac{du_z^m}{dR} = \frac{\sigma_{rz}^m}{\mu_m} = \frac{\sigma_{rz}^m \Big|_{R=R_0}}{\mu_m} \frac{R_0}{R}$$

откуда

$$u_z^m(R) - u_z^m(R_0) = \frac{\sigma_{rz}^m \Big|_{R=R_0}}{\mu_m} R_0 \ln \frac{R}{R_0}$$

Приближенное уравнение равновесия в волокне:

$$\frac{d\sigma_{zz}^f}{dZ} = -\frac{2}{R_0} \sigma_{rz}^m \Big|_{R=R_0} = -\frac{2\mu_m [u_z^m(R_1) - u_z^m(R_0)]}{R_0^2 \ln(R_1/R_0)} \quad (3.3.4)$$

Далее, полагается, что выполняется условие прилипания на границе контакта между волокном и матрицей, а также, что сдвиговыми деформациями в волокне можно пренебречь, тогда продольное перемещение точек волокна u_z^f совпадает с $u_z^m(R_0)$. Тогда

$$\frac{du_z^f}{dZ} = \varepsilon_f = \frac{\sigma_{zz}^f}{E_f} \quad (3.3.5)$$

Для матрицы полагается

$$\frac{du_z^m(R_1)}{dZ} = \varepsilon_c \quad (3.3.6)$$

где ε_c есть макроскопическая деформация композита.

Дифференцируя (3.3.4) по z , с учетом (3.3.5) и (3.3.6) имеем следующее дифференциальное уравнение для σ_{zz}^f :

$$\frac{d^2 \sigma_{zz}^f}{dZ^2} = -\frac{2\mu_m}{R_0^2 \ln(R_1/R_0)} \frac{d}{dZ} [u_z^m(R_1) - u_z^f] = \frac{n^2}{R_0^2} (\sigma_{zz}^f - E_f \varepsilon_c), \quad n = \sqrt{\frac{2\mu_m}{E_f \ln(R_1/R_0)}}$$

Полагая, что торцы волокна свободны от напряжений, т.е. $\sigma_{zz}^f|_{Z=\pm L} = 0$, проинтегрируем это уравнение:

$$\sigma_{zz}^f = E_f \varepsilon_c \left[1 - \frac{\cosh(nZ/R_0)}{\cosh(nL/R_0)} \right]$$

Среднее по длине волокна ($2L$) напряжение есть

$$\langle \sigma_{zz}^f \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L \sigma_{zz}^f dZ = \frac{E_f \varepsilon_c}{L} \int_0^L \left[1 - \frac{\cosh(nZ/R_0)}{\cosh(nL/R_0)} \right] dZ = E_f \varepsilon_c \left[1 - \frac{\tanh(ns)}{ns} \right], \quad s = L/R_0$$

Полагая, что среднее осевое напряжение в матрице есть $\langle \sigma_{zz}^m \rangle = E_m \varepsilon_c$, по правилу осреднения имеем

$$\langle \sigma_{zz}^c \rangle = (R_0/R_1)^2 \langle \sigma_{zz}^f \rangle + [1 - (R_0/R_1)^2] \langle \sigma_{zz}^m \rangle = E_c \varepsilon_c$$

Полагая гексагональную упаковку однонаправленных волокон, имеем $(R_0/R_1)^2 = 2\sqrt{3}V_f/\pi \approx V_f$, где V_f есть объемная доля волокон в композите. Окончательно, из последней формулы получим выражение для упругого модуля композита при растяжении в направлении волокон:

$$E_c = V_f \left[1 - \frac{\tanh(ns)}{ns} \right] E_f + (1 - V_f) E_m$$

В следующих разделах мы строим для гиперупругого материала (неогуковское тело) свою модель по похожей схеме с рядом отличий. Во-первых, вместо предположения $\langle \sigma_{zz}^m \rangle = E_m \varepsilon_c$ мы получаем точное решение уравнений нелинейной упругости в матрице; во-вторых, учитываем утоньшение волокна при растяжении.

3.3.2. Анализ деформации материала матрицы. В цилиндрической системе координат с центром в плоскости симметрии представительного объема (рис. 3.3.1) перемещение точек материала матрицы описывается уравнениями $r = f(R)$, $\varphi = \theta$, $z = Zg(R)$. Здесь $g(R)$ безразмерная функция; функция $f(R)$ имеет размерность длины; (R, θ, Z) и (r, φ, z) определяют положение точки среды в исходном и деформированном состоянии соответственно.

В материале матрицы тензор градиента деформации $\mathbf{F}^m$ и левый тензор деформации Коши – Грина $\mathbf{B}^m = \mathbf{F}^m (\mathbf{F}^m)^T$ имеют следующие координатные представления:

$$[\mathbf{F}^m] = \begin{pmatrix} f' & 0 & 0 \\ 0 & f/R & 0 \\ Zg' & 0 & g \end{pmatrix}, [\mathbf{B}^m] = \begin{pmatrix} f'^2 & 0 & Zgf' \\ 0 & (f/R)^2 & 0 \\ Zgf' & 0 & (Zg')^2 + g^2 \end{pmatrix}$$

обозначено $f' = df/dR$, $g' = dg/dR$.

Условие несжимаемости

$$\det(\mathbf{F}^m) = gff'/R = 1 \quad (3.3.7)$$

Для тензора напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}^m$ в материале матрицы примем гиперупругий закон с потенциалом неогнутого тела $\Psi_m = (E_m/6)(I_1 - 3) = (E_m/6)[\text{tr}(\mathbf{B}^m) - 3]$, где E_m есть нелинейный аналог модуля Юнга материала матрицы:

$$\boldsymbol{\sigma}^m = -p_m \mathbf{I} + 2\mathbf{B}^m \frac{\partial \Psi_m}{\partial \mathbf{B}^m} = -p_m \mathbf{I} + 2\mathbf{B}^m \frac{\partial \Psi_m}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{B}^m} = -p_m \mathbf{I} + \frac{E_m}{3} \mathbf{B}^m$$

Компоненты $\boldsymbol{\sigma}^m$ есть

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^m &= -p + \frac{E_m}{3} f'^2 \\ \sigma_{\varphi\varphi}^m &= -p + \frac{E_m}{3} \left(\frac{f}{R} \right)^2 \\ \sigma_{zz}^m &= -p + \frac{E_m}{3} [(Zg')^2 + g^2] \\ \sigma_{rz}^m &= \frac{E_m}{3} Zfg' \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Условие равновесия $\nabla \cdot \sigma^m = 0$ дает систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}^m - \sigma_{\varphi\varphi}^m}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}^m}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^m}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\sigma_{rz}^m}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^m}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^m}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Учитывая следующие правила дифференцирования

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\quad)}{\partial z} &= \frac{\partial(\quad)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial(\quad)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial(\quad)}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial(\quad)}{\partial Z} \frac{1}{g} \\ \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial(\quad)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial(\quad)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial(\quad)}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{1}{f'} \left(\frac{\partial(\quad)}{\partial R} - Z \frac{\partial(\quad)}{\partial Z} \frac{g'}{g} \right) \end{aligned}$$

и используя (3.3.8), преобразуем (3.3.9) к виду

$$\frac{3}{E_m} \frac{dp}{dR} = \left[f'^2 - \left(\frac{f}{R} \right)^2 \right] \frac{f'}{f} + 2ff'' + \frac{g'}{g} f'^2 \quad (3.3.10)$$

$$\frac{f'}{f} + \frac{f''}{f'} + \frac{g'}{g} + \frac{g''}{g'} = 0 \quad (3.3.11)$$

Здесь было предположено, что функция добавочного давления не зависит от координаты z , т.е. $p = p(R)$. Уравнение (3.3.10) служит для нахождения $p(R)$ по известным функциям $f(R)$ и $g(R)$. Уравнение (3.3.11) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dR} [\ln(ff'gg')] = 0$$

которое, с учетом условия несжимаемости (3.3.7), дает $d[\ln(Rg')]/dR = 0$, откуда $g = C \ln R + B$, где C и B есть константы интегрирования. Так же, как и в оригинальной SL модели мы используем условие прилипания на цилиндрической поверхности контакта матрицы с волокном. Это модельное допущение выполняется в реальных композитах при не слишком высоких уровнях продольной деформации. В сильно деформированных волокнистых компози- тах важную роль начинают играть эффекты пластического течения, локаль- ного разрушения материала матрицы и (или) волокон, а также проскальзыва- ние между матрицей и волокнами. Для улучшения адгезии на межфазной границе применяются различные методы, в том числе использующие введе- ние специальных связующих агентов [305]. Тем не менее, мы полагаем, что

такое допущение пригодно для оценки начального упругого модуля композита. Итак, граничное условие прилипания имеет вид $g(R_0)=1+\varepsilon_f$ и дает $B=1+\varepsilon_f-C\ln R_0$ и $g=1+\varepsilon_f+C\ln(R/R_0)$. Здесь ε_f есть продольная деформация волокна, которую будем считать некоторой постоянной, зависящей от приложенной к композиту растягивающей нагрузки (исследования, например, [306, 307] говорят о том, что продольная деформация волокна действительно чаще всего мало меняется по его длине, за исключением областей, близких к концам волокна). Константу C удобно выразить через осевое смещение внешнего обода полого цилиндра ΔL (см. рис. 3.3.1): $\Delta L/L = g(R_1)-1 = \varepsilon_f + C\ln(R_1/R_0)$, откуда $C = (\Delta L/L - \varepsilon_f)/\ln(R_1/R_0)$ и окончательно

$$g = 1 + \varepsilon_f + (\varepsilon_c - \varepsilon_f) \frac{\ln(R/R_0)}{\ln(R_1/R_0)} = 1 + \varepsilon_f + (\varepsilon_c - \varepsilon_f) \frac{\ln \xi}{\ln \xi_1} \quad (3.3.12)$$

где $\varepsilon_c = \Delta L/L$, $\tilde{R} = R/R_0$, $\tilde{R}_1 = R_1/R_0$, $\xi = (R/R_0)^2$, $\xi_1 = (R_1/R_0)^2$. Величину $\varepsilon_c = \Delta L/L$ будем ассоциировать с макроскопической величиной продольной деформации композита.

Теперь проинтегрируем уравнение несжимаемости (3.3.7) относительно функции $f(R)$. Введем замену $Y = (f/R_0)^2$, тогда уравнение несжимаемости (3.3.7) принимает вид $dY/d\xi = 1/g$, и с учетом (3.3.12) и граничного условия $f(R_0) = r_0$ имеем

$$Y = \left(\frac{f}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon_c - \varepsilon_f} \xi_1^{-\frac{1+\varepsilon_f}{\varepsilon_c - \varepsilon_f}} \ln \xi_1 \left\{ \operatorname{li} \left(\xi \xi_1^{\frac{1+\varepsilon_f}{\varepsilon_c - \varepsilon_f}} \right) - \operatorname{li} \left(\xi_1^{\frac{1+\varepsilon_f}{\varepsilon_c - \varepsilon_f}} \right) \right\} \quad (3.3.13)$$

где $\operatorname{li}(\xi) = \int_0^\xi \frac{d\zeta}{\ln \zeta}$ есть интегральный логарифм (аргументы этой функции в формуле (3.3.13) больше 1).

При $\varepsilon_f \rightarrow 0$ и $\varepsilon_c \rightarrow 0$ по (3.3.13) $f \rightarrow R$, а также по (3.3.12) $g \rightarrow 1$, что соответствует недеформированному состоянию.

Величину r_0 , которая представляет собой радиус деформированного волокна, найдем в следующем разделе после рассмотрения деформации в материале волокна.

3.3.3. Анализ деформации материала волокна. Подобно анализу для модели SL, будем использовать приближенное уравнение равновесия для волокна:

$$\frac{d\sigma_{zz}^f}{dZ} = -\frac{2}{R_0} \sigma_{rz}^m \Big|_{R=R_0} \quad (3.3.14)$$

Исходя из непрерывности касательного напряжения, а также (3.3.7), (3.3.8), (3.3.12) и граничных условий $f(R_0)=r_0$ и $g(R_0)=1+\varepsilon_f$, имеем

$$\sigma_{rz}^m \Big|_{R=R_0} = \frac{E_m}{3} Z (g'f') \Big|_{R=R_0} = \frac{E_m}{3} Z \left(\frac{g'R}{gf} \right) \Big|_{R=R_0} = \frac{2E_m}{3} \frac{Z}{r_0} \frac{1}{\ln \xi_1} \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_f}{1 + \varepsilon_f}$$

Интегрируя (3.3.14) с граничными условиями $\sigma_{zz}^f \Big|_{Z=\pm L} = 0$ (торцы волокна свободны от напряжений), имеем

$$\sigma_{zz}^f = \frac{2E_m}{3} \frac{1}{R_0 r_0} \frac{1}{\ln \xi_1} \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_f}{1 + \varepsilon_f} (L^2 - Z^2)$$

Средняя величина осевого напряжения в волокне есть

$$\langle \sigma_{zz}^f \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L \sigma_{zz}^f dZ = \frac{4E_m}{9} \frac{R_0}{r_0} \frac{s^2}{\ln \xi_1} \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_f}{1 + \varepsilon_f} \quad (3.3.15)$$

Как и ранее геометрический параметр волокна s есть отношение его длины $2L$ к диаметру $2R_0$, $s = L/R_0$.

Мы будем рассматривать деформацию волокна приближенно, как растяжение цилиндра осевым напряжением $\langle \sigma_{zz}^f \rangle$. При этом мы пренебрегаем радиальным напряжением на границе контакта волокна и матрицы, чтобы не усложнять решение, поскольку это напряжение значительно ниже, чем касательное напряжение $\sigma_{rz}^m \Big|_{R=R_0}$, посредством которого и передается нагрузка на волокно.

Принимая для материала волокна упругую модель неогнукова тела, имеем:

- условие несжимаемости

$$(R_0/r_0)^2 = 1 + \varepsilon_f \quad (3.3.16)$$

- известное соотношение для осевого напряжения при простом растяжении

$$\langle \sigma_{zz}^f \rangle = \frac{E_f}{3} \left[(1 + \varepsilon_f)^2 - (1 + \varepsilon_f)^{-1} \right] \quad (3.3.17)$$

Сравнивая (3.3.15) и (3.3.17), раскладывая члены, включающие ε_f , по степеням этой величины и отбрасывая величины порядка ε_f^3 и выше, можно записать

$$\frac{4E_m}{9} \frac{s^2}{\ln \xi_1} (\varepsilon_c - \varepsilon_f) = E_f \varepsilon_f \left(1 + \frac{\varepsilon_f}{2} \right)$$

откуда следует простое соотношение между ε_c и ε_f :

$$\varepsilon_f = -(1 + \chi) + \sqrt{(1 + \chi)^2 + 2\chi\varepsilon_c}, \quad \chi = \frac{4 E_m}{9 E_f} \frac{s^2}{\ln \xi_1} \quad (3.3.18)$$

Из (3.3.18) следует, что при малых деформациях матрицы $\varepsilon_c \rightarrow 0$ выполняется предельное соотношение $\lim_{\varepsilon_c \rightarrow 0} (\varepsilon_f / \varepsilon_c) = \chi / (1 + \chi) < 1$. Продольная деформация волокна меньше продольной макроскопической деформации композита. Например, для композита с соотношением упругих модулей $E_f / E_m = 100$ при геометрическом параметре волокна $s = 10$ и объемном содержании волокна $V_f = 0.1$ ($\xi_1 \approx 1/V_f = 10$) имеем величину безразмерного комплекса $\chi \approx 0.193$ и $\lim_{\varepsilon_c \rightarrow 0} (\varepsilon_f / \varepsilon_c) = 0.16$. То есть при таких параметрах композита продольная деформация волокна составляет примерно 16% от продольной деформации композита в целом. Поперечная деформация волокна при этом в два раза меньше:

$$\text{по (3.3.16)} \quad \lim_{\varepsilon_c \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_c} \frac{R_0 - r_0}{R_0} = \lim_{\varepsilon_c \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_f}} \right) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon_c \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_c} \approx 0.08.$$

3.3.4. Энергия деформации волокнистого композита. Теперь запишем выражение для энергии деформации представительного объема в целом. Для волокна при простом растяжении объемная плотность упругой энергии выражается известной формулой

$$\Psi_f = \frac{E_f}{6} \left[(1 + \varepsilon_f)^2 + \frac{2}{1 + \varepsilon_f} - 3 \right]$$

Интегрируя по объему волокна (половина, лежащая в области $z \geq 0$), имеем

$$W_f = 2\pi \int_0^{R_0} \int_0^L \Psi_f R dZ dR = \frac{\pi R_1^2 L E_f}{6 \xi_1} \left[(1 + \varepsilon_f)^2 + \frac{2}{1 + \varepsilon_f} - 3 \right]$$

Для материала матрицы запишем:

$$\Psi_m = \frac{E_m}{6} (\text{tr} \mathbf{B} - 3) = \frac{E_m}{6} \left[(Zg')^2 + g^2 + (f')^2 + (f/R)^2 - 3 \right] = \frac{E_m}{6} \left[\frac{4}{\xi} \left(\frac{Z}{R_0} \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_f}{\ln \xi_1} \right)^2 + g^2 + \frac{1}{g^2} \frac{\xi}{Y} + \frac{Y}{\xi} - 3 \right]$$

Интегрируя Ψ_m по объему матрицы (половина, лежащая в области $z \geq 0$), с учетом предыдущего приближенного равенства имеем

$$W_m = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} \int_0^L \Psi_m R dZ dR = \frac{\pi R_0^2 L E_m}{6} \left[\frac{4s^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_f)^2}{3 \ln \xi_1} + \int_1^{\xi_1} \left(g^2 + \frac{1}{g^2} \frac{\xi}{Y} + \frac{Y}{\xi} - 3 \right) d\xi \right]$$

Общая энергия деформирования (удельная по представительному объему):

$$\begin{aligned} \frac{W_{f+m}}{\pi R_1^2 L} &= \frac{W_f + W_m}{\pi R_1^2 L} = \frac{E_f}{6 \xi_1} \left[(1 + \varepsilon_f)^2 + \frac{2}{1 + \varepsilon_f} - 3 \right] + \\ &+ \frac{E_m}{6 \xi_1} \left[\frac{4s^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_f)^2}{3 \ln \xi_1} + \int_1^{\xi_1} \left(g^2 + \frac{1}{g^2} \frac{\xi}{Y} + \frac{Y}{\xi} - 3 \right) d\xi \right] \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Геометрический параметр $\xi_1 = (R_1/R_0)^2$ может быть связан с объемным содержанием волокна в композите. В то время как при гексагональной упаковке однонаправленных волокон $\xi_1 = (R_1/R_0)^2 = \pi / (2\sqrt{3}V_f)$, часто принимают $\xi_1 \approx 1/V_f$. Везде далее будем пользоваться последним равенством.

Уравнение (3.3.18) и формула (3.3.19) дают возможность получить зависимость энергии упругого деформирования w_{f+m} от деформации композита ε_c при известных характеристиках E_m , E_f , s , V_f . Инженерное растягивающее напряжение для композита может быть получено по (3.3.19) численно по

формуле $\sigma_l^{eng} = \frac{d}{d\varepsilon_c} \left(\frac{W_{f+m}}{\pi R_1^2 L} \right)$

3.3.5. Начальный упругий модуль волокнистого композита. Сопоставление с другими моделями. В этом разделе мы получим простые формулы для начального (при $\varepsilon_c = 0$) упругого (тангенциального) модуля волокнистого композита по представленной модели.

Чтобы избежать громоздких выражений, содержащих функцию интегрального логарифма, используем следующее приближенное равенство, верное для больших t_1, t_2 :

$$\text{li}(t_1) - \text{li}(t_2) = \int_{t_2}^{t_1} \frac{d\zeta}{\ln \zeta} \approx \frac{t_1}{\ln t_1} - \frac{t_2}{\ln t_2}$$

Поскольку в формулах предыдущих разделов аргументы функции интегрального логарифма стремятся к бесконечности при $\varepsilon_f \rightarrow 0$ и $\varepsilon_c \rightarrow 0$, это приближение вполне оправданно.

В таком случае имеем

$$Y(\xi) \approx \frac{\xi}{1 + \varepsilon_f} \frac{\ln \xi_1^{\frac{1 + \varepsilon_f}{\varepsilon_c - \varepsilon_f}}}{\ln \xi + \ln \xi_1^{\frac{1 + \varepsilon_f}{\varepsilon_c - \varepsilon_f}}} = \frac{\xi}{g} \quad (3.3.20)$$

и

$$g^2 + \frac{1}{g^2} \frac{\xi}{Y} + \frac{Y}{\xi} - 3 \approx g^2 + \frac{2}{g} - 3 \quad (3.3.21)$$

Находя производную (3.3.19) по ε_c с помощью правила Лопиталья, и учитывая (3.3.20) и (3.3.21), имеем

$$\begin{aligned} E_c^0 &= \lim_{\varepsilon_c \rightarrow 0} \frac{\sigma_l^{eng}}{\varepsilon_c} = \lim_{\varepsilon_c \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_c} \frac{d}{d\varepsilon_c} \left(\frac{W_{f+m}}{\pi R_1^2 L} \right) = \frac{E_f}{3\xi_1} \lim_{\varepsilon_c \rightarrow 0} \left\{ \left[1 + 2(1 + \varepsilon_f)^{-3} \right] \left(\frac{d\varepsilon_f}{d\varepsilon_c} \right)^2 \right\} + \\ &+ \frac{4}{9} \frac{E_m}{\xi_1} \frac{s^2}{\ln \xi_1} \lim_{\varepsilon_c \rightarrow 0} \left(1 - \frac{d\varepsilon_f}{d\varepsilon_c} \right)^2 + \frac{E_m}{3\xi_1} \int_1^{\xi_1} \lim_{\varepsilon_c \rightarrow 0} \left\{ (1 + 2g^{-3}) \left(\frac{dg}{d\varepsilon_c} \right)^2 \right\} d\xi = \\ &= \frac{E_f}{\xi_1} \left(\frac{\chi}{1 + \chi} \right)^2 + \frac{4}{9} \frac{E_m}{\xi_1} \frac{s^2}{\ln \xi_1} \left(\frac{1}{1 + \chi} \right)^2 + \frac{E_m}{\xi_1} \int_1^{\xi_1} \left(\frac{\chi}{1 + \chi} + \frac{1}{1 + \chi} \frac{\ln \xi}{\ln \xi_1} \right)^2 d\xi = \\ &= \frac{E_f}{\xi_1} \frac{\chi}{1 + \chi} + \frac{\xi_1 - 1}{\xi_1} \frac{E_m}{(\chi + 1)^2} \left[\chi^2 + 2 \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 - 1} - \frac{1}{\ln \xi_1} \right) \chi + \frac{2}{\ln^2 \xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi_1 - 1} \left(1 - \frac{2}{\ln \xi_1} \right) \right] \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\frac{dg}{d\varepsilon_c} = \frac{d\varepsilon_f}{d\varepsilon_c} + \frac{\ln \xi}{\ln \xi_1} \left(1 - \frac{d\varepsilon_f}{d\varepsilon_c} \right)$ и $\lim_{\varepsilon_c \rightarrow 0} \frac{d\varepsilon_f}{d\varepsilon_c} = \frac{\chi}{1 + \chi}$.

Окончательно, учитывая связь между геометрическим параметром $\xi_1 = (R_1/R_0)^2$ и объемным содержанием волокна в композите в виде $V_f = 1/\xi_1$, упругий модуль по предложенной модели имеет вид:

$$E_c^{HESL} = V_f E_f v_f^{HESL} + (1 - V_f) E_m v_m^{HESL} \quad (3.3.22)$$

$$v_f^{HESL}(\chi) = \frac{\chi}{\chi + 1} \in (0, 1), \quad v_m^{HESL}(\chi, V_f) = \frac{\chi^2 + 2b\chi + c}{(\chi + 1)^2} \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

$$b(V_f) = \frac{1}{1 - V_f} - \frac{1}{|\ln V_f|} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad c(V_f) = \frac{2}{\ln^2 V_f} + \frac{1}{1 - V_f} \left(1 - \frac{2}{|\ln V_f|}\right) \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

$$\chi = \frac{4 E_m}{9 E_f} \frac{s^2}{|\ln V_f|}$$

Для сравнения, по модели ROM (3.3.1): $E_c^{ROM} = V_f E_f v_f^{ROM} + (1 - V_f) E_m v_m^{ROM}$, $v_f^{ROM} = 1$, $v_m^{ROM} = 1$.

Для модели SL (3.3.3) (при условии несжимаемости матрицы):

$$E_c^{SL} = V_f E_f v_f^{SL} + (1 - V_f) E_m v_m^{SL}, \quad v_f^{SL}(\chi) = 1 - \frac{\tanh \sqrt{3\chi}}{\sqrt{3\chi}}, \quad v_m^{SL} = 1.$$

При $s = (2L)/(2R_0) \rightarrow \infty$ и модель SL, и модель НТ, и предложенная здесь модель переходят в модель ROM.

На рис. 3.3.2, а приведены изоуровни поверхности $v_m^{HESL}(\chi, V_f)$; на рис. 3.3.2, б графики функций $v_f^{HESL}(\chi)$ и $v_f^{SL}(\chi)$.

На рис. 3.3.3, 3.3.4 приведено сравнение прогнозных значений упругого модуля композита для полученной модели, модели SL (3.3.3), а также для модели НТ (3.3.2). Чтобы подчеркнуть разницу между моделями, на рисунках приведено отношение полученных по ним результатов к результату, полученному по правилу смесей (3.3.1), E_c^{HT}/E_c^{ROM} , E_c^{SL}/E_c^{ROM} , E_c^{HESL}/E_c^{ROM} .

Оценка упругого модуля композита, полученная по представленной модели для достаточно длинных волокон ($s > 10 \div 20$), оказывается несколько выше оценки, полученной по оригинальной микромеханической модели SL, за счет отличий в описании напряженного состояния представительного элемента объема; и сильно выше, чем оценка полуэмпирической модели НТ. Это

различие более заметно для композитов с высоким значением параметра E_f/E_m . Зависимость различия между моделями от объемного содержания волокон и геометрического параметра волокна немонотонная и лучше всего иллюстрируется рисунками 3.3.2 и 3.3.3.

Интересным предельным случаем является случай, когда волокно принимается абсолютно жестким, то есть $E_f/E_m \rightarrow \infty$. Тогда, переходя к пределу в (3.3.22), получим

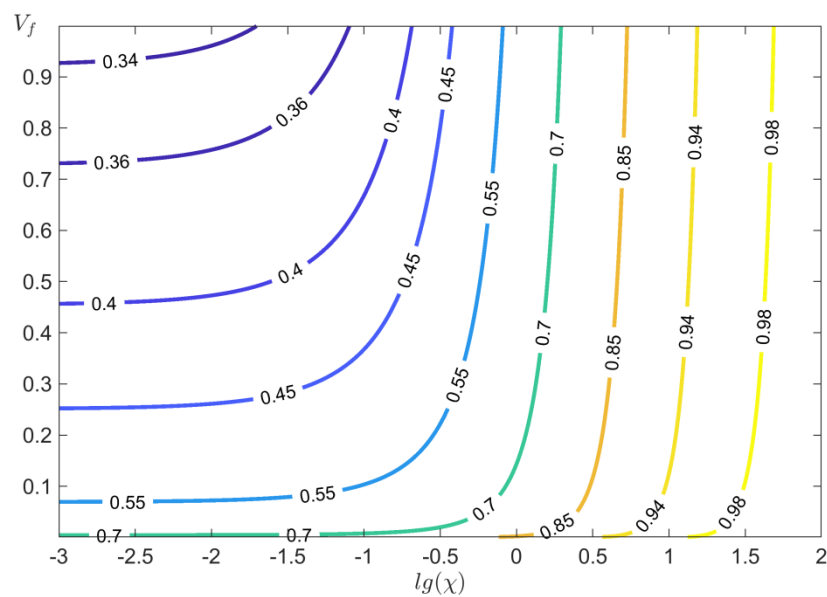
$$\frac{E_c^{HESL}}{E_m} = 1 + \frac{4s^2}{9} \frac{V_f}{|\ln V_f|} + 2 \frac{1-V_f}{\ln^2 V_f} - \frac{2}{|\ln V_f|} \quad (3.3.23)$$

При тех же условиях модель SL приводит к выражению

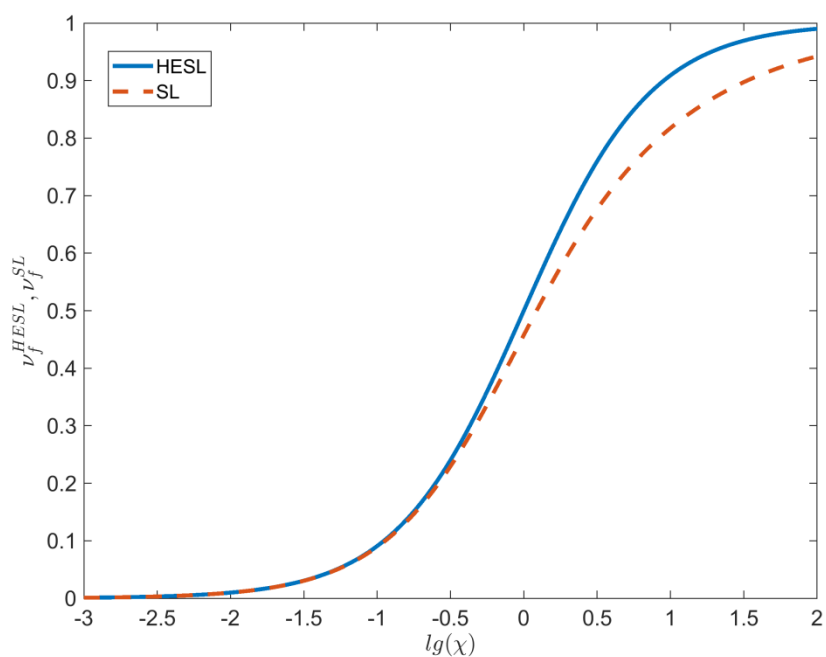
$$\frac{E_c^{SL}}{E_m} = 1 - V_f + \frac{4s^2}{9} \frac{V_f}{|\ln V_f|} \quad (3.3.24)$$

а для модели НТ

$$\frac{E_c^{HT}}{E_m} = 1 + \frac{V_f}{1-V_f} (1 + 2s) \quad (3.3.25)$$



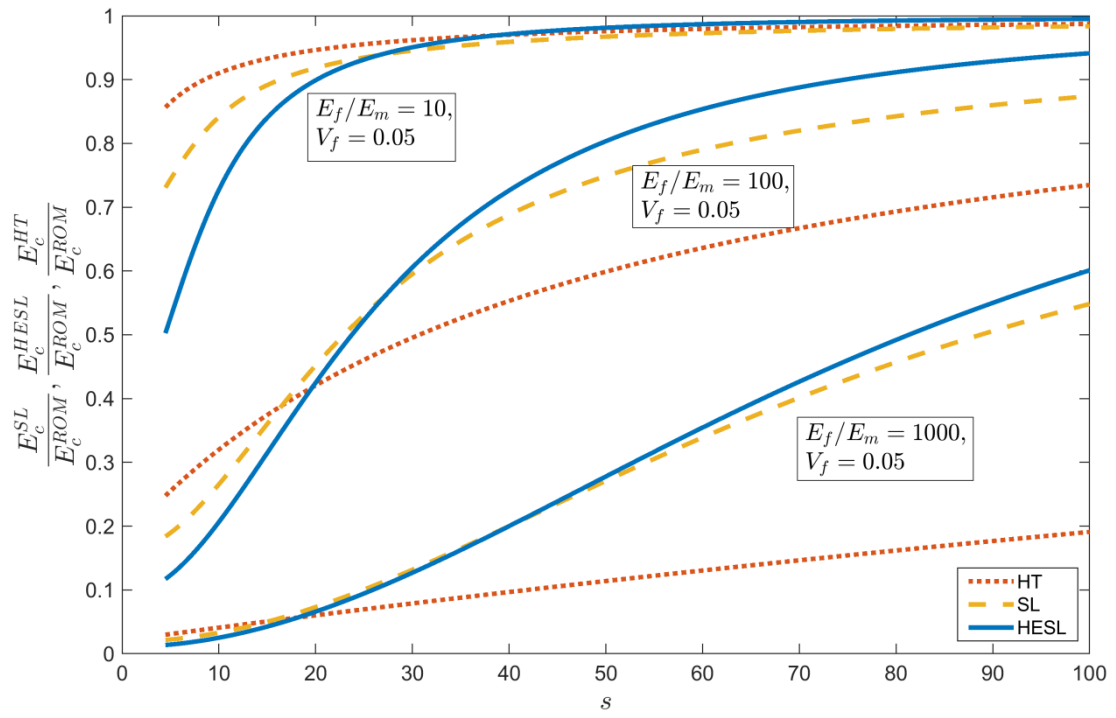
a)



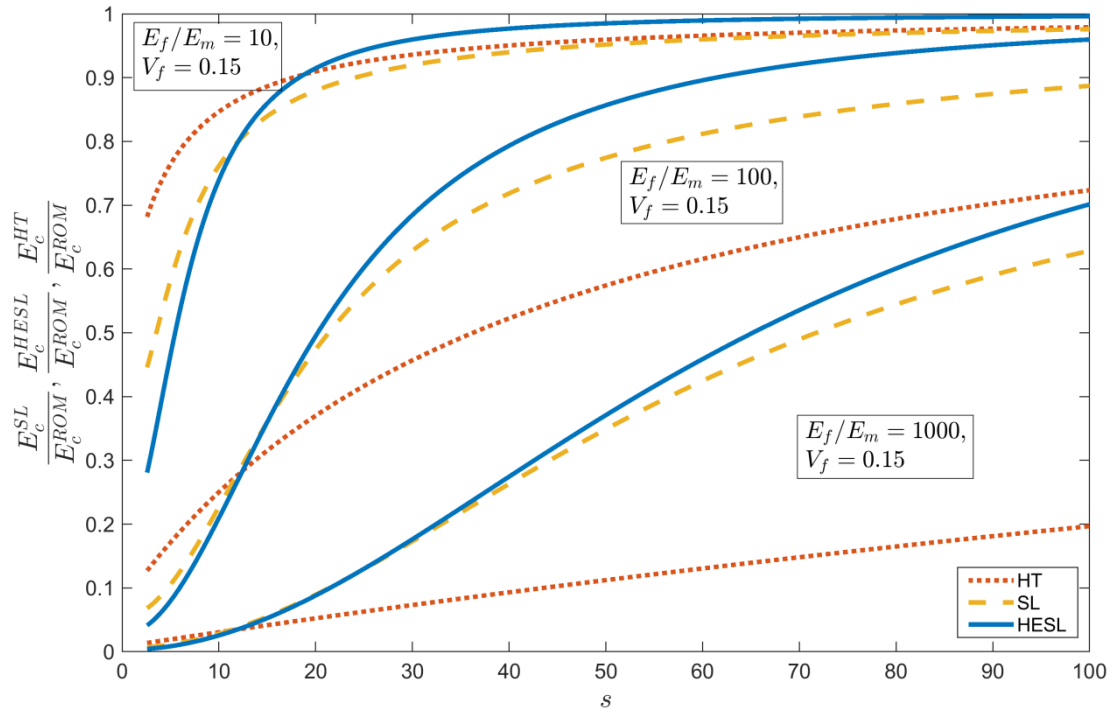
b)

Рисунок 3.3.2 – Функция $\nu_m^{HESL}(\chi, V_f)$, соответствующая вкладу материала матрицы в упругий модуль композита, (a); и функция $\nu_f^{HESL}(\chi)$ в сравнении с $\nu_f^{SL}(\chi)$, соответствующая вкладу материала волокна в упругий модуль композита (b) (см. формулу (3.3.22)). В представленной модели вклад матрицы в общий упругий модуль ниже, чем для классической модели SL, поскольку

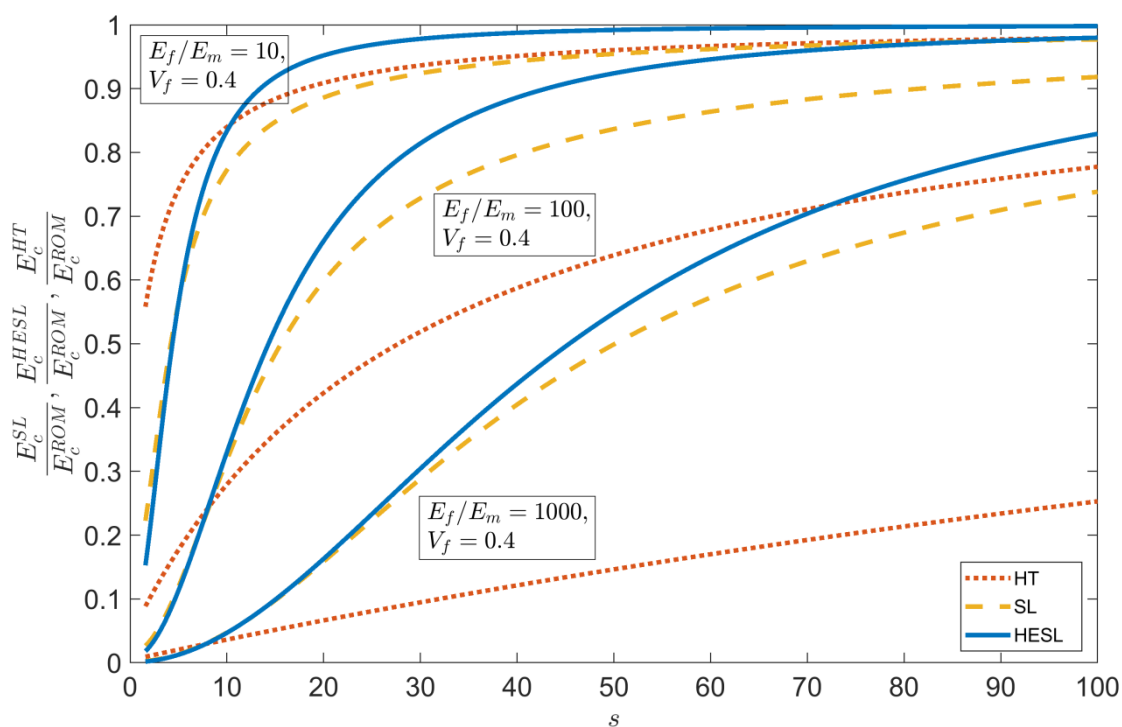
$$\nu_m^{HESL} < \nu_m^{SL} = 1, \text{ а вклад волокна выше, поскольку } \nu_f^{HESL} > \nu_f^{SL}$$



a)

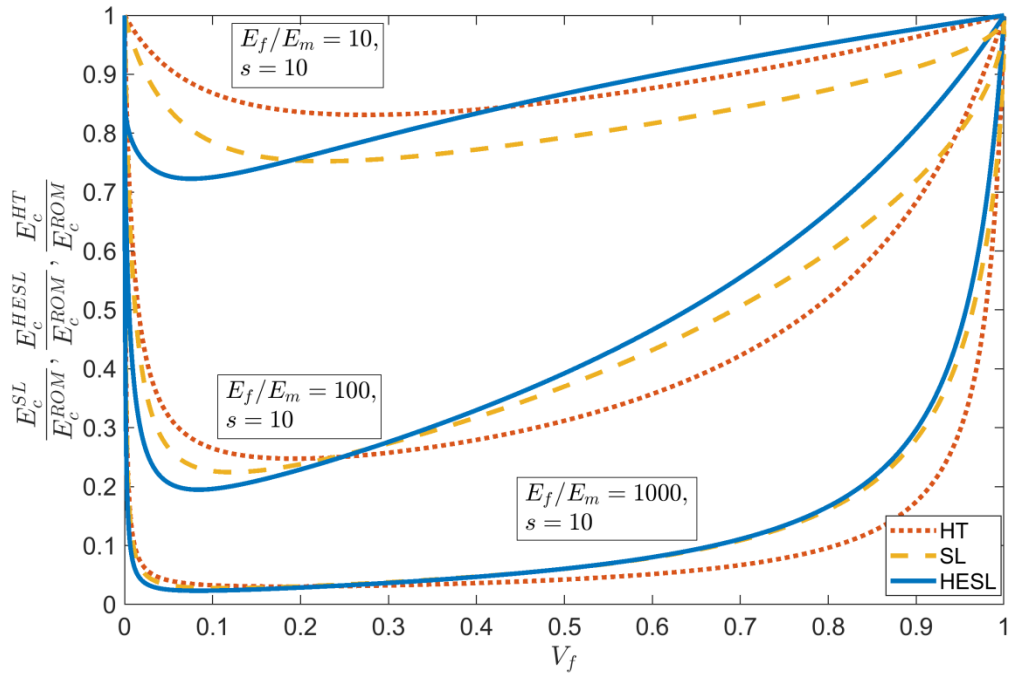


b)

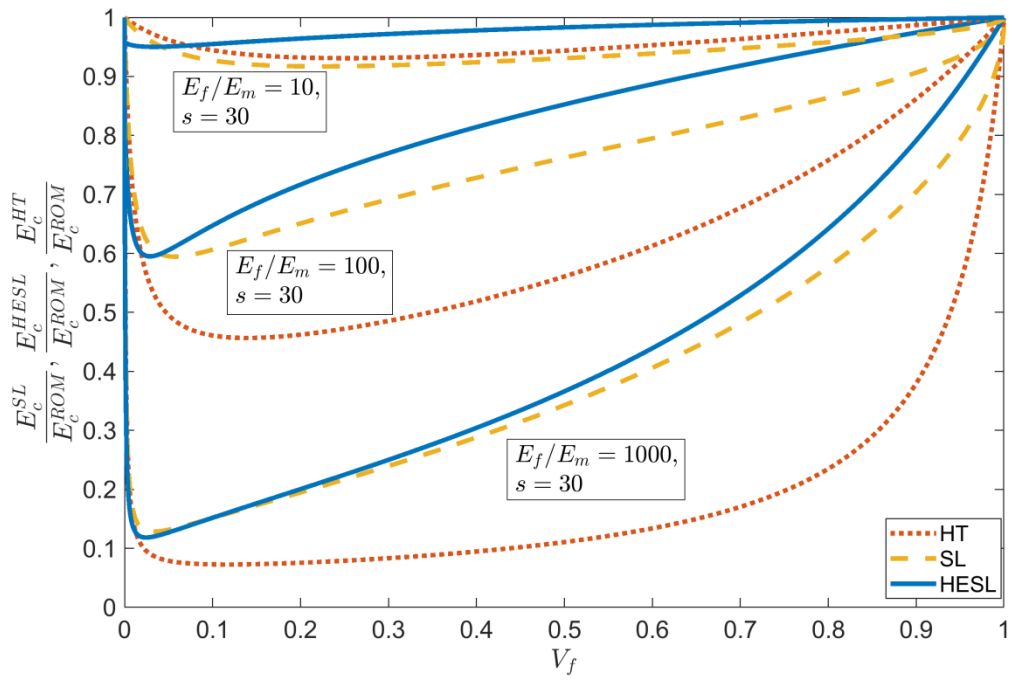


с)

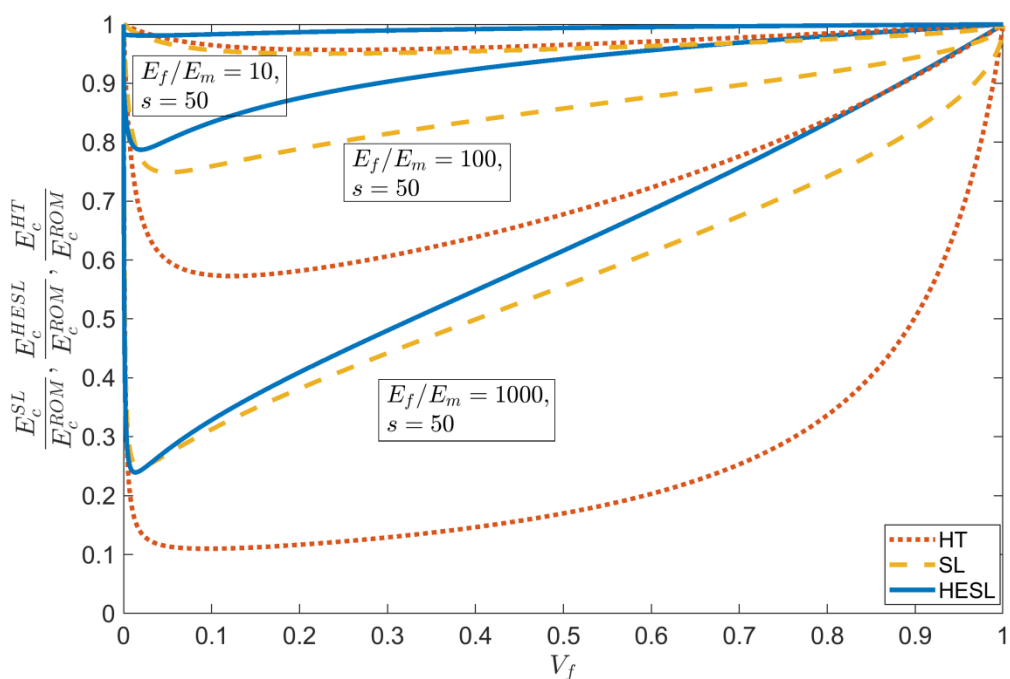
Рисунок 3.3.3 – Прогнозируемые упругие модули композита (отнесенные к модулю, полученному по правилу смесей (3.3.1)) в зависимости от параметра s (отношение длины волокна к его диаметру); HT – модель Halpin – Tsai (формула (3.3.2), SL – shear lag model (3.3.3), HESL – hyperelastic shear lag model (3.3.22)); а, б, с – при объемной доле армирующих волокон $V_f = 0.05, 0.15, 0.4$ соответственно



a)



b)



с)

Рисунок 3.3.4 – Прогнозируемые упругие модули композита (отнесенные к модулю, полученному по правилу смесей (3.3.1)) в зависимости от объемной доли волокон V_f ; HT – модель Halpin – Tsai (формула (3.3.2), SL – shear lag model (3.3.3), HESL – hyperelastic shear lag model (3.3.22); a, b, c – при значениях параметра s (отношение длины волокна к его диаметру) $s = 10, 30, 50$ соответственно

3.3.6. Сравнение с FEM и BEM моделями. В [292] приведены расчетные данные об упругом модуле композитов, армированных короткими однонаправленными волокнами, полученные конечно-элементным моделированием. Данные получены при различных упорядоченных вариантах компоновки волокон, с различными расстояниями между торцами волокон. На рис. 3.3.5 эти данные представлены маркерами (более подробно о компоновке волокон в модели см. [292]; результаты FEM анализа для значений параметра $s < 4$ очень сильно зависят от компоновки волокон и не воспроизведены на рисунке). Расчетные данные получены при значении объемного содержания волокон $V_f = 0.2$, значении механического параметра $E_f/E_m = 30$ и при различных значениях геометрического параметра s . Для сравнения на рис. 3.3.5 также приведены кривые, полученные по моделям (3.3.2), (3.3.3) и (3.3.22).

В [308] приведены расчетные данные об упругом модуле композитов, армированных короткими однонаправленными волокнами, полученные моделированием методом граничных элементов. Эти данные получены для абсолютно жестких волокон ($E_f/E_m \rightarrow \infty$) при значении геометрического параметра $s=10$ и при различных значениях объемного содержания волокон V_f . На рис. 3.3.6 эти данные отмечены маркерами, для сравнения нанесены кривые, полученными по формулам (3.3.23)–(3.3.25).

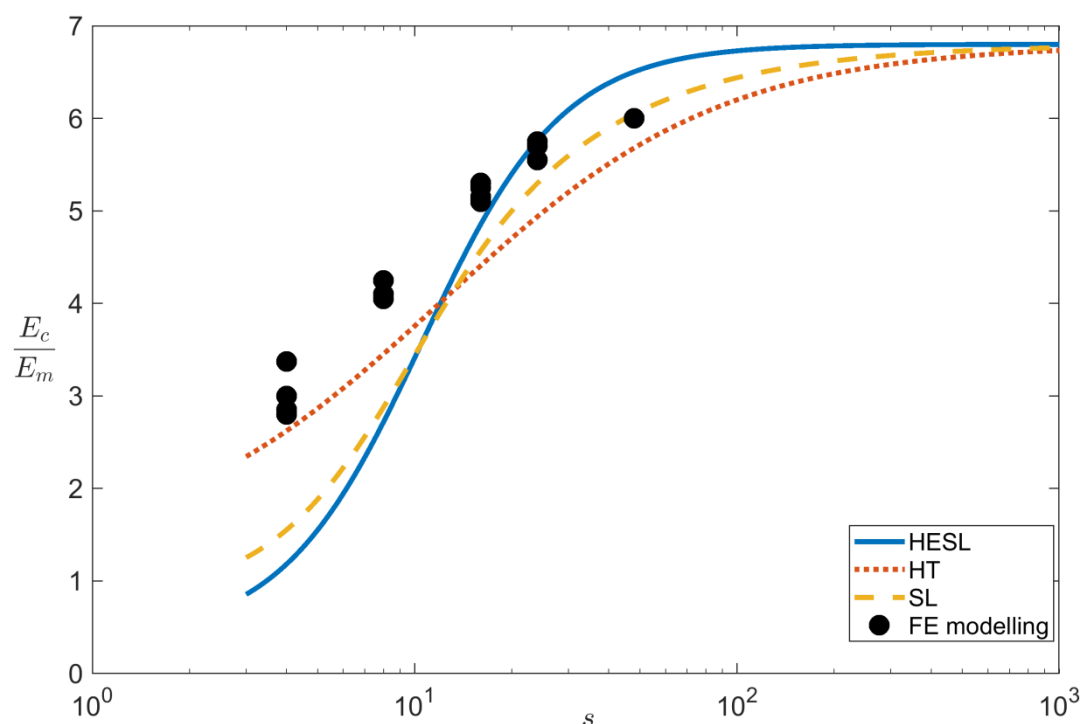


Рисунок 3.3.5 – Сравнение результатов FE моделирования [292] с моделями Halpin – Tsai, Shear Lag и Hyperelastic Shear Lag (формулы (3.3.2), (3.3.3), (3.3.22)). Параметры FEM: $V_f = 0.2$, $E_f/E_m = 30$

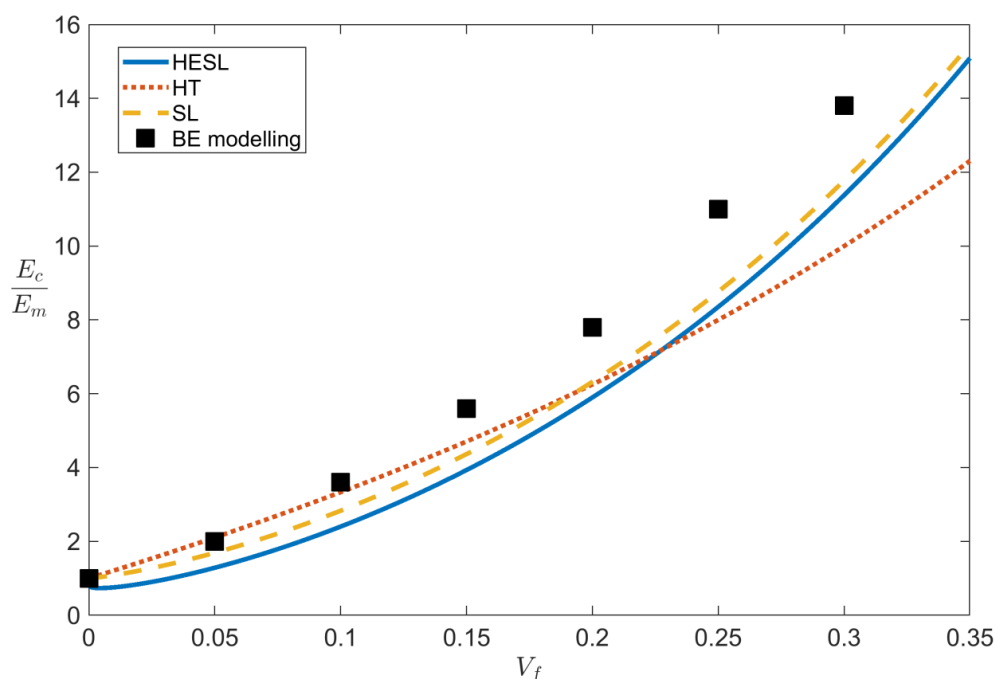


Рисунок 3.3.6 – Сравнение результатов BE моделирования [308] с моделями Halpin – Tsai, Shear Lag и Hyperelastic Shear Lag (формулы (3.3.23)–(3.3.25)).
Параметры BEM $E_f/E_m \rightarrow \infty$, $s=10$

3.3.7. Обсуждение результатов. Как и SL модель, представленная модель (3.3.22) плохо описывает упругие свойства композитов при малых (менее 10) значениях геометрического параметра s (отношения длины волокна к его диаметру). Это связано с тем, что модели не учитывают передачу нагрузки через торцы волокон, а также существенное отличие напряженного состояния в материале матрицы между торцами отдельных волокон в продольном направлении. Способы решения этой проблемы для SL модели рассмотрены, например, в [309, 310], где в представительный объем вводятся элементы материала матрицы, примыкающие к торцам волокна. Результирующий упругий модуль в этой модели определяется для представительного объема SL и последовательно соединенных с ним элементов материала матрицы, примыкающих к торцам волокна. Такая модификация SL модели лучше согласуется с экспериментальными данными (см. [309–311]), однако содержит дополнительный параметр (расстояние между волокнами в продольном направлении), который, в отличие от объемного содержания волокна, тяжело контролировать. Другие способы учета передачи нагрузки через торцы волокон

предложены в [296] и [298]. В этом случае никакого дополнительного параметра композита не требуется для формулировки модели, однако построения основаны на чисто эмпирических представлениях о величине растягивающих усилий на торцах волокон. Отметим, однако, что обе модели [296] и [298] гораздо лучше описывают поведение волокнистых композитов при малых значениях параметра s , чем исходная модель SL. Любой из этих способов может быть использован для модификации и нашей модели. Кроме того, представленная модель может быть также обобщена на случай случайно ориентированных волокон, если использовать те же представления [312], что и при построении модели Cox – Krenchel.

Выводы к разделу 3.3. На основе анализа деформации представительного объема выведена микромеханическая модель, описывающая упругий модуль композита, армированного однонаправленными короткими волокнами, при растяжении материала в направлении армирования. Анализ включает точное решение уравнений гиперупругости в деформированной матрице и приближенное решение уравнений для материала волокна. Решение построено для неогуковского материала. Получены формулы, связывающие упругую энергию деформации композита с макроскопической продольной деформацией, а также формулы, описывающие продольную и радиальную деформацию материала матрицы и волокна. Получена формула, которая связывает начальный тангенциальный упругий модуль композита (аналог модуля Юнга для линейных материалов) с механической характеристикой материалов, составляющих композит (а именно, отношением упругих модулей матрицы и волокна), а также с геометрической характеристикой волокон (отношением длины волокна к его диаметру) и с объемной долей волокон в композите. Приведено сравнение результатов с другими аналитическими моделями, а также с известными результатами численного моделирования методом конечных элементов и методом граничных элементов. Результаты обобщают известную модель Shear Lag на гиперупругий (неогуков) материал матрицы, и получены с помощью более строгого анализа, чем исходная модель.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации рассмотрен ряд задач механики необратимого деформирования, которые имеют приложение, в первую очередь, для тестирования материалов. Получены точные и приближенные аналитические решения поставленных проблем. Объединяет все постановки использование модели конечных упругих и неупругих деформаций.

Представлено аналитическое решение связанной задачи о сферически симметричной упругопластической деформации, сопровождающейся нагревом материала за счет пластической диссипации, что в свою очередь изменяет механические свойства материала. Зависимость как упругих, так и пластических свойств материала от температуры может быть произвольной. Тепловым расширением материала пренебрегается. Нагрев предполагается адиабатическим. Задача сведена к решению нелинейного ОДУ первого порядка. Полученное решение справедливо для любого несжимаемого гиперупругого материала с произвольным (независящим от давления) несингулярным условием текучести, идеально-пластического как частный случай или изотропно упрочняющегося / разупрочняющегося при деформации. Приведен пример решения для линейного разупрочняющегося при повышении температуры и деформационного упрочняющего материала с асимметрией предела текучести на растяжение-сжатие.

Предложена новая модель расширяющейся сферической полости для описания конической индентации. Для описания полимерных материалов модель включает изотропное немонотонное деформационное упрочнение. Для учета масштабного эффекта модель включает зависимость предела текучести от градиента деформации (норма градиента накопленной пластической деформации используется как нелокальная часть функции предела текучести). Для прогнозирования твердости, зависящей от глубины вдавливания, на основе предложенной модели достаточно численно проинтегрировать одно нелинейное ОДУ первого порядка, а затем вычислить определенный инте-

гнал. Для локальной модели идеальной пластичности получено аналитическое выражение, связывающее твердость с механическими характеристиками материала, которое отличается от известных моделей. Оценки твердости, полученные численно с использованием предложенной модели, сопоставлены с экспериментальными данными о масштабном эффекте для поликарбоната (РС) и полиметилметакрилата (РММА). Для локальной идеальнопластической модели формула, полученная в диссертации, сравнивается с экспериментальными данными по твердости предварительно упрочненных материалов. В обоих случаях модель показывает хорошее согласование с экспериментальными данными. Аппроксимация экспериментальных данных о масштабном эффекте при индентации РС и РММА позволяет определить, что собственный масштаб длины РММА должен быть около 3 микрон и около 9 микрон для РС.

Получены аналитические решения для упруго-пластического кручения кругового цилиндра с закрепленными торцами для различных моделей материала. В частности, для обобщенных на случай изотропного упрочнения и температурного разупрочнения пластических моделей Треска и Мизеса (первая из них использована в сочетании с упругой моделью Муни – Ривлина, вторая – с моделью обобщенного неогуковского тела). Получены формулы для крутящего момента и осевой силы (эффект второго порядка, эффект Свифта). Проведено сравнение поведения решений между собой, а также с доступными результатами расчетов методом конечных элементов в MSC.Marc и с экспериментальными данными для РС и РММА.

Получены аналитические результаты относительно предельной величины эффекта Свифта – осевой силы при кручении с закреплённым концом – для материалов с пределом текучести, достигающим насыщения. Используемая модель изотропного несжимаемого материала включает в себя гиперупругий закон общего вида, условие текучести и пластический потенциал в виде произвольных гладких функций девиаторных инвариантов J_2 и J_3 . Выведено новое универсальное соотношение для предельных значений компо-

нент тензора упругой деформации при кручении с закреплённым концом. В общем случае предельные значения осевого напряжения и крутящего момента можно рассчитать путём решения двух пар алгебраических уравнений, полученных в диссертации. В конкретных случаях, таких как модели пластичности Мизеса, Друкера и Казаку – Барлата, для этих величин в диссертации приведены простые формулы.

Построено приближенное аналитическое решение для упруго-пластической задачи кручения под высоким давлением (НРТ – High Pressure Torsion). Пластическое деформирование описывается моделью неассоциированной пластичности (условие пластичности Мора – Кулона и пластический потенциал Треска). Таким образом, учитывается зависимость пластических свойств материала от давления. Задача сводится к краевой задаче с подвижной границей для связанной нелинейной системы ДУЧП. Полученное приближенное решение построено в предположении стационарного поля давления в пластической области, что согласуется с известными экспериментальными результатами, а также с точным решением для материала, нечувствительного к давлению; это аналитическое решение очень близко к численному. Получены замкнутые выражения для тензора напряжений и накопленной пластической деформации. Исследовано влияние свойств материала, а также величины начального давления на распределение локального среднего напряжения и накопленную пластическую деформацию. Получено простое аналитическое условие для перехода на контактной границе «образец – оснастка» от сцепления к скольжению. В то же время этот переход накладывает ограничение на применимость полученного решения. При стремлении коэффициента чувствительности к давлению к нулю приближенное решение стремится к точному аналитическому упругопластическому решению в рамках ассоциированной с условием Треска пластической модели.

Получено аналитическое решение задачи о круговой трубе, вывернутой наизнанку в жесткой обойме. Получены формулы для величины радиального напряжения, которое отвечает за сцепление между трубой и обоймой. Реше-

ние получено для произвольного несжимаемого гиперупругого материала с упругим потенциалом, который зависит только от первого инварианта левого тензора деформаций Коши – Грина (обобщенный неогуковский материал) или от второго инварианта логарифмического тензора Генки (различные обобщения несжимаемого материала Генки). Решение учитывает возникновение пластического течения в областях, прилегающих к боковым поверхностям трубы. Рассмотрен как идеально-пластический, так и изотропно упрочняющийся материал общего вида. Для последнего приведена схема решения, в частном случае линейно-упрочняющегося материала получено решение в замкнутом виде. Для идеально-пластического материала решение в замкнутом виде получено для материала Трелоара, несжимаемого материала Генки и для материала Гента.

Получено аналитическое решение задачи об осесимметричном антиплоском сдвиге. Деформируемый материал заключен между двумя цилиндрическими поверхностями, одна из которых неподвижна, а другая испытывает смещение вдоль образующей. Эта задача моделирует схему испытания материалов на срез. Упругие свойства среды описываются моделью Муни – Ривлина. Материал образца изотропно упрочняющийся, закон упрочнения есть некоторая монотонная функция накопленной пластической деформации (в диссертации приведены условия, которые налагаются на функцию упрочнения для существования решения). Использовано условие пластичности Треска. Исходная нелинейная связанная система дифференциальных уравнений в частных производных сведена к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям, для решения которых нужно вычислить определенные интегралы. Полученное решение включает в себя деформирование в упругом диапазоне, зарождение пластического течения, распространение области пластического течения на всю область деформирования и последующее деформирование при развитом пластическом течении. Решение проиллюстрировано примерами материалов с линейным упрочнением, квадратичным упрочнением и упрочнением с насыщением по типу Восе. Для этих ма-

териалов приведены расчетные данные «сила – перемещение», распределение накопленной пластической деформации по сечению образца и данные об искривлении материальных волокон, которые до деформирования располагались в радиальном направлении.

Получено аналитическое решение задачи об азимутальном (круговом) сдвиге в полом цилиндре, изотропном и несжимаемом, упругие свойства которого описываются моделью Муни – Ривлина, а пластические – моделью Треска с монотонным упрочнением. Для этой задачи, как и для предыдущей, приведены достаточные условия существования полученного решения, налагаемые на функцию упрочнения материала; получены соотношения между внешним силовым воздействием и деформацией образца.

Получено решение задачи релаксации напряжений в скрученном нелинейном вязкоупругом изотропном несжимаемом стержне. Упругий потенциал и потенциал ползучести могут быть выбраны произвольно. В частности, закон ползучести может учитывать как нелинейность зависимости между скоростью деформации и эффективным напряжением, так и упрочнение или разупрочнение во времени (timehardening). Рассмотрены два варианта определяющих соотношений ползучести. Один основан на эквивалентном напряжении Треска, другой – на эквивалентном напряжении Мизеса. Первый из них приводит к значительному упрощению определяющих уравнений, поскольку в этом случае радиальная упругая деформация отсутствует. В этом случае получено замкнутое решение в элементарных функциях для модели, представляющей собой совокупность упругой модели Муни – Ривлина и линейного закона ползучести. Для материала Мизеса представлены численно-аналитические результаты. Выполнено сравнение решений с известными решениями для малых деформаций.

Получено аналитическое решение о релаксации напряжений в изогнутой вязкоупругой пластине. Внимание уделено эффекту асимметрии на растяжение / сжатие в вязких свойствах материала. Упругое поведение материала описывается несжимаемой моделью Генки, вязкое – потенциалами ползу-

чести на основе эквивалентных напряжений специального вида (гладкие и кусочно-линейные функции главных напряжений). Проведено сравнение трёх моделей, описывающих разнсопротивляемость материала, отмечены характерные особенности решений.

На основе анализа деформации представительного объема выведена микромеханическая модель, описывающая упругий модуль композита, армированного однонаправленными короткими волокнами, при растяжении материала в направлении армирования. Результаты обобщают известную модель Shear Lag на гиперупругий (неогуков) материал матрицы композита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sevastyanov G.M. New expanding cavity model for conical indentation and its application to determine an intrinsic length scale of polymeric materials. *Acta Mech* 2024. **235**, 4229–4251; <https://doi.org/10.1007/s00707-024-03921-2>
2. Sevastyanov G.M. Analytical solution for high-pressure torsion in the framework of geometrically nonlinear non-associative plasticity. *Int J Solids Struct* 2020. **206**, 383–395; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.09.028>
3. Sevastyanov G.M. Adiabatic heating effect in elastic-plastic contraction / expansion of spherical cavity in isotropic incompressible material. *Eur J Mech A – Solid* 2021. **87**, 104223; <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104223>
4. Sevastyanov G.M. Creep relaxation in nonlinear viscoelastic twisted rods. *ZAMM – Z Angew Math Me* 2022. e202100552; <https://doi.org/10.1002/zamm.202100552>
5. Sevastyanov G.M. Finite-strain elastic-plastic torsion: Comparison of von Mises and Tresca materials. *Materials Physics and Mechanics* 2023. **51** (2), 140–150; https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_13
6. Севастьянов Г.М. К релаксации напряжений в изогнутой вязкоупругой разнсопротивляющейся пластине // ПММ. 2023. Т. 87, №5. С. 883–893; <https://doi.org/10.3103/s0025654423080186>
7. Севастьянов Г.М. Упруго-пластический анализ круговой трубы, вывернутой наизнанку // Известия РАН. МТТ. 2024. №3. С. 34–50; <https://doi.org/10.1134/S0025654423602380>
8. Севастьянов Г.М. Антиплоский осесимметричный упругопластический сдвиг в изотропно упрочняющемся материале // Вестник СамГТУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 28, №4. С. 740–758; <https://doi.org/10.14498/vsgtu2102>

9. Севастьянов Г.М. Пластическое кручение при высоком давлении с неоднородным напряженным состоянием // Известия РАН. МТТ. 2021. №3. С. 90–99; <https://doi.org/10.3103/S0025654421030109>
10. Севастьянов Г.М., Буренин А.А. О больших деформациях при кручении несжимаемого упругопластического цилиндра // ДАН. 2018. Т. 482, №3. С. 285–287; <https://doi.org/10.1134/S1028335818090094>
11. Севастьянов Г.М., Буренин А.А. Адиабатический нагрев материала при упругопластическом кручении с конечными деформациями // ПМТФ. 2019. Т. 60, №6. С. 149–161; <https://doi.org/10.1134/S0021894419060166>
12. Севастьянов Г.М., Бормотин К.С. Упругопластическое кручение с конечными деформациями: Сравнение аналитического и МКЭ-моделирования для немонотонно упрочняющихся полимеров // Вестник ПНИПУ. Механика. 2023. №3. С. 124–136; <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.11>
13. Севастьянов Г.М., Бормотин К.С. Релаксация напряжений в изогнутой вязкоупругой пластине с различными свойствами при сжатии и растяжении // ПМТФ. 2023. Т. 64, №4. С. 152–160; <https://doi.org/10.1134/s0021894423040144>
14. Севастьянов Г.М., Бегун А.С., Буренин А.А. Большие упругопластические деформации кругового сдвига в изотропно упрочняющемся материале // ПММ. 2024. Т. 88, №2. С. 313–340
15. Севастьянов Г.М., Буренин А.А. Гиперупругая модель сдвигового запаздывания // Физическая мезомеханика. 2025. Том 28, №3, С. 91–106; https://doi.org/10.55652/1683-805X_2025_28_3_91-106
16. Leonov A.I. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. *Rheol Acta* 1976. **15**, 85–98; <https://doi.org/10.1007/BF01517499>

17. Шитиков А.В., Быковцев Г.И. Конечные деформации упругопластических сред // ДАН. 1990. Т. 311, №1. С. 59–62
18. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН. 1996. Т. 347, №2. С. 199–201
19. Mehrabadi M.M., Nemat-Nasser S. Some basic kinematical relations for finite deformations of continua. *Mech Mater* 1987. **6** (2), 127–138; [https://doi.org/10.1016/0167-6636\(87\)90003-2](https://doi.org/10.1016/0167-6636(87)90003-2)
20. Bilby B.A., Lardner L.R.T., Stroh A.N. Continuous distributions of dislocations and the theory of plasticity. In *Actes du IXe congres international de mecanique appliquee* (Bruxelles, 1956), 1957. V. 8, pp. 35–44
21. Kröner E. Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen. *Arch Ration Mech An* 1959. **4** (1), 273–334; <https://doi.org/10.1007/BF00281393>
22. Lee E., Liu D. Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis. *J Appl Phys* 1967. **38** (1), 19–27; <https://doi.org/10.1063/1.1708953>
23. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains. *J Appl Mech* 1969. **36** (1), 1–6; <https://doi.org/10.1115/1.3564580>
24. Sidoroff F. Un modele viscoelastique non lineaire avec configuration inter-mediate. *J Mecanique* 1974. **13** (4), 679–713
25. Levitas V.I. Large deformation of materials with complex rheological properties at normal and high pressure. 1996. Nova Science Publishers, New York
26. Роговой А.А. Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2007. Т. 48, №4. С. 144–153

27. Роговой А.А. Формализованный подход к построению моделей механики деформируемого твердого тела (в 2 частях). М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований. 2023. 318 с
28. Macdougall D. Determination of the plastic work converted to heat using radiometry. *Exp Mech* 2000. **40**, 298–306; <https://doi.org/10.1007/BF02327503>
29. Rosakis P., Rosakis A.J., Ravichandran G., Hodowany J. A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals. *J Mech Phys Solids* 2000. **48**, 581–607; [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00048-4](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00048-4)
30. Rusinek A., Klepaczko J.R. Experiments on heat generated during plastic deformation and stored energy for TRIP steels. *Mater Design* 2009. **30**, 35–48; <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2008.04.048>
31. Zhu Y., Poh L.H. On an energetic or dissipative isotropic hardening mechanism for thermo-mechanical models in cyclic loading. *Int J Mech Sci* 2017. **122**, 297–307; <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.01.022>
32. Bower A.F. Applied mechanics of solids. Boca Raton. CRC Press. 2009; <https://doi.org/10.1201/9781439802489>
33. Green R.J. A plasticity theory for porous solids. *Int J Mech Sci* 1972. **14**, 215–224; [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90063-X)
34. Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part 1 - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J Eng Mater – T ASME* 1977. **99**, 2–15; <https://doi.org/10.1115/1.3443401>
35. Perrin G., Leblond J.-B. Accelerated void growth in porous ductile solids containing two populations of cavities. *Int J Plasticity* 2000. **16**, 91–120; [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(99\)00049-2](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(99)00049-2)
36. Carroll M.M., Holt A.C. Static and dynamic pore collapse relations for ductile porous materials. *J Appl Phys* 1972. **43**, 1626–1636; <https://doi.org/10.1063/1.1661372>

37. Carroll M.M., Kim K.T., Nesterenko V.F. The effect of temperature on viscoplastic pore collapse. *J Appl Phys* 1986. **59**, 1962–1967; <https://doi.org/10.1063/1.336426>
38. Ashby M.F., Blunt F.J., Bannister M. Flow characteristics of highly constrained metal wires. *Acta Metall* 1989. **37** (7), 1847–1857; [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(89\)90069-2](https://doi.org/10.1016/0001-6160(89)90069-2)
39. Faye A., Rodriguez-Martinez J.A., Volokh K.Y. Spherical void expansion in rubber-like materials: The stabilizing effects of viscosity and inertia. *Int J Nonlinear Mech* 2017. **92**, 118–126; <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.04.005>
40. Shang X., Wu P. Quasi-static analysis of microvoid growth in elastic-viscoplastic materials under thermal shock. *J Therm Stresses* 2018. **41** (9), 1136–1152; <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1466668>
41. Mo P.-Q., Fang Y., Yu H.-S. Benchmark solutions of large-strain cavity contraction for deep tunnel convergence in geomaterials. *J Rock Mech Geotech Eng* 2020. **12**, 596–607; <https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2019.07.015>
42. Bishop R.F., Hill R., Mott N.F. The theory of indentation and hardness tests. *P Phys Soc Lond* 1945. **57**, 147–159; <https://doi.org/10.1088/0959-5309/57/3/301>
43. Johnson K.L. Normal contact of inelastic solids. In *Contact Mechanics* (pp. 153–201) Cambridge University Press, Cambridge, 1985; <https://doi.org/10.1017/CBO9781139171731.007>
44. Warren T.L., Forrestal M.J. Effect of strain hardening and strain-rate sensitivity on the penetration of aluminum targets with spherical-nosed rods. *Int J Solids Struct* 1998. **35**, 3737–3753; [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00211-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00211-4)

45. Macek R.W., Duffey T.A. Finite cavity expansion method for near-surface effects and layering during Earth penetration. *Int J Impact Eng* 2000. **24**, 239–258; [https://doi.org/10.1016/S0734-743X\(99\)00156-6](https://doi.org/10.1016/S0734-743X(99)00156-6)
46. Durban D., Masri R. Conical indentation of strain-hardening solids. *Eur J Mech A – Solid* 2008. **27** (2), 210–221; <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2007.05.007>
47. Masri R. Low-velocity penetration of a rigid, hemispherical nose projectile in incompressible, elastoplastic, strain-hardening Mises media. *Int J Solids Struct* 2019. **167**, 14–23; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.02.022>
48. Tvergaard V., Needleman A. Polymer indentation: Numerical analysis and comparison with a spherical cavity model. *J Mech Phys Solids* 2011. **59** (9), 1669–1684; <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2011.06.006>
49. Kang J., Butler P.B., Baer M.R. A thermomechanical analysis of hot spot formation in condensed-phase, energetic materials. *Combust Flame* 1992. **89**, 117–139; [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(92\)90023-I](https://doi.org/10.1016/0010-2180(92)90023-I)
50. Hunter S.C., Crozier R.J.M. Similarity solution for the rapid uniform expansion of a spherical cavity in a compressible elastic-plastic solid. *Q J Mech Appl Math* 1968. **21**, 467–486; <https://doi.org/10.1093/qjmam/21.4.467>
51. Durban D., Baruch M. On the problem of a spherical cavity in an infinite elastoplastic medium. *J Appl Mech* 1976. **43** (4), 633–638; <https://doi.org/10.1115/1.3423946>
52. Yu H.S., Houlsby G.T. Finite cavity expansion in dilatant soils: loading analysis. *Geotechnique* 1991. **41**, 173–183; <https://doi.org/10.1680/geot.1991.41.2.173>
53. Durban D., Masri R. Dynamic spherical cavity expansion in a pressure sensitive elastoplastic medium. *Int J Solids Struct* 2004. **41** (20), 5697–5716; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.03.009>

54. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мурашкин Е.В. К упрочнению материалов за счет предварительной обработки интенсивным гидростатическим сжатием // Известия РАН. МТТ. 2012. №6. С. 80–86;
<https://doi.org/10.3103/S0025654412060088>
55. Feldgun V.R., Yankelevsky D.Z. Quasi-static spherical/cylindrical cavity expansion in a medium with an arbitrary equation of state and a shear strength plasticity envelope. *Int J Solids Struct* 2020. **191–192**, 146–156;
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.12.004>
56. Huang Y., Hutchinson J.W., Tvergaard V. Cavitation instabilities in elastic-plastic solids. *J Mech Phys Solids* 1991. **39** (2), 223–241;
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(91\)90004-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(91)90004-8)
57. Tvergaard V., Huang Y., Hutchinson J.W. Cavitation instabilities in a power hardening elastic-plastic solid. *Eur J Mech A – Solid* 1992. **11**(2), 215–231
58. Tvergaard V. Effect of large elastic strains on cavitation instability predictions for elastic–plastic solids. *Int J Solids Struct* 1999. **36** (35), 5453–5466;
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(98\)00244-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00244-3)
59. Steenbrink A.C., Van der Giessen E. Void growth in glassy polymers: Effect of yield properties on hydrostatic expansion. *Int J Damage Mech* 1997. **6** (3), 317–330; <https://doi.org/10.1177/105678959700600306>
60. Cowper G.R. The elastoplastic thick-walled sphere subjected to a radial temperature gradient. *J Appl Mech* 1960. **27**, 496–500;
<https://doi.org/10.1115/1.3644030>
61. Johnson W., Mellor P.B. Elastic-plastic behaviour of thick-walled spheres of non-work-hardening material subject to a steady-state radial temperature gradient. *Int J Mech Sci* 1962. **4**, 147–158; [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(62\)80037-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(62)80037-X)

62. Gamer U. On the elastic-plastic deformation of a sphere subjected to a spherically symmetrical temperature field. *J Therm Stresses* 1988. **11**, 159–173;
<https://doi.org/10.1080/01495738808961930>
63. Orcan Y., Gamer U. The elastic-plastic spherical shell with nonlinear hardening subject to a radial temperature gradient. *Acta Mech* 1994. **102**, 183–198;
<https://doi.org/10.1007/BF01178526>
64. Darijani H., Kargarnovin M.H., Naghdabadi R. Design of spherical vessels under steady-state thermal loading using thermo-elasto-plastic concept. *Int J Pres Ves Pip* 2009. **86**, 143–152;
<https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2008.12.001>
65. Alexandrov S., Jeng Y.-R. An elastic/plastic solution for a hollow sphere subject to thermo-mechanical loading considering temperature dependent material properties. *Int J Solids Struct* 2020. **200–201**, 23–33;
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.03.027>
66. Masri R. The effect of adiabatic thermal softening on specific cavitation energy and ductile plate perforation. *Int J Impact Eng* 2014. **68**, 15–27;
<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2013.12.008>
67. Ristimaa M., Wallin M., Ottosen N.S. Thermodynamic format and heat generation of isotropic hardening plasticity. *Acta Mech* 2007. **194**, 103–121;
<https://doi.org/10.1007/s00707-007-0448-6>
68. Green A.E., Shield R.T. Finite elastic deformation of incompressible isotropic bodies. *P Roy Soc A – Math Phy* 1950. **202**, 407–419;
<https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0109>
69. Ericksen J.L. Deformations possible in every isotropic, incompressible, perfectly elastic body. *Z Angew Math Phys* 1954. **5**, 466–489;
<https://doi.org/10.1007/bf01601214>

70. Зингерман К.М., Левин В.А. Некоторые качественные эффекты в точных решениях задачи Ламе при больших деформациях // ПИММ. 2012. Т. 76, №2. С. 283–303; <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.05.012>
71. Levin V.A., Podladchikov Y.Y., Zingerman K.M. An exact solution to the Lamé problem for a hollow sphere for new types of nonlinear elastic materials in the case of large deformations. *Eur J Mech A – Solid* 2021. **90**, 104345; <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104345>
72. Lubarda V.A., Meyers M.A. On plastic void growth in strong ductile materials. The Montenegrin Academy of Sciences and Arts, Proceedings of the Section of Natural Sciences, 2003
73. Cazacu O., Barlat F. A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals. *Int J Plasticity* 2004. **20** (11), 2027–2045; <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.11.021>
74. Hencky H. The law of elasticity for isotropic and quasi-isotropic substances by finite deformations. *J Rheol* 1931. **2**, 169–176; <https://doi.org/10.1122/1.2116361>
75. Richeton J., Ahzi S., Vecchio K.S., Jiang F.C., Adharapurapu R.R. Influence of temperature and strain rate on the mechanical behavior of three amorphous polymers: Characterization and modeling of the compressive yield stress. *Int J Solids Struct* 2006. **43** (7–8), 2318–2335; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.040>
76. Siviour C.R., Walley S.M., Proud W.G., Field J.E. Mechanical behaviour of polymers at high rates of strain. *J Phys IV* 2006. **134**, 949–955; <https://doi.org/10.1051/jp4:2006134145>
77. Levitas V.I., Stashkevich I.E., Nemirovskii A.B. Stress-strain diagrams of metals under large uniform compressive strains. *Strength Mater* 1994. **26**, 676–680; <https://doi.org/10.1007/BF02208521>

78. Kamrani M., Levitas V.I., Feng B. FEM simulation of large deformation of copper in the quasi-constrain high pressure-torsion setup. *Mat Sci Eng A – Struct* 2017. **705**, 219–230; <https://www.doi.org/10.1016/j.msea.2017.08.078>
79. Tabor D. Hardness of metals. Clarendon Press, Oxford, 1951
80. Flores A., Balta Calleja F.J., Attenburrow G.E., Bassett D.C. Microhardness studies of chain-extended PE: III. Correlation with yield stress and elastic modulus. *Polymer* 2000. **41** (14), 5431–5435; [https://doi.org/10.1016/S0032-3861\(99\)00755-7](https://doi.org/10.1016/S0032-3861(99)00755-7)
81. Zhang P., Li S.X., Zhang Z.F. General relationship between strength and hardness. *Mat Sci Eng A – Struct* 2011. **529**, 62–73; <https://doi.org/10.1016/j.msea.2011.08.061>
82. Johnson K.L. The correlation of indentation experiments. *J Mech Phys Solids* 1970. **18** (2), 115–126; [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(70\)90029-3](https://doi.org/10.1016/0022-5096(70)90029-3)
83. Gao X.-L., Jing X.N., Subhash G. Two new expanding cavity models for indentation deformations of elastic strain-hardening materials. *Int J Solids Struct* 2006. **43** (7–8), 2193–2208; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.03.062>
84. Gao X.L. New expanding cavity model for indentation hardness including strain-hardening and indentation size effects. *J Mater Res* 2006. **21** (5), 1317–1326; <https://doi.org/10.1557/jmr.2006.0158>
85. Gao X.-L. An expanding cavity model incorporating strain-hardening and indentation size effects. *Int J Solids Struct* 2006. **43** (21), 6615–6629; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.01.008>
86. dos Santos T., Srivastava A., Rodriguez-Martinez J.A. The combined effect of size, inertia and porosity on the indentation response of ductile materials. *Mech Mater* 2021. **153**, 103674; <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103674>

87. Marsh D.M. Plastic flow in glass. *Proc R Soc Lond A* 1964. **279**, 420–435;
<https://doi.org/10.1098/rspa.1964.0114>
88. Hill R. The mathematical theory of plasticity. Clarendon Press, Oxford, 1950
89. Studman C.J., Moore M.A., Jones S.E. On the correlation of indentation experiments. *J Phys D Appl Phys* 1977. **10** (6), 949–956;
<https://doi.org/10.1088/0022-3727/10/6/019>
90. Fleck N.A., Muller G.M., Ashby M.F., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity: Theory and experiment, *Acta Metall Mater* 1994. **42** (2), 475–487;
[https://doi.org/10.1016/0956-7151\(94\)90502-9](https://doi.org/10.1016/0956-7151(94)90502-9)
91. Ma Q., Clarke D.R. Size dependent hardness of silver single crystals. *J Mater Res* 1995. **10** (4), 853–863; <https://doi.org/10.1557/JMR.1995.0853>
92. Stolken J.S., Evans A.G. A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Mater* 1998. **46** (14), 5109–5115;
[https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(98\)00153-0](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(98)00153-0)
93. Chong A.C.M., Lam D.C.C. Strain gradient plasticity effect in indentation hardness of polymers. *J Mater Res* 1999. **14** (10), 4103–4110;
<https://doi.org/10.1557/JMR.1999.0554>
94. Alisafaei F., Han C.-S. Indentation depth dependent mechanical behavior in polymers. *Adv Cond Matter Phys* 2015. **2015**, 391579;
<https://doi.org/10.1155/2015/391579>
95. Aifantis E.C. On the microstructural origin of certain inelastic models. *J Eng Mater – T ASME* 1984. **106**, 4, 326–330; <https://doi.org/10.1115/1.3225725>
96. Aifantis E.C. The physics of plastic deformation. *Int J Plasticity* 1987. **3**, 3, 211–247; [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(87\)90021-0](https://doi.org/10.1016/0749-6419(87)90021-0)
97. Fleck N.A., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity. *Adv Appl Mech* 1997. **33**, 295–361; [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70388-0](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70388-0)

98. Aifantis E.C. Update on a class of gradient theories. *Mech Mater* 2003. **35**, 3–6, 259–280; [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(02\)00278-8](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(02)00278-8)
99. Liu D., Dunstan D.J. Material length scale of strain gradient plasticity: A physical interpretation. *Int J Plasticity* 2017. **98**, 156–174; <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.07.007>
100. Voyiadjis G.Z., Song Y. Strain gradient continuum plasticity theories: Theoretical, numerical and experimental investigations. *Int J Plasticity* 2019. **121**, 21–75; <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2019.03.002>
101. Yuan H., Chen J. Analysis of size effects based on a symmetric lower-order gradient plasticity model. *Comp Mater Sci* 2000. **19** (1–4), 143–157; [https://doi.org/10.1016/S0927-0256\(00\)00149-X](https://doi.org/10.1016/S0927-0256(00)00149-X)
102. Yun G., Qin J., Huang Y., Hwang K.C. A study of lower-order strain gradient plasticity theories by the method of characteristics. *Eur J Mech A – Solid* 2004. **23** (3), 387–394; <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.02.003>
103. Huang Y., Qu S., Hwang K.C., Li M., Gao H. A conventional theory of mechanism-based strain gradient plasticity. *Int J Plasticity* 2004. **20** (4–5), 753–782; <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.08.002>
104. Lam D.C.C., Chong A.C.M. Indentation model and strain gradient plasticity law for glassy polymers. *J Mater Res* 1999. **14** (9), 3784–3788; <https://doi.org/10.1557/JMR.1999.0512>
105. Han C.S., Nikolov S. Indentation size effects in polymers and related rotation gradients. *J Mater Res* 2007. **22**, 1662–1672; <https://doi.org/10.1557/JMR.2007.0197>
106. Haward R.N., Thackray G. The use of a mathematical model to describe isothermal stress-strain curves in glassy thermoplastics. *Proc R Soc Lond A* 1967. **302** (1471), 453–72; <https://doi.org/10.1098/rspa.1968.0029>
107. Wu P.D., van der Giessen E. On improved network models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers. *J Mech*

- Phys Solids* 1993. **41**, 427–456; [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90043-F](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90043-F)
108. Meijer H.E.H., Govaert L.E. Mechanical performance of polymer systems: The relation between structure and properties. *Prog Polym Sci* 2005. **30**, 915–938; <https://doi.org/10.1016/j.progpolymsci.2005.06.009>
 109. Cheng L., Guo T.F. Void interaction and coalescence in polymeric materials. *Int J Solids Struct* 2007. **44** (6), 1787–1808; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.08.007>
 110. Durban D., Fleck N.A. Singular plastic fields in steady penetration of a rigid cone. *J Appl Mech* 1992. **59** (4), 706–710; <https://doi.org/10.1115/1.2894032>
 111. Hirst W., Howse M.G.J.W. The indentation of materials by wedges. *Proc R Soc Lond A* 1969. **311**, 429–444; <https://doi.org/10.1098/rspa.1969.0126>
 112. Briscoe B.J., Fiori L., Pelillo E. Nano-indentation of polymeric surfaces. *J Phys D Appl Phys* 1998. **31**, 2395–2405; <https://doi.org/10.1088/0022-3727/31/19/006>
 113. Weiss A., Durban D. Cavitation theory applied to polycarbonate ballistic response. 28th International Symposium on Ballistics, 2014
 114. Balta Calleja F.J., Flores A., Michler G.H. Microindentation studies at the near surface of glassy polymers: Influence of molecular weight. *J Appl Polym Sci* 2004. **93**, 1951–1956; <https://doi.org/10.1002/app.20665>
 115. Mata M., Casals O., Alcala J. The plastic zone size in indentation experiments: The analogy with the expansion of a spherical cavity. *Int J Solids Struct* 2006. **43** (20), 5994–6013; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.07.002>
 116. Hernot X., Bartier O. An expanding cavity model incorporating pile-up and sink-in effects. *J Mater Res* 2012. **27** (1), 132–140; <https://doi.org/10.1557/jmr.2011.394>

117. Anand L. On H. Hencky's approximate strain-energy function for moderate deformations. *J Appl Mech* 1979. **46** (1), 78-82; <https://doi.org/10.1115/1.3424532>
118. Prager W., Hodge P.G. The theory of perfectly plastic solids. John Wiley and Sons, New York, 1951
119. Шапиро Г.С. Упругопластическое равновесие клина и разрывные решения в теории пластичности // ПММ. 1952. Т. 16, №1. С. 101–106
120. Naghdi P.M. Stresses and displacements in an elastic-plastic wedge. *J Appl Mech* 1957. **24** (1), 98–104; <https://doi.org/10.1115/1.4011452>
121. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969
122. Sneddon I.N. The relation between load and penetration in the axisymmetric boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. *Int J Eng Sci* 1965. **3** (1), 47–57; [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(65\)90019-4](https://doi.org/10.1016/0020-7225(65)90019-4)
123. Lockett F.J. Indentation of a rigid/plastic material by a conical indenter. *J Mech Phys Solids* 1963. **11** (5), 345–355; [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(63\)90035-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90035-8)
124. Felder E., Ramond-Angeles C. Mechanical analysis of indentation experiments with a conical indenter. *Philos Mag* 2006. **86** (33–55), 5219–5230; <https://doi.org/10.1080/14786430600589071>
125. Bhattacharya A.K., Nix W.D. Finite element analysis of cone indentation. *Int J Solids Struct* 1991. **27** (8), 1047–1058; [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90100-T](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90100-T)
126. Dugdale D.S. Cone indentation experiments. *J Mech Phys Solids* 1954. **2** (4), 265–277; [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(54\)90017-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(54)90017-4)
127. Atkins A.G., Tabor D. Plastic indentation in metals with cones. *J Mech Phys Solids* 1965. **13** (3), 149–164; [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(65\)90018-9](https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90018-9)

128. Evans P.D. The hardness and abrasion of polymers. PhD dissertation. Department of Chemical Engineering and Chemical Technology. Imperial College London, 1987
129. Ames N.M., Srivastava V., Chester S.A., Anand L. A thermo-mechanically coupled theory for large deformations of amorphous polymers. Part II: Applications. *Int J Plasticity* 2009. **25**, 8, 1495–1539; <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.11.005>
130. Turnbull A., White D. Nanoindentation and microindentation of weathered unplasticised poly-vinyl chloride (UPVC). *J Mater Sci* 1996. **31**, 4189–4198; <https://doi.org/10.1007/BF00356438>
131. Wright S.C., Huang Y., Fleck N.A. Deep penetration of polycarbonate by a cylindrical punch. *Mech Mater* 1992. **13** (4), 277–284; [https://doi.org/10.1016/0167-6636\(92\)90020-E](https://doi.org/10.1016/0167-6636(92)90020-E)
132. Dorogoy A., Rittel D., Brill A. Experimentation and modeling of inclined ballistic impact in thick polycarbonate plates. *Int J Impact Eng* 2011. **38** (10), 804–814; <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2011.05.001>
133. Sakharova N.A., Fernandes J.V., Antunes J.M., Oliveira M.C. Comparison between Berkovich, Vickers and conical indentation tests: A three-dimensional numerical simulation study. *Int J Solids Struct* 2009. **46** (5), 1095–1104; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.10.032>
134. Карпов Е.В., Ларичкин А.Ю. Влияние осевого сжатия и крутящего момента на локализацию деформаций и разрушение при сложном циклическом нагружении стержней из оргстекла // ПМТФ. 2014. Т. 55, №1. С. 115–126
135. Capurso M. Yield conditions for incompressible isotropic and orthotropic materials with different yield stress in tension and compression. *Meccanica* 1967. **2**, 118–125; <https://doi.org/10.1007/BF02128163>

136. Yu M.H. Unified Strength Theory and Its Applications. Springer: Berlin, 2004
137. Altenbach H., Bolchoun A., Kolupaev V.A. Phenomenological Yield and Failure Criteria (in Altenbach H., Öchsner A., eds., Plasticity of Pressure-Sensitive Materials, Serie ASM, Springer, Heidelberg), 2013, pp. 49–152
138. Levitas V.I. Recent *in situ* experimental and theoretical advances in severe plastic deformations, strain-induced phase transformations, and microstructure evolution under high pressure. *Mater Trans* 2023. **64** (8), 1866–1878; <https://doi.org/10.2320/matertrans.MT-MF2022055>
139. Edalati K., Hidalgo-Jiménez J., Nguyen T.T., Watanabe M., Taniguchi I. High-pressure torsion processing of serine and glutamic acid: Understanding mechanochemical behavior of amino acids under astronomical impacts. *Adv Eng Mater* 2024. **26** (19), 2302267; <https://doi.org/10.1002/adem.202302267>
140. Lin F., Levitas V.I., Yesudhas S., Dhar A., Smith J. Severe strain-induced olivine-ringwoodite transformation at room temperature: Key to enigmas of deep-focus earthquake. *Geophys Res Lett* 2025. **52** (6), e2024GL111281 <https://doi.org/10.1029/2024GL111281>
141. Levitas V.I. High pressure phase transformations revisited. *J Phys – Condens Mat* 2018. **30**, 163001; <https://www.doi.org/10.1088/1361-648X/aab4b0>
142. Bridgman P.W. Effects of high shearing stress combined with high hydrostatic pressure. *Phys Rev* 1935. **48**, 825–847; <https://doi.org/10.1103/PhysRev.48.825>
143. Bridgman P.W. Studies in large plastic flow and fracture: With special emphasis on the effects of hydrostatic pressure. New York – London, McGraw – Hill, 1952
144. Валиев Р.З., Кайбышев О.А., Кузнецов Р.И., Мусалимов Р.Ш., Ценев Н.К. Низкотемпературная сверхпластичность металлических материалов // ДАН СССР. 1988. Т. 301, № 4. С. 864–866

145. Верещагин Л.Ф., Шапочкин В.А. Влияние гидростатического давления на сопротивление сдвигу в твердых телах // ФММ. 1960. Т. 9, вып. 2. С. 258–264
146. Valiev R.Z., Islamgaliev R.K., Alexandrov I.V. Bulk nanostructured materials from severe plastic deformation. *Prog Mater Sci* 2000. **45**, 103–189; [https://doi.org/10.1016/S0079-6425\(99\)00007-9](https://doi.org/10.1016/S0079-6425(99)00007-9)
147. Zhilyaev A.P., Langdon T.G. Using high-pressure torsion for metal processing: Fundamentals and applications. *Prog Mater Sci* 2008. **53**, 893–979; <https://www.doi.org/10.1016/j.pmatsci.2008.03.002>
148. Edalati K., Horita Z. A review on high-pressure torsion (HPT) from 1935 to 1988. *Mat Sci Eng A – Struct* 2016. **652**, 325–352; <https://www.doi.org/10.1016/j.msea.2015.11.074>
149. Pereira P.H.R., Figueiredo R.B. Finite element modelling of high-pressure torsion: An overview. *Mater Trans* 2019. **60** (7), 1139–1150; <https://www.doi.org/10.2320/matertrans.MF201906>
150. Zhao Y., Massion R., Grosdidier T., Toth L.S. Gradient structure in high pressure torsion compacted iron powder. *Adv Eng Mater* 2015. **17** (12), 1748–1753; <https://www.doi.org/10.1002/adem.201500012>
151. Kulagin R., Zhao Y., Beygelzimer Y., Toth L.S., Shtern M. Modeling strain and density distribution during high-pressure torsion of pre-compacted powder material. *Mater Res Lett* 2017. **5** (3), 179–186; <https://www.doi.org/10.1080/21663831.2016.1241318>
152. Ding L., Kerber M., Kunisch C., Kaus B. Plastic yielding of glass in high-pressure torsion apparatus. *Int J Appl Glass Sci* 2019. **10** (1), 17–26; <https://www.doi.org/10.1111/ijag.12847>
153. Beloshenko V., Vozniak Iu., Beygelzimer Y., Estrin Y., Kulagin R. Severe plastic deformation of polymers. *Mater Trans* 2019. **60** (7), 1192–1202; <https://doi.org/10.2320/matertrans.MF201912>

154. Lewandowski J.J., Lowhaphandu P. Effects of hydrostatic pressure on mechanical behaviour and deformation processing of materials. *Int Mater Rev* 1998. **43** (4), 145–187; <https://doi.org/10.1179/imr.1998.43.4.145>
155. Wetscher F., Vorhauer A., Pippan R. Strain hardening during high pressure torsion deformation. *Mat Sci Eng A – Struct* 2005. **410–411**, 213–216; <https://www.doi.org/10.1016/j.msea.2005.08.027>
156. Bowden P.B., Jukes J.A. The plastic flow of isotropic polymers. *J Mater Sci* 1972. **7**, 52–63; <https://doi.org/10.1007/BF00549550>
157. Rault J. Yielding in amorphous and semi-crystalline polymers: the compensation law. *J Non-Cryst Solids* 1998. **235–237**, 737–741; [https://doi.org/10.1016/S0022-3093\(98\)00667-X](https://doi.org/10.1016/S0022-3093(98)00667-X)
158. Siviour C.R., Jordan J.L. High strain rate mechanics of polymers: A review. *J Dynamic Behavior Mater* 2016. **2**, 15–32; <https://www.doi.org/10.1007/s40870-016-0052-8>
159. Zhang J., Jin T., Wang Z., Zhao L. Experimental investigation on yield behavior of PMMA under combined shear–compression loading. *Results Phys* 2016. **6**, 265–269; <https://www.doi.org/10.1016/j.rinp.2016.05.004>
160. Lewandowski J.J., Lowhaphandu P. Effects of hydrostatic pressure on the flow and fracture of a bulk amorphous metal. *Philos Mag A* 2002. **82** (17–18), 3427–3441; <https://doi.org/10.1080/01418610208240453>
161. Spitzig W.A., Richmond O. The effect of pressure on the flow stress of metals. *Acta Metall Mater* 1984. **32** (3), 457–463; [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(84\)90119-6](https://doi.org/10.1016/0001-6160(84)90119-6)
162. Stoughton T.B., Yoon J.-W. A pressure-sensitive yield criterion under a non-associated flow rule for sheet metal forming. *Int J Plasticity* 2004. **20**, 705–731; [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(03\)00079-2](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(03)00079-2)

163. Zhang Y., Ren Y., Wang P., Zhao Z., Liu Z., He J., Xu B., Tian Y., Yu D. Strengthening in high-pressure quenched Zr. *High Pressure Res* 2017. **37** (3), 278–286; <https://doi.org/10.1080/08957959.2017.1323333>
164. Feng B., Levitas V.I. Coupled elastoplasticity and plastic strain-induced phase transformation under high pressure and large strains: Formulation and application to BN sample compressed in a diamond anvil cell. *Int J Plasticity* 2017. **96**, 156–181; <https://www.doi.org/10.1016/j.iplas.2017.05.002>
165. Feng B., Levitas V.I., Li W. FEM modeling of plastic flow and strain-induced phase transformation in BN under high pressure and large shear in a rotational diamond anvil cell. *Int J Plasticity* 2019. **113**, 236–254; <https://www.doi.org/10.1016/j.iplas.2018.10.004>
166. Mróz Z., Szymański Cz. Non-associated flow rules in description of plastic flow of granular materials. Limit Analysis and Rheological Approach in Soil Mechanics (ed. Olszak W., Šuklje L.). Springer-Verlag, Vienna. 1978. P. 49–94; https://www.doi.org/10.1007/978-3-7091-4352-0_2
167. Manoharan N., Dasgupta S.P. Collapse load computation for high-friction soil. *Comput Struct* 1997. **62** (4), 681–684; [https://www.doi.org/10.1016/S0045-7949\(96\)00240-4](https://www.doi.org/10.1016/S0045-7949(96)00240-4)
168. Athanasiou V., Papamichos E., Giannakopoulos A.E. The use of Knoop indentation for the assessment of the plastic properties of mortars and natural stones. *Int J Rock Mech Min* 2017. **93**, 124–129; <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2016.11.010>
169. Racherla V., Bassani J.L. Strain burst phenomena in the necking of a sheet that deforms by non-associated plastic flow. *Model Simul Mater Sc* 2007. **15** (1), S297–S311; <https://www.doi.org/10.1088/0965-0393/15/1/S23>
170. Edalati K., Lee D.J., Nagaoka T., Arita M., Kim H.S., Horita Z., Pippan R. Real hydrostatic pressure in high-pressure torsion measured by bismuth phase transformations and FEM simulations. *Mater Trans* 2016. **57** (4), 533–538;

<https://www.doi.org/10.2320/matertrans.M2015374>

171. Edalati K., Fujita I., Sauvage X., Arita M., Horita Z. Microstructure and phase transformations of silica glass and vanadium oxide by severe plastic deformation via high-pressure torsion straining. *J Alloy Compd* 2019. **779**, 394–398; <https://www.doi.org/10.1016/j.jallcom.2018.11.086>
172. Levitas V.I. High-pressure phase transformations under severe plastic deformation by torsion in rotational anvils. *Mater Trans* 2019. **60** (7), 1294–1301; <https://www.doi.org/10.2320/matertrans.MF201923>
173. Pereira P.H.R., Figueiredo R.B., Huang Y., Cetlin P.R., Langdon T.G. Modeling the temperature rise in high-pressure torsion. *Mat Sci Eng A – Struct* 2014. **593**, 185–188; <https://www.doi.org/10.1016/j.msea.2013.11.015>
174. Feng B., Levitas V.I., Kamrani M. Coupled strain-induced alpha to omega phase transformation and plastic flow in zirconium under high pressure torsion in a rotational diamond anvil cell. *Mat Sci Eng A – Struct* 2018. **731**, 623–633; <https://www.doi.org/10.1016/j.msea.2018.06.061>
175. Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J. Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells. *Int J Plasticity* 2016. **84**, 33–57; <https://www.doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.04.017>
176. Beygelzimer Y., Kulagin R., Toth L.S., Ivanisenko Y. The self-similarity theory of high pressure torsion. *Beilstein J Nanotech* 2016. **7**, 1267–1277; <https://doi.org/10.3762/bjnano.7.117>
177. Levitas V.I. High-pressure mechanochemistry: conceptual multiscale theory and interpretation of experiments. *Phys Rev B* 2004. **70**, 184118; <https://www.doi.org/10.1103/PhysRevB.70.184118>
178. Feng B., Levitas V. Pressure self-focusing effect and novel methods for increasing the maximum pressure in traditional and rotational diamond anvil cells. *Sci Rep-UK* 2017. **7**, 45461; <https://www.doi.org/10.1038/srep45461>

179. Арутюнян Н.Х., Радаев Ю.Н. Упругопластическое кручение цилиндрического стержня при конечных деформациях // ПММ. 1989. Т. 53, №6. С. 1014-1022; [https://www.doi.org/10.1016/0021-8928\(89\)90090-7](https://www.doi.org/10.1016/0021-8928(89)90090-7)
180. Pandey K.K., Levitas V.I. In situ quantitative study of plastic strain-induced phase transformations under high pressure: Example for ultra-pure Zr. *Acta Mater* 2020. **196**, 338–346; <https://www.doi.org/10.1016/j.actamat.2020.06.015>
181. Christiansen A.W., Baer E., Radcliffe S.V. The mechanical behaviour of polymers under high pressure. *Philos Mag* 1971. **24** (188), 451–467; <https://www.doi.org/10.1080/14786437108227400>
182. Rabinowitz S., Ward I.M., Parry J.S.C. The effect of hydrostatic pressure on the shear yield behaviour of polymers. *J Mater Sci* 1970. **5**, 29–39; <https://www.doi.org/10.1007/PL00020253>
183. Mears D.R., Pae K.D., Sauer J.A. Effects of hydrostatic pressure on the mechanical behavior of polyethylene and polypropylene. *J Appl Phys* 1969. **40** (11), 4229–4237; <https://www.doi.org/10.1063/1.1657180>
184. Pae K.D., Bhateja S.K. The effects of hydrostatic pressure on the mechanical behavior of polymers. *J Macromol Sci – Pol R* 1975. **13** (1), 1–75; <https://www.doi.org/10.1080/15321797508068145>
185. Liu I-S. A note on the Mooney – Rivlin material model. *Continuum Mech Therm* 2012. **24**, 583–590; <https://www.doi.org/10.1007/s00161-011-0197-6>
186. Levitas V.I., Zarechnyy O.M. Numerical study of stress and plastic strain evolution under compression and shear of a sample in a rotational anvil cell. *High Pressure Res* 2010. **30** (4), 653–669; <https://www.doi.org/10.1080/08957959.2010.534990>
187. Quinson R., Perez J., Rink M., Pavan A. Yield criteria for amorphous glassy polymers. *J Mater Sci* 1997. **32**, 1371–1379; <https://doi.org/10.1023/A:1018525127466>

188. Rottler J., Robbins M.O. Yield conditions for deformation of amorphous polymer glasses. *Phys Rev E* 2001. **64**, 051801; <https://www.doi.org/10.1103/PhysRevE.64.051801>
189. Lund A.C., Schuh C.A. The Mohr – Coulomb criterion from unit shear processes in metallic glass. *Intermetallics* 2004. **12**, 1159–1165; <https://www.doi.org/10.1016/j.intermet.2004.07.001>
190. Gao Y.F., Wang L., Bei H., Nieh T.G. On the shear-band direction in metallic glasses. *Acta Mater* 2011. **59**, 4159–4167; <https://www.doi.org/10.1016/j.actamat.2011.03.039>
191. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure. *P Roy Soc Lond A Mat* 1949. **242**, 173–195; <https://doi.org/10.1098/rsta.1949.0009>
192. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980
193. Itskov M. Tensor algebra and tensor analysis for engineers with applications to continuum mechanics. Springer International Publishing Switzerland, 2015
194. Kondrina K.M., Kudryavtsev O.S., Vlasov I.I., Khmel'nitskiy R.A., Ekimov E.A. High-pressure synthesis of microdiamonds from polyethylene terephthalate. *Diam Relat Mater* 2018. **83**, 190–195; <https://www.doi.org/10.1016/j.diamond.2018.02.008>
195. Levitas V.I., Ma Y., Hashemi J., Holtz M., Guven N. Strain-induced disorder, phase transformations, and transformation-induced plasticity in hexagonal boron nitride under compression and shear in a rotational diamond anvil cell: In situ X-ray diffraction study and modeling. *J Chem Phys* 2006. **125**, 044507; <https://www.doi.org/10.1063/1.2208353>
196. Blank V.D., Estrin E.I. Phase Transitions in Solids under High Pressure, CRC Press, New York, 2014

197. Gent A.N., Rivlin R.S. Experiments on the mechanics of rubber. I: Eversion of a tube. *P Phys Soc Lond B* 1952. **65** (2), 118–121; <https://doi.org/10.1088/0370-1301/65/2/305>
198. Ericksen J.L. Inversion of a perfectly elastic spherical shell. *ZAMM – Z Angew Math Me* 1955. **35** (9–10); 382–385; <https://doi.org/10.1002/zamm.19550350909>
199. Orr A. The eversion and bifurcation of elastic cylinders. PhD Thesis. University of Glasgow, 1995
200. Baaser H., Nedjar B., Martin R.J., Neff P. Eversion of tubes: Comparison of material models. In: *Constitutive Models for Rubber X*. CRC Press, 2017; <https://dx.doi.org/10.1201/9781315223278-20>
201. Gao X.-L., Atluri S.N. An exact finite deformation elasto-plastic solution for the outside-in free eversion problem of a tube of elastic linear-hardening material. *IMA J Appl Math* 1997. **58**, 259–275; <https://doi.org/10.1093/imamat/58.3.259>
202. Shufen R., Dixit U.S. A review of theoretical and experimental research on various autofrettage processes. *J Press Vess – T ASME* 2018. **140** (5), 050802; <https://doi.org/10.1115/1.4039206>
203. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013
204. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // *ПММ*. 2003. Т. 67, №2. С. 315–325; [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(03\)90014-1](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)90014-1)
205. Александров С.Е., Гольдштейн Р.В. Расчет толщины стенки трубопровода под внутренним давлением при произвольном законе упрочнения // *Деформация и разрушение материалов*. 2011. №9. С. 15–20

206. Александров С.Е., Гольдштейн Р.В. Напряженно-деформированное состояние в упругопластической цилиндрической трубе со свободными торцами. I. Общее решение // Известия РАН. МТТ. 2013. №5. С. 67–76; <https://doi.org/10.3103/S0025654413050099>
207. Gent A.N. A new constitutive relation for rubber. *Rubber Chem Technol* 1996. **69** (1), 59–61; <https://doi.org/10.5254/1.3538357>
208. Shutov A.V., Kaygorodtseva A.A. Sample shapes for reliable parameter identification in elasto-plasticity. *Acta Mech* 2020. **231**, 4761–4780; <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02758-9>
209. Xue Z., Pontin M.G., Zok F.W., Hutchinson J.W. Calibration procedures for a computational model of ductile fracture. *Eng Fract Mech* 2010. **77** (3), 492–509; <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.10.007>
210. Tvergaard V., Hutchinson J.W. Numerical simulation of cropping. *J Appl Mech* 2014. **81** (7), 071002; <https://doi.org/10.1115/1.4026891>
211. Александров С.Е., Гольдштейн Р.В. Движение жесткого стержня в жестковязкопластической среде: влияние типа модели на поведение решения // Известия РАН. МТТ. 2015. №4. С. 28–37; <https://doi.org/10.3103/S0025654415040044>
212. Alexandrov S., Date P. An alternative interpretation of axial friction test results for viscoplastic materials. *Mech Time-Depend Mat* 2018. **22**, 259–271; <https://doi.org/10.1007/s11043-017-9372-x>
213. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мазелис А.Л. Развитие прямолинейного осесимметричного вязкопластического течения и упругое последствие после его остановки // ПМТФ. 2010. Т. 51, №2. С. 261–268. <https://doi.org/10.1007/s10808-010-0036-8>
214. Kellermann D.C., Attard M.M. An invariant-free formulation of neo-Hookean hyperelasticity. *ZAMM – Z Angew Math Me* 2016. **96** (2), 233–252; <https://doi.org/10.1002/zamm.201400210>

215. Korobeynikov S.N. Families of Hooke-like isotropic hyperelastic material models and their rate formulations. *Arch Appl Mech* 2023. **93**, 3863—3893; <https://www.doi.org/10.1007/s00419-023-02466-5>
216. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Устинова А.С. Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // ПМТФ. 2008. Т. 49, №2. С. 277–284
217. Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Течение упруговязкопластического материала между вращающимися цилиндрическими поверхностями в условиях нежесткого сцепления // ПМТФ. 2015. Т. 56, №2. С. 146–158
218. Буренин А.А., Устинова А.С. Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчётом упругого отклика после остановки течения и разгрузки // В сб. к 70-летию академика Владимира Алексеевича Левина: сборник научных трудов / Владивосток, 2009
219. Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Винтовое вязкопластическое течение в зазоре между жесткими цилиндрами // Известия РАН. МТТ. 2017. №6. С. 55–70
220. Cwiekala N., Traphöner H., Haupt P., Clausmeyer T., Tekkaya A.E. Analytical model of the in-plane torsion test. *Acta Mech* 2022. **233**, 641–663; <https://doi.org/10.1007/s00707-021-03129-8>
221. Gruber P.G., Lekue J., Wagner L., Gross T., Sieberer S., Schagerl M. Error analysis of deformation assumptions for the in-plane torsion test of sheet metal. *Int J Solids Struct* 2024. **301**, 112945; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2024.112945>
222. Toth L.S., Arzaghi M., Fundenberger J.J., Beausir B., Bouaziz O., Arruffat-Massion R. Severe plastic deformation of metals by high-pressure tube twisting. *Scripta Mater* 2009. **60** (3), 175–177; <https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2008.09.029>

223. Wang J.T., Li Zh., Wang J., Langdon T.G. Principles of severe plastic deformation using tube high-pressure shearing. *Scripta Mater* 2012. **67** (10), 810–813; <https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.07.028>
224. Pougis A., Toth L.S., Bouaziz O., Fundenberger J.J., Barbier D., Arruffat R. Stress and strain gradients in high-pressure tube twisting. *Scripta Mater* 2012. **66** (10), 773–776; <https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.02.004>
225. Lapovok R., Pougis A., Lemiale V., Orlov D., Toth L.S., Estrin Yu. Severe plastic deformation processes for thin samples. *J Mater Sci* 2010. **45**, 4554–4560; <https://doi.org/10.1007/s10853-010-4403-x>
226. Lapovok R., Ng H.P., Tomus D., Estrin Yu. Bimetallic copper-aluminium tube by severe plastic deformation. *Scripta Mater* 2012. **66**, 1081–1084; <https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.03.004>
227. Lapovok R., Qi Y., Ng H.P., Toth L.S., Estrin Yu. Gradient structures in thin-walled metallic tubes produced by continuous high pressure tube shearing process. *Adv Eng Mater* 2017. **19**, 1700345; <https://doi.org/10.1002/adem.201700345>
228. Faraji G., Kim H.S. Review of principles and methods of severe plastic deformation for producing ultrafine-grained tubes. *Mater Sci Tech* 2016. **33** (8), 905–923; <https://doi.org/10.1080/02670836.2016.1215064>
229. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000
230. Alexandrov S., Richmond O. Couette flows of rigid/plastic solids: analytical examples of the interaction of constitutive and frictional laws. *Int J Mech Sci* 2001. **43** (3), 653–665; [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00045-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00045-X)
231. Haward R.N. The derivation of a strain hardening modulus from true stress-strain curves for thermoplastics. *Polymer* 1994. **35** (18), 3858–3862; [https://doi.org/10.1016/0032-3861\(94\)90268-2](https://doi.org/10.1016/0032-3861(94)90268-2)

232. Swift H.W. Length changes in metals under torsional overstrain. *Engineering – London* 1947. **163**, 253–257
233. Cazacu O., Revil-Baudard B., Barlat F. New interpretation of monotonic Swift effects: Role of tension–compression asymmetry. *Mech Mater* 2013. **57**, 42–52; <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.10.007>
234. Cazacu O., Revil-Baudard B., Barlat F. New interpretation of cyclic Swift effects. *Eur J Mech A – Solid* 2014. **44**, 82–90; <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.10.005>
235. Revil-Baudard B., Chandola N., Cazacu O., Barlat F. Correlation between Swift effects and tension–compression asymmetry in various polycrystalline materials. *J Mech Phys Solids* 2014. **70**, 104–115; <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2014.05.012>
236. Poynting J.H. On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening of loaded wires when twisted. *P R Soc Lond A – ContA* 1909. **82** (557), 546–559; <https://doi.org/10.1098/rspa.1909.0059>
237. Drucker D.C. Relation of experiments to mathematical theories of plasticity. *J Appl Mech – T ASME* 1949. **16**, 349–357; <https://doi.org/10.1115/1.4010009>
238. Horgan C.O., Murphy J.G. Some remarks on the principal stretch versus invariant formulation for constitutive modeling of incompressible isotropic hyperelastic materials. *J Elasticity* 2025. **157**, 50; <https://doi.org/10.1007/s10659-025-10142-8>
239. Ghobady E., Shutov A., Steeb H. Parameter identification and validation of shape-memory polymers within the framework of finite strain viscoelasticity. *Materials (Basel)* 2021. **14** (8), 2049; <https://doi.org/10.3390/ma14082049>
240. Kobelev V. Some basic solutions for nonlinear creep. *Int J Solids Struct* 2014. **51**, 19–20, 3372–3381; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.05.029>

241. Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y. Creep analysis with a stress range dependent constitutive model. *Arch Appl Mech* 2009. **79**, 619–630; <https://doi.org/10.1007/s00419-008-0287-5>
242. Fung Y.C. Elasticity of soft tissues in simple elongation. *Am J Physiol* 1967. **213** (6), 1532–1544; <https://doi.org/10.1152/ajplegacy.1967.213.6.1532>
243. Holzapfel G.A. Biomechanics of soft tissue, 2000; <https://doi.org/10.1016/B978-012443341-0/50107-1>
244. Chagnon G., Rebouah M., Favier D. Hyperelastic energy densities for soft biological tissues: A review. *J Elast* 2015. **120**, 129–160; <https://doi.org/10.1007/s10659-014-9508-z>
245. Neff P., Ghiba I.D., Lankeit J. The exponentiated Hencky-logarithmic strain energy. Part I: Constitutive issues and rank-one convexity. *J Elast* 2015. **121**, 143–234; <https://doi.org/10.1007/s10659-015-9524-7>
246. Demiray H. A note on the elasticity of soft biological tissues. *J Biomech* 1972. **5** (3), 309–311; [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(72\)90047-4](https://doi.org/10.1016/0021-9290(72)90047-4)
247. Humphrey J.D., Yin F.C. A new constitutive formulation for characterizing the mechanical behavior of soft tissues. *Biophys J* 1987. **52** (4), 563–570; [https://doi.org/10.1016/S0006-3495\(87\)83245-9](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(87)83245-9)
248. Chaparro B.M., Thuillier S., Menezes L.F., Manach P.Y., Fernandes J.V. Material parameters identification: Gradient-based, genetic and hybrid optimization algorithms. *Comp Mater Sci* 2008. **44** (2), 339–346; <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2008.03.028>
249. Naumenko K. Modeling of high-temperature creep for structural analysis applications. Habilitation thesis. Martin Luther University, Halle-Wittenberg, Germany, 2006; <https://doi.org/10.25673/2536>
250. Truesdell C., Toupin R. Static grounds for inequalities in finite strain of elastic materials. *Arch Ration Mech Anal* 1963. **12**, 1–33; <https://doi.org/10.1007/BF00281217>

251. Levitas V.I., McCollum J., Pantoya M.L., Tamura N. Stress relaxation in pre-stressed aluminum core-shell particles: X-ray diffraction study, modeling, and improved reactivity. *Combust Flame* 2016. **170**, 30–36; <https://www.doi.org/10.1016/j.combustflame.2016.05.012>
252. Yeoh O.H. Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chem Technol* 1993. **66** (5), 754–771; <https://doi.org/10.5254/1.3538343>
253. Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *J Mech Phys Solids* 1993. **41** (2), 389–412; [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90013-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90013-6)
254. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разнсопротивляющихся растяжению и сжатию // Инженерный журнал: Механика твердого тела. 1966. №2. С. 44–53
255. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. К разномодульной теории упругости // Инженерный журнал: Механика твердого тела. 1966. №6. С. 64–67
256. Шапиро Г.С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инженерный журнал: Механика твердого тела. 1966. №2. С. 123–125
257. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982
258. Маслов В.П., Мосолов П.П. Общая теория решения уравнений движения разномодульной упругой среды // ПММ. 1985. Т. 49, вып. 3. С. 419–437
259. Мясников В.П., Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разнсопротивляющейся среды // Доклады АН СССР. 1992. Т. 322, №1. С. 44–53
260. Олейников А.И., Могильников Е.В. Единственность решения краевых задач и устойчивость для разномодульного нелинейного материала // Дальневосточный математический журнал. 2002. Т. 3, №2. С. 242–253

261. Цвелодуб И.Ю. О разномодульной теории упругости // ПМТФ. 2008. Т. 49, №1. С. 157–164; <https://doi.org/10.1007/s10808-008-0019-1>
262. Du Z., Zhang G., Guo T., Tang Sh., Guo X. Tension-compression asymmetry at finite strains: A theoretical model and exact solutions. *J Mech Phys Solids* 2020. **143**, 104084; <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104084>
263. Cazacu O., Plunkett B., Barlat F. Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals. *Int J Plasticity* 2006. **22** (7), 1171–1194; <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.06.001>
264. Cazacu O., Revil-Baudard B. Tension-compression asymmetry effects on the plastic response in bending: new theoretical and numerical results. *Mech Res Commun* 2021. **114**, 103596; <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2020.103596>
265. Горев Б.В., Рубанов В.В., Соснин О.В. О построений уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // ПМТФ. 1979. №4. С. 121–128; <https://doi.org/10.1007/BF00905605>
266. Альтенбах Х.И., Золочевский А.А. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности анизотропных и изотропных материалов, разносопротивляющихся растяжению – сжатию // ПМТФ. 1992. №1. С. 114–120; <https://doi.org/10.1007/BF00864514>
267. Voyiadjis G.Z., Zolochovsky A. Modeling of secondary creep behavior for anisotropic materials with different properties in tension and compression. *Int J Plasticity* 1998. **14** (10–11), 1059–1083; [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(98\)00045-X](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(98)00045-X)
268. Zolochovsky A., Voyiadjis G.Z. Theory of creep deformation with kinematic hardening for materials with different properties in tension and compression. *Int J Plasticity* 2005. **21** (3), 435–462; <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.12.007>

269. Zolochovsky A., Sklepus S., Hyde T.H., Becker A.A., Peravali S. Numerical modeling of creep and creep damage in thin plates of arbitrary shape from materials with different behavior in tension and compression under plane stress conditions. *Int J Numer Meth Eng* 2009. **80** (11), 1406–1436; <https://doi.org/10.1002/nme.2663>
270. Zolochovsky A., Galishin A., Sklepus S., Voyiadjis G.Z. Analysis of creep deformation and creep damage in thin-walled branched shells from materials with different behavior in tension and compression. *Int J Solids Struct* 2007. **44** (16), 5075–5100; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.019>
271. Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычислительные методы и программирование. 2008. Т. 9. С. 346–365
272. Аннин Б.Д., Олейников А.И., Бормотин К.С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // ПМТФ. 2010. Т. 51, №4. С. 155–165; <https://doi.org/10.1007/s10808-010-0074-2>
273. Банщикова И.А., Ларичкин А.Ю. Кручение круглых стержней с учетом разнсопротивляемости материала растяжению и сжатию в условиях ползучести // ПМТФ. 2018. Т. 59, №6. С. 123–134; <https://doi.org/10.1134/S0021894418060123>
274. Банщикова И.А. Построение определяющих уравнений для ортотропных при ползучести материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии // ПМТФ. 2020. Т. 61, №1. С. 102–117; <https://doi.org/10.1134/S0021894420010101>
275. Teixeira L., Gillibert J., Sayet T., Blond E. A creep model with different properties under tension and compression: Applications to refractory materi-

- pals.
- Int J Mech Sci*
- 2021.
- 212**
- , 106810;
-
- <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106810>
276. Guo Y., Liu G., Huang Y. A complemented multiaxial creep constitutive model for materials with different properties in tension and compression. *Eur J Mech A – Solid* 2022. **93**, 104510;
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104510>
277. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials – V: The problem of flexure. *P Roy Soc Lond A Mat* 1949. **195**, 463–473;
<https://doi.org/10.1098/rspa.1949.0004>
278. Destrade M., Gilchrist M.D., Motherway J.A., Murphy J.G. Bimodular rubber buckles early in bending. *Mech Mat* 2010. **42** (4), 469–476;
<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2009.11.018>
279. Быковцев Г.И., Ярушина В.М. Об особенностях модели неустановившейся ползучести, основанной на использовании кусочно-линейных потенциалов // В сб.: Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций (к 60-летию со дня рожд. проф. Г.И. Быковцева). – Владивосток: Дальнаука. 1998. С. 9–26
280. Ярушина В.М. К моделированию ползучести разносопротивляющихся материалов // ДАН. 2005. Т. 403, №2. С. 198–200
281. Буренин А.А., Ярушина В.М. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию Е.И. Шемякина (ред. Д.Д. Ивлев, Н.Ф. Морозов). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. С. 100–106
282. Ивлев Д.Д. К теории разрушения твердых тел // ПММ. 1959. Т. 23, №3. С. 618–624
283. Fu S.-Y., Lauke B., Mäder E., Yue C.-Y., Hu X. Tensile properties of short-glass-fiber- and short-carbon-fiber-reinforced polypropylene composites.

- Compos Part A – Appl S* 2000. **31** (10), 1117–1125;
[https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(00\)00068-3](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(00)00068-3)
284. Liang J.-Z. Predictions of Young's modulus of short inorganic fiber reinforced polymer composites. *Compos Part B – Eng* 2012. **43** (4), 1763–1766;
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.010>
285. Facca A.G., Kortschot M.T., Yan N. Predicting the elastic modulus of natural fibre reinforced thermoplastics. *Compos Part A – Appl S* 2006. **37** (10), 1660–1671; <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2005.10.006>
286. Migneault S., Koubaa A., Erchiqui F., Chaala A., Englund K., Wolcott M.P. Application of micromechanical models to tensile properties of wood–plastic composites. *Wood Sci Technol* 2011. **45**, 521–532;
<https://doi.org/10.1007/s00226-010-0351-5>
287. Ratna Prasad A.V., Mohana Rao K. Mechanical properties of natural fibre reinforced polyester composites: Jowar, sisal and bamboo. *Mater Design* 2011. **32** (8–9), 4658–4663; <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.03.015>
288. Jariwala H., Jain P. A review on mechanical behavior of natural fiber reinforced polymer composites and its applications. *J Reinf Plast Comp* 2019. **38** (10), 441–453; <https://doi.org/10.1177/0731684419828524>
289. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *P Roy Soc Lond A Mat* 1957. **241**, 376–396;
<https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0133>
290. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall Mater* 1973. **21** (5), 571–574; [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(73\)90064-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(73)90064-3)
291. Withers P.J., Stobbs W.M., Pedersen O.B. The application of the Eshelby method of internal stress determination to short fibre metal matrix composites. *Acta Metall Mater* 1989. **37** (11), 3061–3084;
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(89\)90341-6](https://doi.org/10.1016/0001-6160(89)90341-6)

292. Tucker C.L., Liang E. Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation. *Compos Sci Technol* 1999. **59** (5), 655–671; [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(98\)00120-1](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(98)00120-1)
293. Roatta A., Bolmaro R.E. An Eshelby inclusion based model for the study of stresses and plastic strain localization in metal matrix composites II. Fiber reinforcement and lamellar inclusions. *Mat Sci Eng A – Struct* 1997. **229**, 192–202; [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(96\)10843-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(96)10843-1)
294. Shil'ko S.V., Chernous D.A., Panin S.V. A mesomechanical analysis of short-fiber reinforced composites with account of the interphase layer. *Mech Compos Mater* 2012. **48**, 171–178; <https://doi.org/10.1007/s11029-012-9263-9>
295. Cox H.L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *Brit J Appl Phys* 1952. **3**(3), 72–79; <https://doi.org/10.1088/0508-3443/3/3/302>
296. Clyne T.W. A simple development of the shear lag theory appropriate for composites with a relatively small modulus mismatch. *Mat Sci Eng A – Struct* 1989. **122** (2), 183–192; [https://doi.org/10.1016/0921-5093\(89\)90629-1](https://doi.org/10.1016/0921-5093(89)90629-1)
297. Nairn J.A. On the use of shear-lag methods for analysis of stress transfer in unidirectional composites. *Mech Mater* 1997. **26** (2), 63–80; [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(97\)00023-9](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(97)00023-9)
298. Starink M.J., Syngellakis S. Shear lag models for discontinuous composites: Fibre end stresses and weak interface layers. *Mat Sci Eng A – Struct* 1999. **270** (2), 270–277; [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(99\)00277-4](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(99)00277-4)
299. Hsueh C.-H. Young's modulus of unidirectional discontinuous-fibre composites. *Compos Sci Technol* 2000. **60** (14), 2671–2680; [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(00\)00128-7](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(00)00128-7)
300. Gao X.-L., Li K. A shear-lag model for carbon nanotube-reinforced polymer composites. *Int J Solids Struct* 2005. **42** (5–6), 1649–1667; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.08.020>

301. Kim H.G., Kwac L.K. Evaluation of elastic modulus for unidirectionally aligned short fiber composites. *J Mech Sci Technol* 2009. **23**, 54–63; <https://doi.org/10.1007/s12206-008-0810-1>
302. Wang J.-Y., Gu C.-S., Gu S.-T., Gao X.-L., Gu H. Shear-lag model for discontinuous fiber-reinforced composites with a membrane-type imperfect interface. *Acta Mech* 2020. **231**, 4717–4734; <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02768-7>
303. Lewis T.B., Nielsen L.E. Dynamic mechanical properties of particulate-filled composites. *J Appl Polym Sci* 1970. **14** (6), 1449–1471; <https://doi.org/10.1002/app.1970.070140604>
304. Halpin J.C., Kardos J.L. The Halpin – Tsai equations: A review. *Polym Eng Sci* 1976. **16**, 344–352; <https://doi.org/10.1002/pen.760160512>
305. Pearson A., Liao W., Kazemi Y., Duncan M., Slingerland E., Kakroodi A., Heydrich M., Hammami A., Naguib H.E. Fiber-matrix adhesion between high-density polyethylene and carbon fiber. *Polym Test* 2022. **105**, 107423; <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2021.107423>
306. Galiotis C., Young R.J., Yeung P.H.J., Batchelder D.N. The study of model polydiacetylene/epoxy composites. *J Mater Sci* 1984. **19**, 3640–3648; <https://doi.org/10.1007/BF02396936>
307. Melanitis N., Galiotis C., Tetlow P.L., Davies C.K.L. Monitoring the micro-mechanics of reinforcement in carbon fibre/epoxy resin systems. *J Mater Sci* 1993. **28**, 1648–1654; <https://doi.org/10.1007/BF00363362>
308. Ingber M.S., Papathanasiou T.D. A parallel-supercomputing investigation of the stiffness of aligned, short-fiber-reinforced composites using the Boundary Element Method. *Int J Numer Meth Eng* 1997. **40** (18), 3477–3491; [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970930\)40:18%3C3477::AID-NME225%3E3.0.CO;2-B](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970930)40:18%3C3477::AID-NME225%3E3.0.CO;2-B)

309. Hwang S.J., Gibson R.F. Micromechanical modeling of damping in discontinuous fiber composites using a strain energy/finite element approach. *J Eng Mater – T ASME* 1987. **109**, 47–52; <https://doi.org/10.1115/1.3225932>
310. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics. CRC Press, Boca Raton, 2016; <https://doi.org/10.1201/b19626>
311. Gun H., Kose G. Prediction of longitudinal modulus of aligned discontinuous fiber-reinforced composites using boundary element method. *Sci Eng Compos Mater* 2014. **21** (2), 219–221; <https://doi.org/10.1515/secm-2013-0055>
312. Krenchel H. Fibre reinforcement: Theoretical and practical investigations of the elasticity and strength of fibre-reinforced materials. Akademisk Forlag, Copenhagen, 1964