

На правах рукописи

Лобанов Алексей Викторович

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ  
МАСКИРОВКИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ  
ВОЛНОВОГО ОБТЕКАНИЯ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Комсомольск-на-Амуре - 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт прикладной математики» Дальневосточного отделения Российской академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор Алексеев Геннадий Валентинович

Официальные оппоненты: Ярощук Игорь Олегович,  
доктор физико-математических наук,  
старший научный сотрудник Тихоокеанского  
океанологического института им. В.И. Ильичева  
ДВО РАН, г. Владивосток, заведующий  
лабораторией «Статистической гидроакустики».

Потянихин Дмитрий Андреевич,  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник Федерального  
государственного бюджетного учреждения науки  
Института машиноведения и металлургии  
ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное  
учреждение науки Институт гидродинамики  
им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск.

Защита диссертации состоится 21 апреля 2016 года в 10-00 часов на заседании диссертационного совета Д 999.055.04 при Комсомольском-на-Амуре государственном техническом университете по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27, ауд. 201-3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет» и на сайте:  
[http://sovnet.knastu.ru/diss\\_defense](http://sovnet.knastu.ru/diss_defense).

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2016 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
кандидат физ.-мат. наук, доцент

Лошманов Антон Юрьевич

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы и степень её разработанности.** В течение последних нескольких лет наблюдается возрастающий интерес в развитии эффективных методов и стратегий для достижения невидимости объектов к волнам различной природы (электромагнитным, акустическим и т.д.). Кроме сложнейших математических и физических аспектов создания основ теории, такой интерес мотивируется чрезвычайно важными технологическими приложениями к широкому множеству проблем от маскировки объектов специального назначения до медицинской диагностики.

Разработанные к настоящему времени методы и стратегии маскировки принято разбивать на два основных класса: классы пассивных и активных стратегий. Класс активных стратегий основан на использовании для подавления рассеяния маскируемого объекта активных источников способом, который напоминает разработанный в 70-е годы прошлого столетия метод подавления шума. Он берет свое начало от метода активного гашения звуковых полей, впервые предложенного российским ученым Г.Д. Малюжиным в 60-х годах прошлого столетия и далее интенсивно развиваемого как за рубежом, так и у нас в стране. Обзор исследований в этой области, получившей за рубежом название “noise reduction” (шумоподавление), выполненных до 2006 г., можно найти в книге Г.В. Алексева (2006). Вопросам обоснования и применения активных методов для маскировки материальных тел посвящены работы зарубежных авторов D. A. Miller (2006) и F. G. Vasquez (2009).

Самым известным и хорошо изученным среди пассивных методов маскировки является, по-видимому, подход, основанный на методе оптических преобразований (МОП). В физическом плане метод состоит в построении вокруг маскируемого тела такой пространственной структуры в виде объемной оболочки, которая “заставляет” падающие на маскируемый объект волны огибать тело и далее распространяться без проникновения в объект и без рассеяния. Считается, что основателями этого метода являются зарубежные исследователи J.B. Pendry, D. Schurig, D.R. Smith и U. Leonhardt, опубликовавшие в 2006 г. в одном и том же номере журнала “Science” две статьи. Однако идея покрытия материальных тел с целью их маскировки уже была сформулирована в 1961 г. в статье российского физика Л.С. Долина.

Пассивный метод маскировки, который в 2007 удалось распространить на акустические и другие волны, оказался весьма плодотворным и популярным среди зарубежных исследователей. Нужно однако отметить, что этот самый популярный метод обладает рядом недостатков.

Основным его недостатком является сложность технической реализации полученных решений, которые описывают материалы, не существующие в природе, называемые метаматериалами, и которые пока нельзя создать на уровне технологического развития современного общества. Более детально познакомиться с проблемами, возникающими при создании метаматериалов, служащих для создания маскировочных устройств, можно по материалам статьи А.Н. Лагарькова и М.А. Погосяна (Вестник Российской академии наук, 2003) и доклада “Метаматериалы в электромагнетизме, оптике и акустике”, сделанного академиком А.Н. Лагарьковым на 11-ом Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, состоявшемся в августе 2015 г. в г. Казани.

Существует несколько способов преодоления трудностей технической реализации. Один из способов состоит в замене полученных ранее точных решений задачи маскировки, описывающих сингулярные анизотропные параметры маскировочной оболочки, некоторыми приближенными решениями, описывающими несингулярные параметры, и построении маскировочных устройств именно на основе использования этих приближений. Данный подход развивался, начиная с 2006 г., в работах Н. Chen, В. Zang, J. Hong, Z. Ruan, M. Yan, В. Popa, S.A. Cummer, M. Qiu, A. Alu, S. Guenneau, A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas, G. Uhlmann, R. Kohn, O. Onofrei, J. Li, H.Y. Liu, H. Sun, H. Nguen, M.S. Vogelius, H. Ammari, Ю.И. Бобровницкого, Г.В. Алексеева и других зарубежных и отечественных исследователей. Более подробно об этом можно прочитать в обзорной статье А.Е. Дубинова и Л.А. Мытаревой (2010).

Еще один подход к преодолению трудностей, связанных с практической реализацией, состоит в использовании альтернативного способа маскировки материальных объектов, основанного на покрытии их специальными материалами. Математически внесение такого покрытия моделируется введением так называемого импедансного граничного условия на границе маскируемого тела. В случае, когда объект имеет неизменную форму, задача его маскировки сводится к выбору поверхностного импеданса, исходя, например, из условия минимума рассеянного поля. Этот подход развивается, в основном, в трудах Ю.И. Бобровницкого и Г.В. Алексеева с учениками.

Чтобы упростить проблему технической реализации решений, полученных с помощью МОПа, в диссертации предлагается заменить обратную задачу построения точной маскировочной оболочки приближенной задачей построения слабо рассеивающей оболочки. Параметры среды, заполняющей оболочку, должны изменяться в некотором классе функций, допускающих относительно простую техническую реализацию. Далее остается выбрать эти параметры

из условия минимума некоторого функционала качества. Аналогичная идея используется и при исследовании задач маскировки материальных тел за счет выбора импедансного покрытия. Именно эта идея минимизации лежит в основе разработанного в диссертации оптимизационного метода исследования задач маскировки материальных тел. При разработке эффективных численных алгоритмов решения задач маскировки используются высокоточные методы решения систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленными матрицами, основанные на методе сингулярного разложения матрицы коэффициентов. Об этом методе можно прочитать, например, в книге С.И. Кабанихина (2008).

**Цель работы.** Целью работы является теоретический и численный анализ задач маскировки материальных тел на основе методов оптимизации и численных методов решения обратных задач для моделей рассеяния волн.

**Задачи исследования.** Задачами исследования являются:

- разработать схему исследования задач маскировки тел, основанную на оптимизационном методе решения обратных задач;
- доказать разрешимость однопараметрических и двухпараметрических экстремальных задач маскировки, построить и проанализировать системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума;
- установить достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие локальную единственность и устойчивость решений задач маскировки;
- разработать и исследовать высокоточные численные алгоритмы решения двумерных задач маскировки, осуществить их программную реализацию в виде комплекса программ численного решения двумерных задач маскировки;
- на основе разработанного комплекса программ выполнить вычислительные эксперименты по решению конкретных задач маскировки двумерных объектов и осуществить сравнительный анализ полученных результатов.

**Методы исследования.** В диссертационной работе используются фундаментальные результаты и методы математической физики, методы численного анализа, методы теории некорректных и обратных задач, оптимального управления и сопряженных уравнений, методы математического моделирования и вычислительного эксперимента.

**Достоверность и обоснованность** результатов обеспечивается применением строгих математических доказательств и верификацией построенных алгоритмов на задачах с известными решениями.

**Научная новизна. Положения, выносимые на защиту.** Основные результаты работы являются новыми, они обобщают и дополняют результаты отечественных и зарубежных исследований и состоят в следующем:

1. Разработан метод исследования задач маскировки, основанный на оптимизационном методе решения обратных задач для уравнения Гельмгольца;
2. Доказаны теоремы о корректностной разрешимости однопараметрических и двухпараметрических задач маскировки материальных тел;
3. Получены системы оптимальности для рассматриваемых задач, доказаны теоремы единственности и устойчивости решений задач двумерной маскировки;
4. Разработаны и исследованы численные алгоритмы решения двумерных задач маскировки материальных тел на основе волнового обтекания;
5. Разработан комплекс программ, предназначенных для численного решения двумерных задач маскировки, осуществляющий программную реализацию разработанных численных алгоритмов;
6. На основе вычислительных экспериментов исследована зависимость полученных решений от основных параметров, входящих в рассматриваемую задачу и осуществлен сравнительный анализ полученных результатов.

**Теоретическая и практическая значимость.** Теоретическая значимость диссертационной работы состоит в развитии оптимизационного метода исследования рассматриваемых в работе задач маскировки материальных тел, а также в разработке и обосновании численных алгоритмов решения двумерных задач маскировки, основанных на использовании высокоточных численных методов и метода регуляризации. Разработанные в диссертации алгоритмы могут использоваться при решении как задач маскировки, так и близких обратных задач акустического и электромагнитного рассеяния.

**Область исследования.** Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 05.13.18 “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ” по следующим областям исследований: п. 1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений; п. 2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей; п. 3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий; п. 5. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах Института прикладной математики ДВО РАН и на следующих научных конференциях: Дальневосточных математических школах-семинарах имени акад. Е.В. Золотова (Владивосток (2012, 2013, 2014)); на 11-ой международной конфе-

ренции “Numerical analysis and applied mathematics” (Греция, Родос, 2013); на 5-ой и 6-ой Всероссийских научно-технических конференциях “Технические проблемы освоения Мирового океана (ТПОМО-5)” (Владивосток, 2013, 2015); на 7-ой Международной конференции “Inverse Problems: Modelling and Simulation” (Турция, Фетхие, 2014); на Всероссийской конференции “Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение”, приуроченной к 95-летию академика Л.В. Овсянникова (Новосибирск, 2014); на Международной конференции “Успехи механики сплошных сред”, приуроченной к 75-летию академика В.А. Левина (Владивосток, 2014); на семинаре Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук под руководством чл.-корр. РАН Буренина А.А. (Комсомольск-на-Амуре, 2015).

**Личный вклад автора. Публикации.** Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. Во всех совместных работах автор участвовал в формулировках задач, самостоятельно осуществлял теоретическое исследование рассматриваемых задач маскировки, разрабатывал численные алгоритмы решения задач маскировки, реализовал разработанные численные алгоритмы в виде комплекса программ, выполнял численные эксперименты и проводил их сравнительный анализ.

Результаты диссертационного исследования **опубликованы** в 20 работах, из них 2 ([1], [2]) – в ведущих рецензируемых журналах, включенных в перечень ВАК; 6 из опубликованных научных статей индексируются в международной базе научного цитирования Scopus [3–8]; получено одно свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [9]; 11 работ в материалах и трудах конференций [10–20].

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Общий объем диссертации составляет 136 стр, включая 31 рисунок и 30 таблиц. Список цитируемой литературы содержит 160 наименований.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 13-01-00313-а, пректа № 12-1-П17-03 ДВО РАН, тематика которого соответствует Программе 17 фундаментальных исследований Президиума РАН, гранта Министерства образования и науки РФ (контракт 14.У26.31.0003) и гранта РФФИ № 14-11-00079.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** дана общая характеристика диссертационной работы, сформулирована её цель и научные задачи исследования, обоснована актуаль-

ность, представлены результаты работы, выносимые на защиту, а также определена научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы.

**Первая глава** посвящена теоретическому исследованию модельной задачи маскировки для уравнения Гельмгольца, рассматриваемого в ограниченной области  $\Omega$  при однородном условии Дирихле на одной части  $\Gamma_D$  границы  $\Gamma$  и импедансном граничном условии на другой (покрытой) части  $\Gamma_I$  границы  $\Gamma$  области. Соответствующая краевая задача описывается соотношениями

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad \partial u / \partial \nu + ik\lambda u = g \text{ на } \Gamma_I. \quad (1)$$

Здесь правая часть  $g$  и импеданс  $\lambda$  – заданные функции на  $\Gamma_I$ .

**В разделе 1.2** введены основные используемые в этой главе функциональные пространства и, в частности, пространства  $X = H^1(\Omega)$  и  $H^1(\Delta, \Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^2(\Omega)\}$ , и приведена слабая формулировка задачи (1). Она состоит в нахождении функции  $u \in X$ , удовлетворяющей тождеству

$$a_\lambda(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in X, \quad \langle f, v \rangle \equiv (g, v)_{\Gamma_I}. \quad (2)$$

Здесь  $a_\lambda : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  – полуторалинейная форма, определяемая формулой

$$a_\lambda(u, v) = a_0(u, v) + ik \int_{\Gamma_I} \lambda u \cdot \bar{v} d\sigma, \quad a_0(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k^2 u \cdot \bar{v}) dx.$$

Вводится оператор  $A_\lambda : X \rightarrow X^*$  формулой  $\langle A_\lambda u, v \rangle = a_\lambda(u, v) \quad \forall u \in X, v \in X$ , с помощью которого задача (2) записывается в виде  $A_\lambda u = f, f \in X^*$ . Дается понятие слабого решения, доказано его существование и выводятся оценки слабого решения через исходные данные. Доказана теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda \in L^\infty(\Gamma_I)$ ,  $\lambda_0 > 0$ . Тогда: (1) оператор  $A_\lambda : X \rightarrow X^*$  – изоморфизм; (2) для любой функции  $g \in L^2(\Gamma_I)$  задача (2) имеет единственное решение  $u \in X$ , для которого справедлива оценка  $\|u\|_X \leq C_\lambda \|g\|_{\Gamma_I}$ , где константа  $C_\lambda$  зависит от  $\Omega$ ,  $k^2$  и  $\lambda$ .

**В разделе 1.3** вводятся два функционала качества

$$I_1(u) = \int_Q |u - u_d|^2 dx, \quad I_2(u) = \int_{\Gamma_r} |u - u_d|^2 d\sigma,$$

где  $u_d$  – заданная функция. Они используются при оптимизационном методе решения задачи маскировки для рассматриваемой модели рассеяния. Далее формулируется экстремальная задача, в которой роль управления играет граничный импеданс. Математически она ставится следующим образом:

$$J(u, \lambda) = \frac{\alpha_0}{2} I(u) + \frac{\alpha_1}{2} \|\lambda\|_{s, \Gamma_I}^2 \rightarrow \inf, \quad G(u, \lambda, g) = 0, \quad (u, \lambda) \in X \times K. \quad (3)$$



Здесь  $G : X \times K \times L^2(\Gamma_I) \rightarrow X^*$  — оператор прямой задачи, определяемый формулой  $\langle G(u, \lambda, g), v \rangle = a_0(u, v) + ik(\lambda u, v)_{\Gamma_I} - \langle f, v \rangle$ ,  $I(u) = I_1(u)$  либо  $I(u) = I_2(u)$ . Доказывается следующая теорема существования решения.

**Теорема 2.** Пусть  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $K \subset H^s(\Gamma_I)$ ,  $s > 1/2$  — непустое выпуклое замкнутое множество и пусть  $\alpha_1 \geq 0$ , а множество  $K$  ограничено, либо  $\alpha_1 > 0$ . Тогда задача (3) имеет решение  $(u, \lambda) \in X \times K$  при  $I = I_l$ ,  $l = 1, 2$ .

В разделе 1.4 выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума в задаче управления. Она состоит из трех частей: слабой формулировки (2) прямой задачи, сопряженной задачи

$$a_0(v, p) + ik(\hat{\lambda}v, p)_{\Gamma_I} = -(\alpha_0/2)\overline{\langle I'_u(\hat{u}), v \rangle} \quad \forall v \in X$$

для сопряженного состояния (множителя Лагранжа  $p \in X$ ) и вариационного неравенства для нахождения искомого управления  $\hat{\lambda}$ , имеющего вид

$$\alpha_1(\hat{\lambda}, \lambda - \hat{\lambda})_{s, \Gamma_I} + k\text{Re}[i((\lambda - \hat{\lambda})\hat{u}, p)_{\Gamma_I}] \geq 0 \quad \forall \lambda \in K.$$

В разделе 1.5 на основе анализа свойств системы оптимальности исследуются вопросы единственности и устойчивости решений.

Во второй главе формулируется прямая краевая задача для двумерной модели рассеяния электромагнитных волн в неограниченной однородной среде  $\Omega^c$ , содержащей анизотропное проницаемое препятствие  $\Omega$  с покрытой в целях маскировки границей  $\Gamma$ . Указанная задача сводится к нахождению функций  $v$  в  $\Omega$  и  $u = u^{inc} + u^s$  в  $\Omega^c$ , удовлетворяющих уравнениям

$$\Delta v + k^2\delta(x)v = 0 \text{ в } \Omega, \quad \Delta u + k^2u = 0 \text{ в } \Omega^c = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}, \quad (4)$$

смешанным граничным условиям сопряжения на границе  $\Gamma$ , имеющим вид

$$v - u = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} = i\eta(x)u \text{ на } \Gamma \quad (5)$$

и условию излучения Зоммерфельда в  $\mathbb{R}^2$ . Здесь функции  $\delta(x)$  и  $\eta(x)$  имеют смысл индекса рефракции и поверхностной проводимости границы.

В разделе 2.2 и 2.3 вводятся основные функциональные пространства и приводится слабая формулировка рассматриваемой задачи рассеяния. Предварительно исходная задача рассеяния сводится к эквивалентной краевой задаче в круге достаточно большого радиуса, на границе которого ставится нелокальное краевое условие  $\partial u^s / \partial n = Tu^s$  на  $\Gamma_R$ , содержащее оператор Дирихле-Неймана  $T$ . Дается понятие слабого решения как функции  $U \in X = H^1(B_R)$ , равной  $v(x)$  в  $\Omega$  и  $u(x)$  в  $\Omega_e$ , удовлетворяющей тождеству

$$a^n(U, \Phi) \equiv a_0(U, \Phi) - a_\eta(U, \Phi) = \langle f, \Phi \rangle \quad \forall \Phi \in X. \quad (6)$$

Здесь  $a_0$ ,  $a_\eta$  и  $f$  – полуторалинейные и антилинейная формы, где

$$a_0(U, \Phi) := \int_{\Omega} (\nabla U \cdot \nabla \bar{\Phi} - k^2 \delta U \bar{\Phi}) dx + \int_{\Omega_e} (\nabla U \cdot \nabla \bar{\Phi} - k^2 \bar{\Phi} U) dx - \int_{\Gamma_R} TU \bar{\Phi} d\sigma,$$

$$a_\eta(U, \Phi) = i(\eta U, \Phi)_{\Gamma_i} \equiv i \int_{\Gamma} \eta U \bar{\Phi} d\sigma, \quad \langle f, \Phi \rangle = - \int_{\Gamma_R} T u^{inc} \bar{\Phi} d\sigma + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \bar{\Phi} d\sigma.$$

Доказывается следующая теорема существования слабого решения.

**Теорема 3.** Пусть при выполнении условий (i),  $K \subset L_{\eta_0}^\infty(\Gamma)$  – непустое ограниченное множество, где  $\eta_0 > 0$ . Пусть  $\eta \in K$  – произвольный элемент. Тогда для любого падающего поля  $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$  задача (6) имеет единственное решение  $U_\eta \in X$ , которое удовлетворяет оценке  $\|U_\eta\|_X \leq C_0 \|u^{inc}\|_{1, \Omega_e}$ , где константа  $C_0$  зависит от  $\Omega$ ,  $k$ ,  $R$ ,  $\delta$ , но не зависит от  $\eta$ .

В разделе 2.4 формулируется следующая экстремальная задача, к которой сводится задача маскировки для рассматриваемой модели рассеяния:

$$J(U, \eta) = \frac{\alpha_0}{2} I(U) + \frac{\alpha_1}{2} \|\eta\|_{s, \Gamma}^2 \rightarrow \inf, \quad G(U, \eta, u^{inc}) = 0, \quad (U, \eta) \in X \times K. \quad (7)$$

Доказывается следующая теорема существования ее решения.

**Теорема 4.** Пусть  $\alpha_1 \geq 0$  и  $K \subset H_{\eta_0}^s(\Gamma)$ ,  $s > 1/2$  – непустое выпуклое замкнутое множество и пусть  $\alpha_1 \geq 0$ , а множество  $K$  ограничено, либо  $\alpha_1 > 0$ . Тогда задача (7) имеет по крайней мере одно решение  $(U, \eta) \in X \times K$  при  $I = I_l$ ,  $l = 1, 2$ .

Далее доказывается теорема существования множителя Лагранжа для рассматриваемой задачи управления, на основе которой выводится система оптимальности. Она состоит из трех частей: слабой формулировки (6) прямой задачи, сопряженной задачи для сопряженного состояния

$$a_0(\Psi, P) - i(\hat{\eta}\Psi, P)_{\Gamma} = -\alpha_0(\Psi, \hat{U} - u^d)_Q \quad \forall \Psi \in X$$

и вариационного неравенства для нахождения искомого управления

$$\alpha_1(\hat{\eta}, \eta - \hat{\eta})_{s, \Gamma} - \operatorname{Re}[i((\eta - \hat{\eta})\hat{U}, P)_{\Gamma}] \geq 0 \quad \forall \eta \in K.$$

В разделе 2.5 устанавливаются достаточные условия на исходные данные рассматриваемой задачи управления, обеспечивающие единственность и устойчивость решений конкретных задач управления.

В третьей главе формулируется прямая краевая задача для трехмерной модели рассеяния акустических волн в неограниченной однородной среде, содержащей неоднородное проницаемое препятствие в виде области  $\Omega$  с липшицевой границей  $\Gamma_i \cup \Gamma_e$ , состоящей из двух компонент: внутренней  $\Gamma_i$

и внешней  $\Gamma_e$ . Указанная задача математически заключается в нахождении поля  $p$  в  $\Omega$  и внешнего поля  $p_e = p^{inc} + p^s$  в  $\Omega_e^\infty$ , удовлетворяющих условиям

$$\Delta p + k^2 \eta p = -f \quad \text{в } \Omega, \quad \Delta p_e + k^2 p_e = 0 \quad \text{в } \Omega_e^\infty, \quad (8)$$

$$p = p_e, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_e}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma_e, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = g \quad \text{на } \Gamma_i, \quad \rho_e = \text{const} \quad (9)$$

и условию излучения при  $r \rightarrow \infty$ . Здесь, в частности,  $\rho$  и  $\eta$  – переменные плотность и индекс рефракции в  $\Omega$ ,  $\rho_e = \text{const}$  – плотность среды в  $\Omega_e$

**В разделе 3.2** вводятся основные функциональные пространства, а задача (8), (9) сводится к эквивалентной краевой задаче в круге достаточно большого радиуса, на границе которого ставится нелокальное краевое условие, содержащее оператор Дирихле-Неймана, и приводится слабая формулировка сформулированной задачи рассеяния.

Дается понятие слабого решения как пары  $P = (p, p_e) \in X \equiv \{P = (p, p_e) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega_e) : p = p_e \text{ на } \Gamma_e\}$ , удовлетворяющей тождеству

$$a_\eta(P, S) = \langle F, S \rangle \equiv \langle f^{inc}, S \rangle + \rho^{-1} \int_\Omega f \bar{S} dx + \int_{\Gamma_i} g \bar{S} d\sigma \quad \forall S \in X. \quad (10)$$

Здесь  $a_\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  и  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  – полуторалинейная и антилинейная формы, где  $a_\eta(P, S) = a_0(P, S) + a(\eta; P, S)$ ,  $a(\eta; P, S) = -k^2 \rho^{-1} \int_\Omega \eta P \bar{S} dx$ ,

$$a_0(P, S) = \rho^{-1} \int_\Omega \nabla P \cdot \nabla \bar{S} dx + \rho_e^{-1} \int_{\Omega_e} (\nabla P \cdot \nabla \bar{S} - k^2 P \bar{S}) dx$$

$$-\rho_e^{-1} \int_{\Gamma_R} T(P) \bar{S} d\sigma, \quad \langle f^{inc}, S \rangle = -\rho_e^{-1} \int_{\Gamma_R} T p^{inc} \bar{S} d\sigma + \rho_e^{-1} \int_{\Gamma_R} \frac{\partial p^{inc}}{\partial n} \bar{S} d\sigma.$$

Доказывается следующая теорема о существовании слабого решения

**Теорема 5.** Пусть при выполнении условия (i)  $\eta \in L_+^\infty(\Omega)$ . Тогда для любой тройки  $(p^{inc}, f, g) \in \mathcal{H}^{inc} \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_i)$  задача 3 имеет единственное слабое решение  $P = (p, p_e) \in X$ , которое удовлетворяет оценке

$$\|P_\eta\|_X \leq C_\eta (\|p^{inc}\|_{1, \Omega_e} + \|f\|_\Omega + \|g\|_{\Gamma_i}), \quad C_\eta = C_3 \tilde{C}_\eta.$$

**В разделе 3.3** формулируется двухпараметрическая экстремальная задача, к которой сводится задача маскировки для рассматриваемой 3-D модели рассеяния. Роль управлений в ней играет индекс рефракции  $\eta$  и граничная плотность источников  $g$ . Она описывается соотношениями

$$\frac{\alpha_0}{2} I(P) + \frac{\alpha_1}{2} \|\eta\|_{s, \Omega}^2 + \frac{\alpha_2}{2} \|g\|_{\Gamma_i}^2 \rightarrow \inf, \quad (P, u) \in X \times K, \quad G(P, u, p^{inc}) = 0, \quad (11)$$

где  $u = (\eta, g)$ ,  $K = K_1 \times K_2$ . Доказывается следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть  $p^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$ ,  $K_1 \subset H^s(\Omega)$ ,  $s > 3/2$  и  $K_2 \subset L^2(\Gamma_i)$  – непустые выпуклые замкнутые множества, и пусть  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$  и множества  $K_1$  и  $K_2$  ограничены, либо  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ . Тогда задача (11) имеет по крайней мере одно решение  $(P, u) \in X \times K$  при  $I = I_l$ ,  $l = 1, 2$ .

Далее выводится система оптимальности. Она состоит из трех частей: слабой формулировки прямой задачи (10), сопряженной задачи

$$a_0(\Psi, R) + a(\hat{\eta}; \Psi, R) = -(\alpha_0/2) \overline{\langle I'_P(\hat{P}), \Psi \rangle} \quad \forall \Psi \in X,$$

для сопряженного состояния  $R$  и двух вариационных неравенств для  $\hat{\eta}$ ,  $\hat{g}$

$$\alpha_1(\hat{\eta}, \eta - \hat{\eta})_{s, \Omega} + \text{Re}a(\eta - \hat{\eta}; \hat{P}, R) \geq 0 \quad \forall \eta \in K_1,$$

$$\alpha_2(\hat{g}, g - \hat{g})_{\Gamma_i} - \text{Re}((g - \hat{g}), R)_{\Gamma_i} \geq 0 \quad \forall g \in K_2.$$

**В разделе 3.4** устанавливаются условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решений конкретных задач управления.

**В четвертой главе** обсуждаются результаты вычислительных экспериментов по решению 2D задачи маскировки. Глава состоит из трех разделов.

**В разделе 4.1** исследуются маскировочные свойства двумерной цилиндрической оболочки, имеющей вид кольца  $a < r < b$ , заполненного анизотропной средой, для которой диагональные компоненты  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_z$  и  $\mu_z$ ,  $\mu_\theta$ ,  $\mu_z$  диагональных тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей определяются формулами (см. Pendry et al. (2006), Ruan et al. (2007))

$$\varepsilon_r = \mu_r = \frac{r-a}{r}, \quad \varepsilon_\theta = \mu_\theta = \frac{r}{r-a}, \quad \varepsilon_z = \mu_z = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2 \frac{r-a}{r}. \quad (12)$$

Известно, что оболочка с параметрами (12) обеспечивает абсолютную маскировку от любой падающей волны, если, конечно, ее можно реализовать.

Раздел 4.1 начинается с формальной постановки задачи маскировки, которая сводится к нахождению решения задачи рассеяния ТЕ-поляризованной плоской волны на указанной оболочке с параметрами (12). В математическом плане задача состоит в нахождении решения 2D уравнения Гельмгольца

$$\frac{1}{\varepsilon_z r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\mu_\theta} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{\varepsilon_z r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right) + k_0^2 E_z = 0, \quad (13)$$

рассматриваемого при условиях сопряжения на границах  $r = a$  и  $r = b$ .

Так как коэффициенты уравнения (13), определенные в (12), обращаются в нуль или в бесконечность при  $r = a$ , то указанная задача рассеяния представляет собой сингулярную краевую задачу. Для ее регуляризации условия

сопряжения при  $r = a$  сдвигаются на окружность радиуса  $a + \delta$ , где  $\delta > 0$  – малый параметр, имеющий смысл параметра регуляризации. Это позволяет применить для нахождения решения метод Фурье и записать поля во всех трех областях  $\Omega_1 = \{r > b\}$ ,  $\Omega_2 = \{a + \delta < r < b\}$  и  $\Omega_3 = \{r < a + \delta\}$  в виде

$$E_z^1(r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\alpha_l^{in} J_l(k_0 r) \exp(il\theta) + \alpha_l^{sc} H_l(k_0 r) \exp(il\theta)] \text{ в } \Omega_1,$$

$$E_z^2(r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l^2 J_l(k_1(r - a)) \exp(il\theta) + \alpha_l^3 H_l(k_1(r - a)) \exp(il\theta) \text{ в } \Omega_2,$$

$$E_z^3(r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l^1 J_l(k_0 r) \exp(il\theta) \text{ в } \Omega_3.$$

Здесь  $\alpha_l^{in}$  – заданные коэффициенты разложения падающей плоской волны,  $J_l$  и  $H_l$  – функции Бесселя и Ханкеля 1-го рода  $l$ -го порядка, а  $\alpha_l^{sc}$  и  $\alpha_l^1$ ,  $\alpha_l^2$ ,  $\alpha_l^3$  – неизвестные коэффициенты рассеяния либо трансмиссии, которые должны быть определены из условий сопряжения при  $r = b$  и  $r = a + \delta$ . Для их нахождения при каждом  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  выводится система линейных алгебраических уравнений вида

$$Aq = \tilde{b}. \quad (14)$$

Здесь  $q = (\alpha_l^1, \alpha_l^2, \alpha_l^3, \alpha_l^{sc})$ ,  $\tilde{b} = (k_0 \alpha_l^{in} J_l'(k_0 b), 0, \alpha_l^{in} J_l(k_0 b), 0)$  – векторы решения и правой части системы, а  $4 \times 4$  – матрица  $A$  определяется формулой

$$A = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{\mu_\theta(b)} J_l'(k_1(b - a)) & \frac{k_1}{\mu_\theta(b)} H_l'(k_1(b - a)) & 0 & -k_0 H_l'(k_0 b) \\ -J_l(k_1 \delta) & -H_l(k_1 \delta) & J_l(k_0(a + \delta)) & 0 \\ J_l(k_1(b - a)) & H_l(k_1(b - a)) & 0 & -H_l(k_0 b) \\ -\frac{k_1}{\mu_\theta(a + \delta)} J_l'(k_1 \delta) & -\frac{k_1}{\mu_\theta(a + \delta)} H_l'(k_1 \delta) & k_0 J_l'(k_0(a + \delta)) & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствием сингулярности исходной задачи сопряжения является тот факт, что матрица  $A$  системы (14) плохо обусловлена при малых  $\delta$ . С учетом этого для решения системы (14) в диссертации использовался высокоточный метод, основанный на сингулярном разложении матрицы  $A$ .

При проведении расчетов использовались те же параметры, что и в статье Ruan et al. (2007), а именно:  $a = 0.1\text{м}$ ,  $b = 0.2\text{м}$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f = 2\text{ГГц}$ . В качестве падающей волны выбиралась плоская волна с коэффициентами  $\alpha_l^{in} = i^l A_0 \exp(-ik_0 r_1)$ , где  $A_0 = \text{const}$  – амплитуда. При проведении вычислительных экспериментов использовался пакет Wolfram Mathematica. С помощью этого пакета исследовалась зависимость поведения числа обусловленности  $\sigma(A)$  матрицы  $A$ ,  $\det(A)$ , а также минимального и максимального сингулярных чисел  $\sigma_{\min}$  и  $\sigma_{\max}$  от параметров  $l$  и  $\delta$ , находились неизвестные коэффициенты  $c_l^{sc} = \alpha_l^{sc} / \alpha_l^{in}$ ,  $c_l^j = \alpha_l^j / \alpha_l^{in}$ ,  $j = 1, 2, 3$  путем решения системы

(14) и выдавались приближенные значения рассеянного поля  $E_z^{sc}$  по формуле  $E_z^{sc}(r, \theta) = \sum_{-N}^N \alpha_l^{sc} H_l(k_0 r) \exp(il\theta)$  при некотором  $N > 0$ . Аналогичные формулы использовались для остальных полей.

На рисунке 1 представлены графики зависимости значений  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma(A)$  от  $\delta$  при  $l = 0, 1, 5, 10, 15$ . На рисунке 2 приведен графики зависимости  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma(A)$  от  $l$  при ряде значений  $\delta$ , изменяющихся от  $10^{-2}a$  до  $10^{-9}a$ . Из графиков и приведенных в диссертации таблиц видно, что уменьшение  $\delta$  либо увеличение  $l$  приводит к сильному росту  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma(A)$ .

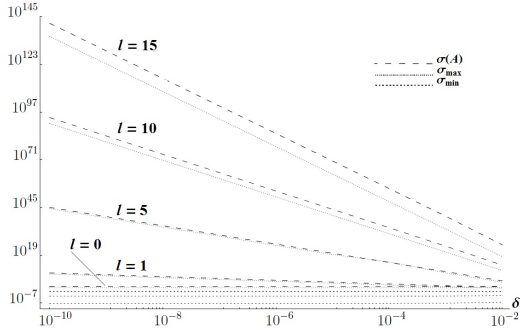


Рисунок 1

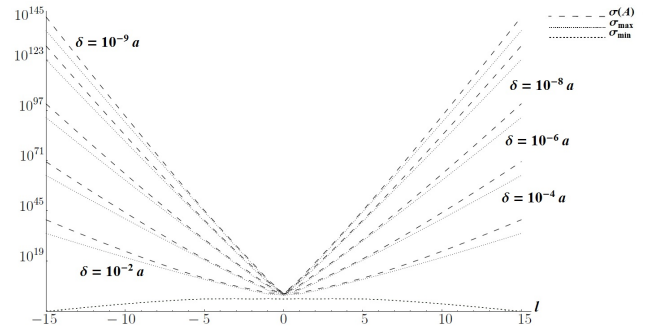


Рисунок 2

На рисунке 3 приведены графики зависимостей модулей коэффициентов  $c_l^{sc}$ ,  $c_l^1$ ,  $c_l^2$  и  $c_l^3$  от  $\delta$  при  $l = 0$  и  $l = 1$ . На рисунке 4 приведены графики зависимостей модулей коэффициентов  $c_l^{sc}$ ,  $c_l^1$ ,  $c_l^2$  и  $c_l^3$  от  $l$  для трех значений  $\delta$ , равных  $10^{-2}a$ ,  $10^{-5}a$  и  $10^{-8}a$ . Видно, что  $c_l^{sc}$ ,  $c_l^2$  и  $c_l^3$  стремятся к нулю при увеличении  $l$ , причем  $c_l^{sc}$ ,  $c_l^2$  и  $c_l^3$  стремятся к нулю быстрее при  $\delta \rightarrow 0$ , чем  $c_0^{sc}$ ,  $c_0^2$  и  $c_0^3$ . Кроме того,  $c_l^1 = 1$  при всех  $\delta$ , что находится в полном согласии с теоретическими результатами Ruan et al. (2007). Аналогичный вывод справедлив и для  $c_l^{sc}$  и  $c_l^3$  при  $|l| > 1$ .

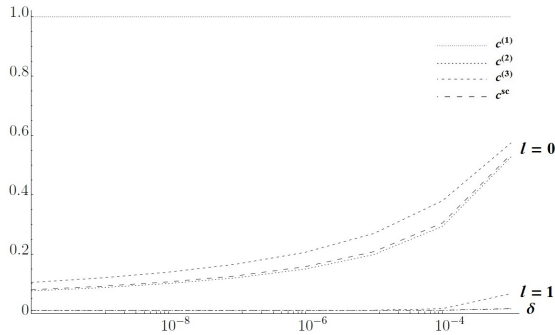


Рисунок 3

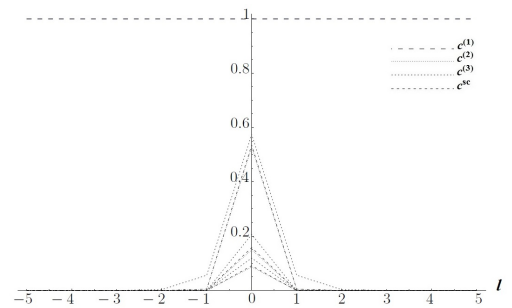


Рисунок 4

Численный анализ, проведенный в диссертации, показал, что коэффициенты рассеяния нулевого порядка  $c_0^{sc}$  и  $c_0^3$  крайне медленно убывают с

уменьшением  $\delta$ . В частности, при уменьшении  $\delta$  от  $10^{-2}a$  до  $10^{-8}a$ , модуль  $|c_0^{sc}|$  уменьшается лишь от 0.536 до 0.090. Подчеркнем, что при  $\delta = 10^{-8}a$  параметры среды принимают на внутренней границе следующие значения  $\varepsilon_z \approx 4 * 10^{-8}$ ,  $\mu_r \approx 10^{-8}$ ,  $\mu_\theta \approx 10^8$ . Ясно, что техническая реализация маскировочных оболочек с указанными крайними значениями параметров среды связана с большими трудностями, а фактически невозможна. Это означает, что исследованный в разделе 4.1 метод дизайна идеальной маскировочной оболочки является мало эффективным и трудно реализуемым.

Один из способов повышения эффективности данного метода состоит в том, чтобы в оболочке  $a < r < b$  с параметрами (12) заменить внутренний слой  $a < r < a + \delta$  при малом  $\delta$  слоем, наполненным так называемым РЕМС – материалом. Именно этот способ развивается в **разделе 4.2**. Напомним, что РЕМС – материал является обобщением идеального проводника и идеального диэлектрика, а краевые условия на границе РЕМС–слоя имеют вид

$$n \times (H + ME) = 0, \quad n \cdot (D - MB) = 0, \quad (15)$$

где  $M$  – параметр полной проводимости (или адмиттанс), а  $n$  – внешняя нормаль.

При наличии РЕМС – слоя задача маскировки состоит в нахождении решения 2D уравнения Гельмгольца (13), рассматриваемого при условиях (15) на границе  $r = a + \delta$  и общих условиях сопряжения при  $r = b$ . С помощью метода Фурье полное поле в области  $r > b$  можно записать в виде

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} [J_l(k_0 r) + a_l H_l^{(1)}(k_0 r) - i\rho_0 J_l'(k_0 r) + i\rho_0 a_l H_l'^{(1)}(k_0 r)] e^{il\theta},$$

где  $a_l$  – неизвестные коэффициенты рассеяния. Точно так же поля  $H_{1z}^i$  и  $E_{1\theta}^i$  в области  $a + \delta < r < b$  разлагаются в аналогичные ряды, содержащие коэффициенты  $b_l, c_l, d_l$ . Как и выше, для нахождения  $a_l, b_l, c_l$  и  $d_l$  опять выводится система вида (14), где  $A$  – соответствующая  $4 \times 4$  – матрица, а  $q = (a_l, b_l, c_l, d_l)$  и  $\tilde{b}$  – векторы решения и заданных правых частей.

Результаты вычислительных экспериментов по реализации высокоточного алгоритма решения системы (14) представлены на рисунках 5-8. На рисунке 5 приведены графики зависимостей величин  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma(A)$  от  $\delta$  для значений  $l$ , равных 0, 1, 5, 10 и 15 при  $M = 0$ . На рисунке 6 приведены графики зависимостей величин  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma(A)$  от  $\delta$  для значений параметра  $l$ , равных 0, 1, 5, 10 и 15 при  $M = 10^6$ . Как и на рисунках 1 и 2, видно, что с уменьшением  $\delta$  либо увеличением  $l$  происходит сильный рост как  $\sigma_{\max}$ , так и  $\sigma(A)$ .

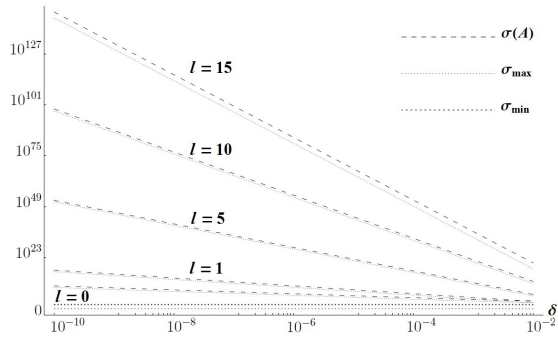


Рисунок 5

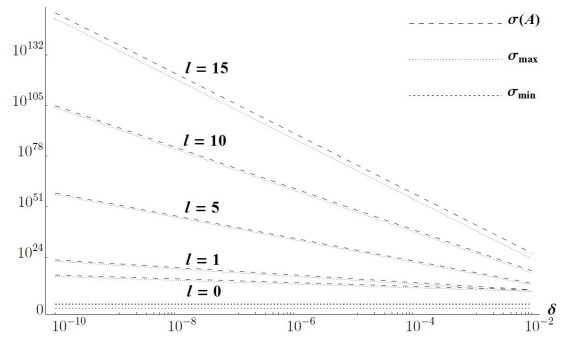


Рисунок 6

На рисунках 7 и 8 приведены графики зависимостей коэффициентов  $a_l$ ,  $b_l$ ,  $c_l$  и  $d_l$  от  $l$  для значений  $M$ , равных 0, 1 и 10, соответственно при  $\delta = 10^{-2}a$  и  $\delta = 10^{-8}a$ . Из этих рисунков и таблиц, приведенных в диссертации, видно, что при  $l = 1$  коэффициенты рассеяния  $a_l$  быстрее стремятся к нулю, чем при использовании способа дизайна маскировочной оболочки, описанного в разд. 4.1. Указанные результаты говорят о большей эффективности данного способа дизайна по сравнению с первым способом. Кроме того, они позволяют выбрать оптимальное значение параметра  $M$ , обеспечивающее высокий маскировочный эффект при не очень высоких значениях параметров среды, заполняющей оболочку.

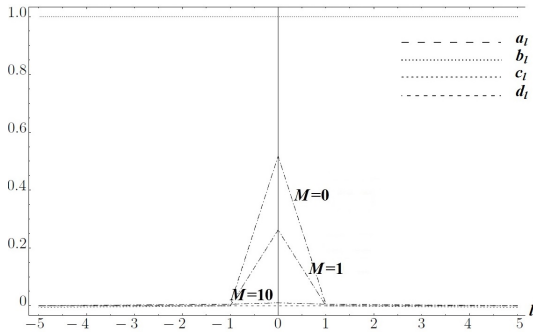


Рисунок 7

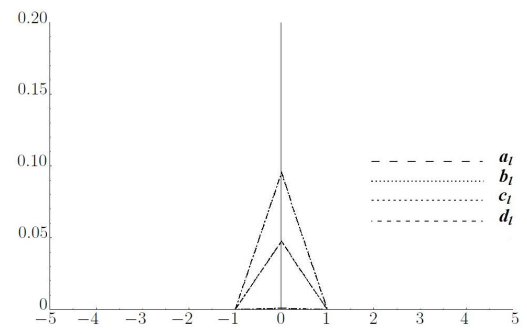


Рисунок 8

**В разделе 4.3** развивается оптимизационный метод построения многослойной цилиндрической оболочки  $\Omega = \{(r, \theta) : a < r < b\}$ , состоящей из  $M$  концентрических однородных слоев. Целью является нахождение набора постоянных параметров среды в каждом слое оболочки  $\Omega$ , исходя из условия минимума поля, рассеянного искомой оболочкой при падении на нее плоской волны вида  $E^{inc} = \hat{z} \exp(-ik_0 r \cos \theta)$ . Искомая маскировочная оболочка, занимающая  $\Omega$ , разбивается на  $M$  слоев:  $\Omega_1 = \{a = R_1 < r < R_2\}$ ,  $\Omega_2 = \{R_2 < r < R_3\}$ , ...,  $\Omega_M = \{R_M < r < R_{M+1}\}$ , где  $R_2 = a + (b - a)/M$ ,  $R_3 = a + 2(b - a)/M$ , ...,  $R_{M+1} = b$ . Предполагается, что основные параметры  $\varepsilon_{z,m}$ ,  $\mu_{r,m}$  и  $\mu_{\theta,m}$  среды, занимающей  $m$ -ый слой, постоянны.



С помощью метода Фурье соответствующие поля в областях  $r > b$ ,  $r < a$  и в  $m$ -ом слое  $\Omega_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  представляются в виде

$$J_0(kr) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} i^l J_l(k_0 r) \cos l\theta + \sum_{l=0}^{\infty} a_l H_l(k_0 r) \cos(l\theta),$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_{0l} J_l(k_0 r) \cos(l\theta), \quad E_m(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [b_{mn} J_v(k_m r) + c_{mn} N_v(k_m r)] \cos(l\theta).$$

Здесь  $N_v$  – функция Неймана порядка  $v$ ,  $a_l$ ,  $b_{0l}$ ,  $b_{ml}$  и  $c_{ml}$  – неизвестные коэффициенты, а волновое число  $k_m$  и порядок  $v$  в  $m$ -ом слое определяются формулами  $k_m = \omega \sqrt{\varepsilon_{z,m} \mu_{\theta,m}}$ ,  $v = l \sqrt{\mu_{\theta,m} / \mu_{r,m}}$ . Неизвестные коэффициенты  $a_l$ ,  $b_{0l}$ ,  $b_{ml}$  и  $c_{ml}$ , как и прежде, определяются из условий сопряжения на границах раздела  $r = R_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M + 1$  путем решения системы  $2M + 2$  линейных алгебраических уравнений вида (14), где  $A$  – матрица порядка  $2M + 2$ , а  $(2M + 2)$ -мерные векторы решения  $q$  и правых частей  $b$  определяются формулами  $q = (b_{0l}, b_{1l}, c_{1l}, \dots, b_{M,l}, c_{M,l}, a_l)$ ,  $\tilde{b} = (0, 0, 0, \dots, 2i^l J_l(k_0 b), 2k_0 i^l J'_l(k_0 b))$ . После нахождения решения системы (14) определяются искомые поля во всех областях  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m, \Omega_e$  и вычисляется рассеянное поле  $E^{sc}$ , с помощью которого находится так называемая эффективная площадь рассеяния (или ширина рассеяния)

$$\sigma(\theta) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2\pi R |E^{sc}(R, \theta)|^2}{|E^{inc}(R, \theta)|^2} \approx \frac{2\pi R_0 |E^{sc}(R_0, \theta)|^2}{|E^{inc}(R_0, \theta)|^2}, \quad R_0 \gg \lambda, \quad (16)$$

описывающая величину поля, рассеянного искомой оболочкой, в произвольном направлении  $\theta$ . Именно величина  $\sigma(\theta_0)$  при фиксированном значении  $\theta_0$  угла  $\theta$  используется в качестве функционала качества в оптимизированной процедуре дизайна маскировочной оболочки, разработанной в разд. 4.3.

Ядро разработанной процедуры составляет алгоритм оптимизации, в качестве которого в работе используется итерационный алгоритм, реализованный в пакете Wolfram Mathematica. Данный алгоритм находит приближенный минимум функционала (16) при  $\theta = \theta_0$  с использованием начального приближения  $X_0 = (\varepsilon_z^{1,0}, \mu_r^{1,0}, \mu_\theta^{1,0}, \dots, \varepsilon_z^{M,0}, \mu_r^{M,0}, \mu_\theta^{M,0})$ . Успех в применении данного метода зависит от выбора точки  $X_0$ , в качестве которой в работе выбираются дискретизированные значения параметров (12), определяемые формулами

$$\varepsilon_z^{m,0} = \varepsilon_z(r_m), \mu_r^{m,0} = \mu_r(r_m), \mu_\theta^{m,0} = \mu_\theta(r_m), \quad \text{где } r_m = (R_m + R_{m+1})/2.$$

Нахождение в результате применения алгоритма 1 точки  $X_{opt}$ , где достигается приближенный локальный минимум функции (16) при  $\theta = 0$ , позволяет

определить значения параметров среды для каждого из  $M$  слоев, образующих искомую маскировочную оболочку.

При проведении расчетов использовались следующие значения параметров, взятые из статьи Summer et al. (2009):  $a = 0.1$  м,  $b = 0.13$  м,  $f = 2$  ГГц. Результаты вычислительных экспериментов по реализации разработанного в разд. 4.3 алгоритма в простейшем случае для трехслойной маскировочной оболочки показали, что применение процедуры оптимизации приводит к существенному улучшению ее маскировочных свойств.

**В заключении** перечислены основные результаты работы.

## **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ**

### **В области математического моделирования:**

Разработан оригинальный математический метод исследования задач маскировки материальных тел, основанный на оптимизационном методе решения обратных задач для уравнения Гельмгольца. Доказаны теоремы о корректной разрешимости однопараметрической и двухпараметрической экстремальных задач маскировки, построены и проанализированы системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума. Установлены достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие локальную единственность и устойчивость построенных решений задач маскировки.

### **В области численных методов:**

Разработаны численные алгоритмы решения задач маскировки, основанные на использовании высокоточных численных методов и метода регуляризации некорректных задач.

### **В области комплексов программ:**

Разработан комплекс программ, предназначенный для численного решения двумерных задач маскировки материальных тел. Предложены способы повышения эффективности маскировочной системы, в том числе за счет применения методов численной оптимизации. Исследована зависимость решения от различных параметров, входящих в исходную задачу маскировки: частоты падающей плоской волны, а также размеров и количества слоев в случае слоистой маскировочной оболочки, параметров среды, заполняющей маскировочное устройство.

## **ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

**Статьи автора в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК:**

1. Алексеев, Г.В. Оценки устойчивости решений обратных экстремальных задач для уравнения Гельмгольца / Г.В. Алексеев, А.В. Лобанов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 14-25.

2. Алексеев, Г.В. Оценки устойчивости в двумерной задаче маскировки материальных тел / Г.В. Алексеев, А.В. Лобанов // Дальневосточный математический журнал. – 2014. – Т. 14, № 2. – С. 1-14.

**Публикации в изданиях, индексируемых в базе данных Scopus:**

3. Alekseev, G.V. Numerical study of inverse problems of nonscattering anisotropic shell theory / G.V. Alekseev, A.V. Lobanov, G.V. Grenkin // J. Applied Mechanics and Materials. – 2013. – V. 249-250. – P. 557-562.
4. Alekseev, G.V. Analysis of 2-D cloaking problem using wave flow method / G.V. Alekseev, A.V. Lobanov // AIP conference proceedings. – 2013. – V. 1558. – P. 404-407.  
View online: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4825510>.
5. Alekseev, G.V. Control approach in cloaking problems for 2-D model of sound scattering / G.V. Alekseev, A.V. Lobanov, V.V. Sosnov // J. Applied Mechanics and Materials. – 2014. – V. 635-637. – P. 13-16.
6. Alekseev, G.V. Numerical analysis of 2D cloaking problems using homogeneous materials / G.V. Alekseev, A.V. Lobanov, Y. Spivak // J. Key Engineering Materials. – 2015. – V. 685. – P. 56-59. View online: <http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.685.56>.
7. Alekseev, G.V. 2D Electromagnetic wave scattering problem for cylindrical cloak incorporating PEMC-layer / G.V. Alekseev, O. Dyakonova, A.Y. Fershalov, A.V. Lobanov // J. Key Engineering Materials. – 2015. – V. 685. – P. 75-79.  
View online: <http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.685.75>.
8. Alekseev, G.V. Regularization method of solving 2d scattering problem by cloaked cylinder / G.V. Alekseev, T.M. Kukina, A.V. Lobanov // Proceedings of Meetings on Acoustic. – 2016. – V. 24. – P. 040001:1-040001:7. View online: <http://dx.doi.org/10.1121/2.0000138>.

**Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ**

9. Алексеев, Г.В. Численное решение двумерной задачи электромагнитной маскировки с использованием многослойной цилиндрической оболочки / Г.В. Алексеев, Ю.Э. Спивак, А.В. Лобанов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015663062. – дата регистрации 09.12.2015.

**Другие публикации:**

10. Лобанов, А.В. О задаче маскировки для двумерного уравнения Гельмгольца / А.В. Лобанов, Р.В. Зубрев // Сибирские электронные математические известия: электронное периодическое издание. – 2013. – Т. 10. – С. 378-392. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v10/p378-392.pdf>.
11. Alekseev, G.V. Optimization method in 2-D problems of material body cloaking / G.V. Alekseev, A.V. Lobanov // J. Applied Mechanics and Materials. – 2015. – V. 756. – P. 436-441.
12. Lobanov, A.V. Control problem for 2-D electromagnetic wave scattering model / A.V. Lobanov // J. Applied Mechanics and Materials. – 2015. – V. 770. – P. 535-539.

13. Лобанов, А.В. О задаче маскировки для двумерной модели акустического рассеяния / А.В. Лобанов // Технические проблемы освоения Мирового океана (ТПОМО-5): материалы пятой Всероссийской научно-технической конференции, Владивосток, 30 сентября - 4 октября 2013 г. – Владивосток: ДВО РАН, 2013. – С. 466-469.
14. Лобанов, А.В. Анализ задачи построения нерассеивающей оболочки для уравнений акустики / А.В. Лобанов // XXXVII дальневосточная математическая школа-семинар им. академика Е.В. Золотова, 8-14 сентября 2013 г.: сб. материалов [Электронный ресурс]. – Владивосток: ДВО РАН, 2013. – С. 149-153.
15. Alekseev, G.V. Control approach in cloaking problems for 3-D Helmholtz equation / G.V. Alekseev, A.V. Lobanov, V.V. Sosnov // Inverse Problems: Modelling and Simulation: abstracts of the 7th International conference, Fethiye, Turkey, 26-31 May 2013. – P. 113.
16. Lobanov, A.V. Analysis of control problems for two-dimensional model of wave scattering / A.V. Lobanov, V.V. Sosnov // Flow Dynamics: proceeding of the 11th International Conference, Sendai, Japan, 8-10 October 2014. – P. 494-495.
17. Лобанов, А.В. О задаче маскировки для двумерной модели акустического рассеяния / А.В. Лобанов, В.В. Соснов // Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение: материалы Всероссийской конференции, приуроченной к 95-летию академика Л.В. Овсянникова, Новосибирск, 18-22 апреля 2014 г. – Новосибирск: ИГ СО РАН, 2014. – С. 90-91
18. Лобанов, А.В. Двухпараметрическое управление в задачах маскировки материальных тел / А.В. Лобанов // XXXVIII дальневосточная математическая школа-семинар им. академика Е.В. Золотова, 1-5 сентября 2014 г.: сб. материалов [Электронный ресурс]. – Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2014. – С. 251-257.
19. Лобанов, А.В. Численное исследование двумерной задачи маскировки материальных тел / А.В. Лобанов // Успехи механики сплошных сред: материалы Международной конференции, приуроченной к 75-летию академика В.А. Левина, Владивосток, 28 сентября - 04 октября 2014 г. – Иркутск: ООО “Мегапринт”, 2014. – С. 301-304.
20. Лобанов, А.В. Численное решение задачи управления граничным импедансом для уравнения Гельмгольца / А.В. Лобанов, Ю.Э. Спивак // Технические проблемы освоения мирового океана: материалы шестой Всероссийской научно-технической конференции, Владивосток, 28 сентября - 02 октября 2015 г. – Владивосток: ФГУП “Издательство Дальнаука”, 2015. – С. 347-351.

Подписано к печати \*\*.\*\*.\*\*\*\* г.

Печать офсетная. Бумага офсетная. Формат 60×90/16.

Усл. печ. л. 1. Уч-изд. л. 0,89. Тираж 100 экз. Заказ 115

Отпечатано в типографии ФГУП Издательство “Дальнаука” ДВО РАН

690041, г. Владивосток, ул. Радио. 7