

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И
ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ АКАДЕМИКА М.Ф. РЕШЕТНЕВА»

На правах рукописи

Савостьянова Ирина Леонидовна

**МЕТОДЫ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ
ПРИ ПОСТРОЕНИИ НОВЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

д. ф.-м.н., профессор,

Сенашов Сергей Иванович

Красноярск – 2024

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА1. ВВОДНАЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	10
1.1 Основные сведения об уравнениях упругости и пластичности.....	10
1.2 Уравнения упругости.....	15
1.3 Уравнения пластичности.....	19
1.4 Уравнения упруго-пластичности.....	21
1.5 Граничные условия.....	23
1.6 Поле скоростей вокруг заданной системы вихрей.....	24
1.7 Композиционные материалы.....	26
1.8 Введение в непрерывные группы Ли.....	27
1.9 Точечная группа, допускаемая дифференциальными уравнениями. Использование точечных групп для исследования и решения дифференциальных уравнений.....	39
1.10 Высшие симметрии дифференциальных уравнений.....	42
1.11 Законы сохранения.....	51
1.12 Групповое расслоение.....	55
1.13 Законы сохранения для гиперболических систем уравнений с двумя переменными.....	57
ГЛАВА 2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	62
2.1 Симметрии и законы сохранения двумерных уравнений теории упругости.....	62
2.2 Законы сохранения и решения первой краевой задачи для уравнений двумерной теории упругости.....	65
2.3 Решения задачи Дирихле для уравнений асимметричной теории упругости.....	71
2.4 Законы сохранения и решения первой краевой задачи для двумерных и трехмерных уравнений теории упругости.....	76
2.5 Решение задачи Коши для уравнений упругости в плоском динамическом случае.....	87
2.6 Кручение параллелепипеда вокруг трех осей.....	97
2.7 Использование законов сохранения для решения краевых задач системы Моисила–Теодореску.....	107
ГЛАВА 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ.....	116
3.1 Предельное состояние анизотропных деформируемых тел.....	116
3.2 Новые трехмерные пластические течения, соответствующие однородному напряженному состоянию.....	126

3.3 Точные решения уравнений анизотропной теории пластичности.....	129
3.4 Динамические задачи анизотропной теории пластичности....	132
3.5 Решения динамических уравнений идеальной пластичности.....	144
3.6 Решение краевых задач пластичности с помощью законов сохранения.....	151
3.7 Построение линий разрыва напряжений для двумерной пластической области.....	155
3.8 Точные решения уравнения, описывающего антиплоское пластическое течение.....	162
ГЛАВА 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРУГО-ПЛАСТИЧНОСТИ.....	171
4.1 Упруго-пластический изгиб бруса поперечной силой.....	171
4.2 Упруго-пластическая задача в случае неоднородной пластичности в условиях сложного сдвига.....	179
4.3 Кручение призматических ортотропных упруго-пластических стержней.....	186
4.4 Кручение упруго-пластических стержней прокатного профиля.....	195
4.5 Решение плоской упруго-пластической задачи.....	197
4.6 Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения.....	200
4.7 Анизотропная антиплоская упругопластическая задача.....	206
4.8 Использование законов сохранения для решения задачи о волне нагрузки в упругопластическом стержне.....	212
ГЛАВА 5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ.....	225
5.1 Упругое кручение двухслойного стержня коробчатого сечения.....	225
5.2 Решение, описывающее сжатие двухслойного нелинейного материала.....	232
5.3 Упруго-пластическое кручение двухслойного стержня.....	237
5.4 Упруго-пластическое кручение многослойного стержня.....	242
5.5 Упруго-пластическое кручение двухслойного стержня, ослабленного отверстиями.....	248
5.6 Напряженное состояние композитной консоли.....	254
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	260
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	263

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения в частных производных, особенно нелинейные уравнения, представляют собой наиболее распространенное и действенное средство описания сложных физических процессов. Каждому индивидуальному решению системы дифференциальных уравнений соответствует конкретный процесс или состояние. Поэтому методы построения решений системы дифференциальных уравнений играют большую роль в решении задач механики деформируемого твердого тела.

В теориях упругости, пластичности и упруго-пластичности – классических разделах механики деформируемого твердого тела, изучающих напряженно-деформируемое состояние твердых тел – существует ряд проблем, решение которых носит важное теоретическое и прикладное значение.

В теории упругости имеется много частных решений, которые широко используются для решения задач для бесконечных областей, и практически нет решений, описывающих напряженно-деформированное состояние в конечных областях.

В теории пластичности, в силу сложности и нелинейности уравнений, одна из важных проблем – построения точных решений, описывающих реальные физические процессы. Основные задачи теории пластичности, на наш взгляд, – построение решений трехмерных уравнений и расширение исследований краевых задач двумерных уравнений пластичности.

Ряд сложностей возникает при решении упруго-пластических задач. Основные проблемы связаны с отысканием неизвестной упруго-пластической границы.

Мировой тенденцией настоящего времени является использование материалов нового уровня эксплуатационных свойств, в числе которых ведущую роль играют композиционные материалы. При этом, существующие в настоящее время методы оценки прочностных и деформационных

характеристик данных материалов имеют ограничения, и не отвечают на запросы определения надежности изделий из композиционных материалов. Данные противоречия порождают проблему получения фундаментальных результатов в области изучения деформирования изделий из композиционных материалов.

Интенсивное развитие вычислительной техники и расширение границ применимости методов численного моделирования привели к значительным успехам в решении перечисленных выше проблем. Однако, как правило, численное решение позволяет получить конкретный вопрос на конкретный ответ, но не дает представления о структуре решения. Обоснование численных расчетов остается «ахиллесовой пятой» этих методов. Точные решения в этом случае позволяют сделать априорные оценки протекающих процессов, а также являются тестовыми. Как показывает практика численных решений, наличие теста полезно не только при выборе приближенного метода, но и на других этапах технологической цепочки при решении задач приближенными методами. Интерес к выделению классов аналитических решений, зависящих от произвольных параметров и функций, возрастает так же в связи с появлением большого численного материала, нуждающегося в интерпретации.

Под точным, или аналитическим, решением мы понимаем решение, представляемое явно формулой, или решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых имеются очень точные методы вычислений, или же решение, в которое входят явно произвольные функции.

Поэтому актуальной задачей является разработка новых методов решения краевых задач МДТТ. В настоящей диссертации таковыми являются методы группового анализа дифференциальных уравнений и законы сохранения.

Большой вклад в решение и исследование задач механики деформируемого твердого тела внесли работы Б.Д. Аннина, Л.А. Галина, Д.Д. Ивлева, А.А. Ильюшина, Л.М. Качанова, А.В. Манжирова,

В.П. Мясникова, Б.Е. Победри, Ю.Н. Работнова, Л.А. Толоконникова, А.Д. Чернышева. Концепции и положения работ данных исследователей были развиты в дальнейшем А.А. Бурениным, Г.И. Быковцевым, Д.В. Георгиевским, И.Ю. Горячевой, М.А. Гузевым, Л.В. Ковтанюк, Е.В. Ломакиным, С.Т. Милейко, Р.И. Непершиным, Н.И. Остросаблиным, Ю.Н. Радаевым, Г.П. Черепановым и другими.

Активно работают в этой области С.М. Айзикович, М.А. Артемов, А.В. Ковалев, В.Д. Кургузов, О.Н. Любимова, Л.А. Максимова, А.Н. Спорыхин, А.И. Хромов, К.А. Чехонин и другие.

Уравнения упругости и пластичности уже более 50 лет изучаются с помощью симметрий. Начало им положено работами Б.Д. Аннина, Ю.В. Чиркунова, С.И. Сенашова. Использование метода группового анализа позволило построить ряд точных решений и изучить некоторые качественные свойства этих уравнений. Были попытки с помощью симметрий решать краевые задачи, но хороших результатов здесь достичь не удалось, что объясняется локальной природой симметрий.

Законы сохранения, применительно к дифференциальным уравнениям, появились в литературе более 100 лет назад в статье Э. Нетер. Она установила общий принцип, связывающий группы симметрий и законы сохранения для дифференциальных уравнений, выведенных из вариационного принципа. Более 70 лет все результаты в этом направлении основывались на исследовании Э. Нетер. Достаточно долгое время законы сохранения фигурировали в литературе как чисто математический результат, далекий от приложений. Более общие концепции, позволяющие вычислять законы сохранения для произвольных систем дифференциальных уравнений, появились в 90-ые годы XX века. Найденные законы сохранения оказались более подходящими для решения краевых задач уравнений механики. Впервые законы сохранения были использованы для решения краевых задач для двумерных уравнений пластичности С.И. Сенашовым, его соавторами и учениками. Возможности применения законов сохранения для решения таких

задач объясняется тем, что симметрии по своей природе являются локальными, в отличие от законов сохранения – глобальных по своей сути. В последующий период было показано, как законы сохранения можно использовать для решения задач Коши и Римана для двумерных уравнений пластичности, а также найти точные решения этих задач. Позднее членами данного коллектива техника законов сохранения была использована для решения задач с неизвестной границей: упруго-пластических задач.

Цель работы: установить особенности использования методов группового анализа ряда систем дифференциальных уравнений механики деформируемого твердого тела для построения новых аналитических решений краевых задач теории.

Это с неизбежностью приводит к необходимости развития ряда внутренних специфических методов группового анализа для разных систем дифференциальных уравнений

Задачами работы, таким образом, выступают:

1. Построить законы сохранения для уравнений теорий упругости, теории пластического течения, упруго-пластической деформации.
2. Найти законы сохранения для систем уравнений сложной структуры, описывающих деформацию композиционных материалов.
3. Используя законы сохранения, построить аналитические решения ряда новых задач теории упругости, пластичности, упруго-пластичности и механики композиционных материалов.

Научная новизна работы. Выполненная работа представляет собой комплексное исследование применения группового анализа и законов сохранения для решения задач механики деформируемого твердого тела. Полученные новые результаты заключаются в:

1. развитии метода построения законов сохранения для уравнений упругости, пластичности, упруго-пластичности и механики композиционных материалов;

2. полученных аналитических решениях новых краевых задач для основных уравнений механики деформируемого твердого тела;

3. использовании законов сохранения для отыскания неизвестных границ между упругой и пластической областями при решении задач упруго-пластичности и механики композиционных материалов;

4. построении новых частных решений уравнений механики деформируемого твердого тела.

Положения, выносимые на защиту.

1. Методика построения законов сохранения, позволяющих решать краевые задачи для уравнений упругости, пластичности и механики композиционных материалов.

2. Методика построения законов сохранения, позволяющих найти границы между упругими и пластическими зонами в скручиваемых стержнях, изгибаемых балках и деформируемых пластинах.

3. Методика построения законов сохранения для определения напряженно-деформированного состояния многослойных и композиционных материалов.

Методология и методы исследования. В работе были использованы уравнения и положения механики деформируемого твердого тела, методы группового анализа и законы сохранения дифференциальных уравнений, аналитические методы теории дифференциальных уравнений.

Достоверность научных положений и выводов определяется применением строгих математических методов, математическими доказательствами полученных формул, совпадением их для частных случаев с известными формулами, а также физической интерпретацией полученных закономерностей.

Теоретическая и практическая значимость работы. Решения и законы сохранения, найденные в работе для уравнений упругости, пластичности и композиционных материалов, обладают большой теоретической значимостью. Они имеют ценность сами по себе, поскольку

позволяют описывать конкретные физические и технологические процессы. На точных решениях можно проверять различные предположения, которые выдвигаются механиками в процессе решения конкретных производственных и технологических задач. Использование законов сохранения позволяет получить как дополнительные уравнения, совместные с исходными уравнениями, так и построить интегральные соотношения, пригодные для априорных оценок, которые часто требуются при доказательстве теорем существования и единственности. Формулы, полученные в диссертации, сводят решение краевых задач к вычислению интегралов по границам изучаемого деформируемого тела. При этом не требуется доказательств сходимости или устойчивости метода, отсутствует необходимость в особой гладкости поверхностей, по которым проводится интегрирование. Так же минимизируются затруднения, возникающие при вычислении в угловых точках границы.

С точки зрения практической значимости, полученные точные решения могут служить тестовыми для программных продуктов, решающих системы уравнений механики деформируемого твердого тела. Приведенные в диссертации методы решения краевых задач представляют собой хороший инструмент для решения широкого класса уравнений механики. Автор надеется, что приведенные в диссертации методика найдет широкое применение при решении задач, возникающих в научных исследованиях и практической работе инженеров и научных работников.

Глава 1. ВВОДНАЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1 Основные сведения об уравнениях упругости и пластичности

Системы координат

Рассматриваются в основном три системы координат: декартова система координат $x = x^1, y = x^2, z = x^3$, цилиндрическая система координат $r\varphi z$ и сферическая система координат $r\varphi\psi$. Объяснение этому факту мы получим тогда, когда найдем симметрии основных уравнений упругости и пластичности.

Координаты точки в цилиндрических координатах и декартовых координатах связаны формулами:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = y/x. \quad (1.1)$$

Здесь всегда $r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$.

Запишем связь между производными в декартовой и цилиндрической системах координат:

$$\partial_x = \cos \varphi \partial_r - \frac{\sin \varphi}{r} \partial_\varphi, \quad \partial_y = \sin \varphi \partial_r + \frac{\cos \varphi}{r} \partial_\varphi, \quad (1.2)$$

$$\partial_r = \frac{x}{r} \partial_x + \frac{y}{r} \partial_y, \quad \partial_\varphi = -y \partial_x + x \partial_y,$$

Связь между дифференциалами этих же систем координат имеет вид

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi, \quad dz = dz. \quad (1.3)$$

Координаты точки в сферических координатах и декартовых координатах связаны формулами:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (1.4)$$

Здесь всегда $0 \leq \theta < \pi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$.

Запишем связь между производными в декартовой и сферической системах координат:

$$\begin{aligned}
\partial_r &= \cos \varphi \sin \theta \partial_x + \sin \varphi \sin \theta \partial_y + \cos \theta \partial_z, \\
\partial_\varphi &= r \cos \varphi \cos \theta \partial_x + r \sin \varphi \cos \theta \partial_y - r \sin \theta, \\
\partial_\theta &= -r \sin \varphi \sin \theta \partial_x + r \cos \varphi \sin \theta \partial_y.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Связь между дифференциалами этих же систем координат имеет вид

$$\begin{aligned}
dx &= \cos \varphi \sin \theta dr - r \sin \varphi \sin \theta d\varphi + r \cos \varphi \cos \theta d\theta, \\
dy &= \sin \varphi \sin \theta dr + r \cos \varphi \sin \theta d\varphi + r \sin \varphi \cos \theta d\theta, \\
dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Тензор и девиатор напряжений

Предполагаем, что напряженное состояние в упругой и пластической средах характеризуется *симметричным тензором напряжений*:

$$|\sigma_{ij}| = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Здесь $\sigma_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ – компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат.

Трехмерный тензор напряжений (1.7) имеет три инварианта:

$$I_1 = \sigma = p = 1/3 \sigma_{ii}, I_2 = 1/2 (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ij}), I_3 = \det |\sigma_{ij}|. \tag{1.8}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Первый инвариант называется гидростатическим давлением, а квадратный корень из второго

$$\sqrt{I_2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}.$$

называется интенсивностью касательных напряжений. Они оба часто используются в теории пластичности.

Наряду с тензором напряжений введем понятие *девиатора напряжений*:

$$|s_{ij}| = |\sigma_{ij} - p\delta_{ij}| = \begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & s_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & s_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & s_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Его инварианты имеют вид

$$I_1 = 0, I_2 = (-s_x s_y - s_y s_z - s_x s_z + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2), \quad (1.10)$$

$$I_3 = s_x s_y s_z - s_x \tau_{yz}^2 - s_y \tau_{xz}^2 - s_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz}.$$

Пусть от системы координат $x y z$ мы переходим к другой системе координат $x' y' z'$. Пусть $l_{11} = \cos(x', x)$ косинус угла между осями x и x' , $l_{23} = \cos(y', z)$ косинус угла между осями y' и z тогда компоненты тензора напряжений (девиатора) преобразуются по следующим формулам:

$$\sigma'_x = \sigma_x l_{11}^2 + \sigma_y l_{12}^2 + \sigma_z l_{13}^2 + 2\tau_{yz} l_{12} l_{13} + 2\tau_{xz} l_{11} l_{13} + 2\tau_{xy} l_{11} l_{12},$$

$$\tau'_{yz} = \sigma_x l_{21} l_{31} + \sigma_y l_{22} l_{32} + \sigma_z l_{23} l_{33} + \tau_{yz} (l_{22} l_{33} + l_{23} l_{32}) + \tau_{xz} (l_{21} l_{33} + l_{23} l_{31}) + \tau_{xy} (l_{21} l_{32} + l_{22} l_{31}).$$

В краткой записи все шесть формул запишутся в виде

$$\sigma'_{kl} = \sigma_{ij} l_{ki} l_{lj} \quad (1.11)$$

или, при обратном переходе

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{kl} l_{ki} l_{lj}. \quad (1.12)$$

В частности, при переходе к цилиндрической системе координат $r\varphi z$, получаем

$$\sigma_r = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \quad (1.13)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\tau_{r\varphi} = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (-\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi),$$

$$\tau_{rz} = \tau_{xz} \cos \varphi + \tau_{yz} \sin \varphi, \quad \tau_{\varphi z} = -\tau_{xz} \sin \varphi + \tau_{yz} \cos \varphi, \quad \sigma_z = \sigma_z.$$

где $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{r\varphi}, \tau_{\varphi z}, \tau_{rz}$ – компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат $r\varphi z$.

Поскольку тензор напряжений симметричен, то он имеет три действительных собственных числа, которые принято обозначать $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Эти напряжения называются главными напряжениями, а соответствующие

им собственные вектора называются главными осями, при этом, предполагают $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Аналогично вводятся главные касательные напряжения, определяемые формулами

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Уравнения равновесия сплошной среды

Приведем уравнения равновесия сплошной среды, предполагая, что массовые силы отсутствуют.

В декартовой системе координат

$$\partial_x \sigma_x + \partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz} = 0, \quad \partial_x \tau_{xy} + \partial_y \sigma_y + \partial_z \tau_{yz} = 0, \quad \partial_x \tau_{xz} + \partial_y \tau_{yz} + \partial_z \sigma_z = 0. \quad (1.14)$$

В цилиндрической системе координат

$$\partial_r \sigma_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \tau_{r\theta} + \partial_z \tau_{rz} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (1.15)$$

$$\partial_r \tau_{r\theta} + \frac{1}{r} \partial_\theta \sigma_\theta + \partial_z \tau_{\theta z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0, \quad \partial_r \tau_{rz} + \frac{1}{r} \partial_\theta \tau_{\theta z} + \partial_z \sigma_z + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0.$$

В сферической системе координат

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_r + \frac{1}{r} \partial_\varphi \tau_{r\varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \partial_\psi \tau_{r\psi} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\varphi + \tau_{r\varphi} \operatorname{ctg} \varphi}{r} &= 0, \\ \partial_r \tau_{r\varphi} + \frac{1}{r} \partial_\varphi \sigma_\varphi + \frac{1}{r \sin \varphi} \partial_\psi \tau_{\varphi\psi} + \frac{(\sigma_\varphi - \sigma_\psi) \operatorname{ctg} \varphi + 3\tau_{r\varphi}}{r} &= 0, \\ \partial_r \tau_{r\psi} + \frac{1}{r} \partial_\varphi \tau_{\varphi\psi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \partial_\psi \sigma_\psi + \frac{2\tau_{\varphi\psi} \operatorname{ctg} \varphi + 3\tau_{r\psi}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Тензор деформации

Для характеристики деформации среды в точке служит симметричный тензор деформации

$$|\varepsilon_{ij}| = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Компоненты тензора деформации для малых перемещений связаны с компонентами вектора деформации следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \partial_x w^1, \varepsilon_y = \partial_y w^2, \varepsilon_z = \partial_z w^3, 2\varepsilon_{xy} = \partial_y w^1 + \partial_x w^2, \\ 2\varepsilon_{xz} &= \partial_z w^1 + \partial_x w^3, 2\varepsilon_{yz} = \partial_z w^2 + \partial_y w^3.\end{aligned}\quad (1.18)$$

Здесь w^1, w^2, w^3 - компоненты вектора перемещений в декартовой системе координат.

В силу уравнений (18) компоненты тензора деформации связаны уравнениями сплошности (совместности):

$$\begin{aligned}\partial_{yy}^2 \varepsilon_{11} + \partial_{xx}^2 \varepsilon_{22} &= 2\partial_{xy}^2 \varepsilon_{12}, \partial_{xx}^2 \varepsilon_{33} + \partial_{zz}^2 \varepsilon_{11} = 2\partial_{xz}^2 \varepsilon_{13}, \partial_{yy}^2 \varepsilon_{33} + \partial_{zz}^2 \varepsilon_{22} = 2\partial_{yz}^2 \varepsilon_{23}, \\ \partial_{yz}^2 \varepsilon_{11} &= -\partial_{xx}^2 \varepsilon_{23} + \partial_{xz}^2 \varepsilon_{12} + \partial_{12}^2 \varepsilon_{13}, \partial_{xz}^2 \varepsilon_{22} = -\partial_{yy}^2 \varepsilon_{13} + \partial_{yz}^2 \varepsilon_{12} + \partial_{12}^2 \varepsilon_{23}, \\ \partial_{xy}^2 \varepsilon_{33} &= -\partial_{zz}^2 \varepsilon_{12} + \partial_{xz}^2 \varepsilon_{23} + \partial_{23}^2 \varepsilon_{13}.\end{aligned}\quad (1.19)$$

Тензор скоростей деформации

Для тех сред, когда важна не сама деформация, а скорость ее выполнения, характеристикой деформации среды в точке служит симметричный тензор скоростей деформации

$$|e_{ij}| = \begin{pmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}\quad (1.20)$$

Компоненты тензора скоростей деформации для малых перемещений связаны с компонентами вектора скоростей деформации следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}e_x &= \partial_x u^1, e_y = \partial_y u^2, e_z = \partial_z u^3, 2e_{xy} = \partial_y u^1 + \partial_x u^2, \\ 2e_{xz} &= \partial_z u^1 + \partial_x u^3, 2e_{yz} = \partial_z u^2 + \partial_y u^3.\end{aligned}\quad (1.21)$$

Здесь u^1, u^2, u^3 - компоненты вектора скоростей деформаций в декартовой системе координат.

В силу уравнений (1.21) компоненты тензора скоростей деформации связаны уравнениями сплошности (совместности):

$$\begin{aligned}\partial_{yy}^2 e_{11} + \partial_{xx}^2 e_{22} &= 2\partial_{xy}^2 e_{12}, \partial_{xx}^2 e_{33} + \partial_{zz}^2 e_{11} = 2\partial_{xz}^2 e_{13}, \partial_{yy}^2 e_{33} + \partial_{zz}^2 e_{22} = 2\partial_{yz}^2 e_{23}, \\ \partial_{yz}^2 e_{11} &= -\partial_{xx}^2 e_{23} + \partial_{xz}^2 e_{12} + \partial_{12}^2 e_{13}, \partial_{xz}^2 e_{22} = -\partial_{yy}^2 e_{13} + \partial_{yz}^2 e_{12} + \partial_{12}^2 e_{23}, \\ \partial_{xy}^2 e_{33} &= -\partial_{zz}^2 e_{12} + \partial_{xz}^2 e_{23} + \partial_{23}^2 e_{13}.\end{aligned}\quad (1.22)$$

Легко проверить, подставляя (1.21) в (1.22), что эти уравнения будут удовлетворяться тождественно.

1.2. Уравнения упругости

Приведенные ранее формулы годятся для любой сплошной среды независимо от ее физических свойств. Переходя к упругому телу необходимо выбрать такую зависимость между напряжениями и деформациями, которая характеризовала именно упругие свойства тела. Поскольку мы рассматриваем только малые деформации, то за такую модель будет принято сплошное тело, подчиняющееся обобщенному закону Гука. Этот закон, в случае общего анизотропного случая, можно записать в виде [45]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy}, \\
 \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{xz} + a_{26}\tau_{xy}, \\
 \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}, \\
 \varepsilon_{yz} &= a_{41}\sigma_x + a_{42}\sigma_y + a_{43}\sigma_z + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} + a_{46}\tau_{xy}, \\
 \varepsilon_{xz} &= a_{51}\sigma_x + a_{52}\sigma_y + a_{53}\sigma_z + a_{54}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} + a_{56}\tau_{xy}, \\
 \varepsilon_{xy} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{yz} + a_{65}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{xy}.
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Уравнения (1.23) содержат в общем случае 36 коэффициентов a_{ij} , которые называются коэффициентами деформации. В общем случае эти коэффициенты могут быть некоторыми функциями, если тело является неоднородно упругим. В нашей работе мы будем предполагать, что они постоянны. Если предположить, что определитель системы (1.23), составленный из коэффициентов a_{ij} , отличен от нуля, то эти уравнения можно записать в эквивалентном виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z + A_{14}\varepsilon_{yz} + A_{15}\varepsilon_{xz} + A_{16}\varepsilon_{xy}, \\
 \sigma_y &= A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z + A_{24}\varepsilon_{yz} + A_{25}\varepsilon_{xz} + A_{26}\varepsilon_{xy}, \\
 \sigma_z &= A_{31}\varepsilon_x + A_{32}\varepsilon_y + A_{33}\varepsilon_z + A_{34}\varepsilon_{yz} + A_{35}\varepsilon_{xz} + A_{36}\varepsilon_{xy},
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{yz} &= A_{41}\varepsilon_x + A_{42}\varepsilon_y + A_{43}\varepsilon_z + A_{44}\varepsilon_{yz} + A_{45}\varepsilon_{xz} + A_{46}\varepsilon_{xy}, \\
\tau_{xz} &= A_{51}\varepsilon_x + A_{52}\varepsilon_y + A_{53}\varepsilon_z + A_{54}\varepsilon_{yz} + A_{55}\varepsilon_{xz} + A_{56}\varepsilon_{xy}, \\
\tau_{xy} &= A_{61}\varepsilon_x + A_{62}\varepsilon_y + A_{63}\varepsilon_z + A_{64}\varepsilon_{yz} + A_{65}\varepsilon_{xz} + A_{66}\varepsilon_{xy}.
\end{aligned}$$

Тридцать шесть коэффициентов A_{ij} , входящих в уравнения (124), называются *коэффициентами упругости*.

В силу симметричности тензоров деформации и напряжений, количество постоянных сокращается до 21, поскольку $A_{ij} = A_{ji}$, $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$). В этом случае обобщенный закон Гука запишется так

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy}, \\
\varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{xz} + a_{26}\tau_{xy}, \\
\varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}, \\
\varepsilon_{yz} &= a_{14}\sigma_x + a_{24}\sigma_y + a_{34}\sigma_z + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} + a_{46}\tau_{xy}, \\
\varepsilon_{xz} &= a_{15}\sigma_x + a_{25}\sigma_y + a_{35}\sigma_z + a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} + a_{56}\tau_{xy}, \\
\varepsilon_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{46}\tau_{yz} + a_{56}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{xy}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Или так

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z + A_{14}\varepsilon_{yz} + A_{15}\varepsilon_{xz} + A_{16}\varepsilon_{xy}, \\
\sigma_y &= A_{12}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z + A_{24}\varepsilon_{yz} + A_{25}\varepsilon_{xz} + A_{26}\varepsilon_{xy}, \\
\sigma_z &= A_{13}\varepsilon_x + A_{23}\varepsilon_y + A_{33}\varepsilon_z + A_{34}\varepsilon_{yz} + A_{35}\varepsilon_{xz} + A_{36}\varepsilon_{xy}, \\
\tau_{yz} &= A_{14}\varepsilon_x + A_{24}\varepsilon_y + A_{34}\varepsilon_z + A_{44}\varepsilon_{yz} + A_{45}\varepsilon_{xz} + A_{46}\varepsilon_{xy}, \\
\tau_{xz} &= A_{15}\varepsilon_x + A_{25}\varepsilon_y + A_{35}\varepsilon_z + A_{45}\varepsilon_{yz} + A_{55}\varepsilon_{xz} + A_{56}\varepsilon_{xy}, \\
\tau_{xy} &= A_{16}\varepsilon_x + A_{26}\varepsilon_y + A_{36}\varepsilon_z + A_{46}\varepsilon_{yz} + A_{56}\varepsilon_{xz} + A_{66}\varepsilon_{xy}.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Основные случаи упругой симметрии

В случае, когда анизотропное тело обладает симметрией какого-либо рода, то в упругих свойствах его тоже наблюдается симметрия. Рассмотрим три случая возможных симметрий.

1. *Плоская упругая симметрия.* Предполагается, что имеется плоскость, проходящая через каждую точку тела, относительно этой плоскости свойства тела симметричны. В этом случае направляем ось OZ перпендикулярно плоскости симметрии и получаем

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{46} = a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{56} = 0.$$

В этом случае число упругих постоянных a_{ij} сведется к 13. Обобщенный закон Гука будет иметь вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{26}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{36}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz}, \\ \varepsilon_{xz} &= a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz}, \\ \varepsilon_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{66}\tau_{xy}.\end{aligned}\tag{1.27}$$

Тот же закон Гука, но разрешенный относительно компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z + A_{16}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_y &= A_{12}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z + A_{26}\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_z &= A_{13}\varepsilon_x + A_{23}\varepsilon_y + A_{33}\varepsilon_z + A_{36}\varepsilon_{xy}, \\ \tau_{yz} &= A_{44}\varepsilon_{yz} + A_{45}\varepsilon_{xz}, \\ \tau_{xz} &= A_{45}\varepsilon_{yz} + A_{55}\varepsilon_{xz}, \\ \tau_{xy} &= A_{16}\varepsilon_x + A_{26}\varepsilon_y + A_{36}\varepsilon_z + A_{66}\varepsilon_{xy}.\end{aligned}\tag{1.28}$$

2. *Ортотропное тело.* В этом случае тело имеет три плоскости упругой симметрии, проходящих через каждую точку. В этом случае добавляются следующие условия

$$a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0.$$

Обобщенный закон Гука для ортотропного тела имеет вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z, \\
\varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z, \\
\varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\varepsilon_{yz} = a_{44}\tau_{yz}, \quad \varepsilon_{xz} = a_{55}\tau_{xz}, \quad \varepsilon_{xy} = a_{66}\tau_{xy}.$$

Этот же закон разрешенный относительно компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z, \\
\sigma_y &= A_{12}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z, \\
\sigma_z &= A_{13}\varepsilon_x + A_{23}\varepsilon_y + A_{33}\varepsilon_z,
\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\tau_{yz} = A_{44}\varepsilon_{yz}, \quad \tau_{xz} = A_{55}\varepsilon_{xz}, \quad \tau_{xy} = A_{66}\varepsilon_{xy}.$$

3. *Изотропное тело.* В этом случае все направления являются эквивалентными, то получаем известный закон Гука для изотропного тела с модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и модулем сдвига $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) / E, \\
\varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) / E, \\
\varepsilon_z &= (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) / E,
\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\varepsilon_{yz} = \tau_{yz} / G, \quad \varepsilon_{xz} = \tau_{xz} / G, \quad \varepsilon_{xy} = \tau_{xy} / G.$$

Перепишем (1.31) в эквивалентном виде

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11}, \quad \sigma_y = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22}, \\
\sigma_z &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}, \\
\tau_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \quad \tau_{xz} = 2\mu\varepsilon_{13}, \quad \tau_{yz} = 2\mu\varepsilon_{23}.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Здесь $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – постоянные Ламе.

Подставляя (1.32) в уравнения равновесия (1.14), получим классические уравнения изотропной теории упругости в перемещениях

$$\mu\Delta\bar{W} + (\lambda + \mu)\text{grad div}\bar{W} = 0, \tag{1.33}$$

где $\bar{W} = (w^1, w^2, w^3)$ – вектор перемещения; Δ – оператор Лапласа.

Добавляя в уравнения (1.33) инерционные члены получаем динамические уравнения линейной теории упругости

$$\partial_n \bar{W} = \mu \Delta \bar{W} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{W}, \quad (1.34)$$

Точно также, подставляя соотношения (1.28), (1.29), (1.30) в уравнения (1.14), получаем уравнения анизотропной теории линейной упругости в перемещениях.

Заметим, что уравнения упругости можно записывать и в терминах напряжений. В изотропном случае, при отсутствии массовых сил, а именно такой случай мы и рассматриваем, имеем следующие уравнения

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0; \quad (1.35)$$

$$\Delta \Delta \sigma_{ij} = 0. \quad (1.36)$$

Здесь Δ - оператор Лапласа; из (1.35) следует, что первый инвариант тензора напряжений есть гармоническая функция, а из (1.36), что все компоненты тензора напряжений есть бигармонические функции.

Найдем характеристики системы уравнений (1.34) [132].

Определение. Поверхность

$$\omega(t, x, y, z) = 0 \quad (1.37)$$

вместе с заданными на ней начальными данными называется *характеристической поверхностью системы* (1.34), если эти начальные данные совместно с системой (1.34) не дают определить на ней все производные первого порядка.

Характеристическая поверхность удовлетворяет уравнению

$$[\omega_t^2 - (\lambda + 2\mu)(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)] [\omega_t^2 - \mu(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)]^2 = 0. \quad (1.38)$$

1.3 Уравнения пластичности

Сформулируем основные положения, которые можно положить в основу теории пластичности, более строго – математической теории пластичности.

Здесь мы будем рассматривать два подхода к описанию пластических деформаций:

1. Теорию пластического течения.
2. Деформационную теорию пластичности.

У каждой из этих теорий есть свои недостатки и достоинства. Отметим только некоторые: деформационная теория более доступна для приложений, поскольку здесь устанавливаются зависимости между деформациями и напряжениями аналогично нелинейной теории упругости [32]. Считается, что теория пластического течения более правильно описывает реальные процессы, но решение конкретных упругопластических задач наталкивается на серьезные математические сложности. Сформулируем основные положения этих теорий.

Условие пластичности Треска

Это условие высказано инженером Треска, он предположил, что состояние пластичности наступает, когда максимальное касательное напряжение достигает некоторого значения постоянного для данного материала. Математически в пространственном случае имеем:

$$2|\tau_1| = |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_s, \quad 2|\tau_2| = |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_s, \quad 2|\tau_3| = |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_s. \quad (1.39)$$

Здесь σ_s – предел текучести при чистом сдвиге. Если в (39) все условия выполнены со знаком неравенства, то тело находится в упругом состоянии, если тело находится в пластическом состоянии, то хотя бы в одном из условий должен быть знак равенства.

Условие пластичности Мизеса

Это условие имеет следующий вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2. \quad (1.40)$$

Его можно записать в терминах компонент тензора напряжений

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 6\sigma_s^2. \quad (1.41)$$

Для анизотропных сред используется обобщение закона текучести Мизеса (1.40), которое имеет вид [135]

$$F(\sigma_x - \sigma_y)^2 + G(\sigma_y - \sigma_z)^2 + H(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2(L\tau_{xy}^2 + M\tau_{yz}^2 + N\tau_{xz}^2) = 1. \quad (1.42)$$

Здесь F, G, H, L, M, N – параметры, характеризующие текущее состояние анизотропии.

Если к уравнениям равновесия добавить условие пластичности Треска или Мизеса, этих уравнений будет недостаточно для нахождения всех компонент тензора напряжений: будем иметь четыре уравнения на шесть искомых функций. Поэтому для замыкания системы уравнений потребуется конкретизация пластической среды.

Деформационная теория пластичности

Примем следующие исходные положения.

1. Тело изотропно.
2. Относительное изменение объема является упругой деформацией, оно пропорционально среднему давлению

$$\varepsilon = 3k\sigma, \varepsilon = \varepsilon_{ii}, \sigma = 1/3\sigma_{ii} \quad (1.43)$$

3. Девиаторы деформаций и напряжений пропорциональны

$$\varepsilon_{ij} - \delta_j^i \varepsilon_{ii} = \psi s_{ij} \quad (1.44)$$

где δ_j^i – символ Кронекера; ψ – определяется из условия пластичности.

Теория пластического течения (теория пластичности Сен-Венана, Мизеса)

1. Тело изотропно.
2. Девиаторы тензора скоростей деформаций и напряжений пропорциональны

$$e_{ij} - \delta_j^i e_{ii} = \lambda s_{ij}, \quad (1.45)$$

где δ_j^i – символ Кронекера; λ – определяется из условия пластичности.

1.4 Уравнения упруго-пластичности

Поскольку ранее рассмотрены два возможных варианта теории пластичности: теория пластического течения и деформационная теория, то соответственно будут рассмотрены и два варианта упруго-пластичности.

Теория упругопластических деформаций

Как и было сказано ранее, эта теория более доступна для приложений. В этой теории устанавливаются конечные соотношения между напряжениями и деформациями, которые во многом аналогичны физическим зависимостям нелинейной теории упругости.

Решения в упругой и пластической областях взаимно связаны определенными условиями непрерывности напряжений и перемещений, которые должны быть удовлетворены вдоль упруго-пластической границы. Эта граница сама по себе является одной из неизвестных и оказывается обычно такой неудобной формы, что даже распределение напряжений в упругой области может быть получено только благодаря трудоемким численным методам [135].

Пока интенсивность касательных напряжений нигде не достигает предела текучести, тело пребывает в упругом состоянии. С возрастанием нагрузок в теле могут появляться пластические области, которые отделяются от упругой области поверхностью (упруго-пластическая граница)

$$\psi = const = \frac{1}{2G}. \quad (1.46)$$

При переходе через упруго-пластическую границу все компоненты тензора напряжений непрерывны. В силу уравнений (1.41) вытекает, что на поверхности раздела непрерывны и все компоненты тензора деформаций.

Теория упруго-пластического течения

В этом случае на упруго-пластической границе выполняется условие (1.41)

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 6\sigma_s^2. \quad (1.47)$$

Так же, как и в предыдущем случае, при переходе через границу все компоненты тензора напряжений сохраняют непрерывность. В упругой области здесь определены компоненты тензора деформаций ε_{ij}^e , а в пластической области – компоненты тензора скоростей деформации e_{ij}^p .

Поэтому на границе должно выполняться равенство

$$w_i^i = u^i \quad (i=1,2,3). \quad (1.48)$$

Последнее условие достаточно сложно удовлетворить при решении конкретных задач. Поэтому не удивительно, что упруго-пластические задачи в рамках теории течения ограничены случаем плоской деформации, либо задачами кручения. То есть там, где можно не проверять условие (1.48) и решать задачи в рамках только напряжений.

1.5 Граничные условия

Для решения упругих, пластических и упругопластических задач следует добавить граничные условия. Пусть тело V ограничено поверхностью S . Пусть $S = S^p \cup S^e$, где S^e – часть поверхности, ограничивающая упругую область, S^p – часть поверхности, ограничивающая пластическую область.

Тогда на S^e обычно имеют дело с тремя краевыми задачами. Первая состоит в нахождении перемещений и напряжений внутри тела, находящегося в равновесии, когда на границе заданы перемещения. Вторая краевая задача состоит в нахождении перемещений и напряжений внутри тела, находящегося в равновесии, когда на границе заданы нагрузки. Наконец третья задача состоит в нахождении перемещений и напряжений внутри тела, находящегося в равновесии, когда на части границы заданы перемещения S^e_ε , а другой части нагрузки S^e_σ . При этом $S^e = S^e_\varepsilon \cup S^e_\sigma$.

Граничные условия для первой краевой задачи записываются в виде

$$w^i = f_i(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S^e, i = 1, 2, 3. \quad (1.49)$$

Здесь функции $f_i(x, y, z), i = 1, 2, 3$ предполагаются заданными.

Граничные условия для второй краевой задачи записываются в виде

$$p_i(x, y, z) = \sigma_{ij}(x, y, z)n_j(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S^e, i, j = 1, 2, 3. \quad (1.50)$$

Здесь $\sigma_{ij}(x, y, z), i, j = 1, 2, 3$ – компоненты тензора напряжений, $n_j, j = 1, 2, 3$ – компоненты внешней нормали к поверхности S^e_σ . Функции $p_i(x, y, z), i = 1, 2, 3$ предполагаются заданными на поверхности S^e_σ .

Замечание. В силу закона Гука, краевая задача (1.50) может быть сформулирована в терминах функции перемещения, а именно в виде

$$p_i(x, y, z) = \mu(\partial_i w^j + \partial_j w^i)n_j + \lambda\partial_k w^k n_i, \quad (x, y, z) \in S^e, i, j = 1, 2, 3. \quad (1.51)$$

Для уравнений теории деформационной пластичности все три краевые задачи формулируются аналогично.

Для уравнений теории пластического течения первая краевая задача формулируется так

$$u^i = f_i(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S^p, i = 1, 2, 3. \quad (1.52)$$

Вторая задача будет иметь вид

$$p_i(x, y, z) = \sigma_{ij}(x, y, z)n_j(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S^p, i, j = 1, 2, 3. \quad (1.53)$$

Здесь $\sigma_{ij}(x, y, z)$, $i, j = 1, 2, 3$ компоненты тензора напряжений, n_j , $j = 1, 2, 3$ компоненты внешней нормали к поверхности S^p . Функции $p_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$ предполагаются заданными на поверхности S^p .

1.6 Поле скоростей вокруг заданной системы вихрей

Пусть задано непрерывное распределение завихренности $\bar{\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и требуется найти скорости в области течения [47]. В этом случае вопрос сводится к решению уравнения относительно $\bar{V} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\text{rot}\bar{V} = \bar{\Omega}. \quad (1.54)$$

Введем в рассмотрение векторный потенциал \bar{A} , связанный с вектором скорости \bar{V} соотношением

$$\bar{V} = \text{rot}\bar{A}, \quad (1.55)$$

при этом подчиняем векторный потенциал дополнительным условием

$$\text{div}\bar{A} = 0. \quad (1.56)$$

В этом случае уравнение (1.56) превращается в следующее

$$\Delta\bar{A} = -\bar{\Omega}, \quad (1.57)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Уравнение (1.57) есть векторный аналог уравнения Пуассона, его решение можно записать в виде

$$\bar{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\bar{\Omega}}{r} d\tau, \quad (1.58)$$

где \bar{r} – радиус вектор текущей точки М по отношению к элементу объема $d\tau$.

Согласно (1.55) получим искомого значения вектора скорости

$$\bar{V} = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_{\tau} \frac{\bar{\Omega}}{r} d\tau, \quad (1.59)$$

Рассмотрим случай, когда вихревая трубка окружает вихревую нить с конечной циркуляцией Γ .

Пусть $d\bar{r}$ – элемент нити, ориентированный в ту же сторону, что и Ω , тогда используя замену

$$\bar{\Omega} d\tau = \bar{\Omega} d\sigma ds = \bar{\Omega} d\sigma dr = \Gamma d\bar{r},$$

получаем из (1.59) следующую формулу

$$\bar{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \text{rot} \int_L \frac{1}{r} d\bar{r} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \text{rot} \left(\frac{1}{r} d\bar{r} \right). \quad (1.60)$$

Поскольку

$$\text{rot} \left(\frac{d\bar{r}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{rot}(d\bar{r}) + \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \times d\bar{r},$$

и учитывая, что $\text{rot}(d\bar{r}) = 0$, из (1.60) получаем

$$\bar{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \times d\bar{r}. \quad (1.61)$$

Формулу (1.61) можно еще упростить, учитывая, что

$$\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \text{grad} r = -\frac{\bar{r}}{r^3}.$$

Это приводит к следующей формуле

$$\bar{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\bar{r}}{r^3} \times \bar{r}. \quad (1.62)$$

Последняя формула есть аналог известной из электромагнетизма формулы Био–Савара.

1.7 Композиционные материалы

Композиционные материалы используются в широком спектре отраслей благодаря их уникальным свойствам, включая высокую прочность, легкость, устойчивость к коррозии и термическую стабильность.

Композиционные материалы, также известные как композиты, являются материалами, состоящими из двух или более различных компонентов, которые при объединении образуют материал с уникальными свойствами, которые не могут быть достигнуты ни одним из отдельных компонентов. Композиты широко используются в авиации, автомобильной промышленности, строительстве и многих других отраслях.

Композиционные материалы представляют собой важный класс материалов, который продолжает развиваться и расширяться. Их уникальные свойства делают их незаменимыми во многих отраслях промышленности. Ожидается, что в будущем использование композитов будет только расти по мере разработки новых технологий и материалов.

Композиционные материалы обычно состоят из двух основных компонентов: матрицы и армирующего материала. Матрица - это основной материал, который держит вместе армирующий материал, обеспечивая форму и ряд основных механических свойств. Армирующий материал - зачастую волокна или частицы - обеспечивает улучшенные механические свойства, такие как прочность и жесткость.

В диссертации будут рассмотрены следующие типы *композитов*:

1. Волокнистые композиты: Эти композиты включают волокна, такие как стекловолокно, углеродное волокно и т.д., встроенные в матрицу. Они обладают высокой прочностью и жесткостью.

2. Слоистые композиты: Эти композиты состоят из нескольких слоев различных материалов, которые соединяются вместе. Примером является композитный материал для брони, состоящий из слоев керамики, композита на основе волокон и металла.

В работе будут рассмотрены два вида композиционных материалов:

1. Матрица и волокна находятся в упругом состоянии и обладают различными упругими свойствами.

2. Матрица пластична, волокна и матрица обладают различными упругими свойствами.

В первом случае решение задачи сводится к упругой задаче для материала, состоящего из разных материалов. Во втором случае будут рассмотрены материалы, в которых напряжение волокна на границе с матрицей носит сдвиговой характер [73]

1.8 Введение в непрерывные группы Ли

Многообразия

Многообразием можно неформально назвать геометрический объект, имеющий локальное строение пространства R^m , в этом случае m – размерность многообразия. Точное определение этого понятия можно найти в многочисленных современных учебниках по дифференциальной геометрии [73].

Пусть поверхность M размерности k в пространстве R^n задается набором уравнений

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n - k, \quad (1.63)$$

причем ранг матрицы $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ равен $n - k$. M – многообразие размерности k .

Замечание. Почти всегда под термином «многообразие» будем понимать поверхность, задаваемую выражением вида (1.63).

Гладкое многообразие M размерности m в каждой точке $x \in M$ имеет касательное пространство $T_x(M)$. Это пространство является линейным и имеет размерность m .

Кривой в многообразии M , проходящей через точку $x \in M$, называется непрерывно дифференцируемое отображение $\gamma: I \rightarrow M$, где I – открытый интервал из \mathbb{R} , содержащий точку 0 , причем $\gamma(0) = x$. Говорят, что кривые γ_1 и γ_2 касаются друг друга в точке x , если они имеют одинаковые производные в одной, а значит, и во всех системах координат, заданных вблизи x . Понятие касания кривых не зависит от выбора системы координат и задает отношение эквивалентности между кривыми, проходящими через точку x .

Определим касательный вектор к кривой γ в точке x как класс эквивалентных кривых. Множество касательных векторов, проведенных ко всевозможным кривым, проходящим через точку x , порождает векторное пространство $T_x(M)$, которое называется касательным пространством многообразия M в точке x . Если многообразие M имеет размерность m , то в каждой точке x оно имеет m -мерное касательное пространство, которое является линейным пространством.

Группы Ли

Определение. Множество G называется группой с операцией \circ , если для любых двух элементов $a, b \in G \Rightarrow a \circ b = c \in G$ (алгебраическая полнота), при этом выполнены следующие условия:

1. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ для всех $a, b, c \in G$ (ассоциативность);
2. существует единственный элемент $e \in G$ такой, что $a \circ e = e \circ a = a$ для всех $a \in G$;
3. для каждого элемента $a \in G$ существует элемент, обозначаемый a^{-1} , такой, что $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$.

Определение. Группой Ли G называется:

- а) гладкое многообразие и одновременно;

б) группа с умножением $\mu: G \times G \rightarrow G$ и взятием обратного элемента $\tau: G \rightarrow G$;

в) μ и τ – гладкие отображения.

Поясним немного это определение. В силу а) G есть локально некоторая поверхность, на которой каждой точке $a \in G$ можно поставить в соответствие некоторые координаты, т. е. можно считать, что $a \in R^m$, если G – многообразие размерности m . Зная координаты точек $a, b \in G$, по свойству б), мы можем определить координаты их произведения $\mu(a, b) = c$ и обратного элемента $\tau(a) = a^{-1} \in G$. Пункт в) гарантирует достаточную гладкость этих функций.

Определение. Если группа Ли G как многообразие имеет размерность r , то пишем G_r .

Определения. Пусть H – замкнутое множество в G_r , являющееся группой. Тогда H называется подгруппой группы Ли G_r или просто подгруппой.

Определение. Гладкое многообразие G называется локальной группой Ли, если

– выделен элемент (единица) $e \in G$;

– выделены окрестности $U, V (V \subset U)$ элемента e такие, что на произведении $U \times U \rightarrow U$ определено отображение (групповая операция (\circ)), удовлетворяющая условиям :

1) $V \circ V \subset U$;

2) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ для всех $a, b, c \in V$;

3) $e \circ a = a \circ e = a$ для всех $a \in U$;

4) для любого $a \in V$ существует (обратный) элемент $a^{-1} \in U$ такой, что $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$;

5) отображение $(a, b) \rightarrow a \circ b^{-1}$ гладкое на $U \times V$.

Другими словами, G - есть локальная группа Ли, если для элементов x, y , достаточно близких к единице e , определено произведение ab и обратный

элемент a^{-1} , гладко зависящие от a, b , причем выполнены все аксиомы группы каждый раз, когда участвующие в этих аксиомах объекты определены. Окрестности U, V не определены однозначно, ясно, что вместо U, V можно взять соответствующим образом подобранные меньшие окрестности $U' \subset U, V' \subset V$. Этот произвол в определении локальной группы обеспечивает необходимую в локальных вопросах общность вводимого понятия и расширяет область применения теоретико-групповых методов. С другой стороны, чтобы исключить эту неопределенность, удобно считать две локальные группы Ли эквивалентными, если их пересечение содержит некоторую открытую окрестность e .

Каждому элементу $a \in G_r$ соответствует набор чисел $a^1, \dots, a^r \in R^r$, который называется его координатами. При этом единица группы e получает координаты, равные нулю. Пусть $a, b \in U \subset G_r$, тогда определено их произведение $a \circ b = c$ и новый элемент имеет координаты

$$c^i = \varphi^i(a^1, \dots, a^r, b^1, \dots, b^r) = \varphi^i(a, b), \quad (1.64)$$

$$i = 1, \dots, r,$$

где φ^i – гладкие функции. Поскольку $ae = a, eb = b$, то получаем

$$\varphi^i(a, 0) = a^i, \quad \varphi^i(0, b) = b^i, \quad (1.65)$$

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial a^j} = \frac{\partial \varphi^i}{\partial b^j} = \delta_j^i \text{ при } a = b = e, \quad (1.66)$$

где δ_j^i – символ Кронекера.

Поскольку G_r – многообразие, то с ним ассоциируется касательное пространство $T(G_r) = T$ многообразия G_r в точке e . Пространство T имеет размерность r . Естественно, что касательное пространство несет определенную информацию о строении G_r . В нашем случае группа G_r наделяет касательное пространство дополнительной алгебраической структурой, и тогда T содержит исчерпывающую информацию о G_r .

Поскольку касательное пространство есть векторное пространство, то его изучать проще. Этим широко пользуются при исследовании групп Ли.

Определение. Кривая $g(t) \in G_r$, $|t| \leq \alpha$ называется однопараметрической подгруппой группы G_r , если она обладает свойством $g(t)g(s) = g(t+s)$, $|t+s| \leq \alpha$, $|s| \leq \alpha$.

Однопараметрические подгруппы обозначаются G_1 , они несут в себе всю информацию о группе G_r . Группа G_r буквально соткана из своих однопараметрических подгрупп. Поэтому изучение группы Ли G_r можно свести к изучению ее однопараметрических подгрупп.

Алгебры Ли

Определение. Линейное пространство L над R с билинейной операцией [4, 59] называется вещественной алгеброй Ли, если выполняются следующие свойства:

1. $[\xi_1, \xi_2] = -[\xi_2, \xi_1]$ (антикоммутативность);
2. $[\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]] + [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]] = 0$ (тождество Якоби) для всех $\xi_i \in L$.

Произведение $[\xi_1, \xi_2]$ называется коммутатором векторов ξ_1, ξ_2, \dots

Размерностью алгебры Ли называют размерность векторного пространства L . Алгебра Ли L размерности r обозначается символом L_r .

Пусть L_r – алгебра Ли, ξ_1, \dots, ξ_r – базис соответствующего пространства L_r . Разложение коммутатора любой пары базисных векторов по этому базису имеет вид

$$[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k,$$

где $c_{ij}^k (i, j, k = 1, \dots, r)$ – вещественные числа.

Числа c_{ij}^k называются структурными константами алгебры Ли L_r и с точностью до изоморфизма определяют ее структуру. Здесь и далее везде в тексте по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Кратко покажем, как по группе Ли G_r можно построить соответствующую ей алгебру Ли L_r . Пусть умножение в группе G_r дано формулой

$$c^i = \varphi^i(a, b), i = 1, \dots, r. \quad (1.67)$$

Разложим функции φ^i по формуле Тейлора. В силу (1.65), (1.66) это разложение имеет несколько специальный вид:

$$\varphi^i(a, b) = \varphi^i(0, b) + \frac{\partial \varphi^i}{\partial a^j}(0, b)a^j + \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial a^j \partial a^k}(0, b)a^j a^k + \varepsilon_1,$$

$$\varphi^i(0, b) = \varphi^i(0, 0) + \frac{\partial \varphi^i}{\partial b^j}(0, 0)b^j + \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial b^j \partial b^k}(0, 0)b^j b^k + \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - есть величины третьего порядка малости относительно координат a, b .

С учетом этих формул получаем

$$\varphi^i(a, b) = a^i + b^i + \alpha_{jk}^i a^j b^k + g_{jk1}^i a^j a^k b^1 + h_{jkl}^i a^j b^k b^l + \varepsilon, \quad (1.68)$$

где ε - величина четвертого порядка малости относительно координат a, b .

Числа

$$c_{jk}^i = \alpha_{jk}^i - \alpha_{kj}^i, \quad (1.69)$$

есть структурные константы группы G_r .

Формулы (1.69) показывают, что в первом приближении группа G_r коммутативна. Однако второе приближение дает, как правило, отклонение от коммутативности. В случае коммутативных групп структурные константы равны нулю. Этот факт указывает на то, что структурные константы весьма существенны для групп Ли. Позже будет показано, что структурные константы полностью определяют структуру группы Ли, что и объясняет их название.

Пусть $a, b \in G$; рассмотрим их коммутатор $ab^{-1}a^{-1} = q(a, b)$. Тогда с учетом (1.69) получаем

$$q^i = c_{jk}^i a^j b^k + \varepsilon^i. \quad (1.70)$$

Используя формулу (1.70), можно показать, что структурные константы образуют тензор. Это равенство может служить для определения c_{jk}^i . Структурные константы группы Ли G_r удовлетворяют следующим соотношениям:

$$c_{ij}^p = -c_{ji}^p, \quad (1.71)$$

$$c_{is}^p c_{jk}^s + c_{js}^p c_{ki}^s + c_{ks}^p c_{ij}^s. \quad (1.72)$$

Соотношение (1.71) следует из (1.69) очевидным образом: (1.72) является следствием ассоциативности умножения в группе Ли G_r .

Пусть G_r – группа Ли, как показано выше, ей можно поставить в соответствие L_r – r -мерное векторное пространство. Установим в L_r операцию коммутирования, которое превратит L_r в алгебру Ли исходя из свойств группы G_r . Пусть ξ_1 и ξ_2 – два вектора из L_r , а $a(t)$ и $b(t)$ – две кривые, для которых вектора ξ_1 и ξ_2 являются касательными. Положим

$$q(t) = a(t)b(t)(a(t))^{-1}(b(t))^{-1}. \quad (1.73)$$

Тогда $q(t)$ определяет кривую в G .

Введем на этой кривой новый параметр s , положив $t = \sqrt{s}$, $s > 0$. Пусть теперь вектор ξ_3 – касательный к кривой $q(\sqrt{s})$. В пространстве L_r определим коммутатор по правилу $[\xi_1, \xi_2] = \xi_3$. В результате пространство L_r превращается в алгебру Ли, которое соответствует группе Ли G_r . Этот результат непосредственно следует из формулы (1.73).

Для работы с алгебрами Ли нам потребуются следующие определения.

Определения. Векторное пространство $N \subset L$ называется подалгеброй алгебры Ли L , если для любых $u, v \in N$ следует, что $[u, v] \in N$.

Заметим, что если G_r – группа Ли, а L_r – соответствующая ей алгебра Ли, то каждой подгруппе группы G_r соответствует некоторая подалгебра и наоборот. Это соответствие характерно и для более специальных классов подалгебр и подгрупп.

Группа точечных преобразований

Пусть R^n и R^r – евклидовы пространства, B – открытый шар, содержащий ноль, $B \subset R^r$. Рассмотрим функции $f: R^n \times B \rightarrow R^n$, которые порождают преобразование R^n в себя:

$$x' = f(x, a) = T_a x, \quad x, x' \in R^n, \quad a \in B. \quad (1.74)$$

Здесь $a = (a^1, \dots, a^r)$ называются параметрами преобразования (1.74).

Различным преобразованиям соответствуют различные значения параметров. В дальнейшем считаем, что все параметры a^1, \dots, a^r существенны. Это означает, что они не могут быть заменены функциями от меньшего числа параметров. Потребуем, чтобы преобразования вида (1.74) порождали группу Ли. Для этого определим композицию двух преобразований:

$$T_a(T_b x) = f(f(x, a), b) = f(x, \varphi(a, b)) = T_c x, \quad (1.75)$$

где

$$c^i = \varphi^i(a, b), \quad i = 1, \dots, r. \quad (1.76)$$

Естественно потребовать выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= x, \\ \varphi(a, a^{-1}) &= \varphi(a^{-1}, a) = 0, \\ \varphi(a, \varphi(b, c)) &= \varphi(\varphi(a, b), c), \end{aligned} \quad (1.77)$$

которые выполняются для всех $a, b, c \in B$, $x \in R^n$.

Предположим, что $\varphi(a, b)$ есть аналитическая функция. В результате мы выделим множество преобразований пространства R^n в себя, которые образуют локальную группу Ли G_r . Поскольку преобразования из G_r каждой точке пространства R^n ставят в соответствие снова точку этого же пространства, то группу G_r часто называют группой точечных преобразований пространства R^n .

Инварианты и инвариантные многообразия

Пусть G – группа преобразований некоторого множества $M \subset R^n$.

Определение. Пусть $x \in M \subset R^n$, множество $G_r(x)$ всех образов Tx , $T \in G_r$ образует локальное многообразие, это многообразие называется орбитой, или G_r – орбитой точки x . Орбитой множества $A \in M$ является многообразие $G_r(A) = \bigcup_{x \in A} G_r(x)$.

Если группа G_r транзитивна на M , то $G_r(x) = M$, где x – любая точка M .

Определение. Подмножество $S \subset M$ называется инвариантным относительно действия групп G_r , если для любых $T \in G_r$, $x \in S$ элемент $Tx \in S$.

Отсюда ясно, что орбита каждой точки $x \in M$ является инвариантным подмножеством относительно группы G_r . Получаем следующее определение.

Определение. Функция $F: R^n \rightarrow R^1$ называется инвариантом группы G_r , если F постоянна на G_r – орбите каждой точки $x \in R^n$, $F(T_a x) = F(f(x, a)) = F(x)$.

Поэтому транзитивная группа G_r не имеет нетривиальных инвариантов.

Следствие. Функция $F(x): R^n \rightarrow R^1$ является инвариантом однопараметрической группы преобразований G_1 тогда и только тогда, когда

$$XF = 0, \quad (1.78)$$

где $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ – одномерная алгебра Ли, соответствующая группе G_1 .

Доказательство (1.78) непосредственно следует из равенства

$$F^i(f(x, a)) = F^i(x) + \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \frac{\partial f^j}{\partial a} \Big|_{a=0} a + 0(a) = F^i(x) + XF + 0(a) \text{ при } a \rightarrow 0.$$

Из общей теории дифференциальных уравнений в частных производных следует, что для нахождения всех инвариантов группы G_1 необходимо найти $(n-1)$ функционально независимое решение $I_1(x), \dots, I_{n-1}(x)$ уравнения (1.78): всякий инвариант $F(x)$ представим в виде $F(x) = \Phi(I_1(x), \dots, I_{n-1}(x))$, где Φ – некоторая функция $R^n \rightarrow R^1$. В случае r –

параметрической группы G_r преобразований в R^n для нахождения инвариантов следует решить систему дифференциальных уравнений

$$X_\alpha F = \xi_\alpha^i \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (1.79)$$

где X_1, \dots, X_r – базис алгебры Ли L_r , соответствующий группе G_r .

Число решений уравнений (1.79) определяется величиной

$$r_*(\xi) = \text{rank}[\xi_\alpha^i(x)] \quad (1.80)$$

Если $r_*(\xi)$ не меняется в некоторой окрестности точки x и $r_* < n$, то система (1.74) имеет $n - r_*$ функционально независимых решений, которые образуют базис инвариантов группы G_r . При $r_* = n$ группа G_r не имеет инвариантов – она транзитивна.

Определение. Многообразие M называется инвариантным относительно группы преобразований G_r , если G_r – орбита каждой точки $x \in M$ содержится в M , т. е. $G_r(M) = M$.

Пусть ξ_1, \dots, ξ_r базис алгебры Ли L_r соответствующей группе преобразований G_r . Тогда имеет место следующий критерий инвариантности.

Предложение. Многообразие $M \subset R^n$ инвариантно относительно группы тогда и только тогда, когда $\xi_i(x) \in T_x(M)$ для всех $x \in M$ и $i = 1, \dots, r$.

Если отображение $F(x): R^n \rightarrow R^{n-m}$ дифференцируемо и m -мерное многообразие $M \subset R^n$ задано уравнением

$$F(x) = 0, \quad (1.81)$$

как множество решений этого уравнения;

$\text{rank} F'(x) = n - m$ для всех $x \in M$, то критерий инвариантности принимает вид

$$\xi_\alpha^i \frac{\partial F}{\partial x^i} \Big|_M = 0, \quad (1.82)$$

$$\alpha = 1, \dots, r.$$

В дальнейшем рассматриваются только неособые (относительно группы G_r) многообразия M , т. е. такие, для которых $r_*(\xi|_M) = r_*(\xi)$. Пусть $r_*(\xi)$ постоянен в некоторой окрестности многообразия M и меньше n . В этом случае задание инвариантного многообразия M группы G_r может быть реализовано с помощью инвариантов группы G_r и записано в виде

$$\Phi_k(I_1, \dots, I_{n-r_*}) = 0, \quad k = 1, \dots, n - m, \quad (1.83)$$

где $I_1(x), \dots, I_{n-r_*}(x)$ – базис инвариантов группы G_r . Так как $G_r(x) \subset M$ для любой точки $x \in M$, то $r_* \leq m$. Уравнение (1.83) представляет m -мерное многообразие M в R^n как многообразие размерности

$$\rho = m - r_* \quad (1.84)$$

в пространстве инвариантов I_1, \dots, I_{m-r_*} . Это число ρ называется рангом M .

Оптимальная система подалгебр

Для группового анализа очень важна задача о перечислении всех различных подалгебр данной алгебры Ли L_r . К этой задаче, например, приводит задача описания существенно различных решений дифференциальных уравнений.

Замечание. В теории алгебр Ли, где решаются подобные задачи, достигнуты замечательные результаты в перечислении неподобных подалгебр над полем комплексных чисел. Над полем действительных чисел, а именно этот случай нас интересует, достигнуты определенные результаты в описании подалгебр малой размерности. Из-за отсутствия общих результатов построение оптимальных подалгебр приходится делать практически для каждой конкретной системы дифференциальных уравнений, для которой построена алгебра Ли.

Определение. Изоморфизм алгебры L на себя называется автоморфизмом.

Нетрудно видеть, что автоморфизмы образуют группу. Особую роль играет группа внутренних автоморфизмов, потому что она может быть

описана в терминах исходной алгебры L . Каждый элемент $a \in G_r$ определяет внутренний автоморфизм $f_a : b \rightarrow aba^{-1}$ группы G_r , множество f_a образует группу, которая часто обозначается $IntG_r$. Всякому автоморфизму группы G_r соответствует некоторый автоморфизм алгебры Ли L_r , следовательно, группе $IntG_r$ соответствует локальная группа Ли автоморфизмов алгебры Ли. Эта группа локально изоморфна группе $IntG_r$, она называется группой внутренних автоморфизмов алгебры L_r или присоединенной группой группы G_r и обозначается G_r^A .

Определение. Две подгруппы H и H' группы G_r сопряжены (подобны), если существует такой $A \in IntG_r$, что $A(H) = H'$.

Группа разбивает все подгруппы группы G_r на непересекающиеся семейства сопряженных подгрупп. Выбирая из каждого семейства по представителю, мы получим оптимальную систему подгрупп группы G_r . При конкретных вычислениях следует ограничиваться подгруппами определенной размерности, так появляются оптимальные системы s - мерных подалгебр. Так Θ_1 – это система неподобных одномерных подгрупп, Θ_2 – двумерных и т. д. Соответствие между подгруппами группы G_r и подалгебрами соответствующей алгебры Ли L_r позволяет все свести к построению оптимальной системы подалгебр.

Присоединенная группа G_r^A изоморфна фактор-группе G_r/Z , где Z – центр группы G_r . Для описания присоединенной группы следует построить касательный вектор к элементу aba^{-1} , $a, b \in G_r$. Для этого надо построить касательный вектор к произведению двух элементов ab , $a, b \in G_r$.

Теорема. Пусть ξ, η – векторы L_r , соответствующие элементам $a, b \in G_r$, тогда элементу ab соответствует вектор

$$\begin{aligned} & \xi + \eta + \frac{1}{2}[\xi, \eta] + \frac{1}{12}[[\xi, \eta], \eta] + \frac{1}{12}[[\eta, \xi], \xi] + \frac{1}{24}[[[\eta, \xi], \xi], \eta] - \\ & - \frac{1}{720}[[[\xi, \eta], \eta], \eta] - \frac{1}{720}[[[[\eta, \xi], \xi], \xi], \xi] + \dots \end{aligned} \quad (1.85)$$

Это знаменитый ряд Кэмпбелла – Хаусдорфа. Из теоремы получаем важное следствие.

Следствие. Элементу a группы $aba^{-1} \in G_r$ соответствует вектор из L_r , который имеет вид

$$\eta + \frac{1}{1!}[\eta, \xi] + \frac{1}{2!}[[\eta, \xi], \xi] + \dots + \frac{1^n}{n!}[\dots[\eta, \underbrace{\xi, \dots, \xi}_{n \text{ раз}}]] + \dots \quad (1.86)$$

Для более удобного использования формулы (1.86) вместо вектора ξ рассмотрим вектор $a\xi$, где $a \in R^1$. Тогда получаем

$$\eta + \frac{a}{1!}[\eta, \xi] + \frac{a^2}{2!}[[\eta, \xi], \xi] + \dots + \frac{a^n}{n!}[\dots[\eta, \underbrace{\xi, \dots, \xi}_{n \text{ раз}}]] + \dots \quad (1.87)$$

Формула (1.87) дает образ элемента η под действием внутреннего автоморфизма, соответствующего вектору $a\xi$. Эта формула позволяет строить неподобные подалгебры в терминах алгебры Ли L_r без построения группы G_r^A , а также используется в асимптотических методах и других вопросах группового анализа.

1.9 Точечная группа, допускаемая дифференциальными уравнениями. Использование точечных групп для исследования и решения дифференциальных уравнений

Продолжение точечных преобразований и инфинитезимальных операторов. Дифференциальные инварианты

Рассмотрим пространство R^N , где $N = n + m$, (x^1, \dots, x^n) – независимые переменные; (u^1, \dots, u^n) – зависимые переменные. В дифференциальные

уравнения необходимым образом входят производные $\frac{\partial u^k}{\partial x^i} = p_i^k$, $k = 1, \dots, m$,
 $i = 1, \dots, n$.

Пока, чтобы не усложнять выкладки и не вводить сложные обозначения, мы будем ограничиваться только первыми производными.

Рассмотрим однопараметрическую группу точечных преобразований в пространстве R^N ,

$$\begin{aligned} x^i &= f^i(x, u, a), \quad f^i|_{a=0} = x^i, \\ u^k &= g^k(x, u, a), \quad g^k|_{a=0} = u^k. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Группе преобразований (1.88) соответствует инфинитезимальный оператор

$$X = \zeta^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^k(x, u) \frac{\partial}{\partial u^k}. \quad (1.89)$$

Рассмотрим пространство R^{N+m} переменных (x, u, p) . В этом пространстве преобразования (1.88) индуцируют преобразование переменных p

$$p_i^k = h_i^k(x, u, p, a), \quad h_i^k|_{a=0} = p_i^k, \quad (1.90)$$

которые, очевидно, согласованы с равенствами

$$p_i^k = \frac{\partial u^k}{\partial x^i}, \quad (1.91)$$

для любой функции $u^k = u^k(x)$.

Условия (1.90) однозначно определяют для каждой группы G преобразования (1.91). В результате получается однопараметрическая группа G_1 , действующая в пространстве R^{N+m} , которая называется первым продолжением группы точечных преобразований (1.88).

Оператор продолженной группы G_1 равен

$$X_1 = X + \xi_i^k \frac{\partial}{\partial p_i^k} \Big|_{a=0}, \quad (1.92)$$

где $\xi_i^k = \frac{dh_i^k}{da} \Big|_{a=0}$, X – оператор (1.89).

Определение. Инварианты продолженной группы G_s для $s > 0$ называются дифференциальными инвариантами (порядка s) исходной группы G .

Критерий инвариантности систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных порядка s :

$$F(x, u, u_1, \dots, u_s) = 0, \quad (1.93)$$

где $F = (F^1, \dots, F^k)$, $u_1 = \left(\frac{\partial^i u^1}{\partial x_1^i}, \dots, \frac{\partial^i u^n}{\partial x_n^i} \right)$.

Введем в рассмотрение пространство переменных $\left(x, u, p_1, p_2, \dots, p_s \right)$.

Тогда уравнение (1.93) можно рассматривать как локальное многообразие в этом пространстве после замены u_i на p_i . Теперь переменные x, u, p_i являются независимыми, а многообразие задается уравнениями

$$F\left(x, u, p_1, p_2, \dots, p_s\right) = 0. \quad (1.94)$$

Определение. Система уравнений (1.94) инвариантна относительно группы G преобразований или допускает эту группу, если многообразие, заданное уравнениями (1.94), инвариантно относительно s -го продолжения G_s группы G .

Пусть X – инфинитезимальный оператор группы G , тогда в соответствии с критерием инвариантности многообразия (1.83) относительно группы G_s получаем

$$\left(X F \right)_s \Big|_{F=0} = 0. \quad (1.95)$$

где X_s – продолжение порядка s оператора X .

Условия (1.95) служат для определения неизвестных координат $\xi(x, u)$ и $\eta(x, u)$ оператора X , поэтому они называются определяющими уравнениями группы, допускаемой системой (1.93). Уравнения (1.95) представляют собой систему линейных однородных уравнений относительно искомых координат $\xi(x, u)$ и $\eta(x, u)$, поэтому векторы $[\xi, \eta]$ образуют векторное пространство. Если X и Y – два решения уравнения (1.95), то и их коммутатор $[X, Y]$ тоже является решением уравнения (1.95); это следует из геометрического смысла определяющих уравнений как условия инвариантности многообразия (1.94) и перестановочности операций умножения и продолжения операторов X, Y . Следовательно, множество всех решений определяющего уравнения (1.95) образует алгебру Ли. Соответствующая этой алгебре группа Ли представляет собой максимальную группу преобразований, допускаемую данной системой дифференциальных уравнений (1.93).

1.10 Высшие симметрии дифференциальных уравнений

В этом параграфе будет описано построение высших симметрий для дифференциальных уравнений. С помощью симметрий, допускаемых системой дифференциальных уравнений, можно получить информацию о внутренней структуре системы, построить инвариантные и другие классы решений [59].

Основным свойством симметрий, допускаемой системой, является то, что под их действием любое решение системы уравнений переходит опять в решение этой же системы. Используя это свойство, становится возможным получать новые решения не интегрированием исходной системы, а применением групповых преобразований к уже известным решениям. Таким

способом найдены многие интересные решения для различных дифференциальных уравнений.

В предыдущих параграфах рассматривались точечные преобразования дифференциальных уравнений, т. е. преобразования, которые имеют вид

$$x' = f(x, u; a), \quad u' = g(x, u; a), \quad (1.96)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$ и $u = u(x)$.

Кроме преобразований вида (1.96) существуют преобразования, которые зависят от производных до порядка k включительно.

Естественно, возникают вопросы: для каких уравнений существуют такие преобразования, как их найти и как их использовать для решения конкретных систем дифференциальных уравнений?

Рассмотрим преобразования вида

$$x' = f(x, u, p_k; a), \quad u' = g(x, u, p_k; a), \quad p_k = h(x, u, p_k; a). \quad (1.97)$$

Здесь p_k – это все производные до порядка k включительно.

Ясно, что часть преобразований (1.97) вида

$$x' = f(x, u; a), \quad u' = g(x, u; a), \quad p_k = h(x, u; a), \quad (1.98)$$

являются просто k -м продолжением преобразований (1.96). Другие преобразования, отличные от продолженных точечных, существуют в двух случаях:

- 1) при $m = 1, k = 1$;
- 2) при $k = \infty$.

Преобразования вида 1) называются контактными, они были известны еще Гюйгенсу, и до сих пор широко применяются в геометрической оптике и физике. Преобразования вида 2) называются высшими симметриями (естественно, при определенных условиях на функции f, g, h).

Их изучение начато сравнительно недавно, хотя первые примеры преобразований этого вида были известны еще С. Ли.

Группа Ли–Беклунда

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ – независимые переменные, $u = (u_1, \dots, u_m)$ – зависимые переменные. Рассмотрим преобразования бесконечномерного пространства J^∞ с координатами (x, u, p_σ^i) , где символ p_σ^i соответствует производной

$$\frac{\partial^{|\sigma|} u_i}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}, \quad |\sigma| = i_1 + \dots + i_n, \quad \sigma = (i_1, \dots, i_n).$$

Вида

$$\begin{aligned} x' &= f(x, u, p_\sigma^i; a), \\ u' &= g(x, u, p_\sigma^i; a), \\ (p_\sigma^i)' &= h_\sigma^i(x, u, p_\sigma^i; a). \end{aligned} \tag{1.99}$$

Здесь a – одномерный параметр, который меняется в окрестности нуля.

Пусть преобразования (1.99) образуют однопараметрическую группу, которая является локальной. Ее мы назовем группой Ли–Беклунда, если выполнены условия

$$\frac{\partial^{|\sigma|} u_i'}{\partial (x_1^{i_1})' \dots \partial (x_n^{i_n})'} = (p_\sigma^i)'$$

Для того чтобы определить действие этой группы на некотором многообразии M , нам в силу определения преобразований (1.99) придется рассматривать и все его дифференциальные следствия.

Определение. Многообразие M называется инвариантным многообразием относительно группы преобразований (1.99), если оно и все его дифференциальные следствия инвариантны относительно группы (1.99).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$F = 0, \tag{1.100}$$

где $F = (F_1, \dots, F_k)$, $F_i = F_i(x, u, \dots, u_{(s)})$, и $u_{(s)}$ – это совокупность всех частных производных порядка s . Система (1.100) определяет многообразие (y_∞) на J^∞ как следующую бесконечную систему уравнений:

$$D_\sigma(F_i) = 0, \quad (1.101)$$

где σ – любое целое число, $i = 1, \dots, k$.

Здесь оператор полной производной по x_i имеет вид

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{\sigma, i} p_{\sigma j}^i \frac{\partial}{\partial p_\sigma^i},$$

где $\sigma j = (i_1, \dots, i_j + 1, \dots, i_n)$, $D_\sigma = D_1^{i_1} \circ \dots \circ D_n^{i_n}$, если $\sigma = (i_1, \dots, i_j, \dots, i_n)$.

Определение. Система уравнений (1.100) называется инвариантной системой относительно группы преобразований (1.99), если относительно этой группы инвариантно многообразие, определенное системой (1.101).

Лемма. Многообразие (1.101) всегда допускает операторы вида

$$X^0 = \xi^i D_i, \quad (1.102)$$

где ξ^i – произвольные гладкие функции.

Операторы X_0 имеют очевидный смысл и являются дифференцированиями вдоль многообразия (1.102). Эти операторы образуют тривиальное множество операторов, которым следует пренебречь. Поэтому на самом деле следует изучать только операторы вида

$$X = \bar{X} - X^0 = (\eta^k - \xi^i p_i^k) \frac{\partial}{\partial u_k} + \dots \quad (1.103)$$

Определение. Оператор (1.103) называется каноническим оператором. Согласно формуле (1.103), канонический оператор имеет вид

$$X = \varphi^k \frac{\partial}{\partial u_k} + (\xi_\sigma^i)' \frac{\partial}{\partial p_\sigma^i}. \quad (1.104)$$

Теперь, как и в случае точечных преобразований, найдем связь между коэффициентами φ^k и $(\xi_\sigma^i)'$, штрих далее мы будем опускать. Эта связь определится из условия сохранения всех дифференциальных форм:

$$\begin{aligned}\Omega_1 : du_k - p_i^k dx_i &= 0, \\ \Omega_2 : dp_j^k - p_{ij}^k dx_i &= 0,\end{aligned}\tag{1.105}$$

$$\Omega_\sigma : dp_\sigma^k - p_{\sigma i}^k dx_i = 0.$$

В результате получаем

$$\xi_i^k = D_i \varphi^k, \quad \xi_{ij}^k = D_i \xi_j^k = D_i \circ D_j \varphi^k, \dots, \xi_\sigma^k = D^\sigma \varphi^k.$$

Докажем это утверждение для случая $m = 1$. В этом случае преобразования (1.99) таковы:

$$x'_i = f_i(x, u, p_\sigma; a),\tag{1.106}$$

$$u' = g(x, u, p_\sigma; a), \quad p'_\sigma = h_\sigma(x, u, p_\sigma; a).$$

Оператор \bar{X} имеет вид

$$\bar{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_\sigma \frac{\partial}{\partial p_\sigma}.\tag{1.107}$$

Дифференциальные формы (1.105) имеют вид

$$du - p_i dx_i = 0, \quad dp_j - p_{ij} dx_i = 0, \dots$$

Условие их сохранения при преобразованиях (1.106) означает выполнение соотношений

$$du' - p'_i dx'_i = 0, \quad dp'_j - p'_{ij} dx'_j = 0, \dots\tag{1.108}$$

Дифференцируя по a первое соотношение из (1.107) и учитывая (1.105), получаем при $a = 0$

$$D_i \eta - p_j D_i (\xi^j) = \zeta_i.$$

Из второго соотношения (1.108) аналогично получаем

$$D_i \zeta_j - p_{jk} D_i (\xi^k) = \zeta_{ij},$$

и т. д. Теперь подставляем эти соотношения в оператор (1.107) и приводим его к каноническому виду

$$X = (\eta - p_k \xi^k) \frac{\partial}{\partial u} + D_i (\eta - p_k \xi^k) \frac{\partial}{\partial p_i} + D_i D_j (\eta - p_k \xi^k) \frac{\partial}{\partial p_{ij}} + \dots$$

Из полученных выше результатов видно, что канонический оператор, а, следовательно, и группа преобразований (1.99) полностью определяются коэффициентами, которые стоят при $\frac{\partial}{\partial u_k}$. Их мы обозначаем φ^k и называем производящими функциями симметрий.

Итак, канонический оператор имеет вид

$$X = \varphi^k \frac{\partial}{\partial u_k} + D_i(\varphi^k) \frac{\partial}{\partial \varphi_i^k} + \dots \quad (1.109)$$

Тогда критерий инвариантности уравнений (1.100) относительно группы преобразований (1.99) с оператором (1.109) имеет вид

$$X F = 0. \quad (1.110)$$

Это равенство выполнено в силу соотношений (1.106). Более удобно условие (1.110) сформулировать на языке производящих функций симметрии. Имеем

$$\begin{pmatrix} \sum_{\sigma} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{\sigma}^1} D_{\sigma} \dots & \sum_{\sigma} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{\sigma}^m} D_{\sigma} \\ \sum_{\sigma} \frac{\partial F_k}{\partial \varphi_{\sigma}^1} D_{\sigma} \dots & \sum_{\sigma} \frac{\partial F_k}{\partial \varphi_{\sigma}^m} D_{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \dots \\ \varphi^m \end{pmatrix} = 0, \quad (1.111)$$

выполненное в силу (1.100).

Основное соотношение (1.111) кратко можно записать так:

$$\overline{l_F} \varphi = 0. \quad (1.112)$$

Оператор l_F называется оператором универсальной линейаризации для системы уравнений (1.101). Черта вверху означает, что в уравнениях (1.112) следует перейти на многообразии (1.101).

Алгебра высших симметрий, допускаемая дифференциальными уравнениями. Операторы рекурсии (рекурренции)

1. Пусть φ и g – производящие функции симметрий (далее просто симметрии), допускаемые системой дифференциальных уравнений. Этим симметриям отвечают операторы X и Y , тогда коммутатор этих операторов $[X, Y]$ тоже допускается данной системой дифференциальных уравнений.

Пользуясь представлением операторов в форме (1.109), нетрудно показать, что коммутатору $[X, Y]$ соответствует симметрия ϕ , которая определяется по формуле

$$\phi = \{\varphi, g\} = l_\varphi g - l_g \varphi. \quad (1.113)$$

Относительно операции $\{, \}$ линейное пространство производящих функций симметрии образуют алгебру Ли, которая называется алгеброй высших симметрий. Алгебру высших симметрий, допускаемую данным дифференциальным уравнением (y) , будем обозначать $sym(y)$.

2. В этом пункте рассмотрим важный вопрос, какие из высших симметрий являются продолженными точечными симметриями. Для этого рассмотрим оператор, соответствующий точечным симметриям. Он имеет вид

$$X = \xi^i(x, u) \partial_{x_i} + \eta^k(x, u) \partial_{u_k} \quad (i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m).$$

Продолжим этот оператор на все производные, имеем

$$X_\infty = \xi^i(x, u) \partial_{x_i} + \eta^k(x, u) \partial_{u_k} + \xi_i^k(x, u, p) \partial_{p_i^k} + \dots,$$

где $\xi_i^k = D_i(\eta^k) - p_{j\beta}^k D_i(\xi^{j\beta})$; $\xi_{ij}^k = D_i(\xi_j^k) - p_{j\beta}^k D_i(\xi^{j\beta}), \dots$

Приведем этот оператор к каноническому виду. Для этого вычтем из него $\sum_{i=1}^n \xi^i D_i$. В результате получаем

$$X_\infty = (\eta^k(x, u) - \xi^i(x, u) p_i^k) \partial_{u_k} + \dots \quad (1.114)$$

Формула (1.114) дает вид производящих функций симметрии, которые соответствуют точечным преобразованиям.

Теорема. Производящая функция симметрии тогда и только тогда соответствует точечной симметрии, когда она имеет вид

$$(\eta^1 - \xi^i p_i^1, \eta^2 - \xi^i p_i^2, \dots, \eta^m - \xi^i p_i^m), \quad i = 1, \dots, n,$$

где ξ^i и η^k зависят только от x, u .

При $m = 1$ из совокупности высших симметрий можно выделить контактные симметрии с помощью следующей теоремы.

Теорема. Высшие симметрии являются контактными при $m = 1$ тогда и только тогда, когда симметрия имеет вид $\varphi = \varphi(x, u, p)$.

3. Дадим определение оператора рекурсии (рекуррентии), который будет полезен для описания и построения алгебры высших симметрий.

Определение. Оператором рекурсии (рекуррентии) назовем такой оператор δ , который коммутирует с оператором l_F , т. е.

$$l_F \circ \delta = \delta \circ l_F. \quad (1.115)$$

В силу этого определения оператор δ переводит симметрию в симметрию. Это следует из равенства

$$l_F \delta \varphi = \delta l_F \varphi.$$

Пусть $n = 2$, $m = 1$, тогда оператор δ часто ищут в виде

$$\delta = a_k D_x^k + a_{k-1} D_x^{k-1} + \dots + a_0,$$

где функции a_k зависят от t, x, u, p_σ .

Алгоритм построения высших симметрий для дифференциальных уравнений

Алгоритм построения высших симметрий для дифференциальных уравнений состоит из трех этапов.

1. Все переменные (x, u) , которые связаны системой (1.101), делим на два вида – внешние и внутренние. Внутренние переменные выражаются через внешние из уравнений (1.99), особенно это просто делать для эволюционных уравнений, в других случаях могут возникнуть определенные трудности, преодоление которых требует аккуратности.

2. Записываем оператор и ограничиваем его и все искомые производящие функции симметрий на многообразии, задаваемое системой уравнений.

3. Решение уравнения или системы уравнений.

Использование высших симметрий для построения точных решений дифференциальных уравнений

Инвариантные решения

Для дифференциальных уравнений, допускающих высшие симметрии, очень просто формулируется это понятие на языке производящих функций. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$F(x, u, \dots, u_s) = 0, \quad (1.116)$$

которая допускает симметрию с производящей функцией $\varphi(x, u, \dots, u_k)$. Пусть ей соответствует инвариантное решение $u = u(x)$, которое под действием группы Ли–Беклунда, определяемой φ , переходит само в себя. На языке операторов это означает, что $X(u - u(x))|_{u=u(x)} = 0$ и эквивалентно равенству

$$\varphi(x, u, u_1, \dots, u_k) = 0. \quad (1.117)$$

Отсюда ясно, что для построения инвариантного решения на симметрии φ следует совместно решить системы (1.116) и (1.117). Эта система является переопределенной, поэтому ее, как правило, решить проще, чем исходную.

«Размножение» решений с помощью симметрий

Пусть $u = u(x)$ есть решение уравнения (1.117), тогда под действием группы Ли–Беклунда, соответствующей симметрии φ этого уравнения, решение $u = u(x)$ перейдет снова в решение этого же уравнения. Для того чтобы найти это новое решение, следует решить задачу Коши для эволюционной системы

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \varphi(x, u, u_1, \dots, u_k),$$

$$f|_{\tau=0} = u(x).$$

К сожалению, таким способом практически еще никто не «размножал» решения дифференциальных уравнений.

1.11 Законы сохранения

Законы сохранения – это важнейшая характеристика реального физического процесса, описываемого дифференциальными уравнениями механики. Сначала прерогатива открытия законов сохранения полностью была в руках экспериментаторов, но постепенно инициатива перешла к теоретикам. Настоящий бум «законотворчества» начался после фундаментальных работ Э. Нетер, установившей связь между законами сохранения и симметриями дифференциальных уравнений. Вторая волна исследований возникла в связи с изучением уравнений типа Кортевега-де-Фриза. Большинство исследователей шли путем, указанным Э. Нетер, пытаясь обобщить ее теорию на новые симметрии и новые типы уравнений. Видимо первым, принципиально иным путем пошел А. М. Виноградов [193], который показал, что на самом деле законы сохранения связаны не с симметриями, а с решениями сопряженного уравнения к уравнению $\overline{l}_F \overline{\varphi} = 0$.

Определение законов сохранения. Основные законы сохранения механики общеизвестны: это закон сохранения массы, закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса, закон сохранения энергии.

Эти законы лежат в основе построения практически любой модели, используемой для описания движения реальных тел. При этом уже достаточно давно было замечено, что при конкретных формах движения или вполне конкретных физических процессах иногда возникают новые законы сохранения, которые позволяют существенно продвинуться в решении поставленной задачи. Так возникает чисто математическая задача: для механической модели найти все возможные в этом процессе законы сохранения. В последнее время возник еще один заказчик – специалисты по численным методам. Им иногда работать с законами сохранения удобнее, чем с исходными дифференциальными уравнениями.

Вектор $A = (A^1, \dots, A^n)$ назовем *сохраняющимся током* в пространстве R^n , если

$$\operatorname{div} A = \partial_{x_1} A^1 + \dots + \partial_{x_n} A^n = 0. \quad (1.118)$$

Соотношение (1.118) называется *законом сохранения*.

Пусть

$$F(x, u, u_1, \dots, u_s) = 0, \quad (1.119)$$

система дифференциальных уравнений порядка s .

Определение. Вектор $A = (A^1, \dots, A^n)$ называется сохраняющимся током для уравнения (1.119), если соотношение (1.118) выполняется на всех решениях уравнения (1.119). Здесь $A^i = A^i(x, u, u_1, \dots, u_s)$.

Законы сохранения для уравнений механики. «Размножение» законов сохранения

Построение законов сохранения для произвольных систем дифференциальных уравнений имеет некоторые тонкие моменты [193], на которых мы останавливаться не будем. Системы уравнений механики, как правило, имеют «нормальный вид», поэтому теория, излагаемая ниже, для них справедлива.

Определение. Сохраняющийся ток $A = (A^1, \dots, A^n)$, $A^i = A^i(x, u, u_1, \dots, u_k, \dots)$ называется тривиальным, если $\operatorname{div} A = 0$ для любого вида функции u .

Определения. Два сохраняющихся тока A и A' эквивалентны, если $A - A'$ есть тривиальный ток.

Законом сохранения для системы дифференциальных уравнений (1.118) называется класс эквивалентных сохраняющихся токов.

Оказывается ([193]), что сохраняющийся ток удобно искать в виде производящей функции закона сохранения. При этом они между собой связаны следующим образом. Пусть A – сохраняющийся ток, а ϕ – производящая функция закона сохранения. Тогда $\operatorname{div} A = \square(\phi)$, где \square – некоторый дифференциальный оператор,

$$\square = \sum_{\sigma} a_{\sigma} D^{\sigma}, \quad a_{\sigma} = a_{\sigma}(x, u, u_1, \dots, u_s, \dots), \quad (1.120)$$

$$\varphi = \square^*(\cdot).$$

Здесь \square^* – оператор, формально сопряженный оператору \square ,

$$\square^* = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} D_{\sigma} \circ a_{\sigma}.$$

Приведем формулы, которые позволяют находить производящие функции законов сохранения, потом по ним восстанавливаем оператор \square и сохраняющийся ток A . Эта операция, естественно, неоднозначна, но полученные сохраняющиеся токи по одной производящей функции эквивалентны.

Пусть l_F – оператор универсальной линеаризации, построенный для уравнения (1.119). Имеет место теорема.

Теорема. Производящая функция законов сохранения φ удовлетворяет уравнению

$$\overline{l_F^* \varphi} = 0, \quad (1.121)$$

т. е. $\overline{\varphi} \in \ker \overline{l_F^*}$, где l_F^* – оператор, формально сопряженный оператору l_F .

Оператор $\overline{l_F^*}$ определим так. Пусть $\overline{l_F^*} = |a_{ij}^*|$, где $a_{ij}^* = \sum_{\sigma} a_{\sigma}^{ij} D^{\sigma}$, тогда $l_F^* = |a'_{ij}|$, $a'_{ij} = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} D^{\sigma} \circ a^{ji}$.

Теперь, естественно, возникает вопрос, каждой ли производящей функции законов сохранения соответствует сохраняющийся ток.

Теорема. Производящей функции $\overline{\varphi} \in \overline{l_F^*}$ соответствует некоторый закон сохранения тогда и только тогда, когда оператор

$$\overline{l_{\varphi}} + \Delta^* = B \circ l_F, \quad (1.122)$$

где $l_F^* \varphi = \Delta(F)$; а B – некоторый самосопряженный оператор, т. е. $B = B^*$.

В результате мы получили алгоритм построения законов сохранения, состоящий из трех этапов:

- 1) решение системы (1.121);
- 2) проверка условия (1.122);

3) восстановление оператора \square из условия (1.121).

Из всех этапов наиболее трудоемкий 1 и наименее алгоритмичен 3, но, как показали конкретные вычисления, все трудности здесь вполне преодолимы.

Способ построения законов сохранения, описанный выше, удобен для построения законов сохранения с математической точки зрения как описание всех законов сохранения, которые допускаются данной системой дифференциальных уравнений. Механиков часто интересуют другие вопросы: описать все законы сохранения, для которых сохраняющийся ток зависит от производных определенного порядка, это бывает связано с тем, что для «старших» законов сохранения трудно дать механическую интерпретацию.

В этом случае удобен такой алгоритм.

Пусть $A = (A^1, \dots, A^n)$ – сохраняющийся ток уравнения $F = 0$, $A^i = A^i(x, u, u_1, \dots, u_s, \dots)$. Это означает, что

$$\operatorname{div} A = \square(F), \quad (1.123)$$

где \square - некоторый линейный дифференциальный оператор.

Последнее соотношение и служит для определения компонент вектора A . Затем вычисляем $\square^*(\cdot)$, что дает производящие функции этих законов сохранения, и проверяем условие (1.122). Этот путь гораздо предпочтительнее с точки зрения механики в силу своей простоты, а проверка условия (1.122) дает ему достаточную строгость и позволяет отбрасывать тривиальные законы сохранения, что особенно важно для «старших» законов сохранения.

Высшие симметрии – это линейное пространство и одновременно алгебра Ли. Это позволяет при описании и построении высших симметрий пользоваться преимуществами и первой и второй структур. Совокупность производящих функций законов сохранения образует только векторное пространство, что может затруднить компактное описание всех законов

сохранения. Но часто выход из затруднительного положения здесь дают высшие симметрии и рекурренции. Высшие симметрии являются автоморфизмами на множестве всех производящих функций законов сохранения, а именно – справедлива теорема.

Теорема. Если f – симметрия, а g – производящая функция закона сохранения системы уравнений F , то

$$f[g] = l_g f + \Delta^*(g), \quad (1.124)$$

также является производящей функцией закона сохранения. Здесь Δ определяется из условия $l_F(f) = \Delta(F)$.

Пусть $F = 0$ линейная система дифференциальных уравнений. В этом случае ее можно записать в виде

$$M\bar{u} = 0,$$

где M – матрица состоящая из линейных дифференциальных операторов размерности $m \times n$. Пусть M^* – матрица сопряженная к M , и $M^*\bar{v} = 0$.

Тогда имеет место известное равенство

$$\bar{v}^T M\bar{u} - \bar{u}^T M^*\bar{v} = \partial_{x_1} A_1 + \dots + \partial_{x_n} A_n. \quad (1.125)$$

Формула (1.125) позволяет существенно сократить и упростить вычисление законов сохранения для линейных систем дифференциальных уравнений.

1.12 Групповое расслоение

Пусть имеется система уравнений F и допускаемая ими группа непрерывных преобразований G . Тогда систему уравнений F можно, относительно группы G на автоморфную систему AF и разрешающую систему RF . При этом все решения автоморфной системы получаются из одного решения системы F с помощью преобразований группы G , а решения разрешающей системы при этих преобразованиях переходят сами в себя. Алгоритм такого расслоения системы F описан в [59]. В качестве

примера такого расслоения рассмотрим систему уравнений асимметричной теории упругости, построенной в [4]. Эта система имеет вид [9]

$$\begin{pmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & 0 \\ 0 & \lambda + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx}^1 + u_{yy}^2 \\ u_{yx}^1 + u_{yy}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu & \mu_0 \\ -\mu_0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx}^1 + u_{yy}^1 \\ u_{xx}^2 + u_{yy}^2 \end{pmatrix} \quad (1.126)$$

Коэффициент плотности положили равным единице. При этом $\lambda > 0, \mu > 0, 0 < |\mu_0| < (\lambda + \mu) / 2$.

Известно, что система (1.126) допускает бесконечномерную подалгебру, которая порождается операторами вида

$$h_x^1 \partial_{u^1} + h_y^2 \partial_{u^2} \quad (1.127)$$

где h^1, h^2 – произвольное решение системы Коши-Римана.

Базис дифференциальных инвариантов первого порядка для (1.127) можно выбрать так

$$I_1 = t, I_2 = x, I_3 = y, I_4 = u_x^1 + u_y^2, I_5 = u_x^2 - u_y^1, I_6 = u_t^1, I_7 = u_t^2.$$

Тогда, согласно [59], автоморфная система имеет вид

$$u_x^1 + u_y^2 = \theta(t, x, y), u_x^2 - u_y^1 = \omega(t, x, y), u_t^1 = v^1(t, x, y), u_t^2 = v^2(t, x, y), \quad (1.128)$$

а разрешающая запишется так

$$\begin{pmatrix} v_t^1 \\ v_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \mu_0 \\ -\mu_0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu & \mu_0 \\ -\mu_0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_y \\ -\omega_x \end{pmatrix}, \quad (1.129)$$

$$v_x^1 + v_y^2 = \theta_t(t, x, y), v_x^2 - v_y^1 = \omega_t(t, x, y).$$

Система уравнений (1.125) равносильна системе уравнений (1.128) и (1.129). В [9] показано, что в разрешающей системе (1.128) можно заменить функции v^1, v^2 на вектор перемещения u^1, u^2 . В результате система (1.128) запишется так

$$\begin{pmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \mu_0 \\ -\mu_0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu & \mu_0 \\ -\mu_0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_y \\ -\omega_x \end{pmatrix}, \quad (1.130)$$

$$u_x^1 + u_y^2 = \theta_t(t, x, y), u_x^2 - u_y^1 = \omega_t(t, x, y).$$

В [9] показано, что система уравнений (1.130) равносильна исходной системе (1.126), т. е. любое решение системы (1.126) является решением системы (1.130) и наоборот любое решение системы (1.130) является решением системы (1.126).

1.13 Законы сохранения для гиперболических систем уравнений с двумя переменными

Законы сохранения эффективно используются для решения краевых задач для двух квазилинейных уравнений первого порядка. Есть примеры решения таких задач для уравнений гиперболического и эллиптического типов. Покажем, что задача Коши для системы уравнений гиперболического типа может быть сведена к краевой задаче для линейного уравнения с переменными коэффициентами второго порядка.

Рассмотрим систему двух квазилинейных уравнений гиперболического типа

$$\begin{aligned} a_1(u, v)u_x + a_2(u, v)u_y + a_3(u, v)v_x + a_4(u, v)v_y &= 0, \\ b_1(u, v)u_x + b_2(u, v)u_y + b_3(u, v)v_x + b_4(u, v)v_y &= 0, \end{aligned} \quad (1.131)$$

где x, y – декартовы координаты; u, v – искомые функции; u_x, v_x, u_y, v_y – производные по соответствующим переменным.

Система (1.131) может быть записана в виде

$$F_1 = \xi_x + \lambda^1 \xi_y = 0, F_2 = \eta_x + \lambda^2 \eta_y = 0, \quad (1.132)$$

где ξ, η – инварианты Римана. Характеристики системы (1.131) имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = \lambda^1(\xi, \eta), \quad \frac{dy}{dx} = \lambda^2(\xi, \eta), \quad (1.133)$$

Соотношения на характеристиках запишем так

$$\xi = \xi_0 - \text{const}, \quad \eta = \eta_0 - \text{const}. \quad (1.134)$$

Замечание. Система уравнений (1.131) может быть линеаризована преобразованиями годографа и приведена к виду

$$y_\eta - \lambda^1 x_\eta = 0, \quad y_\xi - \lambda^2 x_\xi = 0.$$

Это преобразование возможно только в том случае, когда якобиан $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$, что накладывает существенные ограничения на использование

уравнений (1.132) для решения краевых задач.

Для системы уравнений (1.130) поставлена задача Коши

$$u|_L = u_0(x, y), \quad v|_L = v_0(x, y), \quad (1.135)$$

где L не совпадает с характеристиками (1.133) и каждая характеристика пересекает L только один раз. [40]

Точка $M(m_1, m_2)$ есть пересечение характеристик, исходящих из точек $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$, принадлежащих линии L .

Для решения этой задачи построим законы сохранения системы уравнений (1.132).

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (1.132) назовем выражение вида

$$\partial_x A(\xi, \eta) + \partial_y B(\xi, \eta) = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (1.136)$$

где ω_1, ω_2 – функции одновременно не равные тождественно нулю. Функции (A, B) называются компонентами сохраняющегося тока.

Замечание. Более общее определение закона сохранения можно найти в [40; 172], для решения нашей задачи достаточно ограничиться этим определением.

Из (1.136) получаем

$$A_\xi \xi_x + A_\eta \eta_x + B_\xi \xi_y + B_\eta \eta_y = \omega_1 (\xi_x + \lambda^1 \xi_y) + \omega_2 (\eta_x + \lambda^2 \eta_y). \quad (1.137)$$

Из (1.137) получаем следующую систему уравнений на компоненты сохраняющегося тока

$$B_\xi = \lambda^1 A_\xi, \quad B_\eta = \lambda^2 A_\eta, \quad (1.138)$$

которая с точностью до обозначений совпадает с системой (1.132), но в отличии от (1.132) система (1.138) получена без каких-либо условий на якобиан.

Из (1.138) получаем

$$(\lambda^1 - \lambda^2)(A_{\xi\xi} - A_{\eta\eta}) + \lambda_\eta^1 A_\xi - \lambda_\xi^2 A_\eta = 0 \quad (1.139)$$

или

$$(1/\lambda^1 - 1/\lambda^2)(B_{\xi\xi} - B_{\eta\eta}) + \left(\frac{1}{\lambda^1}\right)_\eta B_\xi - \left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_\xi B_\eta = 0. \quad (1.140)$$

Сделаем преобразования уравнений (1.140) по следующим формулам

$$A = \alpha^1 \varphi + \alpha^2 \psi, \quad B = \beta^1 \varphi + \beta^2 \psi, \quad (1.141)$$

где $\alpha^1, \varphi, \alpha^2 \psi, \beta^1, \beta^2$ некоторые функции ξ, η . Подставим (1.141) в (1.139) и потребуем выполнение следующих условий

$$\beta_\xi^1 - \lambda^1 \alpha_\xi^1 = 0, \quad \beta_\eta^2 - \lambda^2 \alpha_\eta^2 = 0, \quad \beta^1 - \lambda^2 \alpha^1 = 0, \quad \beta^2 - \lambda^1 \alpha^2 = 0. \quad (1.142)$$

Из (1.142) получаем

$$(\lambda^1 - \lambda^2) \alpha_\xi^1 - \lambda_\xi^2 \alpha^1 = 0, \quad (\lambda^1 - \lambda^2) \alpha_\eta^2 + \lambda_\eta^1 \alpha^2 = 0. \quad (1.143)$$

При выполнении условий (1.143) получаем следующие уравнения на φ, ψ

$$\alpha^1 (\lambda^1 - \lambda^2) \varphi_\xi - \alpha^2 \lambda_\xi^1 \psi = 0, \quad \alpha^2 (\lambda^1 - \lambda^2) \psi_\eta - \alpha^1 \lambda_\eta^2 \varphi = 0. \quad (1.144)$$

Из (1.144) получаем закон сохранения в интегральной форме

$$\oint_{PQM} -A dy + B dx = 0. \quad (1.145)$$

Соотношение (1.145) есть сумма трех интегралов

$$\oint_{PQM} -A dy + B dx = \int_{PQ} + \int_{QM} + \int_{MQ} = 0.$$

Имеем

$$\int_{QM} -A dy + B dx = \int_{QM} (-\lambda^2 A + B) dx = (-\lambda^2 A + B) x \Big|_Q^M - \int_{QM} x d(-\lambda^2 A + B); \quad (1.146)$$

$$\int_{MP} -A dy + B dx = \int_{MP} (-\lambda^1 A + B) dx = (-\lambda^1 A + B) x \Big|_M^P - \int_{MP} x d(-\lambda^1 A + B). \quad (1.147)$$

Пусть

$$(-\lambda^2 A + B)|_{PM} = 1, \quad (-\lambda^1 A + B)|_{MQ} = -1. \quad (1.148)$$

При выполнении условий (1.148) из (1.145) получаем

$$\oint_{PQM} -A dy + B dx = \int_L -A dy + B dx + 2m_1 - p_1 - q_1 = 0$$

или

$$2m_1 = p_1 + q_1 - \int_L -A dy + B dx. \quad (1.149)$$

Преобразуем условия (1.148), для этого продифференцируем первое равенство по ξ , а второе - по η , в результате получим, после несложных преобразований

$$(A/\alpha^1)_\xi|_{\eta=\eta_0} = 0, \quad (A/\alpha^2)_\eta|_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (1.150)$$

Из (1.150) получаем

$$A|_{\eta=\eta_0} = C_1 \alpha^1, \quad A|_{\eta=\eta_0} = C_2 \alpha^2, \quad (1.151)$$

Из (1.151) следует условие согласования

$$C_1 \alpha^1(\xi_0, \eta_0) = C_2 \alpha^2(\xi_0, \eta_0).$$

Тем самым для нахождения первой координаты точки M необходимо решить линейное уравнение с переменными коэффициентами (1.149) с краевыми условиями (1.150), потом восстановить из уравнений (1.150) компоненту сохраняющегося тока B и выполнить интегрирование в (1.150) по кривой L .

Аналогичные операции следует проделать для нахождения второй координаты точки $M - m_2$.

Получаем

$$\begin{aligned} \int_{QM} -A dy + B dx &= \int_{QM} (-A + B/\lambda^2) dy = \\ &= (-A + B/\lambda^2) y|_Q^M - \int_{QM} y d(-A + B/\lambda^2); \end{aligned} \quad (1.152)$$

$$\int_{MP} -A dy + B dx = \int_{MP} (-A + B/\lambda^1) dy =$$

$$= (-A + B/\lambda^1) y \Big|_M^P - \int_{MP} y d(-A + B/\lambda^1). \quad (1.153)$$

Замечание. Уравнения (1.149) могут быть сведены к одному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами. Часто оно бывает проще, чем уравнение (1.136). Например, в [8] уравнение (1.136) – телеграфное уравнение. Для функций φ, ψ аналогично выписываются краевые условия и определяются компоненты сохраняющегося тока.

В качестве примера можно рассмотреть уравнения одномерной газовой динамики [47], которые в инвариантах Римана имеют вид

$$r_t + (u + c)r_x = 0, \quad s_t + (u - c)rs_x = 0, \quad (1.154)$$

где $u = \frac{r+s}{2}$, c – постоянная.

В этом случае первая компонента вектора скорости определяется из линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$A_{rr} - A_{ss} + \frac{1}{4c} A_r - \frac{1}{4c} A_s = 0. \quad (1.155)$$

При этом граничные условия имеют вид

$$A|_{r=r_0} = \alpha^2 = \exp\left(\frac{r+s}{4c}\right), \quad A|_{s=s_0} = \alpha^1 = \exp\left(\frac{r+s}{4c}\right). \quad (1.156)$$

Решение уравнения (1.155) с граничными условиями (1.156) можно найти в [70].

ГЛАВА 2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

2.1 Симметрии и законы сохранения двумерных уравнений теории упругости

Двумерные уравнения упругости в терминах компонент тензора напряжений можно записать так

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что

$$\sigma_y = -\sigma_x + U(x, y), \quad (2.2)$$

где $U(x, y)$ - некоторая гармоническая функция.

С учетом (2.2) и после введения обозначений

$$\sigma_x = u, \quad \tau = v \quad (2.3)$$

Система уравнений (2.1) запишется в виде

$$u_x + v_y = 0, \quad v_x - u_y + U = 0. \quad (2.4)$$

Симметрии уравнений двумерной теории упругости

Найдем некоторые симметрии системы уравнений (2.4), для этого все переменные разделим на два вида:

$x, y, u, v, u_y, v_y, u_{yy}, v_{yy}, \dots$ - внутренние переменные,

$u_x, v_x, u_{xy}, v_{xy}, u_{xxy}, v_{xxy}, \dots$ - внешние переменные.

Замечание. Внешние переменные - это такие переменные, которые можно выразить через внутренние переменные, с помощью системы уравнений (2.4) и всех ее дифференциальных следствий.

Оператор l_F для системы (2.4) запишется так:

$$l_F = \begin{pmatrix} D_x & D_y \\ -D_y & D_x \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где $D_x = \partial_x + u_x \partial_u + v_x \partial_v + u_{xx} \partial_{u_x} + u_{xy} \partial_{u_y} + v_{xx} \partial_{v_x} + v_{xy} \partial_{v_y} + \dots$,

$$D_y = \partial_y + u_y \partial_u + v_y \partial_v + u_{xy} \partial_{u_x} + u_{yy} \partial_{u_y} + v_{xy} \partial_{v_x} + v_{yy} \partial_{v_y} + \dots \quad (2.6)$$

Согласно общей теории, см. (2.4) и последующие формулы, будем искать производящие функции симметрий, зависящие только от внутренних переменных. Имеем

$$\varphi = \varphi(x, y, u, v, u_y, v_y, u_{yy}, v_{yy}, \dots), \quad \psi = \psi(x, y, u, v, u_y, v_y, u_{yy}, v_{yy}, \dots). \quad (2.7)$$

Теперь необходимо сузить оператор l_F на многообразии, задаваемое системой (2.4) и всеми ее дифференциальными следствиями. Для этого необходимо сузить операторы D_x, D_y , имеем

$$\begin{aligned} \bar{D}_x &= \partial_x - v_y \partial_u + (u_y - U) \partial_v - v_{yy} \partial_{u_y} + (u_{yy} - U_y) \partial_{v_y} + \dots, \\ \bar{D}_y &= \partial_y + u_y \partial_u + v_y \partial_v + u_{yy} \partial_{u_y} + v_{yy} \partial_{v_y} + \dots \end{aligned}$$

Для поиска симметрий необходимо решить систему уравнений

$$\bar{l}_F \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_x & \bar{D}_y \\ -\bar{D}_y & \bar{D}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Рассмотрим случай, когда производящие функции симметрий зависят только от переменных x, y, u, v, u_y, v_y . Заметим, что в этом случае мы получаем и все точечные симметрии С. Ли.

Из (2.8) получаем

$$\begin{aligned} &\varphi_x - v_y \varphi_u + (u_y - U) \varphi_v - v_{yy} \varphi_{u_y} + (u_{yy} - U_y) \varphi_{v_y} + \\ &+ \psi_y + u_y \psi_u + v_y \psi_v + u_{yy} \psi_{u_y} + v_{yy} \psi_{v_y} = 0, \\ &-(\varphi_y + u_y \varphi_u + v_y \varphi_v + u_{yy} \varphi_{u_y} + v_{yy} \varphi_{v_y}) + \\ &+ \psi_x - v_y \psi_u + (u_y - U) \psi_v - v_{yy} \psi_{u_y} + (u_{yy} - U_y) \psi_{v_y} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку производящие функции симметрий не зависят от u_{yy}, v_{yy} , то из соотношений (2.9) получаем

$$\varphi_{u_y} - \psi_{v_y} = 0, \quad \varphi_{v_y} + \psi_{u_y} = 0. \quad (2.10)$$

Уравнения (2.10) есть уравнения Коши-Римана, которые имеют бесконечное множество решений. Оставшиеся соотношения дают два уравнения

$$\varphi_x - v_y \varphi_u + (u_y - U) \varphi_v - U_y \varphi_{v_y} + \psi_y + u_y \psi_u + v_y \psi_v = 0, \quad (2.11)$$

$$-(\varphi_y + u_y \varphi_u + v_y \varphi_v) + \psi_x - v_y \psi_u + (u_y - U) \psi_v - U_y \psi_{v_y} = 0.$$

Эти уравнения показывают, что двумерные уравнения теории упругости допускают не только бесконечную группу точечных симметрий С.Ли, но также и бесконечную группу высших симметрий, которую здесь мы описывать не будем.

Законы сохранения уравнений двумерной теории упругости

Будем искать производящие функции законов сохранения в следующем виде

$$\varphi = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, \quad \psi = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2. \quad (2.12)$$

Здесь функции $\alpha^1, \beta^1, \gamma^1, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ зависят только от x, y .

Здесь, как и в предыдущем пункте, производящие функции зависят только от внутренних переменных.

Для нахождения производящих функций законов сохранения необходимо решить следующие уравнения

$$\bar{l}_F^* \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{D}_x & \bar{D}_y \\ -\bar{D}_y & -\bar{D}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0. \quad (2.13)$$

Оператор \bar{l}_F^* формально сопряжен оператору \bar{l}_F .

Решая уравнения (2.13) получаем

$$\begin{aligned} -\alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \quad -\beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \quad \alpha^1 + \beta^2 = 0, \quad \alpha^2 - \beta^1 = 0, \\ -\gamma_x^1 + \gamma_y^2 - \beta^1 U = 0, \quad \gamma_x^2 + \gamma_y^1 - \beta^2 U = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из (2.14) получаем бесконечную серию законов сохранения, которые порождаются производящими функциями (2.14). Некоторые из этих законов были использованы для решения краевых задач упругости и упруго-пластичности.

Замечание. Теорема (2.6) проверяется без труда, действительно

$$l_{\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}} + \Delta^* = \begin{pmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha^1 & -\beta^1 \\ -\alpha^2 & -\beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x & D_y \\ -D_y & D_x \end{pmatrix}.$$

Это означает, что каждой производящей функции вида (2.12) соответствует не тривиальный закон сохранения.

2.2 Законы сохранения и решения первой краевой задачи для уравнений двумерной теории упругости

Известно, что если система дифференциальных уравнений допускает группу непрерывных преобразований, то система может быть представлена в виде совокупности двух систем дифференциальных уравнений. Как правило, эти системы имеют меньший порядок, чем исходная система. Первая система – автоморфная, характеризуется тем, что все ее решения получаются из одного решения с помощью преобразований этой группы. Вторая система – разрешающая, ее решения под действием группы переходят сами в себя. Разрешающая система несет основную информацию об исходной системе. В данном параграфе изучаются автоморфная и разрешающая системы, двумерные стационарные уравнения упругости, которые являются системами дифференциальных уравнений первого порядка. Впервые построены бесконечные серии законов сохранения для разрешающей системы уравнений и автоморфной системы. Поскольку двумерная система уравнений упругости линейна, то таких законов имеется бесконечно много. В параграфе построена бесконечная серия законов сохранения, линейных по первым производным. Именно эти законы позволили решить первую краевую задачу для уравнений теории упругости в двумерном случае. Эти решения построены в виде квадратур, которые вычисляются по контуру исследуемой области.

Линейные уравнения теории упругости с групповой точки зрения изучаются уже достаточно давно [59, 4]. Сначала была найдена группа точечных преобразований и перечислены все инвариантные решения, см. [4] и цитируемую там литературу. Далее было выполнено групповое расслоение уравнений Ламе [72]. Хотя техника выполнения группового расслоения известна уже давно [59], не для многих систем уравнений оно выполнено. В этом смысле уравнения теории упругости составляют приятное исключение. Групповое расслоение позволило лучше понять, почему методы комплексного переменного так широко используются в двумерной теории

упругости. Это происходит потому, что разрешающая система для двумерных уравнений теории упругости есть система уравнений Коши-Римана. В статьях [116, 112] законы сохранения впервые использованы для решения краевых задач, в частности, уравнений пластичности. В [113] построены законы сохранения для плоской теории упругости, но они не были использованы для решения краевых задач. В предлагаемой работе построены новые законы сохранения для разрешающей и автоморфных систем. На их основе решена первая краевая задача для двумерных уравнений упругости.

Постановка задачи

Пусть предлагается следующая связь тензоров напряжений и тензора деформаций

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22}, \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{11},\end{aligned}\tag{2.15}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, $\lambda > 0, \mu > 0$ – постоянные Ламе, то есть (2.15) есть классический закон Гука для изотропного, однородного случая.

Подставляя (2.15) в уравнения равновесия, то в случае отсутствия массовых сил, получаем

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)u_{xx} + \lambda v_{xy} + \mu(u_{yy} + v_{xy}) &= 0, \\ \mu(u_{xy} + v_{xy}) + (\lambda + 2\mu)v_{yy} + \lambda u_{xy} &= 0,\end{aligned}\tag{2.16}$$

где u, v – компоненты вектора деформаций, индексы внизу, если не указано иное, означают производные по соответствующим переменным.

Известно, что система уравнений (2.16) эллиптического типа. Это определяет вид законов сохранения и решение краевых задач. Групповые свойства дифференциальных уравнений описаны в работе [59]. Групповые свойства уравнений упругости изучены в работе [4]. В работах [9, 40] изучались групповые свойства трехмерных уравнений линейной теории упругости и асимметричных уравнений упругости в динамическом случае.

Там, в частности, показано, что система (2.16) допускает бесконечную группу точечных преобразований, порождаемую операторами

$$X = h^1 \partial_u + h^2 \partial_v, \quad (2.17)$$

где h^1, h^2 - произвольное решение уравнений Коши- Римана

$$h_x^1 + h_y^2 = 0, h_y^1 - h_x^2 = 0. \quad (2.18)$$

Сделаем групповое расслоение системы уравнений (2.16) по методу [59] на подалгебре, порождаемой (2.17). Для этого продолжим операторы (2.17) на первые производные. Имеем

$$X_1 = X + h_x^1 \partial_{u_x} + h_y^2 \partial_{v_y} + h_y^1 \partial_{u_y} + h_x^2 \partial_{v_x}, \quad (2.19)$$

Дифференциальные инварианты для (2.19), с учетом (2.18), имеют вид

$$I_1 = x, I_2 = y, I_3 = u_x + v_y, I_4 = u_y - v_x. \quad (2.20)$$

Тогда автоморфная система уравнений имеет вид

$$u_x + v_y = \theta(x, y), u_y - v_x = \omega(x, y). \quad (2.21)$$

Напомним некоторые свойства автоморфных систем. Любое решение автоморфной системы может быть получено из одного решения этой системы с помощью преобразований, порождаемых оператором (2.17).

Подставляя (2.21) в (2.16), получаем разрешающую систему

$$F_1 = (\lambda + 2\mu)\theta_x - \mu\omega_y = 0, F_2 = (\lambda + 2\mu)\theta_y + \mu\omega_x = 0, \quad (2.22)$$

Повторяя почти дословно рассуждения из [9], можно утверждать, что система (2.22) равносильна системе уравнений (2.16). Поэтому построив решение системы (2.22) мы получим решение системы (2.16).

Пусть для системы (2.22) поставлена следующая краевая задача:

$$\theta|_L = \theta_0(x, y), \omega|_L = \omega_0(x, y), \quad (2.23)$$

где L – некоторая гладкая замкнутая кривая, $\theta_0(x, y), \omega_0(x, y)$ - известные гладкие функции.

Для решения этой задачи построим законы сохранения для системы уравнений (2.22).

Законы сохранения

В силу линейности системы (2.22) она будет иметь бесконечное число законов сохранения. В работе будут найдены только те законы сохранения, которые позволят решить краевую задачу (2.23).

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (2.22) назовем выражение вида

$$A_x(x, y, \theta, \omega) + B_y(x, y, \theta, \omega) = \alpha F_1 + \beta F_2 = 0, \quad (2.24)$$

где α, β – некоторые функции, которые не равны тождественно нулю одновременно. A, B называются компонентами сохраняющегося тока.

Предположим, что компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A = a^1\theta + a^2\omega, \quad B = b^1\theta + b^2\omega, \quad (2.25)$$

где a^1, a^2, b^1, b^2 – некоторые функции от x, y .

Подставляя (2.25) в (2.24), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} a^1 = \alpha(\lambda + 2\mu), \quad a^2 = \beta\mu, \quad b^1 = \beta(\lambda + 2\mu), \quad a^2 = -\alpha\mu, \\ a_x^1 + b_y^1 = 0, \quad a_x^2 + b_y^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Отсюда имеем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \quad \alpha_y - \beta_x = 0. \quad (2.27)$$

Из (2.24) следует

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_L -A dy + B dx. \quad (2.28)$$

Решение первой краевой задачи

Пусть $(x_0, y_0) \in S$, и это такая точка, в которой компоненты сохраняющегося тока имеют особенности, тогда из (2.28) следует

$$\oint_L -A dy + B dx = -\oint_\varepsilon -A dy + B dx. \quad (2.29)$$

где $\varepsilon: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ – окружность радиуса ε вокруг точки $(x_0, y_0) \in S$. Вычислим интеграл в правой части (2.29) для разных решений уравнений Коши-Римана. В качестве решений выберем такие, которые имеют особенность в точке $(x_0, y_0) \in S$. Пусть

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (2.30)$$

тогда из правой части (2.29) имеем

$$\oint_{\varepsilon} -A dy + B dx = \oint_{\varepsilon} -(\alpha(\lambda + 2\mu)\theta + \beta\mu\omega) dy + (\alpha\mu\omega + \beta(\lambda + 2\mu)\theta) dx. \quad (2.31)$$

Подставим (2.30) в (2.31), и сделаем замену переменных по формулам $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi$, $y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$, получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\varepsilon} -A dy + B dx &= \int_0^{2\pi} [-((\lambda + 2\mu)\theta + \mu\omega) + 2 \sin \phi \cos \phi \mu\omega] d\phi = \\ &= -2\pi [(\lambda + 2\mu)\theta(x_0, y_0) - \mu\omega(x_0, y_0)]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

В формуле (2.32) устремили $\varepsilon \rightarrow 0$ и использовали теорему о среднем.

Теперь сделаем аналогичные вычисления, положив

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

В результате получим

$$\oint_{\varepsilon} -A dy + B dx = -2\pi\mu\omega(x_0, y_0). \quad (2.33)$$

Формулы (2.22) и (2.23) позволяют, с учетом граничных условий (2.23) и равенства (2.29), определить значения функций θ и ω в произвольной точке $(x_0, y_0) \in S$. Они имеют следующий вид

$$\begin{aligned} 2\pi [(\lambda + 2\mu)\theta(x_0, y_0) - \mu\omega(x_0, y_0)] &= \oint_L -\frac{(\lambda + 2\mu)(x - x_0)\theta_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dy + \frac{\mu(y - y_0)\omega_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx, \\ 2\pi\mu\omega(x_0, y_0) &= \oint_L \frac{(\lambda + 2\mu)(y - y_0)\theta_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dy + \frac{\mu(x - x_0)\omega_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx. \end{aligned}$$

Теперь после восстановления решений разрешающей системы, найдем решения автоморфной системы, т.е. решения исходной системы уравнений (2.16). Имеем

$$F_3 = u_x + v_y - \theta(x, y) = 0, F_4 = u_y - v_x - \omega(x, y) = 0. \quad (2.34)$$

Здесь в правой части стоят известные функции, которые найдены в предыдущем пункте. Найдем законы сохранения уравнений (2.34) в следующем виде

$$A = a^3\theta + a^4\omega + c^1, B = b^3\theta + b^4\omega + c^2, \quad (2.35)$$

где $a^3, a^4, b^3, b^4, c^1, c^2$ – некоторые функции от x, y .

Имеем

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \alpha F_3 + \beta F_4 = 0, \quad (2.36)$$

Расщепляя систему уравнений (2.36), получаем

$$\begin{aligned} a^3 &= \alpha, a^4 = -\beta, b^3 = \beta, b^4 = \alpha, \\ a_x^3 + b_y^3 &= 0, a_x^4 + b_y^4 = 0, c_x^1 + c_y^2 = -\alpha\theta - \beta\omega. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Отсюда получаем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \alpha_y - \beta_x = 0. \quad (2.38)$$

Пусть для системы (2.16) поставлена следующая краевая задача:

$$u|_L = u_0(x, y), v|_L = v_0(x, y), \quad (2.39)$$

Рассмотрим закон сохранения в виде

$$\oint_L -A dy + B dx = -\oint_\varepsilon -A dy + B dx. \quad (2.40)$$

Пусть решение уравнений (2.38) имеет вид

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (2.41)$$

Подставляем (2.41) в правую часть (2.40), получаем

$$\begin{aligned} \oint_\varepsilon -A dy + B dx &= \oint_\varepsilon -(\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \oint_\varepsilon -(\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi + c^1) dy - (\beta \sin \varphi + \alpha \cos \varphi + c^2) dx = -2\pi u(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Пусть решение уравнений (2.38) имеет вид

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (2.43)$$

Подставляем (2.38) в правую часть (2.35), получаем

$$\begin{aligned} \oint_\varepsilon -A dy + B dx &= \oint_\varepsilon -(\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \oint_\varepsilon -(-u \sin \varphi - v \cos \varphi + c^1) dy - (u \cos \varphi - v \sin \varphi + c^2) dx = -2\pi v(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (2.44)$$

В результате получаем формулы для вычисления компонент вектора деформации

$$2\pi u(x_0, y_0) = \oint_L -A dy + B dx, \quad 2\pi v(x_0, y_0) = \oint_L -A dy + B dx, \quad (2.45)$$

где $c^1 = \int \alpha \theta dx, c^2 = \int \beta \omega dx$.

Таким образом, в данном параграфе получены новые бесконечные серии законов сохранения для разрешающей системы уравнений, а также для автоморфной системы, построенные для двумерных уравнений упругости. Эти законы позволили построить аналитическое решение краевой задачи для уравнений двумерной теории упругости в стационарном случае.

2.3 Решения задачи Дирихле для уравнений асимметричной теории упругости

При решении задачи групповой классификации уравнений, описывающих движение чисто механического континуума, появились некоторые новые системы дифференциальных уравнений, которые можно использовать для описания реальных физических процессов. Одна из таких новых систем - асимметричная теория упругости. Эта система может быть использована для материалов, имеющих малый модуль Юнга, а также для материалов, которые работают при нагрузках близких к критическим. В данном параграфе изучаются уравнения асимметричной теории упругости на основе их группового расслоения: разложения системы на автоморфную и разрешающую системы, которые являются системами дифференциальных уравнений первого порядка. Построены бесконечные серии законов сохранения для разрешающей системы уравнений и автоморфной системы. Эти законы позволили решить краевую задачу Дирихле для асимметричной теории упругости в двумерном случае. Решения построены в виде квадратур, которые вычисляются по контуру исследуемой области.

В работе [59] предлагается следующая связь тензоров напряжений и тензора деформаций

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + 2\mu_0\varepsilon_{12} + \lambda\varepsilon_{22}, \\
 \sigma_{12} &= \mu_0\varepsilon_{11} + 2\mu\varepsilon_{12} + \mu_0\varepsilon_{22}, \\
 \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} - 2\mu_0\varepsilon_{12} + \lambda\varepsilon_{11},
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

где σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, ε_{ij} - компоненты тензора деформаций, $\lambda > 0, \mu > 0$ - постоянные Ламе, μ_0 - произвольное вещественное число, если $\mu_0 = 0$, то (2.36) есть классический закон Гука для изотропного, однородного случая.

Подставляем (2.46) в уравнения равновесия, тогда в случае отсутствия массовых сил получаем

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)u_{xx} + \mu_0(u_{xy} + v_{xx}) + \lambda v_{xy} + \mu_0 u_{xy} + \mu(u_{yy} + v_{xy}) + \mu_0 v_{yy} &= 0, \\ \mu_0 u_{xy} + \mu(u_{xy} + v_{xy}) + \mu_0 v_{xy} + (\lambda + 2\mu)v_{yy} + \mu_0(u_{yy} + v_{xy}) + \lambda u_{xy} &= 0, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где u, v - компоненты вектора деформаций, индексы внизу, если не указано иное, означают производные по соответствующим переменным. Известно, что система (2.47) является эллиптической.

Групповые свойства уравнений асимметричных уравнений упругости в динамическом случае изучены в [4], там, в частности, показано, что система (2.47) допускает бесконечную группу точечных преобразований, порождаемую операторами

$$X = h^1 \partial_u + h^2 \partial_v, \quad (2.48)$$

где h^1, h^2 - произвольное решение уравнений Коши-Римана.

$$h_x^1 + h_y^2 = 0, h_y^1 - h_x^2 = 0. \quad (2.49)$$

Сделаем групповое расслоение системы уравнений (2.47) по методу [59] на подалгебре, порождаемой (2.48) [72]. Для этого продолжим операторы (2.48) на первые производные. Имеем

$$X_1 = X + h_x^1 \partial_{u_x} + h_y^2 \partial_{v_y} + h_y^1 \partial_{u_y} + h_x^2 \partial_{v_x}, \quad (2.49)$$

Дифференциальные инварианты для (2.49), с учетом (2.48), имеют вид

$$I_1 = x, I_2 = y, I_3 = u_x + v_y, I_4 = u_y - v_x. \quad (2.50)$$

Тогда автоморфная система уравнений имеет вид

$$u_x + v_y = \theta(x, y), u_y - v_x = \omega(x, y). \quad (2.51)$$

Напомним некоторые свойства автоморфных систем. Любое решение автоморфной системы может быть получено из одного решения этой системы с помощью преобразований, порождаемых оператором (2.48).

Подставляя (2.51) в (2.47), получаем разрешающую систему

$$\begin{aligned} F_1 &= (\lambda + 2\mu)\theta_x + \mu_0\theta_y - \mu\omega_y + \mu_0\omega_x = 0, \\ F_2 &= (\lambda + 2\mu)\theta_y - \mu_0\theta_x + \mu_0\omega_y + \mu\omega_x = 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

Повторяя почти дословно рассуждения из [4], можно утверждать, что система (2.52) равносильна системе уравнений (2.47). Поэтому построив решение системы (2.52) мы получим решение системы (2.47).

Пусть для системы (2.52) поставлена задача Дирихле:

$$\theta|_L = \theta_0(x, y), \omega|_L = \omega_0(x, y), \quad (2.53)$$

где L – некоторая гладкая замкнутая кривая.

Для решения этой задачи построим законы сохранения для системы уравнений (2.52).

В силу линейности системы (2.52) она будет иметь бесконечное число законов сохранения. В параграфе будут найдены только те законы сохранения, которые позволят решить краевую задачу (2.53).

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (2.52) назовем выражение вида

$$A_x(x, y, \theta, \omega) + B_y(x, y, \theta, \omega) = \alpha F_1 + \beta F_2 = 0, \quad (2.54)$$

где α, β – некоторые функции, которые не равны тождественно нулю одновременно. A, B называются компонентами сохраняющегося тока.

Предположим, что компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A = a^1\theta + a^2\omega, B = b^1\theta + b^2\omega, \quad (2.55)$$

где a^1, a^2, b^1, b^2 – некоторые функции от x, y .

Тогда из (2.54) получаем

$$\begin{aligned} a^1 &= \alpha(\lambda + 2\mu) - \beta\mu_0, a^2 = \beta\mu + \alpha\mu_0, \\ b^1 &= \beta(\lambda + 2\mu) + \alpha\mu_0, b^2 = -\alpha\mu + \beta\mu_0, \\ a_x^1 + b_y^1 &= 0, a_x^2 + b_y^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Отсюда получаем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \alpha_y - \beta_x = 0. \quad (2.57)$$

Из (2.54) следует

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_L -A dy + B dx. \quad (2.58)$$

Пусть $(x_0, y_0) \in S$, тогда из (2.58) следует

$$\oint_L -A dy + B dx = -\oint_\varepsilon -A dy + B dx. \quad (2.59)$$

где $\varepsilon: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varepsilon^2$ - окружность радиуса ε вокруг точки $(x_0, y_0) \in S$, если функции A, B имеют особенности в этой точке. Вычислим интеграл в правой части (2.59) для разных решений уравнений Коши-Римана. Пусть

$$\alpha = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \beta = \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} & \oint_\varepsilon -A dy + B dx = \\ & = \oint_\varepsilon [-(\alpha((\lambda+2\mu)\theta + \mu_0\omega) + \beta(-\mu_0\theta + \mu\omega)) dy + \\ & + (\alpha(\mu_0\theta - \mu\omega) + \beta((\lambda+2\mu)\theta + \mu_0\omega)) dx]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Подставим (2.60) в (2.61) и сделаем замену переменных по формулам $x-x_0 = \varepsilon \cos \phi, y-y_0 = \varepsilon \sin \phi$, получаем

$$\begin{aligned} & \oint_\varepsilon -A dy + B dx = \\ & = \int_0^{2\pi} [-(\lambda+2\mu+\mu_0)\theta + (\mu_0-\mu)\omega + 2 \sin \phi \cos \phi (\mu+\mu_0)\omega] d\phi = \\ & = -2\pi [(\lambda+2\mu+\mu_0)\theta(x_0, y_0) + (\mu_0-\mu)\omega(x_0, y_0)] \end{aligned} \quad (2.62)$$

В формуле (2.62) устремили $\varepsilon \rightarrow 0$ и использовали теорему о среднем.

Теперь сделаем аналогичные вычисления, положив

$$\alpha = -\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \beta = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

В результате получим

$$\oint_\varepsilon -A dy + B dx = -2\pi(\mu-\mu_0)\omega(x_0, y_0). \quad (2.63)$$

Формулы (2.62) и (2.63) позволяют, с учетом граничных условий (2.53) и равенства (2.60) определить значения функций θ и ω в произвольной точке $(x_0, y_0) \in S$.

Теперь после восстановления решений разрешающей системы, найдем решения автоморфной системы, т.е. решения исходной системы уравнений (2.47). Имеем

$$F_3 = u_x + v_y - \theta(x, y) = 0, F_4 = u_y - v_x - \omega(x, y) = 0. \quad (2.64)$$

Здесь в правой части стоят известные функции. Найдем законы сохранения уравнений (2.64) в следующем виде

$$A = a^3\theta + a^4\omega + c^1, B = b^3\theta + b^4\omega + c^2, \quad (2.65)$$

где $a^3, a^4, b^3, b^4, c^1, c^2$ - некоторые функции от x, y .

Имеем

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \alpha F_3 + \beta F_4 = 0, \quad (2.66)$$

Расщепляя систему уравнений (2.66), получаем

$$\begin{aligned} a^3 = \alpha, a^4 = -\beta, b^3 = \beta, b^4 = \alpha, \\ a_x^3 + b_y^3 = 0, a_x^4 + b_y^4 = 0, c_x^1 + c_y^2 = -\alpha\theta - \beta\omega. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Отсюда получаем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \alpha_y - \beta_x = 0. \quad (2.68)$$

Пусть для системы (2.47) поставлена следующая краевая задача

$$u|_L = u_0(x, y), v|_L = v_0(x, y), \quad (2.69)$$

Рассмотрим закон сохранения в виде

$$\oint_L -A dy + B dx = -\oint_\varepsilon -A dy + B dx. \quad (2.70)$$

Пусть решение уравнений (2.68) имеет вид

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (2.71)$$

Подставляем (2.71) в правую часть (2.70), получаем

$$\begin{aligned} \oint_\varepsilon -A dy + B dx &= \oint_\varepsilon -(\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \oint_\varepsilon -(\alpha \cos \phi - \beta \sin \phi + c^1) dy - (\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi + c^2) dx = -2\pi i(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Пусть решение уравнений (2.68) имеет вид

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (2.73)$$

Подставляем (2.73) в правую часть (2.70), получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\varepsilon} -A dy + B dx &= \oint_{\varepsilon} -(\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \oint_{\varepsilon} -(-u \sin \phi - v \cos \phi + c^1) dy - (u \cos \phi - v \sin \phi + c^2) dx = -2\pi v(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (2.74)$$

В результате получаем формулы для вычисления компонент вектора деформации

$$2\pi u(x_0, y_0) = \oint_L -A dy + B dx, \quad 2\pi v(x_0, y_0) = \oint_L -A dy + B dx,$$

где $c^1 = \int \alpha \theta dx$, $c^2 = \int \beta \omega dx$,

Таким образом, получены новые бесконечные серии законов сохранения, которые позволили решить краевую задачу для разрешающей системы уравнений, а также для автоморфной системы. Все это позволило построить аналитическое решение задачи Дирихле для уравнений асимметричной теории упругости.

2.4 Законы сохранения и решения первой краевой задачи для двумерных и трехмерных уравнений теории упругости

Известно, что если система дифференциальных уравнений допускает группу непрерывных преобразований, то в ряде случаев, система может быть представлена в виде совокупности двух систем дифференциальных уравнений. Как правило, эти системы имеют меньший порядок, чем исходная система. Выше сказанное относится к линейным уравнениям теории упругости. Первая система – автоморфная, характеризуется тем, что все ее решения получаются из одного решения с помощью преобразований этой группы. Вторая система – разрешающая, ее решения под действием группы переходят сами в себя. Разрешающая система несет основную информацию об исходной системе. В данном параграфе изучаются автоморфная и разрешающая системы двумерных и трехмерных стационарных уравнения упругости, которые являются системами дифференциальных уравнений первого порядка. В параграфе построены бесконечные серии законы

сохранения для разрешающих систем уравнений и автоморфных систем. Поскольку рассматриваемые системы уравнений упругости линейны, то таких законов имеется бесконечно много. Бесконечные серии законов сохранения, построенные в данном параграфе, линейны по первым производным. Именно эти законы позволили решить первую краевую задачи для уравнений теории упругости в двумерном и трехмерном случае. Решения построены в виде квадратур, которые вычисляются по границе исследуемых областей.

Система уравнений линейной изотропной упругости в трехмерном случае изучалась многими авторами. Особый интерес представляет построение точных решений для трехмерных уравнений. Такие решения строили П.Ф. Папкович, Х. Нейбер, Е. Трефтц, Б.Г. Галеркин [56], Б.Д. Аннин [4], Н.И. Остробаблин [63 - 67], Ю.А. Чиркунов [6, 72] и т.д. Линейные уравнения теории упругости с групповой точки зрения изучаются уже достаточно давно [72]. Сначала была найдена группа точечных преобразований и перечислены все инвариантные решения, см. [4] и цитируемую там литературу. Далее было выполнено групповое расслоение уравнений Ламе [65]. Хотя техника выполнения группового расслоения известна уже давно [59], не для многих систем уравнений оно выполнено. В этом смысле уравнения теории упругости составляют исключение. Групповое расслоение позволило лучше понять, почему методы комплексного переменного так широко используются в двумерной теории упругости. Это происходит потому, что разрешающая система для двумерных уравнений теории упругости есть система уравнений Коши-Римана. Для трехмерных уравнений разрешающая система – система Моисила –Тодореску. Не смотря на такое внимание к уравнениям упругости, методов решения краевых задач для тел конечных размеров в трехмерном случае практически нет. В настоящей работе строятся точные решения краевых задач теории упругости в трехмерном случае. Для этого найдены законы сохранения специального вида, которые позволяют находить

решения трехмерных уравнений теории упругости в виде нескольких квадратур, которые вычисляются по границе ограниченной упругой области.

Трехмерные статические уравнения линейной теории упругости

Запишем уравнения теории упругости в статическом трехмерном случае в декартовой системе координат x, y, z

$$\alpha_0 \text{grad div } \bar{w} - \text{rot rot } \bar{w} = 0, \quad (2.75)$$

где $\bar{w} = (w^1, w^2, w^3)$ - вектор упругого перемещения, $\alpha_0 = (\lambda + 2\mu) / \mu$, λ, μ - упругие постоянные Ламе.

Для этих уравнений поставим первую краевую задачу на поверхности S ограничивающую объем V :

$$\bar{w}|_S = \bar{w}_0(x, y, z) \quad (2.76)$$

С помощью законов сохранения решить задачу (2.75) - (2.76).

Предварительные сведения

Известно ([4]), что система уравнений (2.75) допускает, в смысле Ли – Овсянникова, оператор вида

$$X = h_1(x, y, z) \partial_{w^1} + h_2(x, y, z) \partial_{w^2} + h_3(x, y, z) \partial_{w^3} \quad (2.77)$$

где (h_1, h_2, h_3) - произвольное решение системы уравнений (2.75).

Продолжим оператор (2.77) на первые производные

$$p_1^1 = \frac{\partial w^1}{\partial x}, p_2^1 = \frac{\partial w^1}{\partial y}, p_3^1 = \frac{\partial w^1}{\partial z}, \dots, p_3^3 = \frac{\partial w^3}{\partial z} \quad \text{по формулам}$$

$$X_1 = X + \zeta_j^i \frac{\partial}{\partial p_j^i},$$

где $\zeta_j^i = -p_\beta^i D_j(h^\beta)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + p_j^k \frac{\partial}{\partial w^k}$, для краткости полагаем $x = x_1, y = x_2, z = x_3$.

По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Пусть h_1, h_2, h_3 - произвольные гармонические функции, тогда инварианты первого порядка (решение уравнения $X_1 I = 0$), имеют вид

$$I_1 = x, I_2 = y, I_3 = z, I_4 = \text{div } \bar{w}, I_5 = \text{rot } \bar{w}.$$

Назначая инварианты I_4, I_5 функциями от I_1, I_2, I_3 получим автоморфную систему [72]

$$\operatorname{div} \bar{w} = \theta(x, y, z), \quad \operatorname{rot} \bar{w} = \bar{\omega}(x, y, z) \quad (2.78)$$

и разрешающую систему [6]

$$\alpha_0 \operatorname{grad} \theta - \operatorname{rot} \bar{\omega} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{\omega} = 0. \quad (2.79)$$

Известно, что система уравнений (2.75) равносильна системе уравнений первого порядка (2.78), (2.79). Описанная выше процедура носит название группового расслоения [59].

Если в (2.78) положить $\alpha_0 \theta = p$, то получим известную систему уравнений Моисила – Теодореску (СМТ), которая подробно исследована в работе [83]. Там найдены законы сохранения для СМТ и с их помощью решена краевая задача. Там же указаны некоторые новые точные решения СМТ. Приведем некоторые из них, которые позволят решить задачу (2.75), (2.76).

Решениями СМТ являются следующие функции

$$\begin{aligned} g_1^0 &= (0, (x-x_0)/r_0^3, (y-y_0)/r_0^3, (z-z_0)/r_0^3), \\ g_2^0 &= ((x-x_0)/r_0^3, 0, -(z-z_0)/r_0^3, (y-y_0)/r_0^3), \\ g_3^0 &= ((y-y_0)/r_0^3, (z-z_0)/r_0^3, 0, -(x-x_0)/r_0^3), \\ g_4^0 &= ((z-z_0)/r_0^3, -(y-y_0)/r_0^3, (x-x_0)/r_0^3, 0), \end{aligned} \quad (2.80)$$

где $r_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, $(x_0, y_0, z_0) \in V$.

Законы сохранения

Известно, что решения системы уравнений (2.75) связаны с решениями системы Моисила - Теодореску ([72]) уравнениями (2.78)

$$\begin{aligned} F_1 &= -\theta + w_x^1 + w_y^2 + w_z^3 = 0, F_2 = -\omega^1 + w_z^2 - w_y^3 = 0, \\ F_3 &= -\omega^2 + w_x^3 - w_z^1 = 0, F_4 = -\omega^3 + w_y^1 - w_x^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Здесь функции $\theta, \omega^1, \omega^2, \omega^3$ предполагаются известными, способ их вычисления указан в работе [83].

Законом сохранения для системы уравнений (2.81) назовем выражение вида

$$\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = \beta^i F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.82)$$

где A, B, C, ω_i - функции от x, y, z, w^1, w^2, w^3 ; предполагается, что функции β^i не равны одновременно тождественно нулю. Выражение (A, B, C) называется сохраняющимся током. При выполнении этих условий, закон сохранения (2.82) будет нетривиальным.

Ищем закон сохранения в виде (2.82)

$$\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = \beta^i F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.83)$$

где A, B, C, β^i - функции от x, y, z, w^1, w^2, w^3

Ищем решение уравнений (2.83) в виде

$$A = a^1 w^1 + a^2 w^2 + a^3 w^3 + a^4, B = b^1 w^1 + b^2 w^2 + b^3 w^3, C = c^1 w^1 + c^2 w^2 + c^3 w^3,$$

где $a^i, b^i, c^i, \beta^i, i = 1, 2, 3, 4$ функции только от x, y, z .

Из (2.82) получаем

$$\begin{aligned} a_x^1 + b_y^1 + c_z^1 &= 0, a_x^2 + b_y^2 + c_z^2 = 0, a_x^3 + b_y^3 + c_z^3 = 0, \\ a^1 &= \beta^1, a^2 = -\beta^4, a^3 = \beta^3, \\ b^1 &= \beta^4, b^2 = \beta^1, b^3 = -\beta^2, \\ c^1 &= -\beta^4, c^2 = \beta^2, c^3 = \beta^1, \\ a_x^4 + b_y^4 + c_z^4 &= -\beta^1 \theta - \beta^2 \omega_1 - \beta^3 \omega_2 - \beta^4 \omega_3. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\beta_x^1 + \beta_y^4 - \beta_z^3 = 0, -\beta_x^4 + \beta_y^1 + \beta_z^2 = 0, \beta_x^3 - \beta_y^2 + \beta_z^1 = 0. \quad (2.84)$$

Заметим, что уравнения (2.84) с точностью до обозначений совпадают с первыми тремя уравнениями СМТ, поэтому функции $g_i, i = 1, 2, 3, 4$ являются решениями системы уравнений (2.84).

Уравнения (2.83), пользуясь формулой Гаусса –Остроградского, можно записать в виде

$$\iiint_V (A_x + B_y + C_z) dx dy dz = \iiint_S A dy dz + B dz dy + C dx dy = 0. \quad (2.85)$$

Пусть $\varepsilon; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varepsilon^2$ - сфера, окружающая точку (x_0, y_0, z_0) . Пусть сохраняющийся ток имеет особенность в этой точке, тогда из (2.85) получаем (см. рис. 2.1)

$$\begin{aligned} & \iint_S A dydz + B dzdx + C dx dy + \iint_{P^-} A dydz + B dzdx + C dx dy + \iint_{P^+} A dydz + B dzdx + C dx dy + \\ & + \iint_{\varepsilon} A dydz + B dzdx + C dx dy = 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

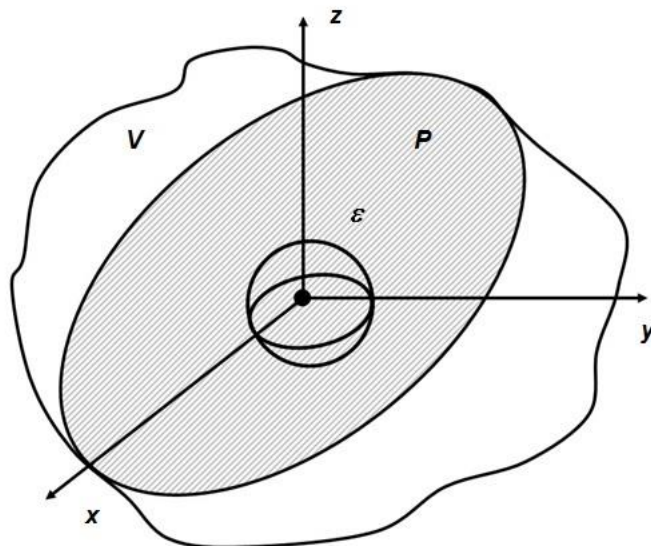


Рисунок 2.1– Сфера, окружающая точку, имеющую особенность

Поскольку интегралы по P^- и P^+ вычисляются по разным сторонам плоскости P , то их сумма равна нулю. В результате получаем

$$\iint_S A dydz + B dzdx + C dx dy = -\iint_{\varepsilon} A dydz + B dzdx + C dx dy. \quad (2.87)$$

Вычислим правую часть формулы (2.86) для разных решений уравнений (2.84).

Подставляем (2.87) в правую часть формулы (2.75), имеем

$$\begin{aligned} & \iint_{\varepsilon} (\beta^1 w^1 + \beta^4 w^2 - \beta^3 w^3) dydz + \\ & + (-\beta^4 w^1 + \beta^1 w^2 + \beta^3 w^3) dzdx + (\beta^3 w^1 - \beta^2 w^2 + \beta^1 w^3) dx dy. \end{aligned} \quad (2.88)$$

В (2.88) переходим к следующей системе координат

$$\begin{aligned}
& x - x_0 = \varepsilon \cos \theta \cos \phi, y - y_0 = \varepsilon \cos \theta \sin \phi, z - z_0 = \varepsilon \sin \theta, \\
& \iiint_{\varepsilon} (\beta^1 w^1 + \beta^4 w^2 - \beta^3 w^3) dydz + (-\beta^4 w^1 + \beta^1 w^2 + \beta^3 w^3) dzdx + (\beta^3 w^1 - \beta^2 w^2 + \beta^1 w^3) dxdy = \\
& = \iiint_{\varepsilon} [(\cos \theta \cos \phi w^1 + \cos \theta \sin \phi w^2 - \sin \theta w^3) \cos^2 \theta \cos \phi + (-\cos \theta \sin \phi w^1 + \cos \theta \cos \phi w^2) \cos^2 \theta \sin \phi + \\
& + (-\sin \theta w^1 + \cos \theta \sin \phi w^3) \cos \theta \sin \theta] d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta w^1 d\theta = -\frac{4\pi}{3} w^1(x_0, y_0, z_0).
\end{aligned}$$

Последнее выражение получено с использованием теоремы о среднем и при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В результате получаем

$$\iiint_S A dydz + B dzdx + C dxdy = \frac{4\pi}{3} w^1(x_0, y_0, z_0). \quad (2.89)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(x-x_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(y-y_0)}{r^3} w_0^2 + \frac{(z-z_0)}{r^3} w_0^3, \\
B &= \frac{(y-y_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(x-x_0)}{r^3} w_0^2 - \frac{(z-z_0)}{r^3} w_0^3, \\
C &= -\frac{(z-z_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(x-x_0)}{r^3} w_0^3.
\end{aligned}$$

Далее полагаем

$$\beta^1 = \frac{(y-y_0)}{r^3}, \beta^2 = \frac{(z-z_0)}{r^3}, \beta^3 = 0, \beta^4 = -\frac{(x-x_0)}{r^3}. \quad (2.90)$$

Подставляем (2.90) в (2.87), получаем аналогично (2.87) - (2.89).

$$\iiint_S A dydz + B dzdx + C dxdy = \frac{4\pi}{3} w^2(x_0, y_0, z_0). \quad (2.91)$$

где $A = \frac{(y-y_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 - \frac{(x-x_0)}{r^3} w_0^2, B = \frac{(x-x_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(z-z_0)}{r^3} w_0^2, C = \frac{(y-y_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^2 - \frac{(y-y_0)}{r^3} w_0^3.$

Далее полагаем

$$\beta^1 = \frac{(z-z_0)}{r^3}, \beta^2 = -\frac{(y-y_0)}{r^3}, \beta^3 = \frac{(x-x_0)}{r^3}, \beta^4 = 0. \quad (2.92)$$

Подставляем (2.92) в (2.85), получаем аналогично (2.87) - (2.89).

$$\iiint_S A dydz + B dzdx + C dxdy = \frac{4\pi}{3} w^3(x_0, y_0, z_0). \quad (2.93)$$

где $A = \frac{(z-z_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 - \frac{(x-x_0)}{r^3} w_0^3, B = \frac{(x-x_0)}{r^3} w_0^2 - \frac{(z-z_0)}{r^3} w_0^3, C = \frac{(x-x_0)^2}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(y-y_0)}{r^3} w_0^2 + \frac{(z-z_0)}{r^3} w_0^3.$

Замечание. В формулах (2.89), (2.91) и (2.93) опущена функция a^4 , поскольку

она является гармонической функцией без особенностей в области V и интеграл от нее по поверхности S равен нулю.

Двумерные статические уравнения линейной теории упругости

В двумерном случае рассмотренная выше задача имеет некоторые особенности, поэтому решим ее, обращая внимание на эти особенности.

Систему уравнений (2.76) перепишем следующим образом

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)u_{xx} + \lambda v_{xy} + \mu(u_{yy} + v_{xy}) &= 0, \\ \mu(u_{xy} + v_{xy}) + (\lambda + 2\mu)v_{yy} + \lambda u_{xy} &= 0,\end{aligned}\tag{2.94}$$

Здесь для удобства обозначили $w^1 = u, w^2 = v$ – компоненты вектора деформаций; индексы внизу, как и ранее, означают производные по соответствующим переменным.

Известно, что система уравнений (2.76) эллиптического типа. Это определяет вид законов сохранения и решение краевых задач. Как и уравнения (2.65) система (2.84) допускает бесконечную группу точечных преобразований, порождаемую операторами

$$X = h^1 \partial_u + h^2 \partial_v,\tag{2.85}$$

где h^1, h^2 – произвольное решение уравнений Коши-Римана

$$h_x^1 + h_y^2 = 0, h_y^1 - h_x^2 = 0.\tag{2.86}$$

Сделаем групповое расслоение системы уравнений (2.84), так же как это описано выше, на подалгебре, порождаемой (2.85). Для этого продолжим операторы (2.86) на первые производные. Имеем

$$X_1 = X + h_x^1 \partial_{u_x} + h_y^2 \partial_{v_y} + h_y^1 \partial_{u_y} + h_x^2 \partial_{v_x},\tag{2.87}$$

Дифференциальные инварианты для (2.87), с учетом (2.85), имеют вид

$$I_1 = x, I_2 = y, I_3 = u_x + v_y, I_4 = u_y - v_x.\tag{2.88}$$

Тогда автоморфная система уравнений имеет вид

$$u_x + v_y = \theta(x, y), u_y - v_x = \omega(x, y).\tag{2.89}$$

Напомним некоторые свойства автоморфных систем. Любое решение автоморфной системы может быть получено из одного решения этой системы с помощью преобразований, порождаемых оператором (2.86).

Подставляя (2.89) в (2.85), получаем разрешающую систему

$$F_1 = (\lambda + 2\mu)\theta_x - \mu\omega_y = 0, F_2 = (\lambda + 2\mu)\theta_y + \mu\omega_x = 0, \quad (2.90)$$

Повторяя почти дословно рассуждения выше можно утверждать, что система (2.90) равносильна системе уравнений (2.85). Поэтому, построив решение системы (2.90), мы получим решение системы (2.85).

Пусть для системы (2.90) поставлена следующая краевая задача:

$$\theta|_L = \theta_0(x, y), \omega|_L = \omega_0(x, y), \quad (2.91)$$

где L – некоторая гладкая замкнутая кривая, $\theta_0(x, y), \omega_0(x, y)$ – известные гладкие функции.

Для решения этой задачи построим законы сохранения для системы уравнений (2.90).

Законы сохранения

В силу линейности системы (2.90), она будет иметь бесконечное число законов сохранения. В параграфе будут найдены только те законы сохранения, которые позволят решить краевую задачу (2.91).

Законом сохранения для системы уравнений (2.90) назовем выражение вида

$$A_x(x, y, \theta, \omega) + B_y(x, y, \theta, \omega) = \alpha F_1 + \beta F_2 = 0, \quad (2.92)$$

где α, β – некоторые функции, которые не равны тождественно нулю одновременно. A, B – компоненты сохраняющегося тока.

Предположим, что компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A = a^1\theta + a^2\omega, B = b^1\theta + b^2\omega, \quad (2.93)$$

где a^1, a^2, b^1, b^2 – некоторые функции от x, y .

Подставляя (2.93) в (2.92), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} a^1 &= \alpha(\lambda + 2\mu), a^2 = \beta\mu, b^1 = \beta(\lambda + 2\mu), a^2 = -\alpha\mu, \\ a_x^1 + b_y^1 &= 0, a_x^2 + b_y^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Отсюда имеем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \alpha_y - \beta_x = 0. \quad (2.95)$$

Из (2.92) следует

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_L -A dy + B dx. \quad (2.96)$$

Решение первой краевой задачи

Пусть $(x_0, y_0) \in S$ - такая точка, в которой компоненты сохраняющегося тока имеют особенности, тогда из (2.96) следует

$$\oint_L -A dy + B dx = -\oint_\varepsilon -A dy + B dx. \quad (2.97)$$

где $\varepsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ - окружность радиуса ε вокруг точки $(x_0, y_0) \in S$.

Вычислим интеграл в правой части (2.97) для разных решений уравнений Коши - Римана. В качестве решений выберем такие, которые имеют особенность в точке $(x_0, y_0) \in S$. Пусть

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (2.98)$$

тогда из правой части (2.97) имеем

$$\oint_\varepsilon -A dy + B dx = \oint_\varepsilon -(\alpha(\lambda + 2\mu)\theta + \beta\mu\omega) dy + (\alpha\mu\omega + \beta(\lambda + 2\mu)\theta) dx. \quad (2.99)$$

Подставим (2.98) в (2.99) и сделаем замену переменных по формулам $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi$, $y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$, получаем

$$\begin{aligned} \oint_\varepsilon -A dy + B dx &= \int_0^{2\pi} [-((\lambda + 2\mu)\theta + \mu\omega) + 2 \sin \varphi \cos \varphi \mu\omega] d\varphi = \\ &= -2\pi [(\lambda + 2\mu)\theta(x_0, y_0) - \mu\omega(x_0, y_0)] \end{aligned} \quad (2.100)$$

В формуле (2.100) устремили $\varepsilon \rightarrow 0$ и использовали теорему о среднем.

Теперь сделаем аналогичные вычисления, положив

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

В результате получим

$$\oint_\varepsilon -A dy + B dx = -2\pi\mu\omega(x_0, y_0). \quad (2.101)$$

Формулы (2.100) и (2.101) позволяют, с учетом граничных условий и равенства (2.89), определить значения функций θ и ω в произвольной точке $(x_0, y_0) \in S$. Они имеют следующий вид

$$2\pi[(\lambda + 2\mu)\theta(x_0, y_0) - \mu\omega(x_0, y_0)] = \oint_L -\frac{(\lambda + 2\mu)(x - x_0)\theta_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dy + \frac{\mu(y - y_0)\omega_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx,$$

$$2\pi\mu\omega(x_0, y_0) = \oint_L \frac{(\lambda + 2\mu)(y - y_0)\theta_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dy + \frac{\mu(x - x_0)\omega_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx.$$

Теперь, после восстановления решений разрешающей системы, найдем решения автоморфной системы, т.е. решения исходной системы уравнений (2.94). Имеем

$$F_3 = u_x + v_y - \theta(x, y) = 0, F_4 = u_y - v_x - \omega(x, y) = 0. \quad (2.102)$$

Здесь в правой части стоят известные функции, которые найдены в предыдущем пункте. Найдем законы сохранения уравнений (2.102) в следующем виде

$$A = a^3 u + a^4 v + c^1, B = b^3 u + b^4 v + c^2, \quad (2.103)$$

где $a^3, a^4, b^3, b^4, c^1, c^2$ – некоторые функции от x, y .

Имеем

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \alpha F_3 + \beta F_4 = 0, \quad (2.104)$$

Расщепляя систему уравнений (2.104), получаем

$$a^3 = \alpha, a^4 = -\beta, b^3 = \beta, b^4 = \alpha, \quad (2.105)$$

$$a_x^3 + b_y^3 = 0, a_x^4 + b_y^4 = 0, c_x^1 + c_y^2 = -\alpha\theta - \beta\omega.$$

Отсюда получаем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \alpha_y - \beta_x = 0. \quad (2.106)$$

Пусть для системы (2.84) поставлена следующая краевая задача:

$$u|_L = u_0(x, y), v|_L = v_0(x, y), \quad (2.107)$$

Рассмотрим закон сохранения в виде

$$\oint_L -A dy + B dx = -\oint_\varepsilon -A dy + B dx. \quad (2.108)$$

Пусть решение уравнений (2.106) имеет вид

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (2.109)$$

Подставляем (2.109) в правую часть (2.108), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon} -A dy + B dx &= \int_{\varepsilon} -(\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \int_{\varepsilon} -(\alpha \cos \phi - \beta \sin \phi + c^1) dy - (\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi + c^2) dx = -2\pi u(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (2.110)$$

Пусть решение уравнений (2.106) имеет вид

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (2.111)$$

Подставляем (2.101) в правую часть (2.108), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon} -A_1 dy + B_1 dx &= \int_{\varepsilon} -(\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \int_{\varepsilon} -(-u \sin \phi - v \cos \phi + c^1) dy - (u \cos \phi - v \sin \phi + c^2) dx = -2\pi v(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (2.112)$$

В результате получаем формулы для вычисления компонент вектора деформации

$$2\pi u(x_0, y_0) = \int_L -A dy + B dx, \quad 2\pi v(x_0, y_0) = \int_L -A_1 dy + B_1 dx,$$

где $c^1 = \int \alpha \theta dx^2 = \int \beta \omega dx$.

Таким образом, построены законы сохранения для уравнений пространственной и двумерной теории упругости, которые позволили первую решить краевые задачи для этих систем.

2.5 Решение задачи Коши для уравнений упругости в плоском динамическом случае

В данном параграфе рассмотрена система уравнений упругости в плоском динамическом случае. Эта система заменена равносильной системой дифференциальных уравнений первого порядка. Равносильная система есть групповое расслоение исходной системы уравнений, она является объединением разрешающей и автоморфных систем. Для разрешающей системы уравнений найдены специальные классы законов сохранения, которые позволили найти решение исходных уравнений в виде поверхностных интегралов по границе упругого тела.

Предварительные сведения

Рассмотрим уравнения упругости в плоском случае

$$\begin{aligned}w_{tt}^1 &= (\lambda + 2\mu)w_{xx}^1 + \mu w_{yy}^1 + (\lambda + \mu)w_{xy}^2, \\w_{tt}^2 &= (\lambda + 2\mu)w_{yy}^2 + \mu w_{xx}^1 + (\lambda + \mu)w_{xy}^1,\end{aligned}\tag{2.113}$$

где λ, μ - постоянные Ламе, w^1, w^2 - компоненты вектора перемещений, плотность равна единице.

На плоскости $t = 0$ поставлена задача Коши

$$\begin{aligned}w^1|_{t=0} &= f^1(x, y), \quad w^2|_{t=0} = f^2(x, y), \\w_t^1|_{t=0} &= g^1(x, y), \quad w_t^2|_{t=0} = g^2(x, y).\end{aligned}\tag{2.114}$$

Если функции f^i, g^i - непрерывны вместе со своими производными на плоскости $t = 0$, то на этой плоскости нам известно значение всех производных функций w^1, w^2 по любому направлению.

Известно, что система уравнений (2.113) гиперболического типа и имеет характеристические поверхности вида $\omega(t, x, y) = 0$, которые удовлетворяют уравнению ([56])

$$[(\lambda + 2\mu)(\omega_x^2 + \omega_y^2) - \omega_t^2][\mu(\omega_x^2 + \omega_y^2) - \omega_t^2] = 0.\tag{2.115}$$

Известно [133, 59], что система уравнений (2.113) допускает группу точечных симметрий, порождаемую операторами

$$\begin{aligned}X_1 &= \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_0 = \partial_t, \\Z &= y\partial_x - x\partial_y + w^2\partial_{w^1} - w^1\partial_{w^2},\end{aligned}\tag{2.116}$$

$$P_0 = w^1\partial_{w^1} + w^2\partial_{w^2}, \quad P_w = h^1\partial_{w^1} + h^2\partial_{w^2}, \quad R = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t,$$

Где h^1, h^2 - произвольное решение уравнений (2.113). Наличие оператора $P_w = h^1\partial_{w^1} + h^2\partial_{w^2}$ позволяет выполнить групповое расслоение системы уравнений (2.113) [132, 133]. То есть представить ее в виде автоморфной и разрешающей систем уравнений. Для этого рассмотрим оператор $P_w = h_x\partial_{w^1} + h_y\partial_{w^2}$, где h - произвольная гармоническая функция. Инварианты оператора P_w равны t, x, y .

Продолжим оператор P_w на первые производные по формулам [132].

Имеем

$$P_w = h\partial_{w^1} + h\partial_{w^2} + h_x(\partial_{w_x^1} - \partial_{w_y^2}) + h_y(\partial_{w_y^1} + \partial_{w_x^2}).$$

Дифференциальные инварианты продолженного оператора равны

$$w_t^1, w_t^2, w_x^1 + w_y^2, w_x^2 - w_y^1.$$

Назначая дифференциальные инварианты функциями от инвариантов, получаем автоморфную систему

$$w_t^1 = u(t, x, y), w_t^2 = v(t, x, y), \theta(t, x, y) = w_x^1 + w_y^2, \omega(t, x, y) = w_x^2 - w_y^1, \quad (2.117)$$

условия совместности уравнений (2.107) приводят к разрешающей системе

$$u_t = (\lambda + 2\mu)\theta_x - \mu\omega_y, v_t = (\lambda + 2\mu)\theta_y + \mu\omega_x, \theta_t = u_x + v_y, \omega_t = v_x - u_y. \quad (2.118)$$

Система уравнений Ламе (2.113) равносильна системе (2.116), (2.117) [59, 4]. Из начальных условий для уравнений (2.113) нетрудно получить начальные условия для функций входящих в уравнения (2.116) и (2.117).

Имеем

$$\theta|_{t=0} = \partial_x f^1 + \partial_y f^2, \omega|_{t=0} = \partial_x f^2 - \partial_y f^1, u|_{t=0} = g^1, v|_{t=0} = g^2. \quad (2.119)$$

Постановка задачи

Найти законы сохранения для разрешающей системы уравнений, позволяющие решить для нее задачу Коши (2.119). Далее, пользуясь формулами (2.117), решить задачу Коши (2.114) для уравнений (2.113).

Законы сохранения для разрешающей системы

Рассмотрим систему уравнений (2.118) в виде

$$\begin{aligned} F_1 = u_t - (\lambda + 2\mu)\theta_x + \mu\omega_y &= 0, F_2 = v_t - (\lambda + 2\mu)\theta_y - \mu\omega_x = 0, \\ F_3 = \theta_t - u_x - v_y &= 0, F_4 = \omega_t - v_x + u_y = 0. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (2.118) назовем выражение вида

$$A_t + B_x + C_y = \sum_{i=1}^4 \rho^i F_i, \quad (2.121)$$

где ρ^i - некоторые линейные дифференциальные операторы, которые одновременно не равны тождественно нулю. Вектор (A, B, C) назовем сохраняющимся током, для закона сохранения (2.118).

Другие более общие определения законов сохранения и способы их нахождения можно найти в [5, 22] и цитируемой там литературе.

Предположим, что сохраняющийся ток имеет вид

$$\begin{aligned} A &= \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1 \theta + \delta^1 \omega, \quad B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2 \theta + \delta^2 \omega, \\ C &= \alpha^3 u + \beta^3 v + \gamma^3 \theta + \delta^3 \omega, \end{aligned} \quad (2.122)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i, \delta^i$ - гладкие функции, зависящие только от t, x, y .

Замечание. Система уравнений (2.120), в силу линейности, имеет и другие законы сохранения, но для наших целей достаточно законов сохранения с сохраняющимся током вида (2.122).

Подставим (2.122) в (2.121), получим многочлен первой степени по производным $u_t, u_x, \dots, \omega_y$ и искомым функциям u, v, θ, ω . Приравнявая к нулю коэффициенты при этих переменных, получаем

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \rho^1, \quad \alpha^2 = -\rho^2, \quad \alpha^3 = -\rho^4, \quad \beta^1 = \rho^2, \quad \beta^2 = -\rho^4, \quad \beta^3 = -\rho^3, \\ \gamma^1 &= \rho^3, \quad \gamma^2 = -(\lambda + 2\mu)\rho^1, \quad \gamma^3 = -(\lambda + 2\mu)\rho^2, \quad \delta^1 = \rho^4, \quad \delta^2 = -\mu\rho^2, \\ &\delta^3 = -\mu\rho^1, \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} \alpha_t^1 - \gamma_x^1 + \delta_y^1 &= 0, \quad \beta_t^1 - \delta_x^1 - \gamma_y^1 = 0, \quad \gamma_t^1 - (\lambda + 2\mu)\alpha_x^1 - (\lambda + 2\mu)\beta_y^1 = 0, \\ \delta_t^1 - \mu\beta_x^1 + \mu\alpha_y^1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Из (2.122) - (2.124) следует, что сохраняющийся ток имеет вид

$$\begin{aligned} A &= \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1 \theta + \delta^1 \omega, \quad B = -\gamma^1 u - \delta^1 v - (\lambda + 2\mu)\alpha^1 \theta - \mu\beta^1 \omega, \\ C &= \delta^1 u - \gamma^1 v - (\lambda + 2\mu)\beta^1 \theta + \mu\alpha^1 \omega. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Из (2.124) следует, что (γ^1, δ^1) - произвольное решение уравнений упругости (2.113).

Будем искать решение уравнений (2.113) для (γ^1, δ^1) в форме Ламе

$$\gamma^1 = \Phi_x + \Psi_y, \quad \delta^1 = \Phi_y - \Psi_x, \quad (2.126)$$

где Φ, Ψ - произвольные решения уравнений

$$(\lambda + 2\mu)(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) - \Phi_{tt} = 0, \quad (2.127)$$

$$\mu(\Psi_{xx} + \Psi_{yy}) - \Psi_{tt} = 0. \quad (2.128)$$

Сначала ищем решение уравнений (2.103) в виде

$$\gamma^1 = \Phi_x, \quad \delta^1 = \Phi_y. \quad (2.129)$$

Тогда из (2.124) следует

$$\alpha_t^1 = 0, \quad \beta_t^1 = \Phi_{tt} / (\lambda + 2\mu).$$

Далее считаем, что

$$\alpha^1 = 0, \quad \beta^1 = \Phi_t / (\lambda + 2\mu). \quad (2.130)$$

Ищем решение уравнения (2.127) в форме Кирхгофа

$$\Phi = \frac{1}{r} (G_1(t - t_0 + (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r) + G_2(t - t_0 - (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r)),$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, (t_0, x_0, y_0) - некоторая точка, такая, что $t_0 \neq 0$.

Пусть

$$G_1 = (t - t_0 + (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r)^{1+n}, G_2 = -(t - t_0 - (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r)^{1+n}, \quad (2.131)$$

где $n \in \mathbb{R}$, $n > 1$.

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma^1 = & -\frac{x - x_0}{r^3} ((t - t_0 + (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r)^{1+n} - (t - t_0 - (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r)^{1+n}) - \\ & - \frac{(1+n)(x - x_0)(\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1}}{r^2} ((t - t_0 + (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r)^n + (t - t_0 - (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r)^n), \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} \delta^1 = & -\frac{y - y_0}{r^3} ((t - t_0 + (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r)^{1+n} - (t - t_0 - (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r)^{1+n}) - \\ & - \frac{(1+n)(y - y_0)(\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1}}{r^2} ((t - t_0 + (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r)^n + (t - t_0 - (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r)^n), \end{aligned}$$

$$\beta^1 = \frac{(1+n)}{r(\lambda + 2\mu)} ((t - t_0 + (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r)^n + (t - t_0 - (\sqrt{\lambda + 2\mu})^{-1} r)^n), \quad \alpha^1 = 0.$$

Теперь будем искать решение уравнений (2.113) в виде

$$\gamma^1 = \Psi_y, \quad \delta^1 = -\Psi_x, \quad (2.133)$$

Тогда из (2.124) следует

$$\beta_t^1 = 0, \quad \alpha_t^1 = \Psi_{tt} / \mu.$$

Далее считаем, что

$$\beta^1 = 0, \quad \alpha^1 = \Psi_r / \mu. \quad (2.134)$$

Ищем решение уравнения (2.128) в форме Кирхгофа

$$\Phi = \frac{1}{r} (G_3(t-t_0 + (\sqrt{\mu})^{-1} r) + G_4(t-t_0 - (\sqrt{\mu})^{-1} r)).$$

Пусть

$$G_3 = (t-t_0 + (\sqrt{\mu})^{-1} r)^{1+m}, G_4 = -(t-t_0 - (\sqrt{\mu})^{-1} r)^{1+m}, \quad (2.135)$$

где $m \in R$.

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma^1 = & -\frac{x-x_0}{r^3} ((t-t_0 + (\sqrt{\mu})^{-1} r)^{1+m} - (t-t_0 - (\sqrt{\mu})^{-1} r)^{1+m}) - \\ & - \frac{(1+m)(x-x_0)(\sqrt{\mu})^{-1}}{r^2} ((t-t_0 + (\sqrt{\mu})^{-1} r)^m + (t-t_0 - (\sqrt{\mu})^{-1} r)^m), \\ \delta^1 = & -\frac{y-y_0}{r^3} ((t-t_0 + (\sqrt{\mu})^{-1} r)^{1+m} - (t-t_0 - (\sqrt{\mu})^{-1} r)^{1+m}) - \\ & - \frac{(1+m)(y-y_0)\sqrt{\mu}}{r^2} ((t-t_0 + \sqrt{\mu}r)^m + (t-t_0 - \sqrt{\mu}r)^m), \\ \alpha^1 = & \frac{(1+m)}{r\mu} ((t-t_0 + (\sqrt{\mu})^{-1} r)^m + (t-t_0 - (\sqrt{\mu})^{-1} r)^m), \quad \beta^1 = 0. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Решение задачи Коши для разрешающей системы уравнений

Характеристические конуса с вершиной в точке (t_0, x_0, y_0) приведены на рис. 2.2.

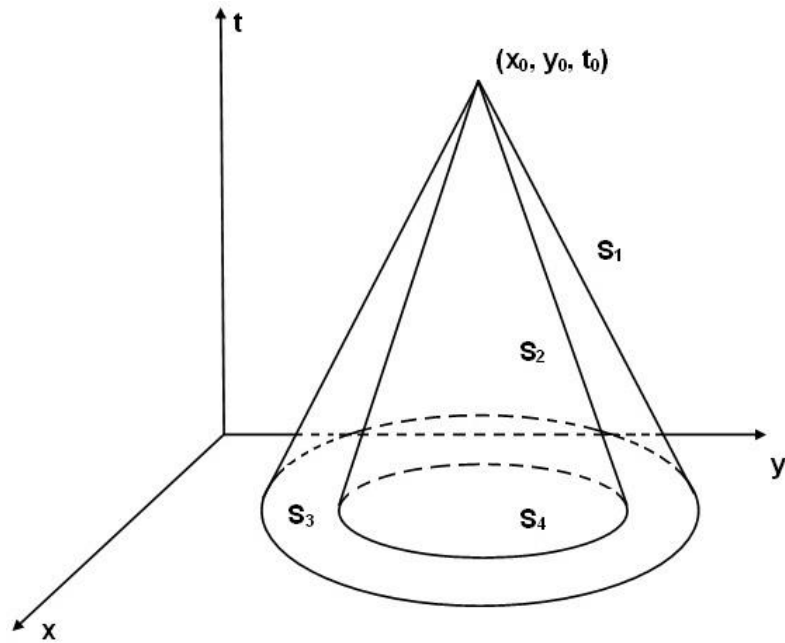


Рисунок 2.2 - Характеристические конуса с вершиной в точке (t_0, x_0, y_0)

Боковая поверхность внешнего конуса задана уравнением

$$S_1 : (\lambda + 2\mu)(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0, \quad (2.137)$$

А боковая поверхность внутреннего конуса – уравнением

$$S_2 : \mu(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0, \quad (2.138)$$

Конуса (2.137) и (2.138) пересекают плоскость $t=0$ по окружностям S_3, S_4 , внутри которых заданы начальные условия на функции u, v, θ, ω .

Рассмотрим область V_1 , ограниченную поверхностью S_1 и плоскостью $t=0$. Тогда из (2.121) получаем

$$\iiint_{V_1} (A_t + B_x + C_y) dx dy dt = 0 \quad (2.139)$$

Вырежем из внешнего конуса цилиндр T_ε радиуса ε : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ (см. рис. 2.3).

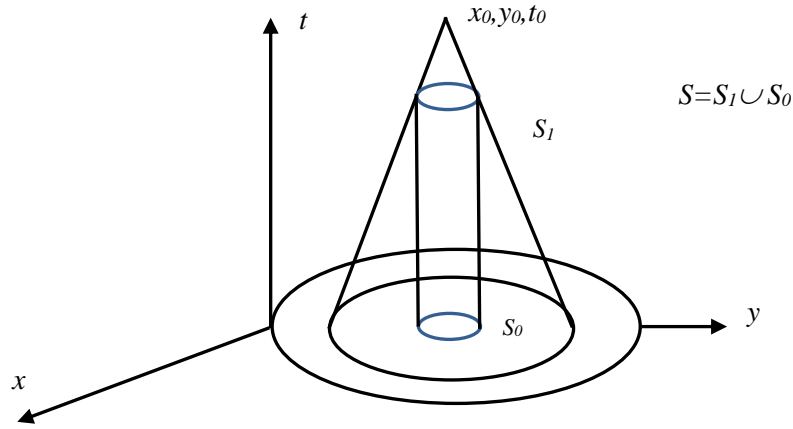


Рисунок 2.3 - Цилиндр T_ε радиуса $\varepsilon: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$

Внутри области, ограниченной поверхностью S_1 , цилиндрической поверхностью T_ε и плоскостью $t=0$, функции $\alpha^1, \beta^1, \gamma^1, \delta^1$ не имеют особенностей. Поэтому из (2.139) по формуле Гаусса – Остроградского получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{V_1 T_\varepsilon} (A_t + B_x + C_y) dx dy dt &= \iint_{S_1} A dx dy + B dy dt + C dt dx + \\ \iint_{T_\varepsilon} A dx dy + B dy dt + C dt dx &+ \iint_{S_3} A dx dy + B dy dt + C dt dx = 0. \end{aligned} \quad (2.140)$$

В силу выбора функции Φ , интеграл $\iint_{S_1} A dx dy + B dy dt + C dt dx = 0$. Нетрудно видеть, что интеграл $\iint_{S_3} A dx dy + B dy dt + C dt dx$ не имеет особенностей. Поэтому необходимо вычислить только интеграл

$$\iint_{T_\varepsilon} B dy dt + C dt dx \quad (2.141)$$

в предположении малости ε . Пусть $x - x_0 = \varepsilon \cos \phi$, $y - y_0 = \varepsilon \sin \phi$. Подставим это выражение в (2.141), имеем

$$\begin{aligned} \iint_{T_\varepsilon} B dy dt + C dt dx &= \\ &= \int_0^{t_0} \varepsilon dt \int_0^{2\pi} ((-\gamma^1 u - \delta^1 v - (\lambda + 2\mu)\alpha^1 \theta - \mu\beta^1 \omega) \cos \phi - (\delta^1 u - \gamma^1 v - (\lambda + 2\mu)\beta^1 \theta + \mu\alpha^1 \omega) \sin \phi) d\phi, \end{aligned}$$

ПОСКОЛЬКУ

$$\gamma^1 = -\frac{2\cos\varphi}{\varepsilon\sqrt{\lambda+2\mu}}(2n+1)(t-t_0)^n + o(\varepsilon), \quad \delta^1 = -\frac{2\sin\varphi}{\varepsilon\sqrt{\lambda+2\mu}}(2n+1)(t-t_0)^n + o(\varepsilon),$$

$$\alpha^1 = \frac{2}{\sqrt{\lambda+2\mu}}(n+1)(t-t_0)^n + o(\varepsilon), \quad \beta^1 = 0.$$

Получаем

$$\iint_{T_\varepsilon} Bdydt + Cdt dx = -(\lambda+2\mu) \int_0^{t_0} \left(\int_0^{2\pi} \theta(\alpha^1 \cos\varphi + \beta^1 \sin\varphi) d\varphi \right. \\ \left. - \mu \int_0^{2\pi} \omega(\beta^1 \cos\varphi - \alpha^1 \sin\varphi) d\varphi \right) dt = \\ = 2\pi\sqrt{\lambda+2\mu}(2n+1) \int_0^{t_0} (t-t_0)^n \theta(x_0, y_0, t) dt.$$

Последнее выражение получено предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Окончательно из (2.140) и (2.141) получаем

$$2\pi\sqrt{\lambda+2\mu}(2n+1) \int_0^{t_0} (t-t_0)^n \theta(x_0, y_0, t) dt = \iint_{S_3} A dx dy.$$

Дифференцируя последнее выражение по t_0 , получаем

$$\theta(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{2\pi(n+1)\sqrt{\lambda+2\mu}} \frac{\partial}{\partial t_0} \iint_{S_3} A dx dy.$$

где $A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1 \theta + \delta^1 \omega$,

$$\gamma^1 = -\frac{x-x_0}{r^3} \left(\left(\frac{r}{\sqrt{\lambda+2\mu}} - t_0 \right)^{1+n} - \left(-t_0 - \frac{r}{\sqrt{\lambda+2\mu}} \right)^{1+n} \right) - \\ - \frac{(x-x_0)(1+n)}{r^2\sqrt{\lambda+2\mu}} \left(\left(\frac{r}{\sqrt{\lambda+2\mu}} - t_0 \right)^n + \left(-t_0 - \frac{r}{\sqrt{\lambda+2\mu}} \right)^n \right), \quad (2.142)$$

$$\delta^1 = -\frac{y-y_0}{r^3} \left(\left(\frac{r}{\sqrt{\lambda+2\mu}} - t_0 \right)^{1+n} - \left(-t_0 - \frac{r}{\sqrt{\lambda+2\mu}} \right)^{1+n} \right) - \\ - \frac{(y-y_0)(1+n)}{r^2\sqrt{\lambda+2\mu}} \left(\left(\frac{r}{\sqrt{\lambda+2\mu}} - t_0 \right)^n + \left(-t_0 - \frac{r}{\sqrt{\lambda+2\mu}} \right)^n \right),$$

$$\beta^1 = \frac{(1+n)}{r(\gamma+2\mu)} \left(\left(\frac{r}{\sqrt{\lambda+2\mu}} - t_0 \right)^n - \left(-t_0 - \frac{r}{\sqrt{\lambda+2\mu}} \right)^n \right), \quad \alpha^1 = 0.$$

Теперь тоже самое сделаем для внутреннего конуса, но для решений (2.130), (2.133). Получаем

$$\omega(x_0, y_0, t_0) = \frac{1}{2\pi(n+1)\sqrt{\mu}} \frac{\partial}{\partial t_0} \iint_{S_3} A dx dy.$$

$$\text{Где } A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1 \theta + \delta^1 \omega,$$

$$\alpha^1 = -\frac{y-y_0}{r^3} \left(\left(\frac{r}{\sqrt{\mu}} - t_0 \right)^{1+m} - \left(-t_0 - \frac{r}{\sqrt{\mu}} \right)^{1+m} \right) -$$

$$-\frac{(y-y_0)(1+m)}{r^2 \sqrt{\mu}} \left(\left(\frac{r}{\sqrt{\mu}} - t_0 \right)^m + \left(-t_0 - \frac{r}{\sqrt{\mu}} \right)^m \right),$$

$$\beta^1 = -\frac{x-x_0}{r^3} \left(\left(\frac{r}{\sqrt{\mu}} - t_0 \right)^{1+m} - \left(-t_0 - \frac{r}{\sqrt{\mu}} \right)^{1+m} \right) -$$

$$-\frac{(y-y_0)(1+m)}{r^2 \sqrt{\mu}} \left(\left(\frac{r}{\sqrt{\mu}} - t_0 \right)^m + \left(-t_0 - \frac{r}{\sqrt{\mu}} \right)^m \right),$$

$$\gamma^1 = \frac{(1+m)}{r} \left(\left(\frac{r}{\sqrt{\mu}} - t_0 \right)^m - \left(-t_0 - \frac{r}{\sqrt{\mu}} \right)^m \right), \quad \delta^1 = 0.$$

Теперь из формул (2.118) с учетом (2.141) - (2.142) и учетом начальных условий (2.114),

$$u_t = (\lambda + 2\mu)\theta_x - \mu\omega_y, \quad v_t = (\lambda + 2\mu)\theta_y + \mu\omega_x,$$

получаем

$$w_t^1 = u = \int_0^t ((\gamma + 2\mu)\theta_x - \mu\omega_y) dt + g^1(x, y), \quad w_t^2 = v = \int_0^t ((\gamma + 2\mu)\theta_y + \mu\omega_x) dt + g^2(x, y).$$

Учитывая (2.117) и начальные условия (2.114), окончательно получаем

$$w^1 = \int_0^t u dt = \int_0^t \left(\int_0^t ((\gamma + 2\mu)\theta_x - \mu\omega_y) dt \right) dt + g^1(x, y)t + f^1(x, y),$$

$$w^2 = \int_0^t v dt = \int_0^t \left(\int_0^t ((\lambda + 2\mu)\theta_y + \mu\omega_x) dt \right) dt + g^2(x, y)t + f^2(x, y).$$

Формулы (2.143) дают решение задачи Коши для системы уравнений (2.113).

Замечание. Методика решения задачи Коши, изложенная в данном параграфе, с некоторыми изменениями может быть использована для решений трехмерных динамических уравнений упругости.

2.6 Кручение параллелепипеда вокруг трех осей

Теория предельного состояния имеет дело со статически определенным состоянием твердых тел. В этом случае система замкнута за счет предельных условий и такие свойства материи как вязкость, упругость и т.п. на предельное состояние влиять не могут. Другими словами, при достижении предельного состояния характер связи между напряжениями и деформациями не оказывает влияния на предельное состояние. Исследование таких систем последовательно проводил Д.Д. Ивлева и его соавторы. К уравнениям равновесия они присоединяли два или уравнения, связывающие компоненты тензора напряжений. Это приводило к замкнутости системы уравнений равновесия. В теории пластичности хорошо изучены уравнения, которые замыкаются одним пределом текучести. К наиболее известным системам, описывающим предельное состояние деформируемых тел, относятся хорошо исследованные уравнения, описывающие кручение пластических тел, двумерные задачи стационарной теории пластичности. В данном параграфе рассмотрены некоторые другие системы уравнений, которые замыкаются только одним уравнением текучести, что соответствует классической теории пластичности. Предполагается, что компоненты вектора скоростей зависят только от двух пространственных координат. При этом для компонент вектора скорости деформаций выполняются тождественно условия совместности деформаций. Построенные системы могут быть использованы для описания кручения параллелепипеда вокруг трех ортогональных осей. Для построенной системы уравнений найдены точечные группы симметрий, законы сохранения. Показано, что система допускает восьмимерную алгебру Ли. На основе группы симметрий построены некоторые классы инвариантных решения ранга 1. Они зависят от произвольных функций одной переменной. Показано, что эти решения можно использовать для описания пластического кручения параллелепипеда вокруг трех ортогональных осей. Показано, что система допускает

бесконечную серию законов сохранения. В заключительном пункте описано построение упругого решения поставленной задачи. Показано, что оно сводится к нахождению трех гармонических функций.

Вводные сведения

Некоторые задачи механики деформируемого твердого тела исследованы достаточно хорошо. Это так называемые статически определимые задачи. К ним относятся задачи о кручении призматических стержней и задачи о плоском деформированном состоянии. Они относятся к широкому классу задач – задачам о предельном состоянии деформируемых тел. Теория предельного состояния – один из фундаментальных разделов механики деформируемого твердого тела [35]. Теория предельного состояния имеет дело со статически определимым состоянием твердых тел. В этом случае система замкнута за счет предельных условий и такие свойства материи как вязкость, упругость и т.п. на предельное состояние влиять не могут. Другими словами, при достижении предельного состояния характер связи между напряжениями и деформациями не оказывает влияния на предельное состояние. Некоторые такие системы рассмотрены в [33 – 35, 37].

В первой части рассмотрим одну система уравнений пластичности, которая описывает предельное состояние. Эта система может быть использована для описания пластического течения вокруг трех ортогональных осей.

Постановка задачи

Пусть $x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$ – ортогональная система координат, u , v , w – компоненты вектора скорости деформаций, e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\partial_i \sigma_{ij} = 0. \quad (2.144)$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Девiator тензора напряжений и тензор скоростей деформации соосны

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij} p = \lambda e_{ij} \quad (2.145)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, λ – некоторая неотрицательная функция, $3p = \sigma_{ii}$.

Система уравнений (2.144) – (2.145) замыкается условием пластичности Мизеса

$$(\sigma_{11} - p)^2 + (\sigma_{22} - p)^2 + (\sigma_{33} - p)^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 2k_s^2 \quad (2.146)$$

Известно ([35]), что в случае кручения призматического стержня вокруг оси oz поле скоростей деформации имеет вид

$$u = -yz, v = xz, w = w(x, y) \quad (2.147)$$

Обобщая соотношения (2.134), потребуем

$$u = u(y, z), v = v(x, z), w = w(x, y) \quad (2.148)$$

Построим систему уравнений, соответствующую полю скоростей деформации. В результате получаем следующую систему, которая и будет исследоваться в этой работе

$$\begin{aligned} \partial_y \tau^1 + \partial_z \tau^2 = \partial_x p, \quad \partial_x \tau^1 + \partial_z \tau^3 = \partial_y p, \quad \partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = \partial_z p, \\ (\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 + (\tau^3)^2 = k_s^2. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Система уравнений (2.147) может быть использована, в частности, для описания кручения прямоугольного параллелограмма, находящегося в пластическом состоянии, вокруг трех осей (см. рис. 2.4).

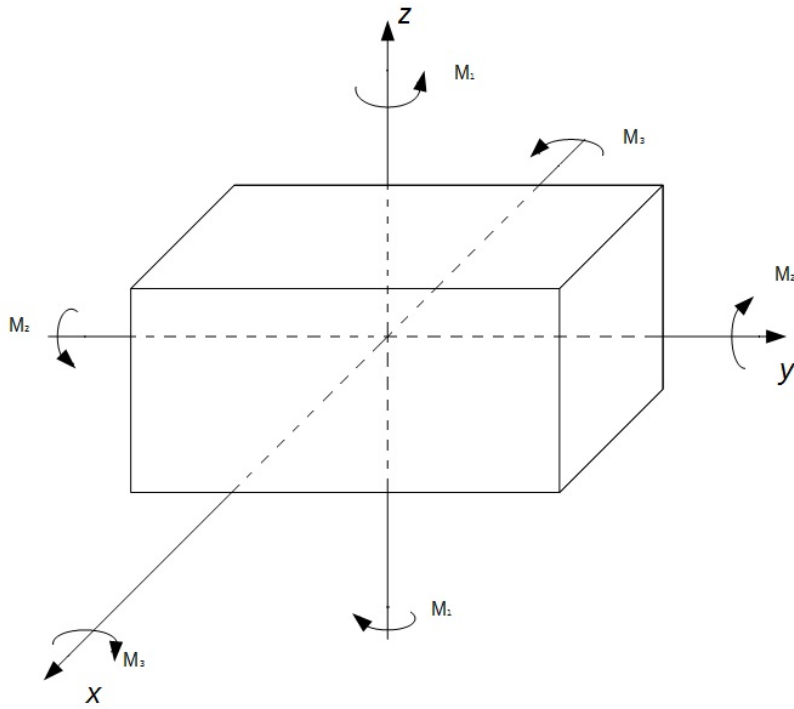


Рисунок 2.4 – Кручение прямоугольного параллелепипеда вокруг трех осей

Предположим, что параллелепипед закручивается вокруг осей ox , oy , oz равными и противоположными парами сил с моментами M_1, M_2, M_3 . При этом существуют некоторые предельные моменты M_1^*, M_2^*, M_3^* , когда параллелепипед перейдет в пластическое состояние и начнет закручиваться. Из системы (2.147) видно, что такая задача является статически определимой и может служить для определения значения предельных моментов по формулам

$$\begin{aligned}
 M_1^* &= \iint (y\tau^2 - z\tau^1) dydz, \\
 M_2^* &= \iint (z\tau^1 - x\tau^3) dx dz, \\
 M_3^* &= \iint (x\tau^3 - y\tau^2) dy dz.
 \end{aligned}
 \tag{2.150}$$

Кроме моментов (2.150) на тело еще действует гидростатическое давление

$$P|_{\Sigma} = P_0,$$

Σ - боковая поверхность параллелепипеда.

Изучим некоторые свойства системы (2.149).

Характеристические поверхности системы (2.149)

Система (2.149) содержит конечное соотношение, связывающее величины τ^1, τ^2, τ^3 . Дифференцируем его по x, y, z , и в результате получаем систему

$$\begin{aligned}\partial_y \tau^1 + \partial_z \tau^2 &= \partial_x p, \quad \partial_x \tau^1 + \partial_z \tau^3 = \partial_y p, \quad \partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = \partial_z p, \\ \tau^1 \partial_x \tau^1 + \tau^2 \partial_x \tau^2 + \tau^3 \partial_x \tau^3 &= 0, \\ \tau^1 \partial_y \tau^1 + \tau^2 \partial_y \tau^2 + \tau^3 \partial_y \tau^3 &= 0, \\ \tau^1 \partial_z \tau^1 + \tau^2 \partial_z \tau^2 + \tau^3 \partial_z \tau^3 &= 0.\end{aligned}\tag{2.151}$$

Уравнение характеристической поверхности системы уравнений (2.151) представим в виде

$$\psi = \psi(x, y, z)\tag{2.152}$$

Характеристические поверхности системы (2.151) находятся из определителя

$$\begin{vmatrix} \partial_x \psi & \partial_y \psi & \partial_z \psi & 0 \\ \partial_y \psi & \partial_x \psi & 0 & \partial_z \psi \\ \partial_z \psi & 0 & \partial_x \psi & \partial_y \psi \\ 0 & \tau^1 & \tau^2 & \tau^3 \end{vmatrix} = 0\tag{2.153}$$

Замечание. Нетрудно видеть, что все три последних уравнения системы (2.151) дают одинаковые строки в определителе (2.153).

Раскрываем определитель (2.153) по последней строке, получаем

Это уравнение можно записать в виде

$$\tau^1 n_3 (2n_3^2 - 1) + \tau^2 n_2 (2n_2^2 - 1) + \tau^3 n_1 (2n_1^2 - 1) = 0,\tag{2.154}$$

где $n_1 = \frac{\partial_x \psi}{\sqrt{(\nabla \psi)^2}}, n_2 = \frac{\partial_y \psi}{\sqrt{(\nabla \psi)^2}}, n_3 = \frac{\partial_z \psi}{\sqrt{(\nabla \psi)^2}}.$

Одно из решений уравнения (2.154), которое не зависит от величин τ^1, τ^2, τ^3 , таково

$$2n_i^2 = 1 \quad i = 1, 2, 3$$

Следовательно, угол между нормалью к характеристической поверхности $\psi(x, y, z) = 0$ и вектором n равен $\pm \pi/4$. Совокупность элементов

характеристической поверхности образуют конус раствора $\pm \pi/4$ вокруг направления, которое определяется третьим корнем уравнения (2.154) и зависит от напряженного состояния.

Точечные симметрии системы уравнений (2.149)

Точечные симметрии широко применяются при исследовании дифференциальных уравнений. Необходимые сведения о симметриях и их примени для уравнений пластичности и упруго – пластичности можно найти в [62, 155, 183, 178, 188]

Поскольку система (2.149) содержит конечное соотношение, то необходимо работать с ее следствием, которое имеет вид (2.152), где для удобства введены обозначения $\partial_x \tau^1 = q_1^1$, $\partial_x \tau^2 = q_1^2$, $\partial_x \tau^3 = q_1^3$, $\partial_x p = q_1^4$ и т.д.

$$\begin{aligned} q_2^1 + q_3^2 &= q_1^4, \quad q_1^1 + q_3^3 = q_2^4, \quad q_1^2 + q_2^3 = q_3^4, \\ \tau^1 q_1^1 + \tau^2 q_1^2 + \tau^3 q_1^3 &= 0, \\ \tau^1 q_2^1 + \tau^2 q_2^2 + \tau^3 q_2^3 &= 0, \\ \tau^1 q_3^1 + \tau^2 q_3^2 + \tau^3 q_3^3 &= 0, \\ (\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 + (\tau^3)^2 &= k_s^2. \end{aligned} \tag{2.155}$$

Будем искать точечные симметрии, относительно которых инвариантно многообразие, определяемое системой уравнений (2.155).

Согласно методике Ли - Овсянникова будем искать допустимый оператор точечной симметрии в виде

$$X = \xi^j \frac{\partial}{\partial x_j} + \eta^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}, \quad j=1,2,3; \quad i=1,2,3,4, \tag{2.156}$$

Продолжаем оператор (2.156) на первые производные по формулам

$$\tilde{X} = X + \zeta_k^i \frac{\partial}{\partial q_k^i}, \tag{2.157}$$

где $\zeta_k^i = (\eta^i) - q_\beta^i D_k(\zeta^\beta)$, $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + q_k^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}$.

Действуем оператором (2.157) на систему уравнений (2.156) и переходим на многообразие, задаваемое этой системой. В результате получаем многочлены второй степени относительно «внутренних» –

эндогенных переменных q_k^2, q_k^3 . «Внешние» – экзогенные переменные q_k^1, q_k^4 определяются из системы (2.155) через эндогенные переменные. В полученных многочленах второй степени приравниваем нулю коэффициенты при первых и вторых степенях эндогенных переменных. Это позволяет получить переопределенную систему линейных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов ξ^j, η^i . Решая эту систему, получаем следующий результат

Теорема. Система уравнений (2.149) допускает алгебру Ли L_8 , порождаемую операторами

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, X_4 = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, X_5 = \frac{\partial}{\partial p}, X_{12} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau^1} - \tau^1 \frac{\partial}{\partial \tau^2},$$

$$X_{13} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \tau^1 \frac{\partial}{\partial \tau^3} - \tau^3 \frac{\partial}{\partial \tau^1}, X_{23} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \tau^3 \frac{\partial}{\partial \tau^2} - \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau^3}.$$

Наличие операторов $X_j, j=1,2,3,4$ означает, что система (2.149) допускает сдвиги и растяжение по осям x, y, z : $x'_i = x_i + a_i, i=1,2,3, x'_i = x_i \exp a_i$, сдвиг для гидростатического давления $p' = p + a_5$, а также вращение вокруг трех координатных осей.

Инвариантные решения системы уравнений (2.149)

Построим инвариантное решение относительно подалгебры, порождаемой оператором $X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$.

Такое решение следует искать в виде

$$\tau^i = \tau^i(x, y), p = p(x, y) \quad (2.158)$$

Подставляем (2.157) в систему (2.149), получаем

$$\partial_y \tau^1 = \partial_x p, \partial_x \tau^1 = \partial_y p, \partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = 0,$$

$$(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 + (\tau^3)^2 = k_s^2. \quad (2.159)$$

Из (2.159) без труда получаем

$$\tau^1 = f(x+y) + g(x-y), p = f(x+y) - g(x-y), \partial_y \tau^1 + \partial_z \tau^2 = \partial_x p. \quad (2.160)$$

Теперь функции τ^2, τ^3 определяются из системы уравнений

$$\partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = 0, \quad (\tau^2)^2 + (\tau^3)^2 = k_s^2 - (\tau^1)^2 \quad (2.161)$$

Система уравнений (2.161) описывает кручение стержня в условиях, когда предел текучести зависит от переменных x, y . Такие задачи рассмотрены в [62] и цитируемой там литературе.

Построим инвариантное решение относительно подалгебры, порождаемой оператором X_{12} . Этот оператор в цилиндрической системе координат $r\theta z$ имеет вид $X_{12} = \frac{\partial}{\partial \theta}$. В этом случае система (2.137) запишется так

$$\begin{aligned} \partial_\theta \tau_{r\theta} + \partial_z \tau_{rz} &= r \partial_r p, \quad r \partial_r \tau_{r\theta} + r \partial_z \tau_{\theta z} + 2\tau_{r\theta} = \partial_\theta p, \\ r \partial_r \tau_{rz} + \partial_\theta \tau_{\theta z} + \tau_{rz} &= \partial_z p, \\ \tau_{r\theta}^2 + \tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2 &= k_s^2. \end{aligned} \quad (2.162)$$

Инвариантное решение в этом случае определяется из следующей системы

$$\begin{aligned} \partial_z \tau_{rz} &= r \partial_r p, \quad r \partial_r \tau_{r\theta} + r \partial_z \tau_{\theta z} + 2\tau_{r\theta} = 0, \\ r \partial_r \tau_{rz} + \tau_{rz} &= \partial_z p, \\ \tau_{r\theta}^2 + \tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2 &= k_s^2. \end{aligned} \quad (2.163)$$

В этом случае τ_{rz} определяется из линейного дифференциального уравнения

$$r \partial_r \tau_{rz} + r^2 \partial_r^2 \tau_{rz} - \tau_{rz} + r^2 \partial_z^2 \tau_{rz} = 0$$

Остальные функции определяются из системы (2.163).

Законы сохранения системы уравнений (2.149)

Будем искать законы сохранения системы уравнений (2.149) в виде

$$\partial_x A(\tau^1, \tau^2, \tau^3, p) + \partial_y B(\tau^1, \tau^2, \tau^3, p) + \partial_z C(\tau^1, \tau^2, \tau^3, p) = 0.$$

Это равенство выполняется в силу системы уравнений (2.149). Из этого следуют соотношения

$$\begin{aligned} X_{12}A - \tau^2 \partial_p B + \tau^1 \partial_p C &= 0, \\ X_{13}B - \tau^3 \partial_p A + \tau^1 \partial_p C &= 0, \quad X_{12}B - \tau^2 \partial_p A = 0, \quad X_{12}C - \tau^1 \partial_p A = 0, \\ X_{13}C + \tau^1 \partial_p B &= 0, \quad X_{13}A - \tau^3 \partial_p B = 0, \end{aligned}$$

где $X_{12} = -\tau^2 \partial_{\tau^1} + \tau^1 \partial_{\tau^2}$, $X_{13} = -\tau^3 \partial_{\tau^1} + \tau^1 \partial_{\tau^3}$.

Покажем, что эти уравнения совместны. Пусть $\partial_p A = \partial_p B = \partial_p C = 0$, тогда одно из решений – бесконечная серия

$$A(S), B(S), C(S),$$

где $S = (\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 + (\tau^3)^2$, $A(S), B(S), C(S)$ – произвольные гладкие функции.

Замечание. Есть ли другие законы? Неизвестно, но, по нашему мнению, других законов сохранения нет.

Понятно, что для системы (2.149) наиболее актуально напряженное состояние. Пусть оно известно. Тогда для нахождения трех компонент вектора скорости имеем три уравнения

$$\tau^1 = \lambda e_{12}, \quad \tau^2 = \lambda e_{13}, \quad \tau^3 = \lambda e_{23}, \quad (2.164)$$

где

$$2e_{12} = \partial_y u + \partial_x v, \quad 2e_{13} = \partial_z u + \partial_x w, \quad 2e_{23} = \partial_z v + \partial_y w. \quad (2.165)$$

Покажем, что уравнения (2.164) можно решить в терминах компонент тензора скоростей деформации. Как известно, компоненты тензора скоростей деформации, кроме уравнений (2.164), должны удовлетворять еще и уравнениям совместности. В силу соотношений (2.165) и (2.148), их остается только шесть

$$\begin{aligned} \partial_{xy}^2 e_{12} &= 0, \quad \partial_{xz}^2 e_{13} = 0, \quad \partial_{yz}^2 e_{23} = 0, \\ \partial_x (\partial_x e_{23} - \partial_z e_{12} - \partial_y e_{13}) &= 0, \\ \partial_y (\partial_y e_{13} - \partial_z e_{12} - \partial_x e_{23}) &= 0, \\ \partial_z (\partial_z e_{12} - \partial_y e_{13} - \partial_x e_{23}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.166)$$

Теорема. Уравнения совместности скоростей деформации выполняются тождественно.

В этом случае из (2.166) имеем

$$\begin{aligned} (\tau^1)^2 (e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) &= k_s^2 e_{12}^2, \\ (\tau^2)^2 (e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) &= k_s^2 e_{23}^2, \\ (\tau^3)^2 (e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) &= k_s^2 e_{13}^2. \end{aligned} \quad (2.167)$$

Система уравнений (2.167) – это система линейных однородных уравнений относительно переменных $e_{12}^2, e_{13}^2, e_{23}^2$. Ее определитель

$$\begin{vmatrix} (\tau^1)^2 - k_s^2 & (\tau^1)^2 & (\tau^1)^2 \\ (\tau^2)^2 & (\tau^2)^2 - k_s^2 & (\tau^2)^2 \\ (\tau^3)^2 & (\tau^3)^2 & (\tau^3)^2 - k_s^2 \end{vmatrix}$$

Этот определитель равен нулю, поскольку сумма всех строк равна нулю. Это означает, что система (2.167) имеет только два независимых уравнения для трех компонент тензора скоростей деформации. Например, величина e_{23}^2 может быть выбрана произвольно, поэтому для данного напряженного состояния, определяемого из системы (2.149), поле скоростей определяется с функциональным произволом.

В этой части рассмотрим трехмерные уравнения упругости в статическом случае. Система уравнений равновесия описывается уравнениями (2.142), связь между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}))}{E}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33}))}{E}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11}))}{E}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{2\mu}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2\mu}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu}, \end{aligned} \quad (2.168)$$

где ε_{ij} - компоненты тензора деформаций, E, μ, ν - упругие постоянные.

Пусть компоненты вектора деформаций имеют вид

$$w_1 = w_1(y, z), \quad w_2 = w_2(x, z), \quad w_3 = w_3(x, z). \quad (2.169)$$

Подставляя (2.157) в (2.156), получаем

$$\partial_y w_1 + \partial_x w_2 = \frac{\sigma_{12}}{2\mu}, \quad \partial_z w_1 + \partial_x w_3 = \frac{\sigma_{13}}{2\mu}, \quad \partial_z w_2 + \partial_y w_3 = \frac{\sigma_{23}}{2\mu}. \quad (2.170)$$

В этом случае уравнения (2.142) с учетом (2.169) - (2.170) принимают вид

$$\partial_{yy} w_1 + \partial_{zz} w_1 = 0, \quad \partial_{xx} w_2 + \partial_{zz} w_2 = 0, \quad \partial_{xx} w_2 + \partial_{yy} w_3 = 0. \quad (2.171)$$

Показано, что компоненты вектора деформации являются гармоническими функциями. Решения, полученные здесь, можно

использовать для описания упругого состояния параллелепипеда, скручиваемого вокруг трех ортогональных осей. Причем моменты определяются из формул (2.148). Поскольку $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$, то дилатация (изменение объема) равна нулю. Решение (2.170) описывает вихревое перемещение, которое характеризуется вектором $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

При этом траектории движения будут вихревыми линиями, которые определяются из уравнения

$$\frac{dx}{w_1} = \frac{dy}{w_2} = \frac{dz}{w_3}.$$

Таким образом, в этом параграфе впервые рассмотрена система, которая может быть использована для анализа напряженного состояния, возникающего при кручении параллелепипеда вокруг трех ортогональных осей. При этом он может находиться как в пластическом, так и в упругом состоянии.

2.7 Использование законов сохранения для решения краевых задач системы Моисила–Теодореску

Система Моисила–Теодореску является трехмерным аналогом системы уравнений Коши – Римана и связана с пространственными статическими уравнениями Ламе. Исследованию этих уравнений посвящено много работ, в которых получены аналоги многих результатов, известных для уравнений Коши-Римана. Решения системы Моисила–Теодореску сохраняют многие свойства аналитических функций комплексного переменного. В работе построены некоторые точные решения этой системы и приведена бесконечная серия новых законов сохранения для уравнений системы Моисила–Теодореску. Эти законы линейны по производным. Построенные

законы использованы для решения краевых задач системы Моисила–Теодореску.

Вводные сведения

Система Моисила–Теодореску (СМТ) [151, 10, 24] является трехмерным аналогом системы Коши–Римана и связана с пространственными статическими уравнениями Ламе [151, 24]. Решения СМТ сохраняют многие свойства аналитических функций комплексного переменного. Изучение систем уравнений теории упругости с помощью симметрий и законов сохранения является по-прежнему перспективным способом исследования (см. [5, 59, 160] и цитируемую там литературу). Построение точных решений СМТ с помощью методов группового анализа начато учеником Б.Д. Аннина - Ю.М. Григорьевым [24]. Симметрии позволяли строить новые классы точных решений, а законы сохранения – решать краевые задачи. Законы сохранения для дифференциальных уравнений известны более 100 лет и были введены Э.Нетер. Она связала их с точечными симметриями, и ее методика позволяла строить законы сохранения только для дифференциальных уравнений, выводимых из вариационных принципов. Законы сохранения использовались «как для теоретического анализа свойств решений уравнений (априорные оценки, теоремы существования и единственности и т.п.), так и для получения физических величин, сохраняющихся с течением времени» [59]. Позднее была развита методика построения законов сохранения для любых систем дифференциальных уравнений [18]. На основе этого впервые были построены законы сохранения, позволяющие решать краевые задачи для двумерных уравнений пластичности. [116, 112]. Дальнейшая работа (см. предыдущие параграфы) показала, что законы сохранения могут быть эффективно использованы для решения двумерных упруго-пластических задач [40, 141, 171]. Результаты, полученные в этом параграфе, показывают, что законы сохранения можно эффективно использовать и для решения краевых задач для трехмерных уравнений. Построена бесконечная серия законов сохранения для уравнений

СМТ и с их помощью решены краевые задачи для уравнений. Решения построены в виде квадратур по граничной поверхности.

Система Моисила-Теодореску имеет вид

$$\begin{aligned} F_1 = \partial_x p + \partial_y w - \partial_z v = 0, \quad F_2 = \partial_y p + \partial_x w - \partial_z u = 0, \\ F_3 = \partial_z p + \partial_x v - \partial_y u = 0, \quad F_4 = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \end{aligned} \quad (2.172)$$

где p, u, v, w - есть искомые функции от x, y, z .

В операторном виде система уравнений (2.172) запишется так

$$L \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_y & \partial_z & 0 & -\partial_x \\ \partial_z & -\partial_y & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0 \quad (2.173)$$

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (2.172) назовем выражение вида

$$\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = \omega_i F_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.174)$$

где A, B, C, ω_i - функции от x, y, z, p, u, v, w ; предполагается, что функции ω_i не равны одновременно тождественно нулю. Функции A, B, C называются сохраняющимся током. При выполнении этих условий, закон сохранения (2.174) будет нетривиальным.

Постановка задачи

Пусть для уравнений (2.172) поставлена следующая краевая задача

$$p|_S = p_0(x, y, z), \quad u|_S = u_0(x, y, z), \quad v|_S = v_0(x, y, z), \quad w|_S = w_0(x, y, z), \quad (2.175)$$

где S - кусочно гладкая поверхность, ограничивающая область V . Предполагается, что S ориентирована с помощью внешней нормали к V . Требуется решить систему уравнений (2.172) с краевыми условиями (2.175). При этом функции p, u, v, w и их частные производные первого порядка непрерывны на $S \cup V$.

Для решения задачи (2.172), (2.175) будут построены законы сохранения специального вида, которые позволят найти решение задачи (2.172), (2.175) в квадратурах.

Имеет место следующая лемма, которая потребуется в дальнейшем

Лемма. Решениями системы Моисила – Теодереску являются следующие функции

$$\begin{aligned} g_1 &= (0, x/r^3, y/r^3, z/r^3), \quad g_2 = (x/r^3, 0, -z/r^3, y/r^3), \\ g_3 &= (y/r^3, z/r^3, 0, -x/r^3), \quad g_4 = (z/r^3, -y/r^3, x/r^3, 0), \end{aligned} \quad (2.176)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Доказательство леммы осуществляется простой проверкой. Другие решения СМТ можно найти в [24].

Замечание. Поскольку СМТ инвариантна относительно операций трансляции $x' = x + x_0, y' = y + y_0, z' = z + z_0$, где x_0, y_0, z_0 - произвольные постоянные, то решениями СМТ являются также функции

$$\begin{aligned} g_1^0 &= (0, (x-x_0)/r_0^3, (y-y_0)/r_0^3, (z-z_0)/r_0^3), \\ g_2^0 &= ((x-x_0)/r_0^3, 0, -(z-z_0)/r_0^3, (y-y_0)/r_0^3), \\ g_3^0 &= ((y-y_0)/r_0^3, (z-z_0)/r_0^3, 0, -(x-x_0)/r_0^3), \\ g_4^0 &= ((z-z_0)/r_0^3, -(y-y_0)/r_0^3, (x-x_0)/r_0^3, 0), \end{aligned} \quad (2.177)$$

где $r_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

Законы сохранения для уравнений СМТ

Известно [40], что законы сохранения для линейных систем уравнения можно искать в виде

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) L \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} - (p, u, v, w) L^* \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \partial_x A + \partial_y B + \partial_z C, \quad (2.178)$$

где L^* - матрица операторов, сопряженная L .

Несложные вычисления показывают, что

$$A = (\alpha p - \beta w + \gamma v + \delta u), \quad B = (\alpha w + \beta p - \gamma u + \delta v), \quad C = (-\alpha v + \beta u + \gamma p + \delta w). \quad (2.179)$$

Проверим, что сохраняющийся ток (2.179) соответствует нетривиальному закону сохранения вида (2.184), предполагая, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - есть функции только от x, y, z . Подставляя (2.178) в (2.174), имеем $\alpha = \omega_4, \beta = \omega_3, \gamma = \omega_1, \delta = \omega_2$, а $(\beta, \gamma, \delta, \alpha)$ - есть решение СМТ. Если решение СМТ

$(\beta, \gamma, \delta, \alpha)$ не нулевое, то и сохраняющийся ток (2.167) соответствует нетривиальному закону сохранения.

Замечание. Тем самым показано, что СМТ допускает бесконечную серию законов сохранения. Можно найти и другие законы сохранения, но в данном параграфе они нам не потребуются.

Решение краевых задач (2.175) с помощью законов сохранения

Из (2.176), используя формулу Гаусса-Остроградского, получаем

$$\begin{aligned} \iiint_V (\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C) dV &= \\ &= \iint_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS = \iint_{\Omega} \left(A \frac{D(y, z)}{D(\lambda, \mu)} + B \frac{D(z, x)}{D(\lambda, \mu)} + C \frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} \right) d\lambda d\mu = 0. \end{aligned} \quad (2.180)$$

где n_1, n_2, n_3 - компоненты вектора внешней нормали к поверхности S , которая задана параметрически, с координатами, определяемыми функциями

$$x = \varphi(\lambda, \mu), \quad y = \psi(\lambda, \mu), \quad z = \chi(\lambda, \mu), \quad (\lambda, \mu) \in \Omega \quad (2.181)$$

непрерывно дифференцируемыми в некоторой области параметров (λ, μ) .

При этом предполагаем также, что не все якобианы, в правой части формулы (2.180) одновременно обращаются в нуль.

Пусть начало координат находится внутри области V . Опишем вокруг начала координат сферу радиуса ε : $x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$. Соединим поверхность сферы с поверхностью S плоскостью P . (см. рис. 2.5)

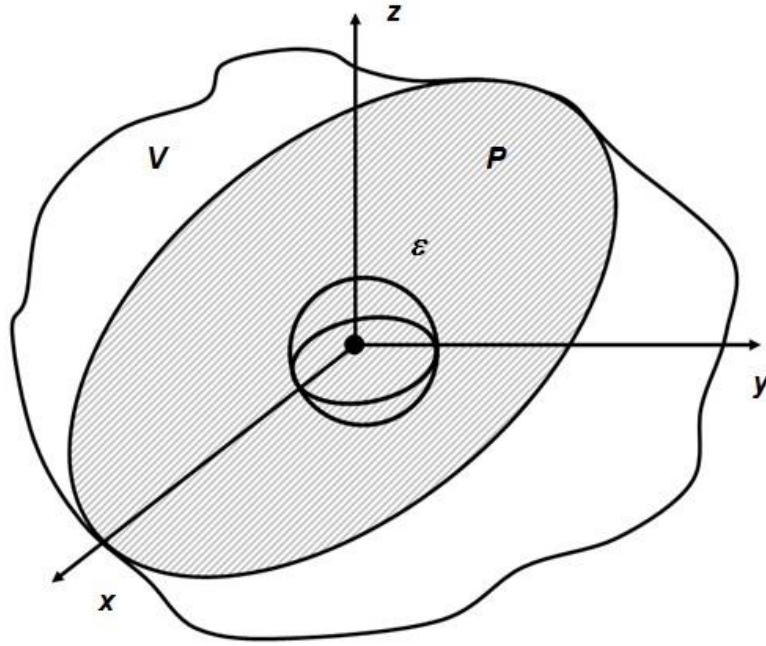


Рисунок 2.5 – Сфера радиуса ε

Из формулы (2.170) получаем, в предположении, что компоненты сохраняющегося тока имеют особенность в начале координат

$$\begin{aligned} \iint_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS + \iint_{\varepsilon} (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS + \iint_{P^+} (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS + \\ + \iint_{P^-} (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS = 0. \end{aligned} \quad (2.182)$$

Поскольку интегралы по P^+ и P^- вычисляются по разным сторонам плоскости P , то их сумма равна нулю. В результате имеем

$$\iint_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS + \iint_{\varepsilon} (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS = 0 \quad (2.183)$$

Рассмотрим решение СМТ в виде g_1 из (2.176).

$$\beta = 0, \gamma = x/r^3, \delta = y/r^3, \alpha = z/r^3.$$

Подставив его в (2.179), вычислим интеграл по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$, имеем

$$\iint_{\varepsilon} (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS = \iint_{\varepsilon} \left(A \frac{D(y, z)}{D(\theta, \varphi)} + B \frac{D(z, x)}{D(\theta, \varphi)} + C \frac{D(x, y)}{D(\theta, \varphi)} \right) d\theta d\varphi. \quad (2.184)$$

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi,$$

здесь введены сферические координаты $z = r \sin \theta$, $0 < \phi < 2\pi$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

В сферических координатах сфера будет иметь уравнение $r^2 = \varepsilon^2$, переменные θ, ϕ будут параметрическими на ней. В результате получим

$$\begin{aligned}\frac{D(y, z)}{D(\theta, \phi)} &= -\varepsilon^2 \cos^2 \theta \cos \phi, \\ \frac{D(z, x)}{D(\theta, \phi)} &= -\varepsilon^2 \cos^2 \theta \sin \phi, \\ \frac{D(x, y)}{D(\theta, \phi)} &= -\varepsilon^2 \cos \theta \sin \theta.\end{aligned}\tag{2.185}$$

Пусть в (2.184), в соответствии с леммой $\beta = 0, \gamma = x/r^3, \delta = y/r^3, \alpha = z/r^3$, тогда из (2.184), с учетом (2.185), получаем

$$\begin{aligned}\iint_{\varepsilon} \left(A \frac{D(y, z)}{D(\theta, \phi)} + B \frac{D(z, x)}{D(\theta, \phi)} + C \frac{D(x, y)}{D(\theta, \phi)} \right) d\theta d\phi = \\ = -\iint_{\varepsilon} w(x, y, z) \cos \theta d\theta d\phi = -\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w \cos \theta d\theta = -4\pi w(0, 0, 0).\end{aligned}$$

Здесь использована теорема о среднем и сделан предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теперь из формулы (2.183) получаем

$$\iint_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS = 4\pi w(0, 0, 0),\tag{2.186}$$

где

$$\beta = 0, \gamma = x/r^3, \delta = y/r^3, \alpha = z/r^3,$$

$$A = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta p_0, B = -\beta u_0 + \alpha v_0 + \delta w_0 - \gamma p_0, C = -\gamma u_0 - \gamma v_0 + \alpha w_0 + \beta p_0.$$

Функции u_0, v_0, w_0, p_0 заданы на поверхности S .

Учитывая замечание к лемме, соотношение (2.186) можно записать в виде

$$\iint_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS = 4\pi w(x_0, y_0, z_0),\tag{2.187}$$

где

$$\beta = 0, \gamma = (x - x_0)/r_0^3, \delta = (y - y_0)/r_0^3, \alpha = (z - z_0)/r_0^3,$$

$$A = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta p_0, B = -\beta u_0 + \alpha v_0 + \delta w_0 - \gamma p_0, C = -\gamma u_0 - \gamma v_0 + \alpha w_0 + \beta p_0.$$

Функции u_0, v_0, w_0, p_0 заданы на поверхности S .

Рассмотрим решение СМТ в виде g_2 из (2.176)

$$\gamma = 0, \beta = x/r^3, \alpha = y/r^3, \delta = -z/r^3.$$

и подставим его в (2.179), вычислим интеграл по сфере с этим решением, имеем аналогично предыдущему

$$\begin{aligned} & \iint_{\varepsilon} \left(A \frac{D(y, z)}{D(\theta, \phi)} + B \frac{D(z, x)}{D(\theta, \phi)} + C \frac{D(x, y)}{D(\theta, \phi)} \right) d\theta d\phi = \\ & = - \iint_{\varepsilon} w(x, y, z) \cos \theta d\theta d\phi = - \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u \cos \theta d\theta = -4\pi u(0, 0, 0). \end{aligned}$$

Здесь использована теорема о среднем и сделан предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из формулы (2.183) получаем

$$\oiint_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS = 4\pi u(0, 0, 0), \quad (2.188)$$

где

$$\gamma = 0, \beta = x/r^3, \alpha = y/r^3, \delta = -z/r^3,$$

$$A = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta p_0, \quad B = -\beta u_0 + \alpha v_0 + \delta w_0 - \gamma p_0, \quad C = -\gamma u_0 - \gamma v_0 + \alpha w_0 + \beta p_0.$$

Функции u_0, v_0, w_0, p_0 заданы на поверхности S .

Учитывая замечание к лемме, соотношение (2.187) можно записать в виде

$$\oiint_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS = 4\pi u(x_0, y_0, z_0), \quad (2.189)$$

где

$$\gamma = 0, \beta = (x - x_0)/r_0^3, \alpha = (y - y_0)/r_0^3, \delta = -(z - z_0)/r_0^3,$$

$$A = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta p_0, \quad B = -\beta u_0 + \alpha v_0 + \delta w_0 - \gamma p_0, \quad C = -\gamma u_0 - \gamma v_0 + \alpha w_0 + \beta p_0.$$

Функции u_0, v_0, w_0, p_0 заданы на поверхности S .

Рассмотрим решение СМТ в виде g_3 из (2.176)

$$\delta = 0, \alpha = -x/r^3, \beta = y/r^3, \gamma = z/r^3.$$

Аналогично предыдущему, получаем

$$\oiint_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS = 4\pi v(x_0, y_0, z_0), \quad (2.190)$$

где

$$\delta = 0, \alpha = -(x - x_0)/r_0^3, \beta = (y - y_0)/r_0^3, \gamma = (z - z_0)/r_0^3,$$

$$A = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta p_0, B = -\beta u_0 + \alpha v_0 + \delta w_0 - \gamma p_0, C = -\gamma u_0 - \alpha w_0 + \beta p_0.$$

Функции u_0, v_0, w_0, p_0 заданы на поверхности S .

Рассмотрим решение СМТ в виде g_4 из (2.176)

$$\alpha = 0, \delta = x/r^3, \gamma = -y/r^3, \beta = z/r^3.$$

Аналогично предыдущему, получаем

$$\oiint_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS = 4\pi p(x_0, y_0, z_0), \quad (2.191)$$

где

$$\alpha = 0, \delta = (x - x_0)/r_0^3, \gamma = -(y - y_0)/r_0^3, \beta = (z - z_0)/r_0^3,$$

$$A = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta p_0, B = -\beta u_0 + \alpha v_0 + \delta w_0 - \gamma p_0, C = -\gamma u_0 - \alpha w_0 + \beta p_0.$$

Функции u_0, v_0, w_0, p_0 заданы на поверхности S .

Таким образом, в данном параграфе построена бесконечная серия законов сохранения. Эти законы позволили решить краевую задачу (2.179) для уравнений СМТ. Решения даны формулами (2.186), (2.189) - (2.191). Показано, что для решения краевой задачи достаточно вычислить поверхностные интегралы по граничной поверхности.

ГЛАВА 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

3.1 Предельное состояние анизотропных деформируемых тел

Некоторые задачи теории идеальной пластичности исследованы достаточно хорошо. Это так называемые статически определимые задачи. К ним относятся задачи о кручении призматических стержней и задачи о плоском деформированном состоянии. Они относятся к широкому классу задач – задачам о предельном состоянии деформируемых тел. Теория предельного состояния – один из фундаментальных разделов механики деформируемого твердого тела [35, 37]. Теория предельного состояния имеет дело со статически определимым состоянием твердых тел. В этом случае система замкнута за счет предельных условий и такие свойства материи как вязкость, упругость и т.п. на предельное состояние влиять не могут. Другими словами, при достижении предельного состояния характер связи между напряжениями и деформациями не оказывает влияния на предельное состояние. Некоторые такие системы рассмотрены в [35].

В данном параграфе приведена еще одна система уравнений пластичности, которая описывает предельное состояние. Эта система может быть использована для описания пластического течения вокруг трех ортогональных осей.

Постановка задачи. Пусть $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ – ортогональная система координат, u, v, w – компоненты вектора скорости деформаций, e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\partial_j \sigma_{ij} = 0 \quad (3.1)$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Система уравнений (3.1) – это три уравнения на шесть компонент тензора напряжений.

В общем случае система (3.1) замыкается присоединением к ней трех уравнений, описывающих предельное состояние.

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_2(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_3(\sigma_{ij}) = 0 \quad (3.2)$$

Очевидно, что система (3.1) - (3.2) является статически определимой. Иногда систему уравнений (3.1) удастся сделать статически определимой с помощью двух соотношений вида

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad (3.3)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные компоненты тензора напряжений, как это было сделано Рейссом [35].

В ряде случаев систему уравнений (3.1) удастся замкнуть с помощью одного условия пластичности вида

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \quad (3.4)$$

Установление даже одного условия пластичности вида (3.4) для данного материала - не простая задача. Она сильно усложняется для условий вида (3.2) и (3.3). В данном параграфе мы ограничимся одним условием пластичности и рассмотрим только те случаи, когда система уравнений (3.1) может быть замкнута уравнением вида (3.4).

Считаем, что компоненты тензора напряжений и тензора скоростей деформации связаны ассоциированным законом течения

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = e_{ij}, \quad (3.5)$$

где λ - некоторая неотрицательная функция.

Система уравнений (3.1) замыкается условием пластичности Мизеса в анизотропном случае [135]

$$f = a_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + a_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + a_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2(a_{12}\sigma_{12}^2 + a_{13}\sigma_{13}^2 + a_{23}\sigma_{23}^2) - 1 = 0 \quad (3.6)$$

Здесь a_{ij} - параметры анизотропии.

Известно ([35]), что в случае кручения призматического стержня вокруг оси oz поле скоростей деформации имеет вид

$$u = -yz, v = xz, w = w(x, y) \quad (3.7)$$

Обобщая соотношения (3.7), потребуем

$$u=u(y,z), v=v(x,z), w=w(x,y) \quad (3.8)$$

Построим систему уравнений, соответствующую полю скоростей деформации. В результате получаем следующую систему, которая и будет исследоваться в этой работе

$$\begin{aligned} \partial_y \tau^1 + \partial_z \tau^2 &= \partial_x p, & \partial_x \tau^1 + \partial_z \tau^3 &= \partial_y p & \partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 &= \partial_z p \\ 2a_{12}(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 + 2a_{23}(\tau^3)^2 - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Система уравнений (3.9) может быть использована, в частности, для описания кручения прямоугольного параллелограмма, находящегося в пластическом состоянии, вокруг трех осей (см. рис. 3.1).

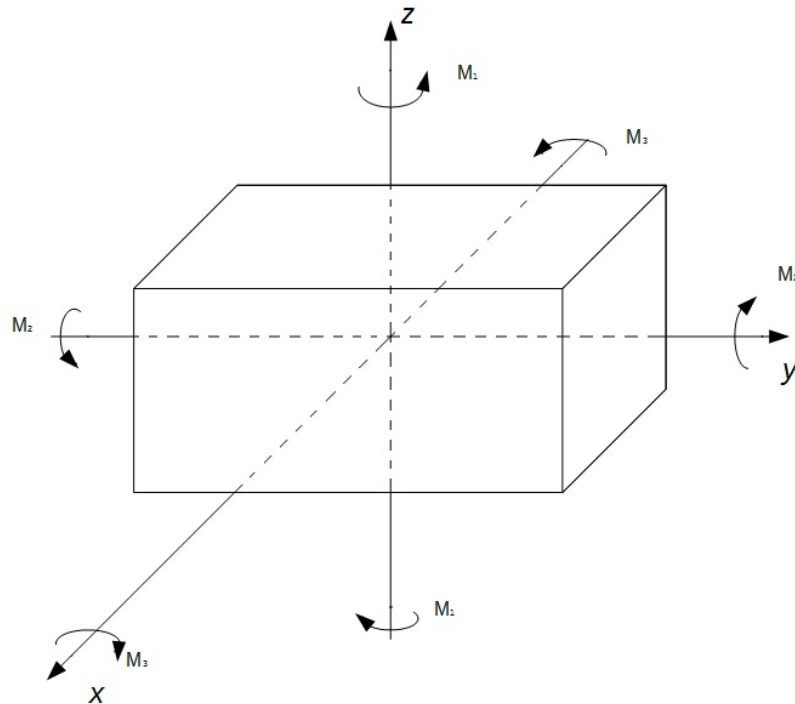


Рисунок 3.1– Кручение прямоугольного параллелограмма, находящегося в пластическом состоянии, вокруг трех осей

Предположим, что параллелограмм закручивается вокруг осей ox , oy , oz равными и противоположными парами сил с моментами M_1, M_2, M_3 . При этом существует некоторые предельные моменты M_1^*, M_2^*, M_3^* , когда параллелепипед перейдет в пластическое состояние и начнет закручиваться.

Из системы (3.9) видно, что такая задача является статически определимой и может служить для определения значения предельных моментов по формулам

$$\begin{aligned} M_1^* &= \iint (y\tau^2 - z\tau^1) dydz, \\ M_2^* &= \iint (z\tau^1 - x\tau^3) dx dz, \\ M_3^* &= \iint (x\tau^3 - y\tau^2) dy dz \end{aligned} \quad (3.10)$$

Кроме моментов (3.10), на тело еще действует гидростатическое давление

$$P|_{\Sigma} = P_0,$$

где Σ - боковая поверхность параллелепипеда.

Свойства системы (3.9)

1. Характеристические поверхности системы (3.9).

Система (3.9) содержит конечное соотношение, связывающее величины τ^1, τ^2, τ^3 . Дифференцируем его по x, y, z , в результате получаем систему

$$\begin{aligned} \partial_y \tau^1 + \partial_z \tau^2 &= \partial_x p, & \partial_x \tau^1 + \partial_z \tau^3 &= \partial_y p, & \partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 &= \partial_z p \\ a_{12} \tau^1 \partial_x \tau^1 + a_{13} \tau^2 \partial_x \tau^2 + a_{23} \tau^3 \partial_x \tau^3 &= 0, \\ a_{12} \tau^1 \partial_y \tau^1 + a_{13} \tau^2 \partial_y \tau^2 + a_{23} \tau^3 \partial_y \tau^3 &= 0, \\ a_{12} \tau^1 \partial_z \tau^1 + a_{13} \tau^2 \partial_z \tau^2 + a_{23} \tau^3 \partial_z \tau^3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Уравнение характеристической поверхности системы уравнений (3.11) представим в виде

$$\psi = \psi(x, y, z) = 0 \quad (3.12)$$

Характеристические поверхности системы (3.12) находятся из определителя

$$\begin{vmatrix} \partial_x \psi & \partial_y \psi & \partial_z \psi & 0 \\ \partial_y \psi & \partial_x \psi & 0 & \partial_z \psi \\ \partial_z \psi & 0 & \partial_x \psi & \partial_y \psi \\ a_{12} \tau^1 & a_{13} \tau^2 & a_{23} \tau^3 & \end{vmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

Замечание. Нетрудно видеть, что все три последних уравнения системы (3.11) дают одинаковые строки в определителе (3.13).

Раскрываем определитель (3.13), по последней строке получаем

$$a_{12}\tau^1\partial_z\psi((\partial_z\psi)^2 - (\partial_x\psi)^2 - (\partial_y\psi)^2) + a_{13}\tau^2\partial_y\psi((\partial_y\psi)^2 - (\partial_x\psi)^2 - (\partial_z\psi)^2) + a_{23}\tau^3\partial_x\psi((\partial_x\psi)^2 - (\partial_y\psi)^2 - (\partial_z\psi)^2) = 0.$$

Это уравнение можно записать в виде

$$a_{12}\tau^1n_3(2n_3^2 - 1) + a_{13}\tau^2n_2(2n_2^2 - 1) + a_{23}\tau^3n_1(2n_1^2 - 1) = 0. \quad (3.14)$$

Где $n_1 = \frac{\partial_x\psi}{\sqrt{(\nabla\psi)^2}}$, $n_2 = \frac{\partial_y\psi}{\sqrt{(\nabla\psi)^2}}$, $n_3 = \frac{\partial_z\psi}{\sqrt{(\nabla\psi)^2}}$.

Одно из решений уравнения (3.14), которое не зависит от величин τ^1, τ^2, τ^3 , таково

$$2n_i^2 = 1 \quad i = 1, 2, 3$$

Следовательно, угол между нормалью к характеристической поверхности $\psi(x, y, z) = 0$ и вектором n равен $\pm \pi/4$. Совокупность элементов характеристической поверхности образуют конус раствора $\pm \pi/4$ вокруг направления, которое определяется третьим корнем уравнения (3.9) и зависит от напряженного состояния.

Точечные симметрии системы уравнений (3.9)

С помощью точечных симметрий удастся не только построить т.н. инвариантные решения, но и строить новые решения, используя технику «размножения» (см. [40, 109, 175 - 178, 183]). В данном параграфе точечные симметрии будут использоваться только для построения инвариантных решений.

Поскольку система (3.9) содержит конечное соотношение, то необходимо работать с ее следствиями, которые имеют вид (3.11), где для удобства введены обозначения $\partial_x\tau^1 = q_1^1, \partial_x\tau^2 = q_1^2, \partial_x\tau^3 = q_1^3, \partial_x p = q_1^4$ и т.д.

$$\begin{aligned} q_2^1 + q_3^2 &= q_1^4, & q_1^1 + q_3^3 &= q_2^4, & q_1^2 + q_2^3 &= q_3^4 \\ a_{12}\tau^1q_1^1 + a_{13}\tau^2q_1^2 + a_{23}\tau^3q_1^3 &= 0, \\ a_{12}\tau^1q_2^1 + a_{13}\tau^2q_2^2 + a_{23}\tau^3q_2^3 &= 0, \\ a_{12}\tau^1q_3^1 + a_{13}\tau^2q_3^2 + a_{23}\tau^3q_3^3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$a_{12}\tau^1(\tau^1)^2 + a_{13}(\tau^2)^2 + a_{23}(\tau^3)^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Будем искать точечные симметрии, относительно которых инвариантно многообразие, определяемое системой уравнений (3.15).

Согласно методике Ли – Овсянникова, будем искать допустимый оператор точечной симметрии в виде

$$X = \xi^j \frac{\partial}{\partial x_j} + \eta^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}, \quad j = 1,2,3; i = 1,2,3,4, \quad (3.16)$$

Продолжаем оператор (3.16) на первые производные по формулам

$$\tilde{X} = X + \zeta_k^i \frac{\partial}{\partial q_k^i}, \quad (3.17)$$

где $\zeta_k^i = D_k(\eta^i) - q_\beta^i D_k(\zeta^\beta)$, $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + q_k^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}$.

Действуем оператором (3.17) на систему уравнений (3.15) и переходим на многообразие, задаваемое этой системой. В результате получаем многочлены второй степени относительно «внутренних»- эндогенных переменных q_k^2, q_k^3 . «Внешние» - экзогенные переменные q_k^1, q_k^4 - определяются из системы (3.15) через эндогенные переменные. В полученных многочленах второй степени приравниваем нулю коэффициенты при первых и вторых степенях эндогенных переменных. Это позволяет получить переопределенную систему линейных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов ξ^j, η^i . Решая эту систему, получаем следующий результат

Теорема. Система уравнений (3.9) допускает алгебру Ли L_5 , порождаемую операторами

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, X_4 = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, X_5 = \frac{\partial}{\partial p}.$$

Наличие операторов X_i $i=1,2,3,4$ означает, что система (3.9) допускает сдвиги и растяжение по осям x, y, z .

$$x'_i = x_i + a_i, i = 1,2,3, x'_i = x_i \exp a_4,$$

сдвиг для гидростатического давления $p' = p + a_5$.

Инвариантные решения системы уравнений (3.9)

Построим инвариантное решение относительно подалгебры, порождаемой оператором $X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$.

Такое решение следует искать в виде

$$\tau^i = \tau^i(x, y), p = p(x, y). \quad (3.18)$$

Подставляем (3.18) в систему (3.9) получаем

$$\begin{aligned} \partial_y \tau^1 &= \partial_x p, \quad \partial_x \tau^1 = \partial_y p, \quad \partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = 0, \\ a_{12}(\tau^1)^2 + a_{13}(\tau^2)^2 + a_{23}(\tau^3)^2 - 1/2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из (3.19) без труда получаем

$$\tau^1 = f(x + y) + g(x - y), p = f(x + y) - g(x - y). \quad (3.20)$$

Теперь функции τ^2, τ^3 определяются из системы уравнений

$$\partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = 0, a_{13}(\tau^2)^2 + a_{23}(\tau^3)^2 = k_s^2 - a_{12}(\tau^1)^2 \quad (3.21)$$

Система уравнений (3.21) описывает кручение анизотропного стержня в условиях, когда предел текучести зависит от переменных x, y . Такие задачи рассмотрены в [35, 37] и цитируемой там литературе.

Построим инвариантное решение относительно подалгебры, порождаемой оператором X_{12} . Этот оператор в цилиндрической системе координат $r\theta z$ имеет вид $X_{12} = \frac{\partial}{\partial \theta}$. В этом случае система (3.9) запишется так

$$\begin{aligned} \partial_\theta \tau_{r\theta} + \partial_z \tau_{rz} &= r \partial_r p, \quad r \partial_r \tau_{r\theta} + r \partial_z \tau_{\theta z} + 2\tau_{r\theta} = \partial_\theta p, \\ r \partial_r \tau_{rz} + \partial_\theta \tau_{\theta z} + \tau_{rz} &= \partial_z p, \\ a_{12} \tau_{r\theta}^2 + a_{13} \tau_{rz}^2 + a_{23} \tau_{\theta z}^2 - 1/2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Инвариантное решение в этом случае определяется из следующей системы

$$\begin{aligned} \partial_z \tau_{rz} &= r \partial_r p, \quad r \partial_r \tau_{r\theta} + r \partial_z \tau_{\theta z} + 2\tau_{r\theta} = 0, \\ r \partial_r \tau_{rz} + \tau_{rz} &= \partial_z p, \\ a_{12} \tau_{r\theta}^2 + a_{13} \tau_{rz}^2 + a_{23} \tau_{\theta z}^2 - 1/2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В этом случае τ_{rz} определяется из линейного дифференциального уравнения

$$r \partial_r \tau_{rz} + r^2 \partial_r^2 \tau_{rz} - \tau_{rz} + r^2 \partial_z^2 \tau_{rz} = 0.$$

Остальные функции определяются из системы (3.23)

Законы сохранения системы уравнений (3.9)

Будем искать законы сохранения системы уравнений (3.9) в виде

$$\partial_x A(\tau^1, \tau^2, \tau^3, p) + \partial_y B(\tau^1, \tau^2, \tau^3, p) + \partial_z C(\tau^1, \tau^2, \tau^3, p) = 0.$$

Это равенство выполняется в силу системы уравнений (3.9). Из этого следуют соотношения

$$X_{12}A - a_{13}\tau^2\partial_p B + a_{12}\tau^1\partial_p C = 0,$$

$$X_{13}B - a_{23}\tau^3\partial_p A + a_{12}\tau^1\partial_p C = 0,$$

$$X_{12}B - a_{13}\tau^2\partial_p A = 0,$$

$$X_{12}C - a_{12}\tau^1\partial_p A = 0,$$

$$X_{13}C + a_{12}\tau^1\partial_p B = 0,$$

$$X_{13}A - a_{23}\tau^3\partial_p B = 0.$$

где $X_{12} = -a_{13}\tau^2\partial_{\tau^1} + a_{12}\tau^1\partial_{\tau^2}$, $X_{13} = -a_{23}\tau^3\partial_{\tau^1} + a_{12}\tau^1\partial_{\tau^3}$.

Покажем, что эти уравнения совместны.

Пусть $\partial_p A = \partial_p B = \partial_p C = 0$, тогда одно из решений - бесконечная серия

$$A(S), B(S), C(S),$$

где $S = a_{12}(\tau^1)^2 + a_{13}(\tau^2)^2 + a_{23}(\tau^3)^2$, $A(S), B(S), C(S)$ – произвольные гладкие функции.

Замечание. Неизвестно, имеются ли другие законы сохранения в этом случае, но, по нашему мнению, других законов сохранения нет.

Система уравнений (3.9) в терминах компонент тензора деформации

Понятно, что для системы (3.9) наиболее актуально напряженное состояние. Пусть оно известно. Тогда для нахождения трех компонент вектора скорости имеем три уравнения

$$a_{12}\lambda\tau^1 = e_{12}, \quad a_{13}\lambda\tau^2 = e_{13}, \quad a_{23}\lambda\tau^3 = e_{23}, \quad (3.24)$$

$$\text{где } 2e_{12} = \partial_y u + \partial_x v, \quad 2e_{13} = \partial_z u + \partial_x w, \quad 2e_{23} = \partial_z v + \partial_y w \quad (3.25)$$

Покажем, что уравнения (3.24) можно решить в терминах компонент тензора скоростей деформации. Как известно, компоненты тензора скоростей деформации кроме уравнений (3.24) должны удовлетворять еще и

уравнениям совместности. В силу соотношений (3.25) и (3.5) их остается только шесть

$$\begin{aligned}
\partial_{xy}^2 e_{12} &= 0, \partial_{xz}^2 e_{13} = 0, \partial_{yz}^2 e_{23} = 0, \\
\partial_x(\partial_x e_{23} - \partial_z e_{12} - \partial_y e_{13}) &= 0, \\
\partial_y(\partial_y e_{13} - \partial_z e_{12} - \partial_x e_{23}) &= 0, \\
\partial_z(\partial_z e_{12} - \partial_y e_{13} - \partial_x e_{23}) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Теорема. Уравнения совместности скоростей деформации выполняются тождественно.

В этом случае из (3.24) имеем

$$\begin{aligned}
(\tau^1)^2(e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) &= k_s^2 e_{12}^2, \\
(\tau^2)^2(e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) &= k_s^2 e_{23}^2, \\
(\tau^3)^2(e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) &= k_s^2 e_{13}^2.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Системы уравнений (3.27) – это система линейных однородных уравнений относительно переменных $e_{12}^2, e_{13}^2, e_{23}^2$. Ее определитель

$$\begin{vmatrix}
(\tau^1)^2 - k_s^2 & (\tau^1)^2 & (\tau^1)^2 \\
(\tau^2)^2 & (\tau^2)^2 - k_s^2 & (\tau^2)^2 \\
(\tau^3)^2 & (\tau^3)^2 & (\tau^3)^2 - k_s^2
\end{vmatrix}$$

Этот определитель равен нулю, поскольку сумма всех строк равна нулю. Это означает, что система (3.27) имеет только два независимых уравнения для трех компонент тензора скоростей деформации. Например, величина e_{23}^2 может быть выбрана произвольно, поэтому для данного напряженного состояния, определяемого из системы (3.9), поле скоростей определяется с функциональным произволом.

Систему (3.9) в случае, когда $p \equiv 0$, можно записать так

$$\begin{aligned}
\partial_y \Lambda e_{12} + \partial_z \Lambda e_{13} &= 0, \\
\partial_x \Lambda e_{12} + \partial_z \Lambda e_{23} &= 0 \\
\partial_x \Lambda e_{13} + \partial_y \Lambda e_{23} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Здесь для удобства считаем $\Lambda = \lambda^{-1}$.

Продифференцируем первое уравнение по x , а второе по y и вычтем полученное соотношение

$$\partial_z(\partial_x \Lambda e_{13} - \partial_y \Lambda e_{23}) = 0. \quad (3.29)$$

Из третьего уравнения (3.28) имеем

$$\partial_z(\partial_x \Lambda e_{13} + \partial_y \Lambda e_{23}) = 0. \quad (3.30)$$

Из (3.29) и (3.30) получаем

$$\partial_{zx} \Lambda e_{13} = 0, \partial_{zy} \Lambda e_{23} = 0. \quad (3.31)$$

Проделив аналогичную операцию с первым и третьим уравнениями системы (3.28), имеем

$$\partial_{xy} \Lambda e_{12} = 0 \quad (3.32)$$

Из этих соотношений можно определить вид компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} S_{12} = \Lambda e_{12} &= F_1(x, z) + G_1(z, y), \\ S_{13} = \Lambda e_{13} &= H_1(x, y) + G_1(z, y), S_{23} = \Lambda e_{23} = \\ &= H_2(x, y) + F_2(z, x). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Между этими функциями выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \partial_y G_1 + \partial_z G_2 = 0, \quad \partial_x F_1 + \partial_z F_2 = 0, \quad \partial_x H_1 + \partial_y H_2 = 0, \\ a_{12}(G_1 + F_1)^2 + a_{13}(G_2 + H_1)^2 + a_{23}(F_2 + H_2)^2 = 1. \end{aligned} \quad (3.34)$$

В системе уравнений (3.34) введем функции Φ_i , по следующим формулам

$$\begin{aligned} F_1 &= \partial_z \Phi_1, F_2 = -\partial_x \Phi_1, \\ G_1 &= \partial_z \Phi_2, G_2 = -\partial_y \Phi_2, \\ H_1 &= \partial_y \Phi_3, H_2 = -\partial_x \Phi_3 \end{aligned}$$

В этом случае первые три уравнения (3.34) удовлетворяются тождественно, а последнее запишется так

$$a_{12}(\partial_z \Phi_1 + \partial_z \Phi_2)^2 + a_{13}(\partial_y \Phi_3 - \partial_y \Phi_2)^2 + a_{23}(\partial_x \Phi_3 + \partial_x \Phi_1)^2 = 1.$$

В этом случае компоненты напряжения примут вид

$$\begin{aligned} S_{12} = \Lambda e_{12} &= \partial_z(\Phi_1(x, z) + \Phi_2(z, y)), \\ S_{13} = \Lambda e_{13} &= \partial_y(\Phi_3(x, y) - \Phi_2(z, y)), \\ S_{23} = \Lambda e_{23} &= \partial_x(-\Phi_1(x, z) - \Phi_3(x, y)). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Таким образом, рассмотрено предельное состояние анизотропных пластических тел. Теория предельного состояния имеет дело со статически

определимым состоянием твердых тел. В этом случае система замкнута за счет предельных условий. Рассмотрена система уравнений, в которой содержатся три касательных компоненты тензора напряжений, а диагональные компоненты равны между собой. В этом случае удастся подобрать такое поле скоростей, что система также является статически определимой. Показано, что эта система может быть рассмотрена и в терминах компонент тензора скоростей деформации. При этом количество уравнений не увеличивается, поскольку условия совместности выполняется тождественно. Для этой системы найдена группа точечных симметрий и законы сохранения, рассмотрены некоторые точные решения, которые могут быть использованы для описания пластического кручения вокруг трех ортогональных осей.

3.2 Новые трехмерные пластические течения, соответствующие однородному напряженному состоянию

Работы, в которых рассматриваются трехмерные пластические течения, весьма немногочисленны. Это работы Р. Хилла [135], Д.Д. Ивлева [35], М.А. Задояна [32] и С.И. Сенашова [4, 35]. Особняком на этом фоне выглядит работа В. Прагера [71]. В ней подробно рассмотрено однородное пластическое состояние и построены поля скоростей ему соответствующие. Им, в частности, показано, что такому состоянию могут соответствовать только поля скоростей в виде полиномов второй степени. Фундаментальность исследования и авторитет автора, казалось, гарантирует, что ошибок в работе нет. Тем не менее, в исследование вкралась неточность и, оказалось, что существуют решения, соответствующие однородному напряженному состоянию, отличные от решений, указанных В. Прагером. Такие решения построены в данном параграфе.

1. Состояние трехмерного пластического течения может быть описано с помощью следующей системы уравнений

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad S_{ij} = \lambda e_{ij}, \quad (3.36)$$

$$S_{ij} S_{ij} = 2k_s^2, S_{ij} = \sigma_{ij} - p, \quad 3p = \sigma_{ii},$$

где σ_{ij}, S_{ij} - компоненты тензора и девиатора тензора напряжений, λ - неотрицательная функция, k_s - предел текучести при чистом сдвиге, $2e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ - компоненты тензора скоростей деформации, u_i - компоненты вектора скорости. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Система уравнений (3.36) – это система из 10 уравнений на 6 компонент тензора напряжений σ_{ij} , три компоненты вектора скорости u_i и коэффициент λ .

Рассмотрим такое поле скоростей

$$\begin{aligned} u_1 &= a \exp(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3), \\ u_2 &= b \exp(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3), \\ u_3 &= c \exp(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Предположим, что p – постоянно. Вычислим для этого поля компоненты девиатора тензора напряжений. Получаем

$$\begin{aligned} S_{11} &= \alpha a \mu, S_{22} = \beta b \mu, S_{33} = \gamma c \mu, \\ S_{12} &= (\alpha b + \beta a) \mu, S_{13} = (\alpha c + \gamma a) \mu, \\ S_{23} &= (\beta c + \gamma b) \mu, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \mu^{-2} &= 2k_s^2 ((\alpha a)^2 + (\beta b)^2 + (\gamma c)^2 + (\alpha b + \beta a)^2 + (\alpha c + \gamma a)^2 \\ &+ (\beta c + \gamma b)^2)^2. \end{aligned}$$

Из (3.38) следует, что все компоненты тензора напряжений постоянны, поле скоростей (2.37) не совпадает с полем скоростей построенным В. Прагером. Поэтому необходимо более тщательно исследовать поля скоростей, которые соответствуют однородному напряженному состоянию.

Пусть все σ_{ij} и соответствующие им компоненты девиатора тензора напряжений S_{ij} постоянны. Тогда, для определения компонент тензора скоростей деформации, кроме уравнений

$$S_{ij} = \lambda e_{ij}. \quad (3.39)$$

Мы должны рассмотреть систему из 6 уравнений совместности деформации.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial^2 x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial^2 x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} \right).\end{aligned}\tag{3.40}$$

Остальные 4 уравнения получаются из (3.40) круговой перестановкой индексов. Без ограничений общности будем считать, что $S_{11} \neq 0$. Из (3.39) имеем

$$e_{ij} = S_{ij}/S_{11} e_{12}.\tag{3.41}$$

Подставляем (3.41) в (3.40) и, учитывая, что S_{ij} - постоянны, получаем

$$\begin{aligned}S_{11} \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial^2 x_2^2} + S_{22} \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial^2 x_1^2} &= 2S_{12} \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ S_{11} \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-S_{23} \frac{\partial e_{12}}{\partial x_1} + S_{12} \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + S_{13} \frac{\partial e_{12}}{\partial x_2} \right).\end{aligned}\tag{3.42}$$

Остальные 4 уравнения получаем из (3.42) круговой перестановкой индексов.

Система уравнений (3.42) есть система 6 однородных уравнений относительно шести неизвестных $\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_i \partial x_j}$. Эта система имеет постоянные коэффициенты. Система (3.42) имеет определитель равный нулю, поскольку она имеет нетривиальное решение, соответствующее полю скоростей (3.37). Будем считать переменную $\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$ известной и решим систему из 5 уравнений с пятью неизвестными методом Крамера.

В результате получим

$$\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_i \partial x_j} = c_{ij} \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2},\tag{3.43}$$

где c_{ij} - постоянные, которые имеют вид

$$c_{11} = 1/c, \quad c_{22} = 2/c, \quad c_{33} = 3/c, \quad c_{13} = 4/c, \quad c_{23} = 5/c, \quad c = 6$$

Решая последовательно уравнения (3.43), после несложных вычислений, получаем

$$e_{12} = f(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3),$$

где α, β, γ – произвольные постоянные, f – произвольная гладкая функция. Остальные компоненты тензора скоростей деформации без труда определяются из уравнений (3.41).

Окончательно поле скоростей для однородного напряженного состояния принимает вид:

$$u_1 = Ag(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta), u_2 = Bg(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta), u_3 = Cg(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta).$$

Здесь постоянные $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ без труда определяются через S_{ij} . g – произвольная гладкая функция, которая без труда определяется по функции f .

Замечание. Случай, рассмотренный В. Прагером, соответствует тривиальному решению системы (3.42). Это означает, что $\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_i \partial x_j} = 0$. Тогда $e_{12} = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta$. В результате поле скоростей имеет квадратичный вид, что и было отмечено В. Прагером.

Таким образом, проведенное исследование показало, что однородному напряженному состоянию соответствует бесконечное количество полей скоростей, а не одно поле, как это было приведено в работе [71].

3.3 Точные решения уравнений анизотропной теории пластичности

Большинство используемых в производстве материалов в большей или меньшей степени обладают анизотропными свойствами. Поэтому изучение уравнений, описывающих поведение таких материалов, является важной и актуальной задачей. Системы дифференциальных уравнений, описывающие поведение анизотропных пластических материалов являются очень сложными для исследования. Анизотропия приводит к тому, что уменьшается количество симметрий, допускаемых этими уравнениями, и это сразу приводит к уменьшению количества инвариантных решений, которые можно найти для этих систем. А так, как правило, только такие решения мы и

умеем строить, то и не удивительно, что известных точных решений для этих уравнений так мало. Поэтому любое новое решение, построенное для таких уравнений, обладает значительной ценностью. В данном параграфе построены поля скоростей для однородного напряженного состояния. Показано, что эти поля скоростей имеют функциональный произвол. Возможно, что именно этот произвол позволит удовлетворять кинематическим граничным условиям, которые возникают в различных технологических и научных задачах.

Рассмотрим систему уравнений, описывающих пластическое течение среды Мизеса в анизотропном случае [135]

$$\begin{aligned} \partial_i \sigma_{ij} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \\ a_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + a_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + a_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \\ &+ 2a_{12}\sigma_{12}^2 + 2a_{13}\sigma_{13}^2 + 2a_{23}\sigma_{23}^2 = 1. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, a_{ij} – параметры, характеризующие текущее состояние анизотропии. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Компоненты тензора скоростей деформации e_{ij} связаны с компонентами тензора напряжений соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda e_{11} &= \lambda \partial_1 u = a_{22}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + a_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \\ \lambda e_{22} &= \lambda \partial_2 v = a_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + a_{33}(\sigma_{22} - \sigma_{11}), \\ \lambda e_{33} &= \lambda \partial_3 w = a_{11}(\sigma_{33} - \sigma_{22}) + a_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11}) \\ \lambda e_{12} &= \lambda(\partial_2 u + \partial_1 v) = 2a_{12}\sigma_{12}, \quad \lambda e_{13} = \lambda(\partial_3 u + \partial_1 w) = 2a_{13}\sigma_{13}, \\ \lambda e_{23} &= \lambda(\partial_3 v + \partial_2 w) = 2a_{23}\sigma_{23}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Здесь u, v, w – компоненты вектора скорости, λ – неотрицательная функция.

Известно, что система уравнений (3.44), (3.45) допускает группу непрерывных преобразований, которая порождается следующими операторами [4]

$$\begin{aligned} X_i &= \partial_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad X_4 = \partial_u, \quad X_5 = \partial_v, \\ X_6 &= \partial_w, \quad X_7 = x_1 \partial_v - x_2 \partial_u, \quad X_8 = x_3 \partial_u - x_1 \partial_w, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$X_9 = x_2 \partial_w - x_3 \partial_v, \quad X_{10} = x_i \partial_i, \quad X_{11} = u \partial_u + v \partial_v + w \partial_w,$$

$$X_{11} = \partial_{\sigma_{11}} + \partial_{\sigma_{22}} + \partial_{\sigma_{33}}.$$

В [4] приведены некоторые точные решения, построенные на основе алгебры Ли L_{14} (3.46) для системы уравнений (3.44), (3.45).

Построим еще одно инвариантное решение. Будем искать его в виде

$$u = f_1(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d),$$

$$v = f_2(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d), \quad w = f_3(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d). \quad (3.47)$$

Здесь a, b, c, d - произвольные постоянные, f_i - искомые гладкие функции.

Замечание. Это решение инвариантно относительно одномерной подалгебры, порождаемой оператором $X_1 + X_2 + X_3$, при условии, что

$$a + b + c = 0. \quad (3.48)$$

Подставляя (3.47) в уравнения (3.44), (3.45), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, относительно переменной $t = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d$. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t(a\sigma_{11} + b\sigma_{12} + c\sigma_{13}) &= 0, \\ \partial_t(a\sigma_{12} + b\sigma_{22} + c\sigma_{23}) &= 0, \quad \partial_t(a\sigma_{13} + b\sigma_{23} + c\sigma_{33}) = 0, \\ \lambda a \partial_t f_1 &= a_{22}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + a_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \\ \lambda b \partial_t f_2 &= a_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + a_{33}(\sigma_{22} - \sigma_{11}), \\ \lambda \partial_t f_3 &= a_{11}(\sigma_{33} - \sigma_{22}) + a_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11}) \\ \lambda \partial_t(a f_2 + b f_1) &= 2a_{12}\sigma_{12}, \quad \lambda \partial_t(a f_3 + c f_1) = 2a_{13}\sigma_{13}, \\ \lambda \partial_t(b f_3 + c f_2) &= 2a_{23}\sigma_{23}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Из системы (3.49) следует, что

$$\begin{aligned} a\sigma_{11} + b\sigma_{12} + c\sigma_{13} &= const, \\ a\sigma_{12} + b\sigma_{22} + c\sigma_{23} &= const, \\ a\sigma_{13} + b\sigma_{23} + c\sigma_{33} &= const. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Наиболее простое напряженное состояние, удовлетворяющее (3.50) и условию пластичности – однородное напряженное состояние, т.е. такой случай, когда все компоненты тензора напряжений постоянны.

Замечание. Для изотропной пластической среды соответствующие поля скоростей построены в работах [4, 102].

Условие (3.48), в этом случае соответствует условию несжимаемости материала.

Несложно показать, что однородное напряженное состояние реализуется только в случае, когда

$$f = f_1 = Af_2 = Bf_3,$$

где A, B – постоянные, f – гладкая функция.

Условие (3.48), в силу произвольности постоянных переходит теперь в условие $a + Ab + Bc = 0$.

Окончательно получаем

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = \lambda(a(a_{11} + a_{22}) + Aba_{33})\Delta^{-1},$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{33} = \lambda(Ab(a_{22} + a_{33}) + aa_{33})\Delta^{-1},$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = \lambda(Ab(a_{22}) - aa_{11})\Delta^{-1},$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33},$$

$$2a_{12}\sigma_{12} = \lambda(b + aA), 2a_{13}\sigma_{13} = \lambda(c + aB), 2a_{23}\sigma_{23} = \lambda(bB + cA).$$

Таким образом, в данном параграфе рассмотрены уравнения анизотропной теории пластического течения в пространственном случае. На основе группы непрерывных преобразований, допускаемой системой, построено инвариантное решение. В случае однородного напряженного состояния найдено новое поле скоростей. Это поле имеет функциональный произвол. Это еще раз подтверждает тот факт, что каждому напряженному состоянию отвечает несколько полей скоростей, в данном случае – бесконечно много.

3.4 Динамические задачи анизотропной теории пластичности

Динамические задачи – это наименее изученная область теории пластичности. Динамические задачи возникают в самых разных областях техники и науки, но сложность исходных дифференциальных уравнений не

позволяет строить точные решения и корректно численно решать краевые задачи. Это еще в большей степени касается динамических уравнений анизотропной пластичности. Анизотропия уменьшает группу симметрий, допускаемую уравнениями, а, следовательно, и сужает количество инвариантных решений. Неплохо исследованы одномерные динамические задачи пластичности, но уже двумерные задачи вызывают непреодолимые математические сложности, из-за нелинейности основных уравнений, даже в изотропном случае. Изучение симметрий уравнений пластичности позволило построить некоторые точные решения. Наиболее известное решение построил Б.Д. Аннин, описывая сжатие жесткими плитами пластического слоя из изотропного материала. Решение Аннина линейно по двум пространственным переменным, и в него входят произвольные функции времени. В данном параграфе также используются симметрии. Впервые вычислены точечные симметрии для динамических уравнений пластичности в анизотропном случае. Алгебра Ли, порождаемая найденными симметриями, оказалась бесконечномерной. Это обстоятельство дало возможность применить методику построения новых классов нестационарных решений. Симметрии позволяют преобразовать точные решения стационарных динамических уравнений в нестационарные решения. В построенные решения входят произвольные функции и произвольные постоянные. План исследования следующий. По методике Ли - Овсянникова вычисляется группа точечных симметрий, допускаемая уравнениями анизотропной пластичности. Строятся два класса новых стационарных инвариантных решений. Эти стационарные решения, с помощью преобразований, порождаемых точечными симметриями, преобразуются в новые нестационарные решения. В заключение построено новое автомодельное решение нестационарных уравнений анизотропной пластичности, а решение Аннина обобщено на анизотропный случай. Приведенные решения можно использовать для описания сжатия пластического материала между жесткими плитами, а также для

тестирования программ, предназначенных для исследования анизотропных пластических задач.

Вводные сведения

Теории пластичности посвящена обширная литература. Это объясняется важностью и актуальностью рассматриваемых там задач. Эти задачи возникают при конструировании машин и механизмов, в технологических процессах использующих пластические деформации, при пробивании брони снарядом. В современных и классических статьях и монографиях [32, 35, 37, 156], рассматриваются в основном статические задачи и изотропные материалы. Это связано не с тем, что динамические задачи не важны для приложений, а с тем, что не разработаны методы для решения динамических задач. Впервые пространственное решение динамических уравнений построил Б.Д. Аннин [4] в 1978 г. Это решение было линейно по двум пространственным переменным и содержало несколько произвольных функций, зависящих от времени. Оно было построено Б.Д.Анниным на основе изучения группы точечных симметрий, допускаемых системой уравнений динамической теории пластичности. Позднее, базируясь на групповых свойствах уравнений, были построены точные решения некоторых плоских динамических задач [4]. С тех пор, до работы [159], новых решений видимо не появилось. Здесь авторы ссылаются на уникальный обзор [55], где собраны системы нелинейных уравнений механики сплошных сред и их точные решения. Изучение группы симметрий показало, что к анизотропным динамическим уравнениям пластичности можно применить новый способ – преобразовать стационарные решения идеальной пластичности в нестационарные, так же как в [159].

Групповые свойства можно использовать для разных целей. Чаще всего они применяются для построения инвариантных решений. Это такие решения, которые не изменяются при непрерывных преобразованиях, допускаемых, в смысле Ли данной системой дифференциальных уравнений. Более подробно с инвариантными решениями уравнений пластичности и

способами их построения можно ознакомиться, например, в [4] и цитируемой там литературе. В работах авторов [40, 109, 131, 178, 184] показано как можно с помощью точечных симметрий «деформировать» точные решения и редуцировать одно точное решение в другое точное решение в случае плоских стационарных уравнений идеальной пластичности. В данном параграфе мы используем группу точечных симметрий для преобразования новых стационарных решений в новые нестационарные для трехмерных нестационарных уравнений пластичности. Впервые это было сделано для решений уравнений пластичности в изотропном случае в [159].

Постановка задачи

Пусть, $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ – ортогональная декартова система координат, $u = v_1, v = v_2, w = v_3$ – компоненты вектора скорости деформаций, e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Компоненты тензора напряжений и компоненты вектора скорости удовлетворяют уравнениям движения

$$\partial_i v_i + v_j \partial_j v_i = \partial_i \sigma_{ij}, i, j = 1, 2, 3 \quad (3.51)$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Девиатор тензора напряжений и тензор скоростей деформации сосны

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij} p = \lambda e_{ij} = \lambda (\partial_j v_i + \partial_i v_j) / 2 \quad (3.52)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, λ – некоторая неотрицательная функция, $3p = \sigma_{ii}$.

Среда предполагается несжимаемой, поэтому имеет место уравнение несжимаемости

$$\partial_i v_i = 0 \quad (3.53)$$

Система уравнений (3.51) – (3.53) замыкается условием пластичности Мизеса

$$a_{11}(\sigma_{11} - p)^2 + a_{22}(\sigma_{22} - p)^2 + a_{33}(\sigma_{33} - p)^2 + 2(a_{12}\sigma_{12}^2 + a_{13}\sigma_{13}^2 + a_{23}\sigma_{23}^2) = 1, \quad (3.54)$$

где a_{ij} – текущие параметры анизотропии.

Групповые свойства уравнений динамической теории пластичности

Вычислим группу точечных симметрий, допускаемых уравнениями (3.51) – (3.54). Сделаем это по известной методике Ли-Овсянникова, которая уже применяется к уравнениям пластичности в [4]. Группа точечных симметрий порождается следующими операторами:

$$X_0 = \partial_t, M = t\partial_t + x_j\partial_{x_j}, S = \varphi(t)\partial_p, T_i = f_i(t)\partial_{x_i} - \dot{f}_i(t)\partial_{v_i} - x_i\ddot{f}_i(t)\partial_p, \quad (3.55)$$

по i не суммировать

Функции $\varphi(t), f_i(t)$ являются произвольными из класса C^∞ , поэтому операторы (3.55) порождают бесконечномерную алгебру Ли. Точка вверху означает производную по переменной t .

Замечательным свойством точечных симметрий является то, что они решение системы (3.51) – (3.54) снова переводят в точные решения этой же системы. Пусть t, x_i, v_i, p исходные координаты, тогда они преобразуются в новые координаты t', x'_i, v'_i, p' с помощью преобразований, соответствующих операторам (3.55):

$$t' = t(a_0 + \exp a_1), x' = (\exp a_1 + a_{i+2}f_i(t)), v'_i = v_i + a_{i+2}\dot{f}_i(t), p' = p + \sum_{i=1}^3 \ddot{f}_i(t)a_{i+2} \quad (3.56)$$

Здесь a_i – групповые параметры, которые непрерывно меняются в некоторой окрестности нуля. Далее эти преобразования используем для построения новых решений системы (3.51) – (3.54).

Стационарные решения системы (3.51) – (3.54)

Поскольку система (3.51) – (3.54) допускает оператор $X_0 = \partial_t$, то можно искать инвариантные решения этой системы, не зависящие от переменной t . Такие решения определяются из системы

$$\begin{aligned} v_j\partial_j v_i &= \partial_i \sigma_{ij}, \sigma_{ij} - \delta_{ij}p = \lambda e_{ij} = \lambda(\partial_j v_i + \partial_i v_j)/2, \\ \partial_i v_i &= 0, \\ a_{11}(\sigma_{11} - p)^2 + a_{22}(\sigma_{22} - p)^2 + a_{33}(\sigma_{33} - p)^2 + 2(a_{12}\sigma_{12}^2 + a_{13}\sigma_{13}^2 + a_{23}\sigma_{23}^2) &= 1. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Система (3.57) проще, чем исходная система уравнений, поскольку имеет меньше независимых переменных, но ее решений, кроме тривиальных, насколько известно авторам, нет [4, 32, 35, 37, 156].

А) Будем искать инвариантное решение системы (3.57) относительно двумерной подалгебры, порождаемой операторами $\partial_y + A\partial_p, \partial_z + B\partial_p$. Это решение следует искать в виде

$$u = u(x), v = v(x), w = w(x), p = Ay + Bz + p(x) \quad (3.58)$$

Здесь A, B - произвольные постоянные, а функции u, v, w, p определяются из системы (3.57). Подставляем соотношения (3.57) в (3.58).

Имеем

$$u = const, \partial_x \sigma_{11} = 0, u\partial_x v = \partial_x \sigma_{12} + A, u\partial_x w = \partial_x \sigma_{13} + B \quad (3.59)$$

Из (3.59) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций v, w

$$u\partial_x v = d_x \frac{2k_s d_x v}{\sqrt{a_{12}(d_x v)^2 + a_{13}(d_x w)^2}} + A, u\partial_x w = d_x \frac{2k_s d_x w}{\sqrt{a_{12}(d_x v)^2 + a_{13}(d_x w)^2}} + B, \quad (3.60)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p = const$$

Введем новые искомые функции по формулам

$$\sqrt{a_{12}d_x v} = h \sin \varphi, \sqrt{a_{13}d_x w} = h \cos \varphi \quad (3.61)$$

Тогда система (3.60) запишется так

$$uh \sin \varphi = \varphi' \cos \varphi + A, uh \cos \varphi = -\varphi' \sin \varphi + B \quad (3.62)$$

Из (3.62) получаем

$$\frac{d\varphi}{-A \cos \varphi + B \sin \varphi} = dx.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi + \theta}{2} \right| = x + C, \text{ где } \sin \theta = -\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Отсюда получаем

$$\varphi = -\theta + 2\operatorname{arctg}\left(\exp\exp(x+C)\sqrt{A^2+B^2}\right),$$

$$h = \begin{cases} \frac{1}{u} \left(-2 \frac{\exp\exp(x+C)\sqrt{A^2+B^2}}{1+\exp^2(x+C)\sqrt{A^2+B^2}} \right) \operatorname{tg}\varphi + \frac{B}{u\cos\varphi}, & \text{если } \cos\varphi \neq 0, \\ \frac{1}{u} \left(2 \frac{\exp\exp(x+C)\sqrt{A^2+B^2}}{1+\exp^2(x+C)\sqrt{A^2+B^2}} \right) \operatorname{ctg}\varphi + \frac{A}{u\sin\varphi}, & \text{если } \cos\varphi = 0, \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\sigma_{12} = \sin\varphi / \sqrt{a_{12}}, \sigma_{13} = \cos\varphi / \sqrt{a_{13}}.$$

Исследуем поведение функций, входящих в формулы (3.63).

Пусть x меняется от $-\infty$ до $+\infty$ в этом случае $\exp(x+C)\sqrt{A^2+B^2}$ монотонно возрастает от нуля до $+\infty$, $2\operatorname{arctg}\left(\exp(x+C)\sqrt{A^2+B^2}\right)$ монотонно возрастает от нуля до π . При этом φ изменяется от $-\theta$ до $-\theta+\pi$. Теперь, в силу формул (3.63), становится понятно, как меняются компоненты тензора напряжений.

Это небольшое исследование позволяет интерпретировать полученное решение следующим образом. Имеются две жесткие шероховатые плиты $x = x_1 = \text{const}$, $x = x_2 = \text{const}$. Пластический материал продавливается между ними. На плитах заданы касательные напряжения σ_{12}, σ_{13} .

Б) Будем искать инвариантное решение системы (3.57) относительно одномерной подалгебры, порождаемой оператором $\frac{1}{\alpha}\partial_x + \frac{1}{\beta}\partial_y - \frac{2}{\gamma}\partial_z$. Это решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} u &= Ag(\alpha x + \beta y + \gamma z), v = Bg(\alpha x + \beta y + \gamma z), \\ w &= Cg(\alpha x + \beta y + \gamma z). p = F(\alpha x + \beta y + \gamma z) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Здесь $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ - произвольные постоянные, а функции g, F определяются из системы (3.56). Подставляем соотношения (3.64) в (3.57). Получаем следующие соотношения между функциями и постоянными

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0, p = \text{const}, \quad (3.65)$$

g - произвольная гладкая функция

Из (3.64) и (3.65) следует, что все компоненты тензора напряжений – постоянны и имеют вид:

$$\sigma_{11} = p + \frac{\alpha A}{D}, \sigma_{22} = p + \frac{\beta B}{D}, \sigma_{33} = p + \frac{\gamma C}{D}, \sigma_{12} = \frac{\beta A + \alpha B}{2D}, \sigma_{13} = \frac{\gamma A + \alpha C}{2D}, \sigma_{23} = \frac{\gamma B + \beta C}{2D},$$

$$D^2 = (a_{11}(\alpha A)^2 + a_{22}(\beta B)^2 + a_{33}(\gamma C)^2 + a_{12}/2(\beta A + \alpha B)^2 + a_{13}/2(\gamma A + \alpha C)^2 + \frac{a_{23}}{2}(\gamma B + \beta C)^2)$$

Подобное решение, при отсутствии конвективных членов было построено в [91].

Деформация нестационарного решения системы (3.51) – (3.54)

А) Рассмотрим стационарное решение (3.58) – (3.63), построенное в предыдущем пункте, и с помощью преобразований (3.56) деформируем в нестационарные решения исходной системы (3.51) – (3.54).

Имеем

$$\varphi = -\theta + 2\arctg\left(\exp\exp(x + a_3 f_1(t) + C)\sqrt{A^2 + B^2}\right) \quad (3.66)$$

В этом случае касательные напряжения σ_{12}, σ_{13} уже не являются постоянными на плитах, как это было в предыдущем пункте, а меняются в зависимости от выбранной функции $f_1(t)$, входящей в функцию (3.66). Такое решение можно интерпретировать воздействием вибрационных нагрузок на плиты $x = x_1 = const, x = x_2 = const$. При этом сами плиты тоже меняют свою форму $x + a_3 f_1(t) = x_1, x + a_1 f_1(t) = x_2$. Здесь a_3 - групповой параметр, который можно фиксировать, если $a_3 = 0$, то получаем исходное стационарное решение.

Б) Рассмотрим второе стационарное решение (3.64). Его с помощью преобразований (3.55), аналогично предыдущему решению, деформируем в нестационарные решения исходной системы (3.51) - (3.54). Для этого используем замечательное свойство точечных симметрий, что они решение системы (3.51) - (3.54) снова переводят в точные решения этой же системы.

Система (3.51) - (3.54) допускает операторы

$$S = \varphi(t)\partial_p, T_i = f_i(t)\partial_{x_i} + \dot{f}_i(t)\partial_{v_i} - x_i \ddot{f}_i(t) \frac{\partial}{\partial p}, i = 1, 2, 3.$$

Это означает, что она не меняется при преобразованиях

$$\begin{aligned}x'_i &= x_i + a_{i+2}f_i(t), v'_i = v_i + a_{i+2}\dot{f}_i(t), \\p' &= p - \sum_{i=1}^3 a_{i+2}x_i\ddot{f}_i(t) + a_2\varphi(t).\end{aligned}\tag{3.67}$$

Здесь переменные без штриха - исходные, а переменные со штрихом получены в результате точечных преобразований, соответствующих подалгебре, порожденной операторами S, T_i . Здесь a_i - групповые параметры, которые непрерывно меняются в некоторой окрестности нуля.

Пусть v_i^1, p^1 - какое-то решение системы (3.51) - (3.54), тогда, согласно (3.67) v_i^2, p^2 есть новое решение этой же системы

$$\begin{aligned}v_1^2 &= v_1^1(t, x_1 + a_3f_1(t), x_2 + a_4f_2(t), x_3 + a_5f_3(t)) + a_3\dot{f}_1(t), \\v_2^2 &= v_2^1(t, x_1 + a_3f_1(t), x_2 + a_4f_2(t), x_3 + a_5f_3(t)) + a_4\dot{f}_2(t), \\v_3^2 &= v_3^1(t, x_1 + a_3f_1(t), x_2 + a_4f_2(t), x_3 + a_5f_3(t)) + a_5\dot{f}_3(t), \\p^2 &= p^1(t, x_1 + a_3f_1(t), x_2 + a_4f_2(t), x_3 + a_5f_3(t)) - \sum_{i=1}^3 x_i a_{i+2}\ddot{f}_i(t),\end{aligned}\tag{3.68}$$

тоже является точным решением этой же системы. Используем это свойство для построения новых решений системы (3.51) - (3.54). Применим формулы (3.68) к решению, построенному в пункте А).

Имеем

$$\begin{aligned}u &= Ag\left(\alpha(x + f_1(t)) + \beta(y + f_2(t)) + \gamma(z + f_3(t))\right) + \dot{f}_1(t), \\v &= Bg\left(\alpha(x + f_1(t)) + \beta(y + f_2(t)) + \gamma(z + f_3(t))\right) + \dot{f}_2(t), \\w &= Cg\left(\alpha(x + f_1(t)) + \beta(y + f_2(t)) + \gamma(z + f_3(t))\right) + \dot{f}_3(t), \\p &= -x\ddot{f}_1(t) - y\ddot{f}_2(t) - z\ddot{f}_3(t) + \varphi(t).\end{aligned}\tag{3.69}$$

В результате построено новое нестационарное поле скоростей, которое соответствует следующему напряженному состоянию

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= p + \frac{\alpha A}{D}, \sigma_{22} = p + \frac{\beta B}{D}, \sigma_{33} = p + \frac{\gamma C}{D}, \sigma_{12} = \frac{\beta A + \alpha B}{2D}, \\ \sigma_{13} &= \frac{\gamma A + \alpha C}{2D}, \sigma_{23} = \frac{\gamma B + \beta C}{2D}, \\ D^2 &= (a_{11}(\alpha A)^2 + a_{22}(\beta B)^2 + a_{33}(\gamma C)^2 + a_{12}/2(\beta A + \alpha B)^2 + \\ &+ a_{13}/2(\gamma A + \alpha C)^2 + \frac{a_{23}}{2}(\gamma B + \beta C)^2), \\ p &= -x\ddot{f}_1(t) - y\ddot{f}_2(t) - z\ddot{f}_3(t) + \varphi(t).\end{aligned}$$

Новое автомодельное решение системы уравнений (3.51) - (3.54)

Построим инвариантное решение на подалгебре $M = t\partial_t + x_i\partial_{x_i}$. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} u &= u(\xi, \eta, \zeta), v = v(\xi, \eta, \zeta), w = w(\xi, \eta, \zeta), \\ p &= p(\xi, \eta, \zeta), \xi = \frac{x_1}{t}, \eta = \frac{x_2}{t}, \zeta = \frac{x_3}{t} \end{aligned} \quad (3.70)$$

В литературе, такие решения принято называть автомодельными.

Подставляем (3.70) в систему уравнений (3.51) - (3.54). Получим

$$\begin{aligned} (u - \xi)\partial_\xi u + (v - \eta)\partial_\eta u + (w - \zeta)\partial_\zeta u &= \partial_\xi \sigma_{11} + \partial_\eta \sigma_{12} + \partial_\zeta \sigma_{13}, \\ (u - \xi)\partial_\xi v + (v - \eta)\partial_\eta v + (w - \zeta)\partial_\zeta v &= \partial_\xi \sigma_{12} + \partial_\eta \sigma_{22} + \partial_\zeta \sigma_{23}, \\ (u - \xi)\partial_\xi w + (v - \eta)\partial_\eta w + (w - \zeta)\partial_\zeta w &= \partial_\xi \sigma_{13} + \partial_\eta \sigma_{23} + \partial_\zeta \sigma_{33} \\ \partial_\xi u + \partial_\eta v + \partial_\zeta w &= 0, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$a_{11}(\sigma_{11} - p)^2 + a_{22}(\sigma_{22} - p)^2 + a_{33}(\sigma_{33} - p)^2 + 2(a_{12}\sigma_{12}^2 + a_{13}\sigma_{13}^2 + a_{23}\sigma_{23}^2) = 1.$$

Система уравнений (3.71) проще, чем исходная систем уравнений, поскольку содержит на одну независимую переменную меньше.

Будем искать решение системы уравнений (3.71) в следующем виде

$$u = \xi, v = \eta, w = -2\zeta + f(\xi, \eta), p = p(\xi, \eta, \zeta), \quad (3.72)$$

где $f(\xi, \eta)$ - гладкая функция.

Подставляя (3.72) в (3.71), получаем

$$\begin{aligned} \partial_\xi \sigma_{11} &= 0, \\ \partial_\eta \sigma_{22} = 0, 2(-f + 3\zeta) &= \partial_\xi \sigma_{13} + \partial_\eta \sigma_{23} + \partial_\zeta p \end{aligned} \quad (3.73)$$

Заметим, что уравнение несжимаемости удовлетворяется тождественно.

Из системы (3.73) получаем

$$\sigma_{11} = \sigma_{22}, p = 3\zeta^2 + \sigma_{11}, -2f = \partial_\xi \sigma_{13} + \partial_\eta \sigma_{23}$$

Из последнего уравнения системы (3.73) следует уравнение для определения функции f

$$\begin{aligned} -2f &= \partial_\xi \frac{f_\xi}{\sqrt{a_{11} + a_{22} - 2a_{33} + a_{12}f_\xi^2 + a_{13}f_\eta^2}} \\ &+ \partial_\eta \frac{f_\eta}{\sqrt{a_{11} + a_{22} - 2a_{33} + a_{12}f_\xi^2 + a_{13}f_\eta^2}} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Уравнение (3.74) встречается при изучении поверхностей равновесия в гидромеханике невесомости [8]. Оно же встречается в теории пластичности [110] при описании медленных нестационарных течений в цилиндрическом канале, образующие которого параллельны оси z .

В общем случае решить уравнение (3.74) затруднительно, поэтому рассмотрим частный случай, когда $f = f(\xi)$. В этом случае получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое допускает понижение порядка и сводится к уравнению первого порядка вида

$$f'_{\xi} = \pm \frac{\sqrt{1+(2a_{33}-a_{11}-a_{22})a_{12}^2(f^2+C)^2}}{a_{12}^{\frac{3}{2}}(f^2+C)}, \quad (3.75)$$

где C – произвольная постоянная. Уравнение (3.75) решается квадратурами и решение записывается в виде эллиптических интегралов первого и второго родов.

Для удобства интерпретации построенного решения, преобразуем переменные следующим образом. Введем новые независимые переменные по формулам $x' = -mx, y' = -my, z' = mz, t' = h - mt$. Здесь m, h – положительные постоянные. Это преобразование сделать можно, поскольку исходная система допускает операторы растяжения и переноса. В этом случае построенное решение имеет вид

$$u = \frac{-mx}{h - mt}, v = \frac{-my}{h - mt}, w = \frac{2mz}{h - mt} + f\left(\frac{-mx}{h - mt}\right).$$

Это решение можно интерпретировать как пластическое течение слоя, расположенного вдоль оси oz , который сжимается жесткими и шероховатыми плитами в направлениях x и y . При этом плиты сближаются с постоянной скоростью m . Тогда $2H = h - mt$, толщина слоя в момент времени t .

Обобщение решения Аннина на анизотропный случай

В этом пункте обобщим решение Б.Д. Аннина [4] на анизотропный случай. Для этого найдем инвариантное решение на двумерной подалгебре, порожденной операторами

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \langle \dot{f}_1(t)\partial_x + \dot{f}_1(t)\partial_u - x\ddot{f}_1(t)\frac{\partial}{\partial p}, \dot{f}_2(t)\partial_y + \dot{f}_2(t)\partial_v - y\ddot{f}_2(t)\frac{\partial}{\partial p} \rangle.$$

Его следует искать в виде

$$\begin{aligned} u &= \frac{\dot{f}_1}{f_1} x + B^1(t, z) = A^1 x + B^1, \\ v &= \frac{\dot{f}_2}{f_2} y + B^2(t, z) = A^2 x + B^2, \\ w &= A^3(t)x + B^3(t), \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$p = -\frac{x^2 \ddot{f}_1}{2f_1} - \frac{y^2 \ddot{f}_2}{2f_2} + B^3(t, z) = -\frac{x^2}{2} (\dot{A}^1 + (A^1)^2) - \frac{y^2}{2} (\dot{A}^2 + (A^2)^2) + B^4(t, z).$$

Здесь A^i, B^i - функции, определяемые из системы (3.51) - (3.54).

Подставляя (3.76) в систему уравнений (3.51) - (3.54), получаем

$$A^3 = -A^1 - A^2,$$

$$p = -\frac{x^2}{2} (\dot{A}^1 + (A^1)^2) - \frac{y^2}{2} (\dot{A}^2 + (A^2)^2) - \frac{z^2}{2} (\dot{A}^3 + (A^3)^2) + (t)x + b_2(t)y + \lambda A^3$$

$$S_{11} = \lambda A^1, S_{22} = \lambda A^2, S_{33} = \lambda A^3, S_{12} = 0, S_{13} = \lambda \partial_z B^1, S_{23} = \lambda \partial_z B^2,$$

$$\lambda^{-2} = a_{11}(A^1)^2 + a_{22}(A^2)^2 + a_{33}(A^3)^2 + 2(a_{12}(\partial_z B^1)^2 + a_{13}(\partial_z B^2)^2).$$

Здесь b_i - произвольные функции от t . Функции A^i, B^i определяются из уравнений

$$\dot{B}^1 - b_1 + A^1 B^1 + (A^3 z + B^3) \partial_z B^1 = \partial_z (\lambda B^1),$$

$$\dot{B}^2 - b_2 + A^2 B^2 + (A^3 z + B^3) \partial_z B^2 = \partial_z (\lambda B^2).$$

Это решение может быть использовано для анализа пластического течения параллелепипеда, изготовленного из анизотропного материала, сжимаемого жесткими плитами.

Таким образом, в данном параграфе показано, как с помощью симметрий, можно стационарное решение уравнений пластичности превратить в целый класс нестационарных решений динамических уравнений пластичности. Эти решения можно использовать для анализа динамических технологических процессов. Кроме того, стандартными методами группового анализа построены новые решения динамических уравнений пластичности.

3.5 Решения динамических уравнений идеальной пластичности

Теории пластичности посвящена обширная литература. Это объясняется важностью и актуальностью рассматриваемых там задач. Эти задачи возникают при конструировании машин и механизмов, технологических процессах, использующих пластические деформации. Впервые понятия пластических деформаций использовал при конструировании своей знаменитой башни Эйфель. Это произошло после известных опытов Треска, приведших к возникновению понятия пластические деформации. В современных и классических статьях и монографиях ([32, 33, 35, 37, 60] и цитируемой там литературе) рассматриваются статические задачи или одномерные динамические. Это связано не с тем, что динамические задачи не важны для приложений, а с тем, что не разработаны методы для решения динамических задач. Впервые пространственное решение динамических уравнений пластичности построил Б.Д. Аннин [4] более 40 лет назад. Это решение было линейно по пространственным переменным и содержало несколько произвольных функций, зависящих от времени. Оно было построено Б.Д. Анниным с помощью группы точечных симметрий, допускаемых системой уравнений динамической теории пластичности. Позднее на основе групповых свойств уравнений были построены точные решения некоторых плоских динамических задач [4]. К сожалению, с тех пор новых решений пластичности не появилось. Здесь мы ссылаемся на изучение литературы и уникальный обзор [156].

В данном параграфе мы возвращаемся к построению точных решений динамических задач теории пластичности. Решения строятся как традиционными методами группового анализа, так и впервые применяемым способом – преобразованием стационарных решений в нестационарные.

Постановка задачи

Пусть $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ – ортогональная декартова система координат, $u = v_1, v = v_2, w = v_3$ – компоненты вектора скорости

деформаций, e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Компоненты тензора напряжений и компоненты вектора скорости удовлетворяют уравнениям движения

$$\frac{dv_i}{dt} = \partial_i \sigma_{ij}, i = 1, 2, 3 \quad (3.77)$$

где $\frac{dv_i}{dt} = \partial_i v_i + v_j \partial_j v_i$ называется полной или субстациональной производной.

По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Девиатор тензора напряжений и тензор скоростей деформации соосны

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij} p = \lambda e_{ij} = \lambda (\partial_j v_i + \partial_i v_j) / 2 \quad (3.78)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, λ – некоторая неотрицательная функция, $3p = \sigma_{ii}$.

Среда предполагается несжимаемой, поэтому имеет место уравнение несжимаемости

$$v_{i,i} = 0. \quad (3.79)$$

Система уравнений (3.77) – (3.79) замыкается условием пластичности Мизеса

$$(\sigma_{11} - p)^2 + (\sigma_{22} - p)^2 + (\sigma_{33} - p)^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 2k_s^2. \quad (3.80)$$

Здесь k_s - предел текучести при чистом сдвиге.

Групповые свойства уравнений динамической теории пластичности

Группа точечных симметрий, допускаемых уравнениями (3.77) - (3.80) имеет вид [4]. Она порождается следующими операторами:

$$\begin{aligned} X_0 &= \partial_t, M = t\partial_t + x_j \partial_{x_j}, \\ S &= \varphi(t) \partial_p, T_i = f_i(t) \partial_{x_i} + f'_i(t) \partial_{v_i} - x_i f''_i(t) \partial_p, \end{aligned} \quad (3.81)$$

по i не суммировать

$$Z_1 = x_2 \partial_{x_3} - x_3 \partial_{x_2} + v_2 \partial_{v_3} - v_3 \partial_{v_2}.$$

Еще два оператора Z_2, Z_3 получаются из Z_1 круговой перестановкой индексов. Функции $\varphi(t), f_i(t)$ являются произвольными из класса C^∞ , поэтому операторы (3.81) порождают бесконечномерную алгебру Ли.

Замечательным свойством точечных симметрий (3.81) является то, что они решение системы (3.77) - (3.80) снова переводят в точные решения этой же системы. Пусть v_i^1, p^1 - какое-то решение системы (3.77) - (3.80), тогда

$$\begin{aligned} v_j^2(t, x_1, x_2, x_3) &= v_j^1(t, x_1 + a_1 f_1(t), x_2 + a_2 f_2(t), x_3 + a_3 f_3(t)) + \\ a_j f'_j(t), p^2(t, x_1, x_2, x_3) &= p^1(t, x_1 + a_1 f_1(t), x_2 + a_2 f_2(t), x_3 + \\ & a_3 f_3(t)) - x_i f''_i(t) \end{aligned} \quad (3.82)$$

по $j=1,2,3$ не суммировать, $i=1,2,3$

тоже является точным решением этой же системы. Используем это свойство в пункте 3 для построения новых решений системы (3.77) - (3.80). Здесь a_i - групповые параметры, которые непрерывно меняются в некоторой окрестности нуля.

Стационарные решения системы (3.77) - (3.80)

Поскольку система (3.77) - (3.80) допускает оператор $X_0 = \partial_t$, то можно искать инвариантные решения этой системы, не зависящие от переменной t . Такие решения определяются из системы

$$\begin{aligned} v_j v_{i,j} &= \partial_i \sigma_{ij}, v_j v_{i,j} = \partial_i \sigma_{ij}, \sigma_{ij} - \delta_{ij} p = \lambda e_{ij} = \lambda (v_{i,j} + v_{j,i}) / 2, \\ v_{i,i} &= 0, (\sigma_{11} - p)^2 + (\sigma_{22} - p)^2 + (\sigma_{33} - p)^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 2k_s^2, \\ v_j \partial_j v_i &= \partial_i \sigma_{ij}, \lambda e_{ij} = \lambda (\partial_j v_i + \partial_i v_j), \partial_i v_i = 0, \\ v_{i,i} &= 0, (\sigma_{11} - p)^2 + (\sigma_{22} - p)^2 + (\sigma_{33} - p)^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 2k_s^2 \end{aligned} \quad (3.83)$$

Система (3.83) проще, чем исходная система уравнений, поскольку имеет меньше независимых переменных, но ее решений, кроме тривиальных, насколько нам известно, нет [4, 156]. Будем искать инвариантное решение системы (3.83) относительно двумерной подалгебры, порождаемой операторами $\partial_y + A\partial_p, \partial_z + B\partial_p$. Это решение следует искать в виде

$$u = u(x), v = v(x), w = w(x), p = Ay + Bz + p(x). \quad (3.84)$$

Здесь A, B - произвольные постоянные, а функции u, v, w, p определяются из системы (3.83). Подставляем соотношения (3.83) в (3.84), имеем

$$u = const, \partial_x \sigma_{11} = 0, u \partial_x v = \partial_x \sigma_{12} + A, u \partial_x w = \partial_x \sigma_{13} + B. \quad (3.85)$$

Из (3.85) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций v, w .

$$ud_x v = d_x \frac{2k_s d_x v}{\sqrt{(d_x v)^2 + (d_x w)^2}} + A, ud_x w = d_x \frac{2k_s d_x w}{\sqrt{(d_x v)^2 + (d_x w)^2}} + B, \quad (3.86)$$

$$\sigma_{11} = p = const$$

Замечание. Если постоянные $A=B=0$, то из (3.85) получаем только тривиальные решения.

Введем новые искомые функции в (3.86) по формулам

$$d_x v = h(x) \sin \varphi(x), d_x w = h(x) \cos \varphi(x) \quad (3.87)$$

Тогда система (10) запишется так

$$uh \sin \varphi = \varphi' \cos \varphi + A, uh \cos \varphi = -\varphi' \sin \varphi + B \quad (3.88)$$

Штрих означает производную по x .

Из (3.88) получаем

$$\frac{d\varphi}{-A \cos \varphi + B \sin \varphi} = dx.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi + \theta}{2} \right| = x + C, \text{ где } \sin \theta = -\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Отсюда следует

$$\varphi = -\theta + 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{A^2 + B^2} \exp(x + C) \right),$$

$$h =$$

$$\frac{1}{u} \left(-2 \frac{\sqrt{A^2 + B^2} \exp(x + C)}{1 + (A^2 + B^2) \exp^2(x + C)} \right) \operatorname{tg} \varphi + \frac{B}{u \cos \varphi}, \text{ если } \cos \varphi \neq 0 \quad (3.89)$$

$$\frac{1}{u} \left(2 \frac{\sqrt{A^2 + B^2} \exp(x + C)}{1 + (A^2 + B^2) \exp^2(x + C)} \right) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{A}{u \sin \varphi}, \text{ если } \cos \varphi = 0$$

$$\sigma_{12} = k_s \sin \varphi, \sigma_{13} = k_s \cos \varphi, v = \int_{x_1}^x h \sin \varphi dx, w = \int_{x_1}^x h \cos \varphi dx.$$

Исследуем поведение функций, входящих в формулы (3.89).

Пусть x меняется от $-\infty$ до $+\infty$, в этом случае $\sqrt{A^2 + B^2} \exp(x + C)$ монотонно возрастает от нуля до $+\infty$, $2 \operatorname{arctg}(\sqrt{A^2 + B^2} \exp(x + C))$ монотонно возрастает от нуля до π . При этом φ изменяется от $-\theta$ до $-\theta + \pi$. Теперь, в

силу формул (3.89), становится понятно, как меняются компоненты тензора напряжений σ_{12}, σ_{13} . Графики функций σ_{12}, σ_{13} приведены на рис. 3.2.

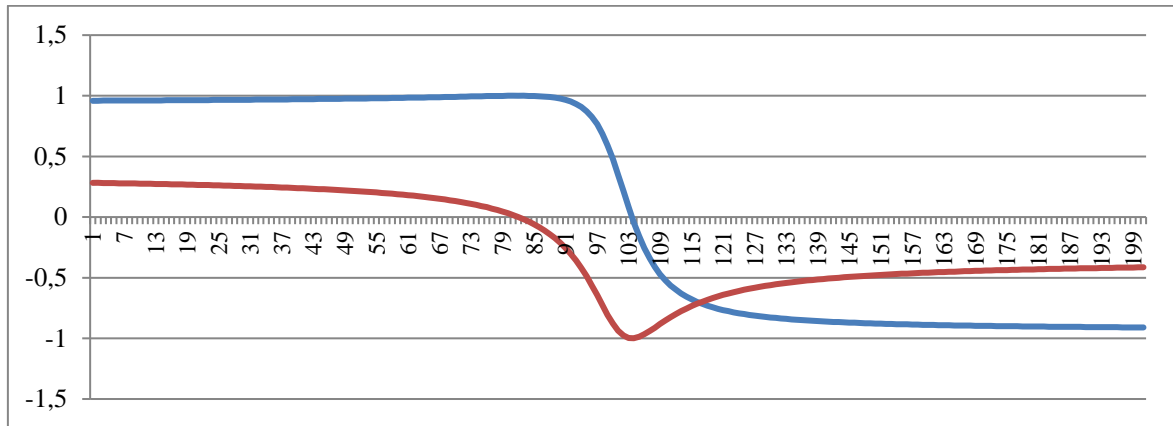


Рисунок 3.2 - Касательные напряжения для решения (3.90).

Синий график - σ_{12} , красный - σ_{13} . При этом $A=B=1, u = 1, \theta = -\frac{\pi}{4}, C = 0$.

Это позволяет интерпретировать полученное решение следующим образом. Имеются две жесткие шероховатые плиты $x = x_1 = const, x = x_2 = const$. Пластический материал продавливается между ними. На плитах заданы постоянные касательные напряжения σ_{12}, σ_{13} .

Деформация нестационарного решения системы (3.77) - (3.80)

Теперь стационарное решение, построенное в предыдущем пункте без труда, с помощью преобразований (3.81) деформируем в нестационарные решения исходной системы (3.77) - (3.80).

Имеем

$$\varphi = -\theta + 2\arctg(\exp(x + a_1 f_1(t) + C) \sqrt{A^2 + B^2}).$$

$$h =$$

$$\frac{1}{u} \left(-2 \frac{\sqrt{A^2+B^2} \exp(x+a_1 f_1(t)+C)}{1+(A^2+B^2) \exp^2(x+a_1 f_1(t)+C)} \right) \operatorname{tg} \varphi + \frac{B}{u \cos \varphi}, \text{ если } \cos \varphi \neq 0$$

$$\frac{1}{u} \left(2 \frac{\sqrt{A^2+B^2} \exp(x+a_1 f_1(t)+C)}{1+(A^2+B^2) \exp^2(x+a_1 f_1(t)+C)} \right) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{A}{u \sin \varphi}, \text{ если } \cos \varphi = 0$$
(3.90)

$$\sigma_{12} = \sin \varphi, \sigma_{13} = \cos \varphi, v = \int_{x_1+a_1 f_1(t)}^{x+a_1 f_1(t)} h \sin \varphi dx, w = \int_{x_1+a_1 f_1(t)}^{x+a_1 f_1(t)} h \cos \varphi dx$$

В этом случае касательные напряжения σ_{12}, σ_{13} уже не являются постоянными на плитах, как это было в предыдущем пункте, а меняются в зависимости от выбранной функции $f_1(t)$, входящей в (3.90). Такое решение можно использовать для описания течения пластического материала между плитами, которые находятся воздействием вибрационных нагрузок на плиты $x = x_1 = const, x = x_2 = const$. При этом сами плиты тоже меняют свою форму $x + a_1 f_1(t) = x_1, x + a_1 f_1(t) = x_2$. Здесь a_1 - некоторое фиксированное число, если $a_1 = 0$, то получаем исходное стационарное решение.

Автомодельное решение системы уравнений (3.77) - (3.80)

Построим инвариантное решение на подалгебре $M = t\partial_t + x_i\partial_{x_i}$. Оно имеет вид

$$u = u(\xi, \eta, \zeta), v = v(\xi, \eta, \zeta), w = w(\xi, \eta, \zeta), p = p(\xi, \eta, \zeta), \xi = \frac{x_1}{t}, \quad (3.91)$$

$$\eta = \frac{x_2}{t}, \zeta = \frac{x_3}{t}$$

В литературе такие решения принято называть «автомодельными».

Подставляем (3.91) в систему уравнений (3.77) - (3.80). Получим

$$(u - \xi)\partial_\xi u + (v - \eta)\partial_\eta u + (w - \zeta)\partial_\zeta u = \partial_\xi \sigma_{11} + \partial_\eta \sigma_{12} + \partial_\zeta \sigma_{13},$$

$$(u - \xi)\partial_\xi v + (v - \eta)\partial_\eta v + (w - \zeta)\partial_\zeta v = \partial_\xi \sigma_{12} + \partial_\eta \sigma_{22} + \partial_\zeta \sigma_{23},$$

$$(u - \xi)\partial_\xi w + (v - \eta)\partial_\eta w + (w - \zeta)\partial_\zeta w = \partial_\xi \sigma_{13} + \partial_\eta \sigma_{23} + \partial_\zeta \sigma_{33} \quad (3.92)$$

$$\partial_\xi u + \partial_\eta v + \partial_\zeta w = 0,$$

$$(\sigma_{11} - p)^2 + (\sigma_{22} - p)^2 + (\sigma_{33} - p)^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 2k_s^2$$

Система уравнений (3.92) проще, чем исходная система уравнений, поскольку содержит на одну независимую переменную меньше.

Будем искать решение системы уравнений (3.92) в следующем виде

$$u = \xi, v = \eta, w = -2\zeta + f(\xi, \eta), p = p(\xi, \eta, \zeta), \quad (3.93)$$

где $f(\xi, \eta)$ - гладкая функция.

Подставляя (3.93) в (3.92), получаем

$$\partial_\xi \sigma_{11} = \partial_\xi \frac{2k_s}{\sqrt{12 + f_\xi^2 + f_\eta^2}} = 0, \quad (3.94)$$

$$\partial_{\eta}\sigma_{22} = \partial_{\eta} \frac{2k_s}{\sqrt{12 + f_{\xi}^2 + f_{\eta}^2}} = 0, 2(-f + 3\zeta) = \partial_{\xi}\sigma_{13} + \partial_{\eta}\sigma_{23} + \partial_{\zeta}p$$

Заметим, что уравнение несжимаемости удовлетворяется тождественно.

Из системы (3.94) получаем

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{2k_s}{\sqrt{12 + f_{\xi}^2 + f_{\eta}^2}}, p = 3\zeta^2 + \sigma_{11}, -2f = \partial_{\xi}\sigma_{13} + \partial_{\eta}\sigma_{23} \quad (3.95)$$

Из последнего уравнения системы (3.95) следует уравнение для определения функции f

$$-2f = \partial_{\xi} \frac{2k_s f_{\xi}}{\sqrt{12 + f_{\xi}^2 + f_{\eta}^2}} + \partial_{\eta} \frac{2k_s f_{\eta}}{\sqrt{12 + f_{\xi}^2 + f_{\eta}^2}} \quad (3.96)$$

Уравнение (3.96) встречается при изучении поверхностей равновесия в гидромеханике невесомости [8]. Оно же встречается в теории пластичности [110] при описании медленных нестационарных течений в цилиндрическом канале, образующие которого параллельны оси z .

В общем случае решить уравнение (3.96) затруднительно, поэтому рассмотрим частный случай, когда $f = f(\xi)$. В этом случае получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое допускает понижение порядка и сводится к уравнению первого порядка вида

$$f'_{\xi} = \pm \frac{\sqrt{4*144 - (f^2 + C)^2}}{f^2 + C}, \quad (3.97)$$

где C – произвольная постоянная. Уравнение (3.97) решается квадратурами и решение записывается в виде эллиптических интегралов первого и второго родов.

Для удобства интерпретации построенного решения, преобразуем переменные следующим образом. Введем новые независимые переменные по формулам $x' = -tx, y' = -ty, z' = tz, t' = h - mt$. Здесь m, h – положительные постоянные. Это преобразование сделать можно, поскольку исходная система допускает операторы растяжения и переноса. В этом случае построенное решение имеет вид

$$u = \frac{-mx}{h - mt}, v = \frac{-my}{h - mt}, w = \frac{2mz}{h - mt} + f\left(\frac{-mx}{h - mt}\right).$$

Это решение можно интерпретировать как пластическое течение слоя, расположенного вдоль оси oz , который сжимается жесткими и шероховатыми плитами в направлениях x и y . При этом плиты сближаются с постоянной скоростью m . Тогда $2H = h - mt$, толщина слоя в момент времени t .

Таким образом, в данном параграфе показано, что для построения решений используются точечные симметрии, допускаемые уравнениями пластичности в динамическом случае. Эти симметрии позволяют преобразовать точные решения стационарных динамических уравнений в нестационарные решения. В построенные таким образом решения входят произвольные функции времени. Приведенное решение позволяет описать пластическое течение между плитами, которые меняют свою форму под действием динамических нагрузок. В параграфе приведено также новое пространственное автомодельное решение.

3.6 Решение краевых задач пластичности с помощью законов сохранения

Симметрии и законы сохранения позволяют с разных точек зрения изучать дифференциальные уравнения. Симметрии действуют на многообразии решений дифференциальных уравнений и поэтому позволяют двумя способами изучать и находить их решения. Первый способ состоит в нахождении так называемых неподвижных точек, т.е. таких решений, которые не меняются при действии некоторых симметрий. Так находятся инвариантные решения. Этот способ в полной мере реализован в работах Л.В. Овсянникова [155]. Второй подход часто декларируется, но редко реализуется. Его суть состоит в том, что на данное решение действуют симметриями и получают новые решения этой же системы дифференциальных уравнений. Он использован в работах [176, 178, 181, 183]. Препятствие к реализации этого метода могут служить «бедность»

допускаемой группы симметрий или трудность в интерпретации найденных «размноженных» решений. Сложностей в интерпретации удастся избежать, если действовать не на само решение, а на какие-то другие объекты, связанные с ним, например, на характеристики в случае гиперболических уравнений. Использование симметрий при решении краевые задач для систем дифференциальных уравнений наталкивается на значительные сложности, хотя попытки такого рода предпринимались, это объясняется, по-видимому, локальностью симметрий. Но при этом методика использования симметрий позволяет отыскивать и описывать достаточно широкие классы решений, причем достаточно эффективно.

Методика построения законов сохранения, по сути, двойственна к методике построения симметрий, и способы отыскания законов сохранения близки к способам нахождения симметрий. Но результаты существенно отличаются: законы сохранения позволяют решать краевые задачи, причем достаточно эффективно. Это продемонстрировано в ряде работ по решению краевых задач для уравнений пластичности и других уравнений механики сплошных сред [175, 179, 182, 184, 187].

Основные определения

Для простоты ограничимся случаем дифференциальных уравнений, зависящих от двух независимых x, y и двух зависимых переменных u, v . Этот случай более прост для понимания, наиболее исследован и часто встречается в задачах механики. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$F_1 = F_1(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0, \quad F_2 = F_2(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0, \quad (3.98)$$

где индекс внизу означает производную по соответствующему аргументу.

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (3.98) назовем выражение вида

$$D_x A + D_y B = \Omega_1(F_1) + \Omega_2(F_2), \quad (3.99)$$

где $\Omega_i, i = 1, 2$ - некоторые линейные дифференциальные операторы, одновременно не являющиеся тривиальными, D_x, D_y - операторы полного

дифференцирования по соответствующим переменным $D_x = \partial_x + u_x \partial_u + v_x \partial_v + \dots$, $D_y = \partial_y + u_y \partial_u + v_y \partial_v + \dots$.

Замечание. Это довольно простое определение подходит для изложения наших результатов. С более общим подходом можно ознакомиться в [190].

Определение. Вектор (A, B) называется сохраняющимся током.

Функции A и B в данном параграфе предполагаются зависящими только от x, y, u, v . Можно предположить, что A и B зависят также и от производных, но такие законы сохранения для системы (3.99) трудно поддаются интерпретации и поэтому здесь рассматриваться не будут.

Из (3.98) по формуле Римана следует.

$$\oint_C A dy - B dx = 0, \quad (3.100)$$

где C – замкнутый контур, в котором, для простоты, функции A и B не имеют особенностей. Покажем, как можно использовать законы сохранения (3.99) для разных типов дифференциальных уравнений.

Использование законов сохранения для решения гиперболических систем дифференциальных уравнений

Пусть (3.98) система гиперболических дифференциальных уравнений. Ее характеристики имеют вид

$$\Gamma_1: \frac{dy}{dx} = \alpha(u, v, x, y), \quad \Gamma_2: \frac{dy}{dx} = \beta(u, v, x, y), \quad (3.101.)$$

Эти характеристики исходят из концов отрезка кривой L $x_1 \leq x \leq x_2$ с заданными на ней условиями

$$u|_L = u_0, v|_L = v_0,$$

Пусть (x_p, y_p) – точка пересечения характеристик. (см. рис. 3.3)

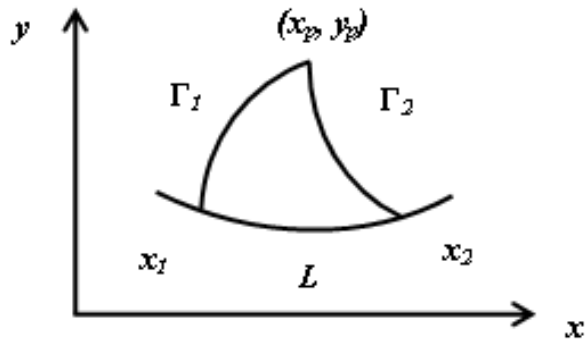


Рисунок 3.3 - Решение гиперболической системы дифференциальных уравнений

Найдем эту точку. В силу (3.100) имеем

$$\int_L A dy - B dx + \int_{\Gamma_1} A dy - B dx + \int_{\Gamma_2} A dy - B dx = 0 \quad (3.102)$$

Имеем

$$\int_{\Gamma_1} A dy - B dx = \int_{\Gamma_1} (A - \alpha B) dy = (A - \alpha B) y \Big|_{y_p}^{y_1} - \int_{\Gamma_1} y d(A - \alpha B),$$

$$\int_{\Gamma_2} A dy - B dx = \int_{\Gamma_2} (A - \beta B) dy = (A - \beta B) y \Big|_{y_2}^{y_p} - \int_{\Gamma_2} y d(A - \beta B).$$

Будем предполагать, что A и B - есть решение уравнения (3.99) со следующими граничными условиями

$$(A - \alpha B)|_{\Gamma_1} = const, (A - \beta B)|_{\Gamma_2} = const.$$

В этом случае из (3.102) можно определить координату y_p . Аналогичным образом определяется координата x_p . Таким образом, удается построить характеристики системы уравнений (3.98), а значит решить поставленную задачу. Тем более для многих задач механики построение характеристик часто дает больше информации для исследователя, чем нахождение решения в явном виде. Описанный метод эффективен, им решены задачи Коши и Римана для уравнений идеальной пластичности, а также некоторые задачи для других уравнений механики [40].

Таким образом, в данном параграфе рассмотрены законы сохранения специального вида для систем дифференциальных уравнений первого

порядка, зависящие от двух зависимых и независимых переменных. Показано как законы сохранения могут быть использованы для решения систем уравнений гиперболического и эллиптического типов, которые встречаются в теории пластичности. Приведены примеры эффективного применения описанной методики. С помощью законов сохранения найдена упруго–пластическая граница в задаче о напряженно деформированном состоянии пластины с отверстиями произвольной формы [188].

3.7 Построение линий разрыва напряжений для двумерной пластической области

В данном параграфе рассматриваются уравнения пластичности в двумерном случае и строятся линии разрыва напряжений. Построение линий разрыва напряжений основывается на факте: они находятся в точке пересечения линий одного семейства (характеристик) и направлены по биссектрисе угла образованными этими характеристиками. Поэтому для нахождения этих линий построены характеристики. Подобная задача проще решается в случае пластического кручения, тогда характеристика только одна, и она направлена по нормали к внешнему контуру, и найти линии скольжения и их точки пересечения достаточно просто. Поэтому большинство работ, посвященных построению линий разрыва напряжений, решает задачу именно пластического кручения для изотропных и анизотропных сред. Для задач плоской деформации пластического материала этот метод не достаточно развит, это объясняется сложностью построения линий скольжения для таких задач и наличием двух семейств линий скольжения.

Здесь построена гомотопия двух известных точных решений: Прандтля и Надаи, т.е. непрерывная трансформация одного решения в другое. При этом можно наблюдать эволюцию характеристик, которые зависят от группового параметра a . При $a=1$ получаются характеристики решения

Прандтля. При $a=0$ – характеристики решения Надаи. При $a=0,5$ характеристики одного семейства начинают пересекаться и возникают линии разрыва напряжений. Эти линии построены далее.

Вводные сведения

Линия разрыва напряжений – это некоторая линия (поверхность) в теле, на которой напряжения терпят разрыв. Причина появления разрывов при плоской деформации – переопределённость граничной задачи в окрестности особой точки с какой-либо одной стороны от контактной границы. Как правило, линии разрыва расположены в более прочной части соединения [25, 29]. При исследовании критического состояния и прочности конструкций необходимо учитывать это явление. То же относится и к стержневым конструкциям [25 - 26, 29 – 30, 140] и тонкостенным цилиндрическим оболочкам, где также имеет место переопределённость граничной задачи. Задача осложняется, если материал полосы неоднороден в менее прочной или (и) в более прочной части соединения [58].

Для построения линий разрыва напряжений, в случае плоской деформации, необходимо учитывать, что они находятся в точке пересечения линий характеристик одного семейства и направлены по биссектрисе угла образованными этими характеристиками. Поэтому для нахождения этих линий необходимо построить характеристики. Проще всего это сделать для задачи кручения, поскольку в этом случае характеристика направлена по нормали к внешнему контуру, и найти линии скольжения и их точки пересечения достаточно просто. Этому посвящено достаточное количество работ о пластическом кручении изотропных цилиндрических и призматических стержней в случае, когда боковая поверхность стержней свободна от касательных нагрузок, а также в случае, когда боковая поверхность стержня находится под действием внешнего переменного давления, рассмотрено в [33], [51]. Кручение анизотропных цилиндрических и призматических стержней исследовано в [36, 42, 50]. В [41] определено предельное состояние сектора анизотропного кругового кольца при

кручении. В [52] показано построение полей характеристик для цилиндрического стержня по произвольной поверхности текучести. В [16, 17, 108] рассматривались поверхности разрывов деформаций в упругопластических средах.

Для задач плоской деформации пластичного материала разрывные решения построить не просто. Это объясняется необходимостью рассматривать два семейства характеристик и сложностью построения этих линий скольжения. Для решения этой задачи построим непрерывную деформацию двух точных решений: гомотопию решений Прандтля и Надаи. Найдем точки пересечения линий скольжения одного семейства и построим линии разрыва.

Гомотопия решений Прандтля и Надаи

Рассмотрим систему плоской идеальной пластичности, состоящую из двух уравнений равновесия и условия пластичности, Треска-Сен-Венана-Мизеса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \end{aligned} \quad (3.103)$$

где σ_x , σ_y , τ_{xy} – компоненты тензора напряжений; k - предел текучести при чистом сдвиге.

Заменой продолженной М. Леви:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - k \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \sigma + k \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\theta, \end{aligned}$$

система (3.103) сводится к квазилинейной системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) = 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.104)$$

в которой σ – гидростатическое давление; $\theta - \frac{\pi}{4}$ – угол между первым главным направлением тензора напряжений и осью OX .

Решение Прандтля часто используются для описания сжатия жесткопластического материала шероховатыми плитами. Предполагается, что слой имеет значительно большую длину по сравнению с его толщиной. Это решение приближено описывает реальную ситуацию в некотором отдалении от центра слоя, если начало координат расположено в центре слоя.

В терминах переменных σ, θ для системы (3.104) это решение имеет вид:

$$\sigma = -p_1 - k \left(\frac{x}{h} - \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} \right), \quad (3.105)$$

$$y = h \cos 2\theta,$$

где $h = \text{const}$, $y = \pm h$ – границы плит, $p_1 = \text{const}$.

Граничные решения примут вид

$$\theta|_{y=h} = \pi n, n \in Z, \quad (3.106)$$

$$\sigma|_{y=h} = -p_1 - k \frac{x}{h}$$

Характеристики решения имеют следующий вид:

$$x = h(2\theta - \sin 2\theta) - h \left(2c_i + \frac{p_1}{k} \right), y = \pm h \cos 2\theta, i = 1, 2, \quad (3.107)$$

где $c_i = \text{const}$.

Решение Надаи описывает пластическое положение вокруг круглого отверстия радиуса R , нагруженного равномерно распределённым нормальным давлением $p_1 = \text{const}$ и нулевым касательным напряжением на контуре отверстия. Данное решение можно записать в виде:

$$\theta = \varphi + \frac{\pi}{4}, \quad (3.108)$$

$$\sigma = -p_2 + k + k \ln \frac{x^2 + y^2}{R^2} = -p_2 + k + k \ln \frac{r^2}{R^2},$$

где r, φ – полярные координаты.

Граничные условия принимают вид:

$$\theta|_{r=R} = \varphi + \frac{\pi}{4}, \quad (3.109)$$

$$\sigma|_{r=R} = p_2 + k,$$

Получившиеся линии скольжения имеют следующей вид:

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{4}, r = R \exp\left(\pm \theta + \frac{p_2 - k}{2k} + c_i\right) \quad (3.110)$$

где $c_i - const, i=3,4$.

Выразим решение Надаи и Прандтля как решение линеаризованной системы

$$x = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{Re} \frac{p_2 - k}{2k} e^{\frac{\sigma}{2k}}, \quad (3.111)$$

$$y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{Re} \frac{p_2 - k}{2k} e^{\frac{\sigma}{2k}},$$

$$x = -\frac{h\sigma}{k} - \frac{p_1 h}{k} - h \sin 2\theta, \quad (3.112)$$

$$y = h \cos 2\theta.$$

Выполняем гомотопическую линейную комбинацию решений Прандтля и Надаи

$$x = a\left(-\frac{h\sigma}{k} - \frac{p_1 h}{k} - h \sin 2\theta\right) + (1-a) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{Re} \frac{p_2 - k}{2k} e^{\frac{\sigma}{2k}}, \quad (3.113)$$

$$y = h \cos 2\theta - (1-a) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{Re} \frac{p_2 - k}{2k} e^{\frac{\sigma}{2k}},$$

где a – групповой параметр.

Получаем граничную кривую для решения (3.112)

$$\sigma = -p_1 + k; \quad \theta = \varphi + \frac{\pi}{4}$$

Подставляя $\sigma = 2k(a + \theta)$ в систему (3.105), получаем параметрические уравнения семейства линий скольжения

$$x = ah\left(2(c_1 + \theta) + \frac{p_1}{k} + \sin 2\theta\right) + (1-a) \operatorname{Re} \frac{p_2 - k}{2k} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{a+\theta}, \quad (3.114)$$

$$y = ah \cos 2\theta + (1-a) \operatorname{Re} \frac{p_2 - k}{2k} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{a+\theta}.$$

При этом мы можем наблюдать эволюцию характеристик, которые зависят от группового параметра a , при $a = 1$ получаются характеристики решения Прандтля (см. рис. 3.4).

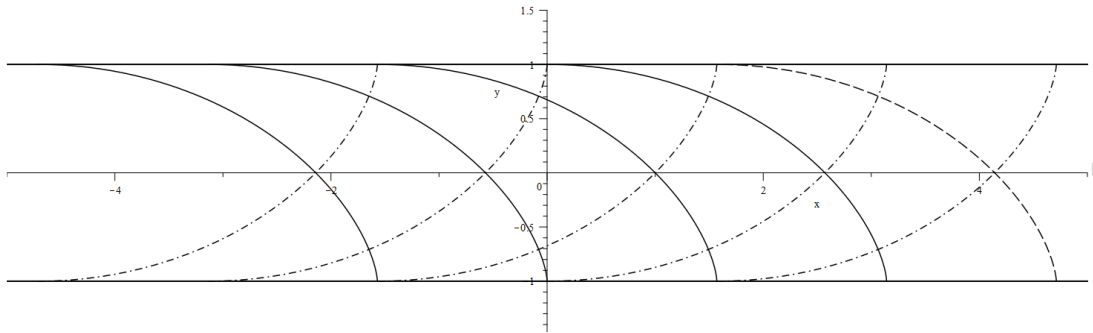


Рисунок 3.4 - Преобразованные линии скольжения. $h=1, p1=p2, a=1$

При $a=0$ характеристики решения Надаи представлены на рис. 3.5.

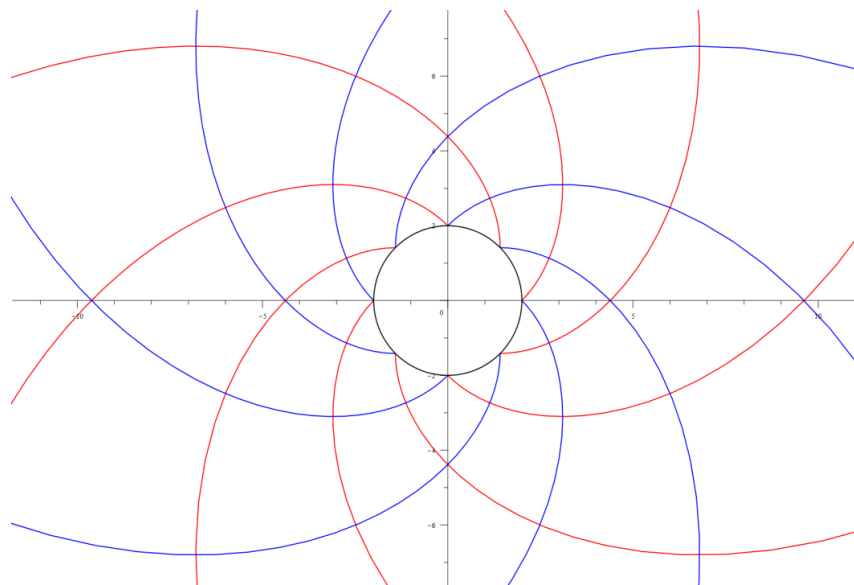


Рисунок 3.5 - Преобразованные линии скольжения. $a = 0$

При $a=0,5$ характеристики одного семейства начинают пересекаться и возникают линии разрыва напряжений как на рис. 3.6.

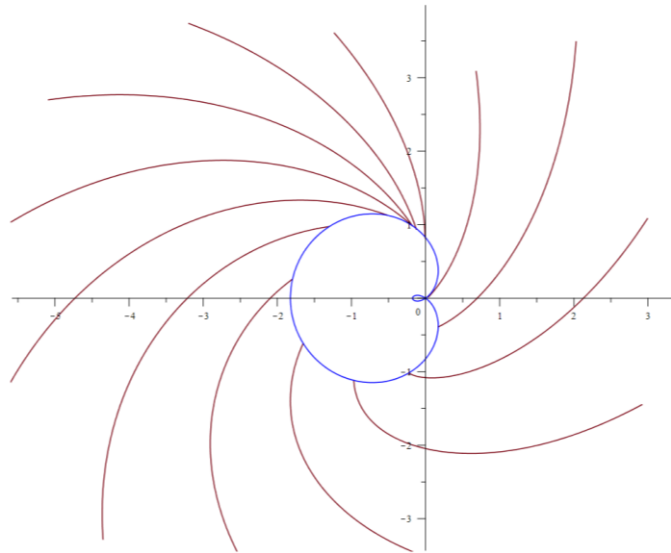


Рисунок 3.6 - Пересечение линий скольжения для отверстия в виде улитки Паскаля $a = 0,5$

Так как характеристики одного семейства пересекаются, то значения вдоль них различны, и решение задачи Коши после точки пересечения не может быть продолжено непрерывно, возникает линия разрыва напряжений. Эта линия разрыва проходит по биссектрисе угла, образованного пересекающимися характеристиками, и выходит из точки их пересечения в координатах $[-0,183; 0,991]$ (рис. 3.7).

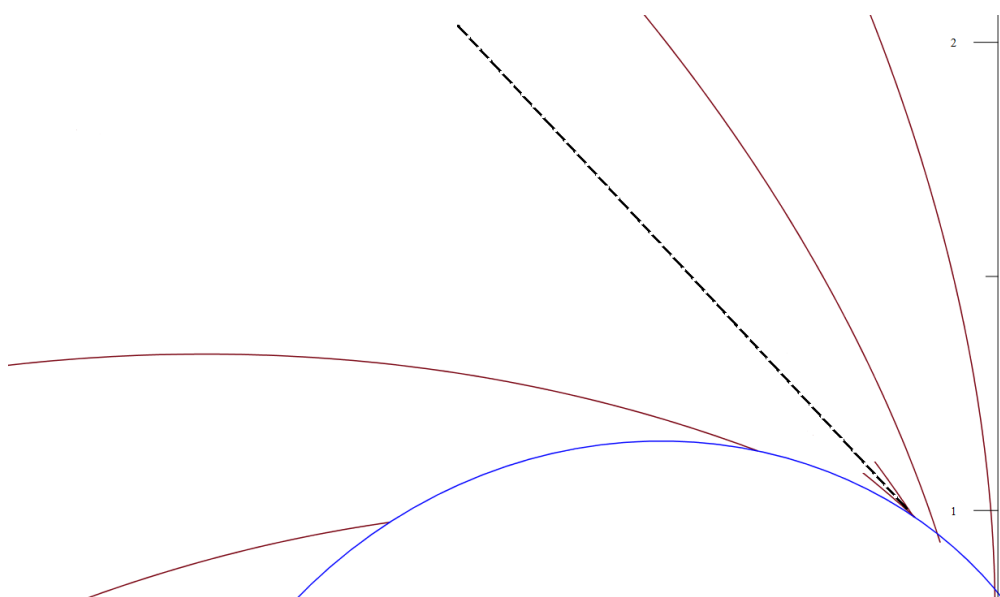


Рис. 3.7 - Линия разрыва напряжений

Таким образом, в данном параграфе построена гомотопия двух известных точных решений: Прандтля и Надаи, т.е. непрерывная трансформация одного решения в другое. При этом можно наблюдать эволюцию характеристик, которые зависят от группового параметра a . При $a=1$ получаются характеристики решения Прандтля. При $a=0$ характеристики решения Надаи. При $a=0,5$ характеристики одного семейства начинают пересекаться и возникают линии разрыва напряжений, которые проходят по биссектрисе угла пересечения характеристик и выходит из точки их пересечения. Если продолжить увеличение параметра a , пересекающихся характеристик становится больше, что усложняет построение линии разрыва напряжений.

3.8 Точные решения уравнения, описывающего антиплоское пластическое течение

Решение и исследование дифференциальных уравнений по-прежнему являются одной из важнейших задач современной математики. В линейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях исследуются вопросы разрешимости смешанных, нелокальных краевых и обратных задач, содержащие действительные параметры и дифференциальные операторы математической физики. Точные решения для линейных дифференциальных уравнений, как правило, находят либо с помощью метода Фурье, либо с использованием функции Грина.

Точные решения для нелинейных дифференциальных уравнений известны только в исключительных случаях. Для их поиска применяют методы обобщенного разделения переменных, методы группового анализа [155], метод дифференциальных связей и некоторые другие. Большой список решенных уравнений и обзор методов их решения приведен в фундаментальной работе [156]. В последнее время для решения краевых

задач для нелинейных дифференциальных уравнений начали использоваться законы сохранения [141, 145, 146, 152, 171]. Ранее они чаще всего играли вспомогательную роль. Групповой анализ в настоящее время все шире и шире применяется как для классификации не только дифференциальных, но и так называемых нелокальных уравнений. Способы использования группового анализа к разнообразным уравнениям, которые возникают в физике и механике можно увидеть в работах [91, 137, 138, 139, 142, 143, 144, 147, 148, 150, 191, 192].

Постановка задачи

Известно [35], что антиплоское пластическое течение описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением

$$\partial_x \left(\frac{w_x}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{w_y}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2}} \right) = 0, \quad (3.115)$$

где $w = w(x, y)$ - скорость деформации пластической среды вдоль оси oz .

Индекс внизу означает дифференцирование по соответствующему аргументу, все функции предполагаются гладкими.

Уравнение (3.115) приведем к виду

$$w_y^2 w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + w_x^2 w_{yy} = 0 \quad (3.116)$$

Это уравнение приведено в [156], там для него указаны только решения вида

$$w = f(ax + by), \quad (3.117)$$

где a, b - произвольные постоянные, f - произвольная гладкая функция.

Цель параграфа: исследовать групповые свойства уравнения (3.116) и найти его новые решения.

Точечные симметрии уравнения (3.116)

Пользуясь методикой Ли - Овсянникова [155] найдем точечные симметрии уравнения (3.116). Ищем допустимый оператор в виде

$$X = \xi^1 \partial_x + \xi^2 \partial_y + \eta \partial_w \quad (3.118)$$

где ξ^1, ξ^2, η - бесконечно дифференцируемые функции от x, y, w . Продолжим оператор (3.118) на вторые производные, получаем

$$X_2 = X + \zeta_1 \partial_{w_x} + \zeta_2 \partial_{w_y} + \tau_1 \partial_{w_{xx}} + \tau_2 \partial_{w_{xy}} + \tau_3 \partial_{w_{yy}}, \quad (3.119)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= D_x(\eta) - w_x D_x(\xi_1) - w_y D_x(\xi_2), \quad \zeta_2 = D_y(\eta) - w_x D_y(\zeta_1) - w_y D_y(\xi_2), \\ \tau_1 &= D_x(\zeta_1) - w_{xx} D_x(\xi_1) - w_{xy} D_x(\xi_2), \quad \tau_2 = D_x(\zeta_1) - w_{xx} D_y(\xi_1) - w_{xy} D_y(\xi_2), \\ \tau_3 &= D_y(\zeta_2) - w_{xy} D_y(\xi_1) - w_{yy} D_y(\xi_2). \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } D_x = \partial_x + w_x \partial_w + w_{xx} \partial_{w_x} + w_{xy} \partial_{w_y} + \dots, D_y = \partial_y + w_y \partial_w + w_{xy} \partial_{w_x} + w_{yy} \partial_{w_y} + \dots$$

операторы полного дифференцирования.

Действуем оператором (3.119) на уравнение (3.116), получаем

$$2\zeta_2 w_y w_{xx} + w_y^2 \tau_1 - 2\zeta_1 w_y w_{xy} - 2\zeta_2 w_x w_{xy} - 2w_x w_y \tau_2 + 2\zeta_1 w_x w_{yy} + w_x^2 w_{yy} = 0 \quad (3.120)$$

В уравнении (3.120) заменяем w_{xx} на его выражение из (3.116) по формуле

$$w_{xx} = (2w_x w_y w_{xy} - w_x^2 w_{yy}) / w_y^2$$

В результате получим полином первой степени по вторым производным w_{xy}, w_{yy} и четвертой степени по переменным w_x, w_y . Приравняем коэффициенты этого полинома к нулю. Решаем полученные дифференциальные уравнения относительно ξ^1, ξ^2, η . Получаем, что группа точечных симметрий порождается следующими операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_w, \quad X_4 = w \partial_w, \\ X_5 &= x \partial_x, \quad X_6 = y \partial_y, \quad X_7 = y \partial_x, \quad X_8 = x \partial_y. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Операторы (3.118) порождают следующие непрерывные преобразования

Трансляции

$$x' = x + a_1, \quad y' = y + a_2,$$

Растяжения

$$x' = x \exp a_4, \quad y' = y \exp a_5, \quad w' = w \exp a_6,$$

Вращения (порождают разность операторов $X_7 - X_8$)

$$x' = x \cos a_7 + y \sin a_7, \quad y' = y \cos a_7 - x \sin a_7,$$

Гиперболические повороты (порождают сумма операторов $x_7 + x_8$)

$$x' = x \operatorname{cha}_8 + y \operatorname{sha}_8, \quad y' = y \operatorname{cha}_8 - x \operatorname{sha}_8.$$

Здесь a_i - групповые параметры, которые меняются в некоторой окрестности нуля.

Знание операторов (3.118) позволяет описать инвариантные решения уравнения (3.116). Для описания существенно различных решений этого уравнения необходимо построить оптимальную систему одномерных подалгебр алгебры Ли L_8 , порождаемой операторами (3.118).

Определение. Две подалгебры $M \subset L_8$ и $N \subset L_8$ назовем подобными (сопряженными) если существует внутренний автоморфизм A алгебры L_8 такой, что $M = A(N)$.

Опишем действие внутренних автоморфизмов на операторы (3.118). Известно, что каждый оператор X_j порождает внутренний автоморфизм A_j , который действует на оператор X_i по следующей формуле

$$A_j(X_i) = X_i + b_j[X_i, X_j] + b_j^2/2![[X_i, X_j], X_j] + \dots$$

Здесь $[X, Y]$ - коммутатор соответствующих операторов, b_j - параметр из окрестности нуля.

Для удобства приведем таблицу коммутаторов алгебры Ли (4) [155].

Таблица 1. Таблица коммутаторов алгебры Ли

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	0	0	0	X_1	0	0	X_2
X_2	0	0	0	0	0	X_2	X_1	0
X_3	0	0	0		0	0	0	0
X_4	0	0	$-X_3$	0	0	0	0	0
X_5	$-X_1$	0	0	0	0	0	$-X_7$	X_8
X_6	0	$-X_2$	0	0	0	0	X_7	$-X_8$
X_7	0	$-X_1$	0	0	X_7	$-X_7$	0	X_6-X_5
X_8	$-X_2$	0	0	0	$-X_8$	X_8	X_5-X_6	0

В таблице на пересечении строки i и столбца j стоит коммутатор $[X_i, X_j]$.

Внутренние автоморфизмы действуют по следующим формулам

$$A_1(X_5) = X_5 + b_1 X_1, \quad A_1(X_8) = X_8 + b_1 X_2, \quad A_2(X_6) = X_6 + b_2 X_2, \quad A_2(X_7) = X_7 + b_2 X_1, \\ A_3(X_4) = X_4 + b_3 X_3, \quad A_4(X_3) = X_3 - b_4 X_3, \quad A_5(X_1) = X_1 - b_5 X_1, \quad A_5(X_7) = X_7 \exp(-b_5), \\ A_5(X_8) = X_8 \exp b_5, \quad A_6(X_2) = X_2 - b_6 X_2, \quad A_6(X_7) = X_7 \exp b_6, \quad A_6(X_8) = X_8 \exp(-b_6),$$

$$A_7(X_2) = X_2 - b_7 X_1, \quad A_7(X_5) = X_5 + b_7 X_7, \quad A_7(X_6) = X_6 - b_7 X_7, \\ A_7(X_8) = X_8 + b_7(X_6 - X_5) + b_7^2 X_7, \quad A_8(X_1) = X_1 - b_8 X_2, \quad A_8(X_5) = X_5 - b_8 X_8, \\ A_8(X_6) = X_6 + b_8 X_8, \quad A_8(X_7) = X_7 - b_8(X_6 - X_5) - b_8^2 X_8.$$

Рассмотрим одномерную подалгебру вида $X_1 + \sum_{i=2}^8 \alpha_i X_i$, где α_i -

некоторые постоянные, под действием автоморфизма A_5 получаем

$$X_1(1 - a_5) + \sum_{i=2}^8 \alpha'_i X_i, \quad \text{где } \alpha'_i - \text{ постоянные, которые изменились под действием}$$

автоморфизма A_5 . Если положить $a_5 = 1$, то исходная подалгебра будет

подобна подалгебре $\sum_{i=2}^8 \alpha'_i X_i$. Аналогично можно рассмотреть подалгебры

$$\text{вида } X_2 + \sum_{i=3}^8 \alpha_i X_i \text{ под действием автоморфизма } A_6, \text{ и подалгебру } X_3 + \sum_{i=4}^8 \alpha_i X_i$$

под действием автоморфизма A_4 . В результате получаем несопряженные

подалгебры вида $\alpha X_4 + \beta X_5 + \gamma X_6 + \delta X_7 + \varepsilon X_8$.

Эта подалгебра под действием автоморфизмов $A7$ и $A8$, при условии что $(\beta - \gamma)^2 - 4\varepsilon\delta \geq 0$ подобна подалгебре $\alpha'X_4 + \beta'X_5 + \gamma'X_6$, если же $(\beta - \gamma)^2 - 4\varepsilon\delta < 0$, то получаем еще две несопряженные подалгебры $\alpha X_4 + \beta X_5 + \delta X_7 + \varepsilon X_8$ и $\alpha X_4 + \beta X_6 + \delta X_7 + \varepsilon X_8$. В результате получаем следующую систему неподобных подалгебр

$$\alpha X_4 + \beta X_5 + \gamma X_6, \alpha X_4 + \beta X_5 + \delta X_7 + \varepsilon X_8, \alpha X_4 + \beta X_6 + \delta X_7 + \varepsilon X_8 \quad (3.122)$$

Найдем вид инвариантных решений на подалгебре $\alpha X_4 + \beta X_5 + \gamma X_6$. Имеем $w = x^{\alpha/\beta} f(x^\gamma / y^\beta)$, при $w = y^{\alpha/\gamma} f(x)$, при $\gamma \neq 0$. Здесь f - гладкая функция. Если $\beta = \gamma = 0$, то инвариантных решений нет.

Укажем вид некоторых инвариантных решений, построенных на этой подалгебре.

$$w^1 = \theta, \quad w^2 = r(C_1 e^\theta + C_2 e^{-\theta}), \quad w^3 = \frac{1}{r}(C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta). \quad (3.123)$$

Здесь r, θ - полярные координаты, C_i - постоянные.

Замечание. Для нахождения инвариантных решений на оставшихся двух типах подалгебр из (3.119) получены обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть $f(x, y)$ - некоторое решение уравнения (3.116), w - произвольная гладкая функция класса C^2 одного аргумента. Тогда $w(f(x, y))$ - есть решение уравнения (3.116).

Доказательство теоремы осуществляется простой проверкой.

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} w'^2 f_y'^2 (w'' f_x^2 + w' f_{xx}) - 2w' f_x w' f_y (w'' f_x f_y + w' f_{xy}) + w'^2 f_x'^2 (w'' f_y^2 + w' f_{yy}) = \\ = w'^3 (f_y'^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x'^2 f_{yy}) = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Законы сохранения уравнения (3.115)

Дадим неформальное определение закона сохранения. Законом сохранения уравнения F называется выражение вида

$$\partial_x A + \partial_y B = \omega F ,$$

где ω - линейный дифференциальный оператор, который не равен тождественно нулю. В этом случае (A, B) называется сохраняющимся током.

Уравнение (3.115) выведено из вариационного принципа и есть минимум функционала

$$Z(w) = \iint \sqrt{w_x^2 + w_y^2} dx dy = \iint L dx dy.$$

Для уравнений, выводимых из вариационного принципа, каждому оператору, допускаемому уравнением, соответствует, по теореме Нетер [155] некоторый закон сохранения. Используем эту теорему для уравнения (3.115). Заметим, что алгебра Ли, допускаемая уравнением (3.115) есть подалгебра алгебры Ли (4). Она порождается операторами

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 + X_6, X_7 - X_8.$$

Укажем эти законы сохранения.

Оператору X_1 соответствует закон сохранения $\partial_x (L - \frac{w_x^2}{L}) + \partial_y (-\frac{w_x w_y}{L}) = 0.$

Оператору X_2 соответствует закон сохранения $\partial_x (-\frac{w_x w_y}{L}) + \partial_y (L - \frac{w_y^2}{L}) = 0.$

Оператору X_3 соответствует закон сохранения $\partial_x (\frac{w_x}{L}) + \partial_y (\frac{w_y}{L}) = 0.$

Оператору X_4 соответствует закон сохранения $\partial_x (w \frac{w_x}{L}) + \partial_y (w \frac{w_y}{L}) = 0.$

Оператору $X_5 + X_6$ соответствует закон сохранения

$$\partial_x (xL - \frac{xw_x^2 + yw_x w_y}{L}) + \partial_y (yL - \frac{yw_y^2 + xw_x w_y}{L}) = 0.$$

Оператору $X_7 - X_8$ соответствует закон сохранения

$$\partial_x (yL - \frac{yw_x^2 - xw_x w_y}{L}) + \partial_y (-xL - \frac{-xw_y^2 + yw_x w_y}{L}) = 0.$$

Уравнение (3.115) имеет и другие законы сохранения. Для построения этих законов в уравнении (3.116) введем следующие обозначения $w_x = u, w_y = v$.

В этих обозначениях уравнение (3.116) запишется в виде системы уравнений

$$F_1 = v^2 u_x - 2uvu_y + u^2 v_y = 0, \quad F_2 = u_y - v_x = 0.$$

Пусть компоненты сохраняющегося тока зависят только от u, v , тогда имеем

$$\partial_x A + \partial_y B = A_u u_x + A_v v_x + B_u u_y + B_v v_y = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2.$$

Из этого соотношения, после исключения $\omega_i, i=1,2$ получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$v^2 (B_u + A_v) + 2uvA_u = 0, \quad v^2 B_v - u^2 A_u = 0. \quad (3.124)$$

Укажем некоторые решения уравнений (3.124). Пусть

$$A = av + F(u/v), B = -au + G(u/v), \quad (3.125)$$

где F, G - произвольные непрерывно дифференцируемые функции, a - произвольная постоянная.

Подставляем соотношения (3.125) в (3.124), получаем одно дифференциальное уравнение на две функции F, G , которое имеет вид

$$u / v F' + G' = 0. \quad (3.126)$$

Предложение. Уравнение (3.116) допускает бесконечную серию законов сохранения, причем компоненты сохраняющегося тока связаны уравнением (3.126).

Замечание. Систему уравнений (3.124) можно свести к линейному гиперболическому уравнению второго порядка

$$u^2 A_{uu} - 2uvA_{uv} - v^2 A_{vv} = 0. \quad (3.127)$$

Это уравнение имеет две характеристики

$$\xi = u^\alpha / v, \eta = u^\beta / v, \quad \alpha = \sqrt{2} - 1, \beta = -\sqrt{2} - 1.$$

Канонический вид уравнения (3.127) следующий

$$4\xi\eta A_{\xi\eta} - \sqrt{2}\xi A_{\xi} + \sqrt{2}\eta A_{\eta} = 0.$$

В настоящее время решений для этого уравнения, отличных от решения (3.125), неизвестно.

Таким образом, в данном параграфе найдена группа точечных преобразований, допускаемых уравнением (3.116) в смысле Ли - Овсянникова. Эта группа имеет размерность 8. Она порождается тремя переносами по пространственным переменным и искомой функции, тремя растяжениями по этим же переменным, круговому и гиперболическому вращениям в плоскости oxy . Найдены новые классы точных решений этого уравнения, зависящие от произвольных функций из класса C^2 . На основе точечных симметрий найдены шесть законов сохранения уравнения (3.116). Приведена новая бесконечная серия законов сохранения, которая найдена прямым вычислением.

ГЛАВА 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРУГО-ПЛАСТИЧНОСТИ

4.1 Упруго - пластический изгиб бруса поперечной силой

В параграфе с помощью законов сохранения построена упруго – пластическая граница для бруса, изгибаемого поперечной силой, когда точка приложения силы не лежит в центре тяжести поперечного сечения. В этом случае в бруске возникают изгибающие и крутящие моменты. Случай, когда точка приложения силы лежит в центре тяжести поперечного сечения, рассмотрен в предыдущих работах авторов. В работе построена бесконечная система законов сохранения, которая позволяет свести задачу вычисления упруго – пластическая границы к нескольким квадратурам, по внешнему контуру поперечного сечения. При этом контур может быть произвольным кусочно-гладким. Предполагается, что боковая поверхность бруса свободна от напряжений и находится в пластическом состоянии.

Вводные сведения

Задачи с неизвестными границами – одни из сложнейших, которые возникают при решении ряда проблем механики сплошных сред [53]. В теории пластичности к такому классу принадлежат задачи, в которых необходимо построить упруго – пластическую границу. Способы построения таких границ, для некоторых поперечных сечений, успешно решаются с помощью методов ТФКП и минимизации функционалов [6]. В работах авторов, с помощью законов сохранения, удалось построить упруго – пластические границы для стержней, границами которых служат произвольные кусочно- гладкие контуры [119]. Позднее оказалось, что эти методы могут быть применены и для нахождения упруго – пластических границ в изгибаемой консоли.

В работе [179] решена задача об упруго - пластическом изгибе бруса поперечной силой, если поперечная сила приложена к центру тяжести

поперечного сечения. В этом случае в брус возникает только изгибающие моменты. Если же поперечная сила приложена не к центру тяжести поперечного сечения, то в брус возникают еще и крутящие моменты. Этот случай и рассмотрен в данном параграфе.

Постановка задачи

Рассмотрим прямой брус постоянного сечения. Пусть он закреплен в сечении $z = 0$ и нагружен в концевом сечении $z = l$ силой с равнодействующей $\bar{P} = (P, 0, 0)$. Начало координат поместим в закрепленном конце, но предполагаем, что оно не совпадает с центром тяжести сечения бруса. Предполагаем также, что боковая поверхность бруса свободна от напряжений и находится в пластическом состоянии (рис. 4.1).

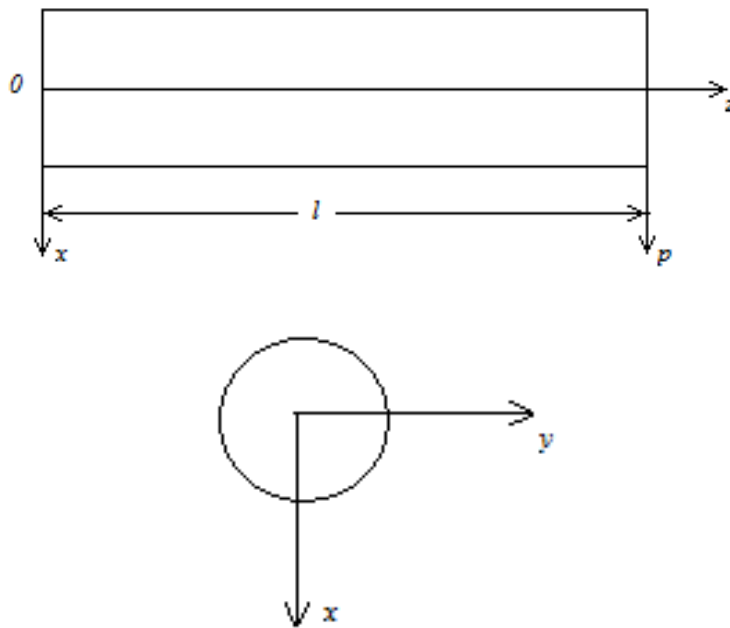


Рисунок 4.1 - Нагруженный прямой брус постоянного сечения

В этом случае [56] в упругой зоне компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} F_1 = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - P(\alpha_1(x - x_c) + \alpha_2(y - y_c)) = 0, \\ F_2 = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{1}{\mu} \left[K - \frac{Py}{2(1+\nu)} (\alpha_2 x - \alpha_1 y) \right] = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где (x_c, y_c) – координаты центра тяжести поперечного сечения,

$$\alpha_1 = \frac{I_{11}S - S_1^2}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{I_{12}S - S_1S_2}{\Delta}, \quad S = \iint dx dy, \quad S_1 = \iint y dx dy, \quad S_2 = \iint x dx dy,$$

$$I_{11} = \iint y^2 dx dy, \quad I_{12} = \iint xy dx dy, \quad I_{22} = \iint x^2 dx dy,$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} I_{22} & I_{12} & S_2 \\ I_{12} & I_{11} & S_1 \\ S_2 & S_1 & S \end{pmatrix}$$

Здесь I_{ij} – моменты инерции, S_1, S_2 – статические моменты инерции относительно осей x и y , λ, μ – упругие постоянные

$$\left\{ K = \frac{Py}{2(1+\nu)} (\alpha_2 x_c - \alpha_1 y_c). \right.$$

В результате нам необходимо решить систему уравнений (4.1) со следующими граничными условиями на контуре Γ , который ограничивает поперечное сечение.

$$\tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} l_2 = 0, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = 1. \quad (4.2)$$

Здесь l_1, l_2 компоненты вектора нормали к контуру Γ .

Первое уравнение из (4.2) означает, что боковая поверхность свободна от напряжений, а второе условие означает, что боковая поверхность находится в пластическом состоянии. Для простоты дальнейших вычислений предел текучести при чистом сдвиге считаем равным единице. Этого всегда можно добиться с помощью введения безразмерных переменных.

В силу сделанных выше предположений – пластическая область охватывает всю боковую поверхность (см. рис. 4.2).

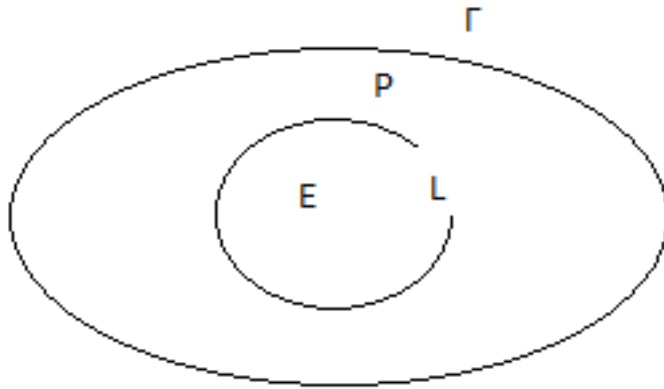


Рисунок 4.2. – Γ – внешняя граница, L – упруго-пластическая граница, P – пластическая область, E – упругая область

Необходимо решить следующую задачу: при сделанных предположениях определить неизвестную границу L .

Решение задачи

Определение. Пусть $F_1 = 0, F_2 = 0$ – система двух дифференциальных уравнений (4.1) от двух независимых переменных x, y . Законом сохранения называется соотношение,

$$\partial_x A + \partial_y B = \Delta_1 F_1 + \Delta_2 F_2 = 0,$$

которое выполняется на всех решениях системы $F_1 = 0, F_2 = 0$.

Здесь Δ_1, Δ_2 – некоторые линейные дифференциальные операторы.

Вектор (A, B) называется сохраняющимся током.

Построим законы сохранения для системы уравнений (4.1).

Сохраняющийся ток ищем в виде

$$A = a^1 u + b^1 v + \gamma^1, \quad B = a^2 u + b^2 v + \gamma^2 \quad (4.3)$$

где $\tau_{xz} = u, \tau_{yz} = v, a^i, b^i, \gamma^i$ – функции только x, y .

Тогда закон сохранения запишется так

$$\partial_x A + \partial_y B = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2 = 0 \quad (4.4)$$

В этом случае операторы Δ_1, Δ_2 сводятся к умножению на некоторые функции ω_i от независимых переменных. Подставляя (4.3) в (4.4), получаем

$$\begin{aligned}
& a_x^1 u + a^1 u_x + b_x^1 v + b^1 v_x + \gamma_x^1 + a_y^2 u + a^2 u_y + b_y^2 v + b^2 v_y + \gamma_y^2 = \\
& = \omega_1 (u_y - v_x - f(x, y)) + \omega_2 (u_x + v_y - g(x, y)).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь через f, g обозначены правые части уравнений (4.1).

Поскольку соотношение (4.5) выполняется тождественно, все коэффициенты при искомым функциях и их производных u, v, u_x, u_y, v_x, v_y должны быть равны нулю. В результате получаем

$$\begin{aligned}
& a_x^1 + a_y^2 = 0, \quad b_x^1 + b_y^2 = 0, \quad a^1 = \omega_2, \quad b^1 = -\omega_1, \quad a^2 = \omega_2, \quad b^2 = \omega_2, \\
& \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\omega_1 f - \omega_2 g.
\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$a^1 = b^2 = \omega_2, \quad b^1 = -a^2 = -\omega_1, \quad a_x^1 - b_y^1 = 0, \quad b_x^1 + a_y^1 = 0.$$

Для нахождения a^1, b^1 необходимо решить уравнения

$$a_x^1 - b_y^1 = 0, \quad b_x^1 + a_y^1 = 0 \tag{4.6}$$

Из (4.6), в частности, следует, что исследуемая система уравнений допускает бесконечное число нетривиальных законов сохранения.

Будем искать два особых решения уравнений (4.6), т.е. такие решения, которые имеют особенность в точке x_0, y_0 .

Первое решение уравнений (4.6), его обозначим $a_1^1, b_1^1, \gamma_1^1, \gamma_1^2$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
& a_1^1 = (y - y_0) / ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2), \quad b_1^1 = (x - x_0) / ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2), \\
& \frac{\partial \gamma_1^1}{\partial x} = b_1^1 f - a_1^1 g, \quad \gamma_1^2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Из (4.7) получаем

$$\begin{aligned}
& \gamma_1^1 = \alpha_1 x + \frac{1}{2} (\alpha_1 (x_0 - x_c) - \frac{(y - y_0) \nu P \alpha_2}{2\mu(1+\nu)}) \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + \\
& + (\alpha_2 \frac{y - y_c}{y - y_0} - \alpha_1 (y - y_0) + \frac{K}{\mu} - \frac{\nu P}{2(1+\nu)} (\alpha_2 x_0 - \alpha_1 y)) \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Второе решение уравнений (4.6) - обозначим его $a_2^1, b_2^1, \gamma_2^1, \gamma_2^2$ - имеет вид:

$$a_2^1 = -(x - x_0) / ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2), \tag{4.9}$$

$$b_2^1 = (y - y_0) / \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right), \frac{\partial \gamma_2^1}{\partial x} = b_2^1 f - a_2^1 g, \gamma_2^2 = 0.$$

Из (4.9) получаем

$$\begin{aligned} \gamma_2^1 = & \frac{\alpha_2 \nu P}{2(1+\nu)\mu} x + \left(\frac{1}{2} P \alpha_1 (y - y_0) - \right. \\ & - \frac{1}{2\mu} \left(K - \frac{\nu P \alpha_2}{(1+\nu)} (\alpha_2 x_0 - \alpha_1 y) \right) \ln \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right) + \\ & \left. + (P \alpha_1 (x_0 - x_c) + P \alpha_2 (y - y_c) - \frac{\nu P \alpha_2}{2(1+\nu)} (y - y_0)) \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Преобразуем полученные законы сохранения.

Закон сохранения (4.4) можно записать по формуле Грина:

$$\int_{\Gamma} (a^1 u + b^1 v + \gamma^1) dy - (-b^1 u + a^1 v + \gamma^2) dx = 0.$$

где Γ – произвольный кусочно-гладкий контур.

Пусть (x_0, y_0) – некоторые точки в области, охватываемой контуром Γ .

Рассмотрим эллипс, внутри которого находится точка (x_0, y_0) . Тогда получаем (см. рис. 4.3)

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (a^1 u + b^1 v + \gamma^1) dy - (-b^1 u + a^1 v + \gamma^2) dx + \\ & \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{(x-x_0)^2 + k^2(y-y_0)^2 = \varepsilon^2} (a^1 u + b^1 v + \gamma^1) dy + (-b^1 u + a^1 v + \gamma^2) dx = 0. \end{aligned}$$

Обход по контурам совершается так, что особая точка остается вне области, охватываемой контурами. Поскольку $\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = 0$, то получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (a^1 u + b^1 v + \gamma^1) dy - (-b^1 u + a^1 v + \gamma^2) dx = \\ & = \int_{\Gamma_1} (a^1 u + b^1 v + \gamma^1) dy - (-b^1 u + a^1 v + \gamma^2) dx + \\ & + \int_{\Gamma_2} (a^1 u + b^1 v + \gamma^1) dy - (-b^1 u + a^1 v + \gamma^2) dx = \\ & = - \int_{(x-x_0)^2 + k^2(y-y_0)^2 = \varepsilon^2} (a^1 u + b^1 v + \gamma^1) dy + (-b^1 u + a^1 v + \gamma^2) dx \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь интеграл в правой части вычисляется по кругу O : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$, в центре которого находится особая точка.

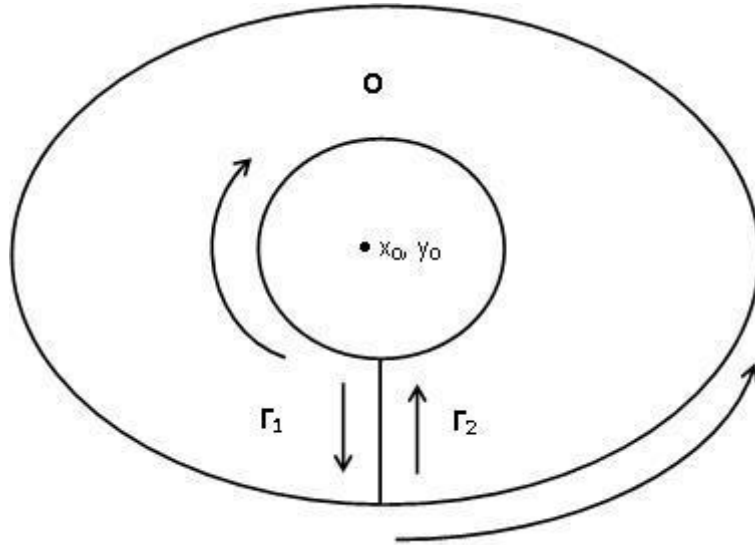


Рисунок 4.3 - Стрелками показано направление обхода границ

Пусть $a^1 = a_1^1$, $b^1 = b_1^1$, из (4.7), вычислим интеграл в правой части (4.11).

Имеем

$$-\int_0^1 (a_1^1 u + b_1^1 v + \gamma_1^1) dy + (-b_1^1 u + a_1^1 v + \gamma^2) dx \quad (4.12)$$

Пусть $x - x_0 = \varepsilon \sin \varphi$ $(y - y_0) = \varepsilon \cos \varphi$ тогда $a_1^1 = \frac{\cos \varphi}{\varepsilon}$ $b_1^1 = \frac{\sin \varphi}{\varepsilon}$ и

выражение (4.12) запишется так

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos \varphi}{\varepsilon} u + \frac{\sin \varphi}{\varepsilon} v + \gamma^1 \right) \varepsilon \sin \varphi d\varphi + \\ & - \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin \varphi}{\varepsilon} u + \frac{\cos \varphi}{\varepsilon} v + \gamma^2 \right) \varepsilon \cos \varphi d\varphi = \\ & = \int_0^{2\pi} ((-\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)v + (\cos \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \varphi)u + \gamma^1 \varepsilon \sin \varphi - \gamma^2 \varepsilon \cos \varphi) d\varphi = \\ & = -v(x_0, y_0) / 2 \int_0^{2\pi} d\varphi = -v(x_0, y_0) \pi. \end{aligned}$$

Для вывода этой формулы устремили $\varepsilon \rightarrow 0$ и воспользовались теоремой о среднем.

Следовательно

$$\pi m(x_0, y_0) = -\int_{\Gamma} (a_1^1 u + b_1^1 v + \gamma_1^1) dy - (-b_1^1 u + a_1^1 v + \gamma_1^2) dx \quad (4.13)$$

Теперь рассмотрим второе решение $a^1 = a_2^1$ $b^1 = b_2^1$

Поступая, так же как в первом случае, имеем

$$\begin{aligned}
 & - \int_0 \left(a_2^1 u + b_2^1 v + \gamma_2^1 \right) dy - \left(-b_2^1 u + a_2^1 v + \gamma_2^2 \right) dx = \\
 & = - \int_0 \left(\frac{(x-x_0)}{r} u - \frac{(y-y_0)}{r} v + \gamma_2^1 \right) dy - \left(\frac{(y-y_0)}{r} u + \frac{(x-x_0)}{r} v + \gamma_2^2 \right) dx = \\
 & = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \varphi}{\varepsilon} u - \frac{\cos \varphi}{\varepsilon} v + \gamma_2^1 \right) \varepsilon \sin \varphi d\varphi - \\
 & - \left(\frac{\cos \varphi}{\varepsilon} u + \frac{\sin \varphi}{\varepsilon} v + \gamma_2^2 \right) (\cos \varphi) \varepsilon d\varphi = \\
 & = \int_0^{2\pi} u (-\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = -u(x_0, y_0) \pi.
 \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left(a_2^1 u + b_2^1 v + \gamma_2^1 \right) dy - \left(-b_2^1 u + a_2^1 v + \gamma_2^2 \right) dx \quad (4.14)$$

Теперь осталось вычислить интеграл в правых частях формул (4.13), (4.14). Для этого воспользуемся формулами (4.2). Они позволяют вычислить $u = \tau_{xz}$, $v = \tau_{yz}$ на Γ .

Имеем

$$ul_1 + vl_2 = 0, \quad u^2 + v^2 = 1$$

Отсюда получаем выражения для $u = \tau_{xz}$, $v = \tau_{yz}$ на Γ .

$$u = -\frac{l_2}{l_1} v, \quad \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 v^2 + v^2 = 1$$

$$v^2 = \frac{l_1^2}{(l_2^2 + l_1^2)}, \quad v = \pm \frac{l_1}{\sqrt{(l_2^2 + l_1^2)}} \quad (4.15)$$

$$u = \mp \frac{l_2}{\sqrt{(l_2^2 + l_1^2)}} \quad (4.16)$$

В формулах (4.15) и (4.16) выбран верхний знак.

Подставляем (4.7) - (4.10) и (4.15), (4.16) в (4.13) и (4.14), и находим выражения для $u = \tau_{xz}$, $v = \tau_{yz}$ во всех точках в области, ограниченной контуром Γ . Это позволяет определить пластическую и упругую зоны. Те

точки, где $\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 < 1$, принадлежат упругой зоне, остальные попадают в пластическую зону.

Таким образом, в данном параграфе обращаем внимание, что решение такой сложной задачи, как построение неизвестной упруго-пластической границы, было сведено к вычислению нескольких квадратур.

4.2 Упругопластическая задача в случае неоднородной пластичности в условиях сложного сдвига

В параграфе решена плоская упругопластическая задача о напряженном состоянии в условиях сложного сдвига в теле, ослабленном отверстием, которое ограничено кусочно гладким контуром. Напряженное состояние сложного сдвига возникает в цилиндрическом теле бесконечной длины под действием нагрузок, направленных по образующим цилиндра и постоянным вдоль образующих. При этом при достаточно большой нагрузке в теле возникают как упругие, так и пластические зоны. Как и в любой задаче подобного рода возникает необходимость в нахождении заранее неизвестной границы, разделяющей упругую и пластическую зоны. Отыскание такой границы не простая задача, но специфика упругопластических задач о сложном сдвиге состоит в том, что решение подобных задач проще, чем решение аналогичных упругих задач.

Упругопластическим задачам о сложном сдвиге в случае однородной и изотропной пластичности посвящена обширная литература. Во всех статьях, в которых решаются задачи о сложном сдвиге, существенно используют представление напряжений и смещений в упругой зоне в комплексном виде. В предлагаемой работе решены задачи о сложном сдвиге с помощью законов сохранения. При этом предполагается, что предел текучести является функцией от координат точки, в которой исследуется напряженное состояние. Известно, что упругие свойства конструкционных материалов могут быть однородными и изотропными, а при этом их предел текучести и

прочности – неоднородными. Такая ситуация наблюдается, например, при нейтронной бомбардировке конструкционных материалов. В данном параграфе будет изучена именно такая ситуация. В параграфе приведены законы сохранения для уравнений, описывающих сложный сдвиг. При этом предполагалось, что компоненты сохраняющегося тока зависят от компонент тензора напряжений и координат. Компоненты тензора напряжений входят в них линейно. Задача о нахождении компонент сохраняющегося тока свелась к системе Коши-Римана. Решение этой системы позволили свести вычисления компонент тензора напряжений к криволинейному интегралу по контуру отверстия и тем самым найти границу между упругой и пластической областями.

Вводные сведения

Напряженное состояние сложного сдвига возникает в цилиндрическом теле бесконечной длины под действием нагрузок, направленных по образующим цилиндра и постоянным вдоль образующих [6]. При этом при достаточно большой нагрузке в теле возникают как упругие, так и пластические зоны. Как и в любой задаче подобного рода возникает необходимость в нахождении заранее неизвестной границы, разделяющей упругую и пластическую зоны. Отыскание такой границы не простая задача, но специфика упругопластических задач о сложном сдвиге состоит в том, что решение подобных задач проще, чем решение аналогичных упругих задач. По-видимому, впервые этот факт отметил Г.П. Черепанов [6].

Упругопластическим задачам о сложном сдвиге в случае однородной и изотропной пластичности посвящена обширная литература, ее обзор можно увидеть, например, в [6]. Во всех статьях, в которых решаются задачи о сложном сдвиге, существенно используют представление напряжений и смещений в упругой зоне в комплексном виде. В предлагаемой работе решены задачи о сложном сдвиге с помощью законов сохранения. Впервые задачи пластичности решались с помощью законов сохранения в работах [40, 109, 116, 130, 35]. В исследованиях [111, 122, 123, 130, 179, 182] методика

законов сохранения была успешно применена к нахождению упругопластических стержней и балках. В настоящем параграфе эта методика впервые использована для решения упругопластических задач. И при этом предполагается, что в пластической области предел текучести является функцией от координат точки, в которой исследуется напряженное состояние. Известно, что упругие свойства конструкционных материалов могут быть однородными и изотропными, а при этом их предел текучести и прочности – неоднородными. Такая ситуация наблюдается, например, при нейтронной бомбардировке конструкционных материалов [61]. В данном параграфе будет изучена именно такая ситуация.

Основные соотношения

Поля смещений и напряжений в рассматриваемом случае таковы [6]

$$u = v = 0, w = w(x, y), \quad (4.17)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = \tau^1(x, y), \tau_{yz} = \tau^2(x, y)$$

Здесь u, v, w – компоненты вектора смещения, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненты тензора напряжений, x, y, z – декартовы координаты, ось z направлена параллельно образующей.

$$\frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^2}{\partial y} = 0, \text{ (уравнение равновесия)} \quad (4.18)$$

$$\tau^1 = G \frac{\partial w}{\partial x}, \tau^2 = G \frac{\partial w}{\partial y}, \text{ (закон Гука)} \quad (4.19)$$

Здесь G – постоянная, называемая модулем сдвига.

Из (4.18), (4.19) следуют соотношения в упругой зоне

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \tau^1}{\partial y} = \frac{\partial \tau^2}{\partial x} \quad (4.21)$$

Из (4.18) и (4.21) следует, что τ^1, τ^2 удовлетворяют уравнениям Коши-Римана

$$F_1 = \frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^2}{\partial y} = 0, F_2 = \frac{\partial \tau^1}{\partial y} - \frac{\partial \tau^2}{\partial x} = 0. \quad (4.22)$$

В пластической области имеет место соотношение (4.18), а также

$$(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 = k^2 \quad (\text{условие текучести}) \quad (4.23)$$

$$\tau^2 \frac{\partial w}{\partial x} = \tau^1 \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{уравнение Генки}) \quad (4.24)$$

Здесь $k(x, y)$ – некоторая гладкая функция, равная пределу текучести при чистом сдвиге [61].

На границе упругой и пластической областей предполагается непрерывными напряжения и смещения.

Законы сохранения

Законом сохранения для системы уравнений (4.22) назовем соотношение вида

$$\frac{\partial A(x, y, \tau^1, \tau^2)}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y, \tau^1, \tau^2)}{\partial y} = \omega^1 F_1 + \omega^2 F_2, \quad (4.25)$$

где $\omega^i = \omega^i(x, y, \tau^1, \tau^2)$ – некоторые функции, одновременно не равные тождественно нулю.

Замечание. С более общим определением законов сохранения и их использованием в механике деформируемого твердого тела можно ознакомиться, например, в [35, 40, 172]. В работе [4] можно ознакомиться с применением техники группового анализа для построения решений для уравнений неоднородной теории упругости.

Для тех целей, которые поставлены в параграфе, вполне подойдет упрощенная формулировка в виде (4.25).

В случае (4.25) величины A, B называются компонентами сохраняющегося тока.

Предположим, что компоненты A, B имеют следующий вид

$$A = \alpha^1 \tau^1 + \beta^1 \tau^2 + \gamma^1, B = \alpha^2 \tau^1 + \beta^2 \tau^2 + \gamma^2 \quad (4.26)$$

где $\alpha^i = \alpha^i(x, y), \beta^i = \beta^i(x, y), \gamma^i = \gamma^i(x, y)$ – некоторые гладкие функции, подлежащие определению.

Подставим (4.26) в (4.25), в результате получаем

$$\begin{aligned} & \alpha_x^1 \tau^1 + \alpha^1 \tau_x^1 + \beta_x^1 \tau^2 + \beta^1 \tau_x^2 + \gamma_x^1 + \alpha_y^2 \tau^1 + \alpha^2 \tau_y^1 + \beta_y^2 \tau^2 + \beta^2 \tau_y^2 + \gamma_y^2 = \\ & = \omega^1 (\tau_x^1 + \tau_y^2) + \omega^2 (\tau_y^1 - \tau_x^2) = 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где индекс внизу означает производную по соответствующей переменной.

Из (4.27) получаем

$$\alpha^1 = \omega^1, \beta^1 = -\omega^2, \alpha^2 = \omega^2, \beta^2 = \omega^1, \alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = 0 \quad (4.28)$$

Из (4.28), исключая ω^i , получаем

$$\alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = 0 \quad (4.29)$$

В силу соотношений (4.28) компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A = \alpha^1 \tau^1 + \beta^1 \tau^2 + \gamma^1, B = -\beta^1 \tau^1 + \alpha^1 \tau^2 + \gamma^2 \quad (4.30)$$

Поскольку правая часть (4.25) равна нулю, то по формуле Грина получаем

$$\begin{aligned} & \iint_S (A_x + B_y) dx dy = \int_{\partial S} A dy - B dx = \\ & = \int_{\partial S} (\alpha^1 \tau^1 + \beta^1 \tau^2 + \gamma^1) dy - (-\beta^1 \tau^1 + \alpha^1 \tau^2 + \gamma^2) dx = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Где S – область, ∂S – ее кусочно гладкая граница. Все функции, входящие в (4.31), предполагаются гладкими.

Упруго пластическая задача для произвольного отверстия в случае, когда пластическая область охватывает все отверстие

Пусть C – кусочно гладкий контур, к нему приложена нагрузка

$$l^1 \tau^1 + l^2 \tau^2 = \tau_n, |\tau_n| \leq k. \quad (4.32)$$

Где (l^1, l^2) – компоненты вектора нормали к контуру C . Контур пластической области L полностью охватывает отверстие C (см. рис. 4.4).

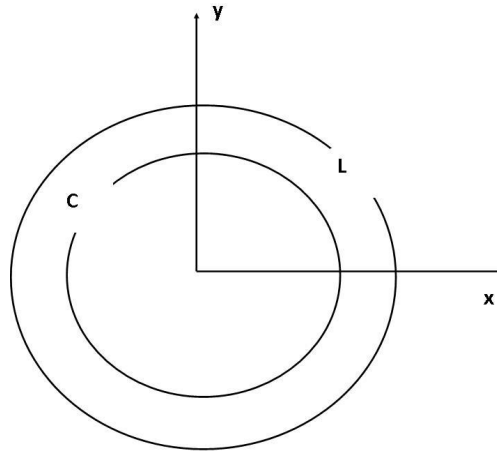


Рисунок 4.4 – Упруго пластическая задача для произвольного отверстия в случае, когда пластическая область охватывает все отверстие

В этом случае на контуре C , кроме условия (3.32), выполняется и условие текучести (4.23). Таким образом на C имеют место два условия:

$$l^1 \tau^1 + l^2 \tau^2 = \tau_n, (\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 = k^2 \quad (4.33)$$

Из условий (4.33) находим компоненты тензора напряжений на контуре C :

$$\tau^1 = \tau_n \pm l^2 \sqrt{k^2 - \tau_n^2}, \tau^2 = \tau_n l^2 \mp l^1 \sqrt{k^2 - \tau_n^2} \quad (4.34)$$

В дальнейшем, для определенности в формулах (4.34) будем выбирать верхний знак.

Использование законов сохранения для нахождения компонент тензора напряжений в области

Пусть точка $M(x_m, y_m)$ лежит вне контура C . Построим окружность радиуса ε с центром в точке M . Имеем $\varepsilon: (x-x_m)^2 + (y-y_m)^2 = \varepsilon^2$. Пусть D - прямая, соединяющая точку M с контуром C . Получаем замкнутый контур, состоящий из окружности ε , прямой D и контура C (см. рис. 4.5).

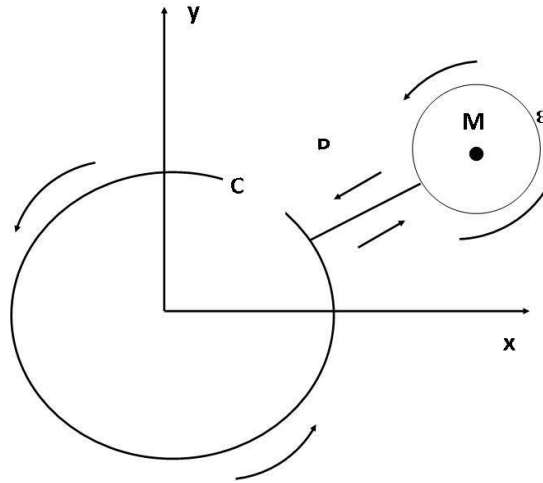


Рисунок 4.5 – Замкнутый контур, состоящий из окружности ε , прямой D и контура C

Из (4.31) получаем

$$\oint_C A dy - B dx + \int_{D^+} A dy - B dx + \int_{D^-} A dy - B dx + \int_{\varepsilon} A dy - B dx = 0. \quad (4.35)$$

Сумма второго и третьего слагаемых в (4.35) равна нулю, поскольку интегралы вычисляются в разных направлениях. Окончательно, из (4.35), имеем

$$\int_C A dy - B dx = -\oint_{\varepsilon} A dy - B dx \quad (4.36)$$

Преобразуем правую часть уравнения (4.36), введя параметризацию $x = \varepsilon \cos t$, $y = \varepsilon \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. В результате имеем

$$\oint_{\varepsilon} A dy - B dx = \varepsilon \int_0^{2\pi} (A \cos t + B \sin t) dt \quad (4.37)$$

Пусть в (4.31)

$$\alpha^1 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \beta^1 = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (4.38)$$

Тогда из (4.37) получаем

$$\int_{\varepsilon} A_1 dy - B_1 dx = \varepsilon \int_0^{2\pi} (A_1 \cos t + B_1 \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \tau^1 dt = 2\pi \tau^1(x_m, y_m). \quad (4.39)$$

Последнее равенство в (4.39) получено с использованием теоремы о среднем при ε , стремящемся к нулю.

Пусть в (4.31)

$$\alpha^1 = \frac{y}{x^2 + y^2}, \beta^1 = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (4.40)$$

Тогда из (4.37) получаем

$$\oint_{\varepsilon} A_2 dy - B_2 dx = \varepsilon \int_0^{2\pi} (A_2 \cos t + B_2 \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \tau^2 dt = 2\pi \tau^2(x_m, y_m). \quad (4.41)$$

Последнее равенство в (4.41) получено с использованием теоремы о среднем при ε , стремящемся к нулю.

Из формулы (4.37), а также из (4.39) и (4.41) получаем

$$\oint_C A_1 dy - B_1 dx = -2\pi \tau^1(x_m, y_m), \oint_C A_2 dy - B_2 dx = -2\pi \tau^2(x_m, y_m). \quad (4.42)$$

Формулы (4.42) дают возможность найти компоненты тензора напряжений в любой точке x_m, y_m вне контура C . Это позволяет установить границу между упругой и пластической областями. Если выполнено условие пластичности $(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 = k^2$ в точке x_m, y_m , то эта точка принадлежит пластической области, если в точке выполнено условие $(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 < k^2$, то упругой.

Замечание. Установленные выше формулы позволяют решать упруго-пластические задачи, даже если пластический контур не полностью охватывает контур C , лишь бы на контуре C было выполнено условие пластичности (4.23).

4.3 Кручение призматических ортотропных упруго-пластических стержней

В данном параграфе найдены законы сохранения для уравнений, описывающих ортотропное упруго-пластическое состояние скручиваемого прямолинейного стержня. Предполагается, что сохраняющийся ток зависит линейно от компонент тензора напряжений. Найдена бесконечная серия законов сохранения, которая позволяет найти упруго-пластическую границу, возникающую при кручении ортотропного стержня.

Вводные сведения

Законы сохранения введены в теорию дифференциальных уравнений Э.Нетер более 100 лет назад и постепенно становятся важным инструментом исследования систем дифференциальных уравнений [6, 19, 40, 109, 172]. Они не только позволяют качественно исследовать уравнения, но, и как показано в этом параграфе, позволяют найти точные решение краевых задач. Для уравнений изотропной теории упругости законы сохранения впервые вычислены П. Олвером [153, 154]. Для уравнений теории пластичности в двумерном случае законы сохранения найдены и использованы для решения основных краевых задач [40, 109]. Позднее оказалось, что законы сохранения можно использовать и для нахождения границ между упругими и пластическими зонами в скручиваемых стержнях, пластинах и изгибаемых балках [105, 119, 122, 123, 171, 179, 182].

Постановка задачи

Рассмотрим упругий ортотропный призматический стержень с поперечным сечением произвольной формы. Боковая поверхность свободна от напряжений, к торцам приложены силы, эквивалентны крутящему моменту M .

Пусть начало координат находится в центре тяжести торцевого сечения, а ось z параллельна образующей стержня. Граничные условия запишутся так:

$$\begin{aligned}\sigma_x l + \tau_{xy} m &= 0, \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m &= 0, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m &= 0,\end{aligned}\tag{4.43}$$

а на торцах стержня ($z = 0, z = l$)

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \tau_{xz} dx dy &= 0, \iint_{\Omega} \tau_{yz} dx dy = 0, \\ \iint_{\Omega} \sigma_z dx dy &= 0, \iint_{\Omega} x \sigma_z dx dy = 0, \\ \iint_{\Omega} y \sigma_z dx dy &= 0,\end{aligned}\tag{4.44}$$

$$\iint_{\Omega} (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dx dy = M,\tag{4.45}$$

где Ω – поперечное сечение.

Как обычно в теории кручения считаем, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad (4.46)$$

Остальные компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия, которые запишутся так

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Обобщенный закон Гука для ортотропной среды запишется следующим образом [45]

$$a_{55}\tau_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad a_{44}\tau_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad a_{33}\sigma_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Здесь a_{ii} - упругие постоянные.

Из уравнений совместности деформаций получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0, \\ a_{13} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \sigma_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(-a_{44} \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yz} + a_{55} \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xz} \right), \\ a_{23} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \sigma_z = \frac{\partial}{\partial y} \left(-a_{55} \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xz} + a_{44} \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yz} \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Из (4.48) и граничных условий (4.43) получаем, что $\sigma_z = 0$ во всех поперечных сечениях.

Из последних двух уравнений (4.48) следует

$$-a_{44} \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yz} + a_{55} \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xz} = const \quad (4.49)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} a_{55}\tau_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ a_{44}\tau_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \end{aligned}$$

то имеем

$$a_{55} \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xz} - a_{44} \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -2 \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = -2\theta.$$

где ω_z – третья компонента вектора $rot(u, v, w)$. Поэтому θ – есть угол закручивания, на единицу длины. Он называется круткой.

Задача об упругом кручении призматического стержня свелась к интегрированию уравнений.

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad a_{55} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2\theta, \quad (4.50)$$

и граничному условию

$$\tau_{xz} l + \tau_{yz} m = 0. \quad (4.51)$$

Нетрудно увидеть, что система уравнений (4.50) сводится к линейному уравнению второго порядка эллиптического типа.

В пластической области к уравнениям (4.50) следует добавить условие пластичности, которое имеет вид

$$2\alpha_{13} \tau_{xz}^2 + 2\alpha_{23} \tau_{yz}^2 = 1.$$

Здесь α_{13}, α_{23} – постоянные, характеризующие текущее состояние пластической анизотропии.

В результате получаем следующую задачу: найти для уравнений (4.50) законы сохранения, которые позволяют решить задачу (4.51). С помощью этих законов будет найдена граница между упругой и пластической областями.

Законы сохранения для уравнений ортотропной упругости

В этой части будут приведены законы сохранения для уравнений (4.50), для того чтобы их использовать далее для решения упругопластических задач.

Для простоты дальнейших выкладок запишем систему (4.50) в виде:

$$\begin{aligned} F_1 &= u_x + v_y - f^1 = 0, \\ F_2 &= \alpha u_y - \beta v_x - f^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где $u = \tau_{xz}$, $v = \tau_{yz}$, $\alpha = a_{55}$, $\beta = a_{44}$, индекс внизу обозначает производную по соответствующей переменной.

Назовем вектор (A, B) сохраняющимся током для уравнений (4.52), если

$$A_x + B_y = \Pi_1(F_1) + \Pi_2(F_2) = 0, \quad (4.53)$$

выполнено на всех гладких решениях системы (4.53). Здесь Π_i – некоторые не тождественно равные нулю линейные дифференциальные операторы.

В этом случае (4.53) является законом сохранения для системы (4.52).

Поставим задачу найти законы сохранения для (4.52), если сохраняющийся ток зависит только от x, y, u, v .

Замечание. Ничто не мешает нам найти законы сохранения и с сохраняющимся током, зависящим от любого числа производных, но мы ограничимся только указанными, поскольку иные законы сохранения еще не нашли своего применения для решения краевых задач.

Пусть

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, \quad B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \quad (4.54)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ функции только от x, y .

Из (4.53) имеем

$$\begin{aligned} & \alpha_x^1 u + \alpha^1 u_x + \beta_x^1 v + \beta^1 v_x + \gamma_x^1 + \alpha_x^2 u + \alpha^2 u_x + \beta_x^2 v + \beta^2 v_x + \gamma_x^2 = \\ & = \delta^1 (u_x + v_y - f^1) + \delta^2 (\alpha u_y - \beta v_x - f^2) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Из (4.55) получаем

$$\begin{aligned} & \alpha_x^1 + \alpha_x^2 = 0, \beta_x^1 + \beta_x^2 = 0, \alpha^1 = \beta^2 = \delta^1, \beta^1 = -\delta^2 \beta, \\ & \alpha^2 = \delta^2 \alpha, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\delta^1 f^1 - \delta^2 f^2, \beta^1 / \beta = -\alpha^2 / \alpha. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Окончательно имеем

$$\alpha_x^1 + \alpha_x^2 = 0, \frac{\beta}{\alpha} \alpha_x^2 - \alpha_y^1 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\alpha^1 f^1 - \frac{\alpha^2}{\alpha} f^2$$

Для простоты считаем, что $\gamma^2 = 0$. Тогда получаем:

$$\alpha^1 = \beta^2, \beta^1 = -\frac{\beta}{\alpha} \alpha^2, \gamma^1 = -\int \left(\alpha^1 f^1 - \frac{\alpha^2}{\alpha} f^2 \right) dx \quad (4.57)$$

а коэффициенты α^1 и α^2 связаны уравнениями:

$$\alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \quad \beta\alpha_x^2 - \alpha\alpha_y^1 = 0. \quad (4.58)$$

Найдем два особых решения этой системы.

Они имеют вид:

Первое решение:

$$\alpha_1^1 = \frac{x}{x^2 + \beta/\alpha y^2}, \quad \alpha_1^2 = \frac{y}{x^2 + \beta/\alpha y^2}.$$

Второе решение:

$$\alpha_2^1 = -\frac{\beta/\alpha y}{x^2 + \beta/\alpha y^2}, \quad \alpha_2^2 = \frac{x}{x^2 + \beta/\alpha y^2}.$$

Для простоты дальнейших вычислений положим $\beta/\alpha = a_{44}/a_{55} = q$.

Далее заметим, что уравнение (4.58) допускают симметрии вида:

$$x' = x + x_0, \quad y' = y + y_0,$$

где x_0, y_0 – произвольные постоянные.

Поэтому полученные решения можно записать в виде:

$$\alpha_1^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + q(y - y_0)^2}, \quad \alpha_1^2 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + q(y - y_0)^2}, \quad (4.59)$$

$$\alpha_2^1 = -\frac{q(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + q(y - y_0)^2}, \quad \alpha_2^2 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + q(y - y_0)^2}. \quad (4.60)$$

Нами получено два сохраняющихся тока.

$$A_i = \alpha_i^1 u - q\alpha_i^2 v + \gamma_i^1, \quad B_i = \alpha_i^2 u + \alpha_i^1 v,$$

следовательно, получено два закона сохранения

$$\partial_x A_i + \partial_y B_i = 0. \quad (4.61)$$

Из (4.61) получаем:

$$\oint_{\Gamma} A_i dy - B_i dx = 0, \quad (4.62)$$

где Γ_1 – контур, не охватывающий точку (x_0, y_0) .

Пусть теперь точка (x_0, y_0) лежит внутри области D , границей которой является контур Γ . В этом случае формула (4.62) непосредственно применена, не может. Поэтому используем стандартный прием: описываем

вокруг точки (x_0, y_0) эллипс следующего вида $(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2 = \varepsilon^2$. (см. рис. 4.6).

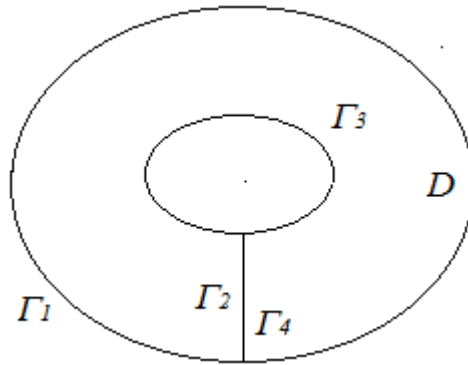


Рисунок 4.6. – Вычисление контурного интеграла вокруг особой точки

Обозначим этот эллипс Γ_1 . Тогда без труда получаем

$$\oint_{\Gamma} A_i dy - B_i dx = -\oint_{\Gamma} (A_i dy - B_i dx), \quad (4.63)$$

Вычисляем интеграл, стоящий в правой части формулы (4.63) для $i=1, 2$.

Пусть $i=1$. Имеем:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1} &= \oint_{\Gamma_1} \left(\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} u - \frac{q(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} v + \gamma_1^1 \right) dy - \\ &- \left(\frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} u + \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} v \right) dx = \\ &= \oint_{\Gamma_1} \left(\frac{(x-x_0)}{\varepsilon^2} u - \frac{q(y-y_0)}{\varepsilon^2} v + \gamma_1^1 \right) dy - \left(\frac{(y-y_0)}{\varepsilon^2} u + \frac{(x-x_0)}{\varepsilon^2} v \right) dx \end{aligned}$$

Введем обозначения $x-x_0 = \varepsilon \cos \theta$, $y-y_0 = \varepsilon \sin \theta$.

Имеем

$$\oint_{\Gamma_1} = \oint_{\Gamma_1} \left(qu - (1-q) \frac{\sin 2\theta}{2} v + \gamma_1^1 \right) d\theta = q \int_0^{2\pi} u(x_0 + \varepsilon \cos \theta, y_0 + \varepsilon \sin \theta) d\theta.$$

В полученном выражении устремляем ε к нулю и, используя теорему о среднем, получаем:

$$\oint_{\Gamma_1} = 2\pi qu(x_0, y_0).$$

Теперь из формулы (4.63) имеем:

$$2\pi qu(x_0, y_0) = -\int_{\Gamma} A_1 dy - B_1 dx. \quad (4.64)$$

Рассмотрим случай $i = 2$. Аналогично получаем:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1} &= \oint_{\Gamma_1} \left(\frac{-q(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} u - \frac{q(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} v + \gamma_2^1 \right) dy - \\ &- \left(\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} u + \frac{q(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + q(y-y_0)^2} v \right) dx = \\ &= \oint_{\Gamma_1} \left(-\frac{q(y-y_0)}{\varepsilon^2} u - \frac{q(x-x_0)}{\varepsilon^2} v + \gamma_2^1 \right) dy - \left(\frac{(x-x_0)u - q(y-y_0)v}{\varepsilon^2} \right) dx \end{aligned}$$

Введем координаты $x - x_0 = \varepsilon \cos \theta$, $y - y_0 = \varepsilon \sin \theta$.

Имеем

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1} &= \oint_{\Gamma_1} \left[\frac{(-q+1)\sin 2\theta}{2} u - qv \right] d\theta = \\ &= -q \int_0^{2\pi} v(x_0 + \varepsilon \cos \theta, y_0 + \varepsilon \sin \theta) d\theta = -2\pi v(x_0, y_0) q \end{aligned} \quad (4.65)$$

Теперь конкретизируем эти законы сохранения для кручения призматического стержня.

Имеем:

$$\begin{aligned} 2\pi q \tau_{xz}(x_0, y_0) &= \oint_{\Gamma} \left(\alpha_1^1 \tau_{xz} - q \alpha_1^2 \tau_{yz} + 2\theta \int \alpha_1^1 dx \right) dx - \left(\alpha_1^2 \tau_{xz} + \alpha_1^1 \tau_{yz} \right) dy, \\ 2\pi q \tau_{yz}(x_0, y_0) &= \oint_{\Gamma} \left(\alpha_2^1 \tau_{xz} - q \alpha_2^2 \tau_{yz} + 2\theta \int \alpha_2^1 dx \right) dx - \left(\alpha_2^2 \tau_{xz} + \alpha_2^1 \tau_{yz} \right) dy. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Упругопластическая граница в скручиваемом прямолинейном ортотропном стержне

Рассмотрим упругопластическое кручение ортотропного прямого стержня, поперечное сечение которого ограничено выпуклым контуром Γ .

При достаточно большом значении крутящего момента в стержне образуется упругая зона F и пластическая зона P . (см. рис. 4.7).

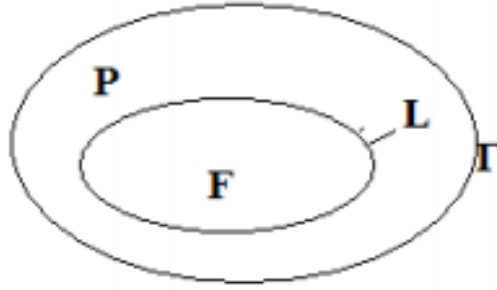


Рисунок 4.7 – Поперечное сечение скручиваемого стержня

Известно, что пластическая зона, начинает образовываться на внешнем контуре Γ . Предположим, что пластическая зона полностью охватывает внешний контур. Пусть L – граница раздела упругой и пластической зон.

Цель этого параграфа – с помощью законов сохранения построенных в предыдущих параграфах, в явном виде построить границу L .

Постановка задачи

В упругой зоне компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям (4.50)

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad a_{55} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2\theta, \quad (4.67)$$

а на внешнем контуре Γ граничному условию

$$\tau_{xz} l + \tau_{yz} m = 0. \quad (4.68)$$

и условию пластичности

$$2\alpha_{13}\tau_{xz}^2 + 2\alpha_{23}\tau_{yz}^2 = 1. \quad (4.69)$$

Из соотношений (4.68) – (4.69) можно определить компоненты тензора τ_{xz}, τ_{yz} на контуре Γ . Имеем:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}|_{\Gamma} &= \frac{m}{\sqrt{2\alpha_{13}m^2 + 2\alpha_{23}l^2}}, \\ \tau_{yz}|_{\Gamma} &= -\frac{l}{\sqrt{2\alpha_{13}m^2 + 2\alpha_{23}l^2}}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Здесь знаки выбраны в соответствии с крутящим моментом (4.45).

В (4.66) нами получены следующие законы сохранения.

$$2\pi q \tau_{xz}(x_0, y_0) = -\oint_{\Gamma} A_1 dy - B_1 dx, \quad (4.71)$$

и

$$2\pi q \tau_{yz}(x_0, y_0) = -\oint_{\Gamma} A_2 dy - B_2 dx. \quad (4.72)$$

Для вычисления $\tau_{xz}(x_0, y_0)$ и $\tau_{yz}(x_0, y_0)$ воспользуемся формулами (4.71) – (4.72). Из этих формул получаем τ_{xz} и τ_{yz} во всех точках внутри стержня. Теперь проверим условие (4.69). В тех точках, в которых выражение в первой части (4.69) меньше единицы, попадут в упругую зону, а остальные точки в пластическую. Эти вычисления позволяют с любой точностью восстановить искомую границу L . Для изотропного случая эта задача решена впервые в [119, 182]. Примеры построения упруго-пластических границ для различного вида прокатных профилей рассмотрены в [123].

4.4. Кручение упруго-пластических стержней прокатного профиля

В данном параграфе рассматривается использование законов сохранения для решения упруго-пластических задач и показываются результаты вычислений, позволяющих найти границу между пластической и упругой областями для скручиваемых стержней прокатных профилей.

Постановка задачи

Пусть система (4.43) эллиптического типа. Будем искать решение уравнения (4.44), которое имеет особенность в точке (x_0, y_0) . Пусть на замкнутой кривой L заданы функции $u|_L = u_0, v|_L = v_0$.

Окружим точку (x_0, y_0) окружность радиуса $\varepsilon: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$. Соединим ее, как показано на рис. 4.8, разрезом с контуром L .

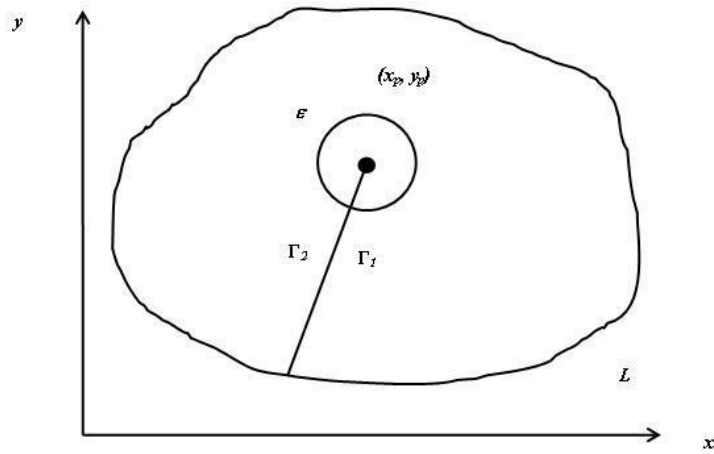


Рисунок 4.8 - Решение эллиптической системы дифференциальных уравнений

Имеем

$$\int_L A dy - B dx + \int_{\Gamma_1} A dy - B dx + \int_{\Gamma_2} A dy - B dx + \int_{\varepsilon} A dy - B dx = 0 \quad (4.73)$$

Из (4.73) получаем

$$\int_L A dy - B dx = - \int_{\varepsilon} A dy - B dx.$$

Устремляем $\varepsilon \rightarrow 0$. Получаем соотношение, связывающее $u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)$ и $\int_L A dy - B dx$. Выбрав другой сохраняющийся ток, с такими же условиями получаем другое соотношение, связывающее $u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)$ и $\int_L A dy - B dx$. Эти два соотношения позволяют найти значения $u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)$, а поскольку точка (x_0, y_0) произвольна, то тем самым построено решение поставленной задачи. Этот способ реализован в работах [119, 123]. Он позволил вычислить границу между пластической и упругой областями для скручиваемых стержней прокатных профилей. Результаты расчетов приведены на рис. 4.9.

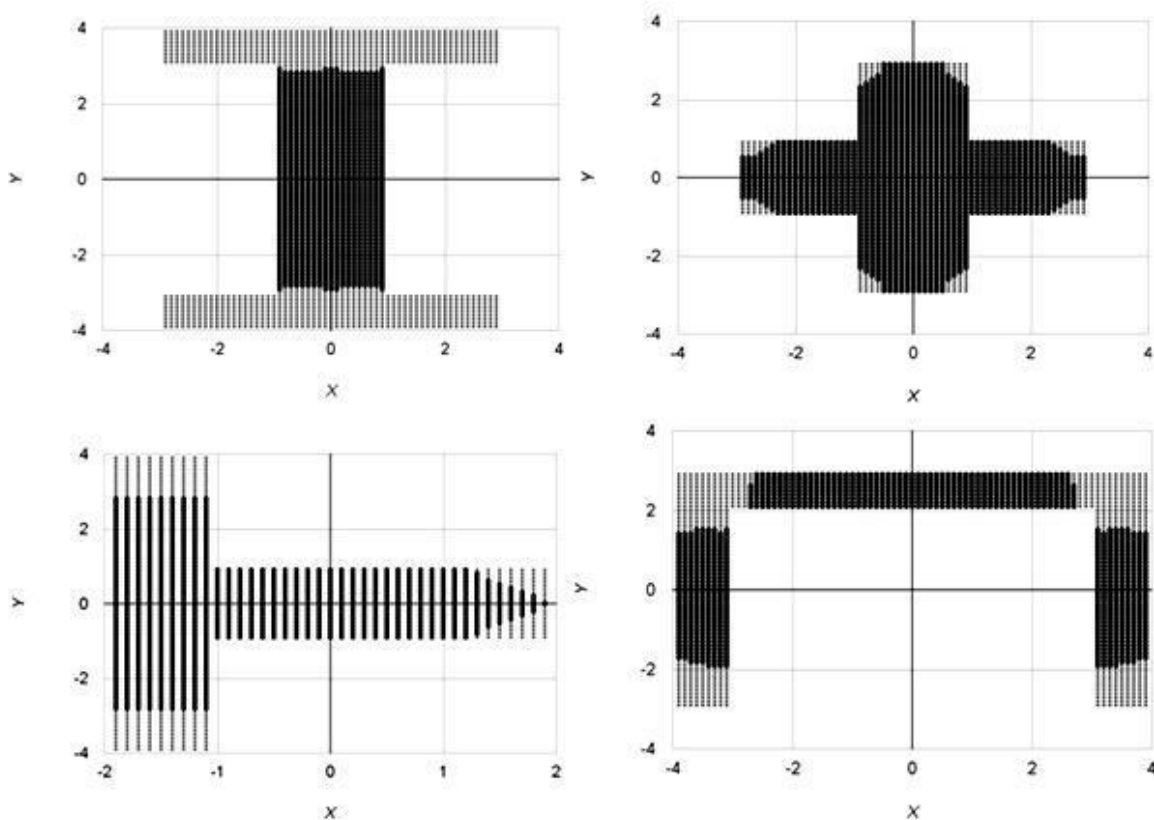


Рисунок 4.9 – Упруго-пластическая граница стержней прокатного профиля

4.5. Решение плоской упруго-пластической задачи

В данном параграфе рассматривается решение плоской упруго-пластической задачи. Вычисления позволяют определить, какие точки пластины относятся к упругим зонам, остальные точки пластины принадлежат пластической области.

Вводные сведения

В пластической области в двумерном случае с условием пластичности общего вида уравнения запишутся так

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (4.74)$$

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau) = 0. \quad (4.75)$$

В упругой области выполнены соотношения (4.74) и условие совместности деформаций, которое имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = 0.$$

Постановка задачи

Рассмотрим конечную прямоугольную пластину размером $a \times b$ с отверстиями произвольной формы, ограниченной контурами $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$. Предположим, что пластина испытывает различные напряжения в направлении осей x, y , а контуры отверстий находятся под действие заданных напряжений.

На внешних границах Γ_0 получаем следующие условия

$$\sigma_x|_{x=a} = \sigma_x|_{x=0} = q_1, \sigma_y|_{y=b} = \sigma_y|_{y=0} = q_2. \quad (4.77)$$

Остальные компоненты тензора напряжений на этих границах равны нулю.

На границе контуров $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ выполнено условие.

$$\sigma_x n^i + \tau m^i|_{\Gamma^i} = p_1^i, \tau n^i + \sigma_y m^i|_{\Gamma^i} = p_2^i. \quad (4.78)$$

Здесь q_i, p_j^i - постоянные, (n^i, m^i) - компоненты вектора нормали к контуру Γ_i .

Предполагаем, что напряжения σ_x, σ_y, τ на контурах $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ таковы, что выполняется условие пластичности (4.75).

Из уравнения (4.76) получаем

$$\sigma_x + \sigma_y = F(x, y), \quad (4.79)$$

где $F(x, y)$ - некоторое решение уравнения Лапласа (4.76).

Из (4.77) и (4.78) следует, что для нахождения $F(x, y)$ нужно решить уравнение Лапласа со следующими граничными условиями

$$F|_{x=a} = F|_{x=0} = q_1, F|_{y=b} = F|_{y=0} = q_2, F|_{\Gamma^i} = d^i. \quad (4.80)$$

Значение d^i определяется из решения трех уравнений (4.78) и (4.75).

Решение задачи (4.79), (4.80) будем считать известным, поскольку это классическая задача для уравнения Лапласа. В этом случае для определения σ_x, τ получим систему уравнений

$$\Phi_1 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \Phi_2 = \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (4.81)$$

Напишем для системы (4.81) законы сохранения в виде (4.44)

$$D_x A + D_y B = \Omega_1(\Phi_1) + \Omega_2(\Phi_2).$$

Ищем сохраняющийся ток в виде:

$$\begin{aligned} A &= \alpha_1(x, y)\sigma_x + \beta_1(x, y)\tau + \gamma_1(x, y), \\ B &= \alpha_2(x, y)\sigma_x + \beta_2(x, y)\tau + \gamma_2(x, y). \end{aligned} \quad (4.82)$$

В результате имеем

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - \frac{\partial \beta_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} = -\beta_1 \frac{\partial F}{\partial y}. \quad (4.83)$$

Окончательно сохраняющийся ток принимает вид

$$\begin{aligned} A &= \alpha_1(x, y)\sigma_x + \beta_1(x, y)\tau + \gamma_1(x, y), \\ B &= -\beta_1(x, y)\sigma_x + \alpha_1(x, y)\tau + \gamma_2(x, y), \end{aligned} \quad (4.84)$$

коэффициенты которого связаны соотношениями (4.83).

Для простоты дальнейших выкладок будем считать, что у нас есть только одно отверстие, ограниченное контуром Γ_1 (см. рис. 4.10).

По формуле Грина получаем

$$\oint_{\Gamma_0} A dy - B dx + \oint_{\Gamma_1} A dy - B dx = 0 \quad (4.85)$$

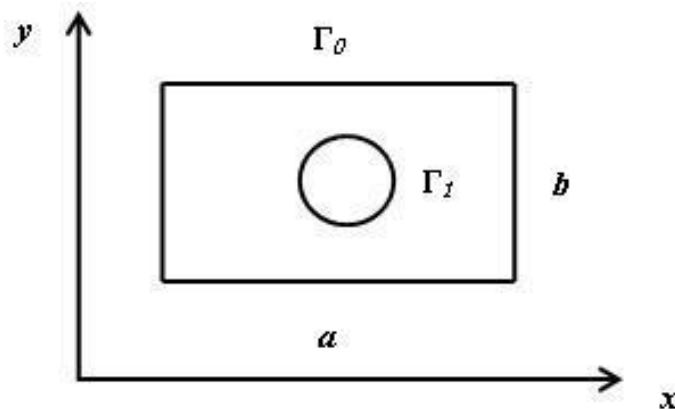


Рисунок 4.10 - Решение упруго-пластической задачи

Рассмотрим два сингулярных решения уравнений (4.83).

$$\alpha_1^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta_1^1 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (4.86)$$

$$\gamma_2^1 = -\int \frac{\partial F}{\partial y} \omega_2 dy, \gamma_1^1 = 0.$$

$$\alpha_1^2 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta_1^2 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (4.87)$$

$$\gamma_2^2 = -\int \frac{\partial F}{\partial y} \omega_2 dy, \gamma_1^{2b} = 0.$$

Из (4.86) и (4.87), по приведенным выше формулам, окончательно получаем

$$\begin{aligned} 2\pi\sigma_x(x_0, y_0) &= -\int_{\Gamma_0} \left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \sigma_x - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tau \right) dy - \\ &\left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \sigma_x + \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tau + \gamma_1^1 \right) dx - \int_{\Gamma_1} \gamma_1^1 dy, \\ 2\pi\tau(x_0, y_0) &= -\int_{\Gamma_0} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \sigma_x + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tau \right) dy - \\ &\left(-\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \sigma_x + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tau + \gamma_1^2 \right) dx - \int_{\Gamma_1} \gamma_1^2 dy, \\ \sigma_y(x_0, y_0) &= F(x_0, y_0) - \sigma_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Полученные напряжения подставляем в закон текучести (4.75). В тех точках, где $f(\sigma_x, \sigma_y, \tau) < 0$, будет упругая зона, остальные точки пластины принадлежат пластической области.

4.6 Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения

Для выдвижения антенн на космических аппаратах используются полые стержни коробчатого сечения большой длины. Эти стержни изготавливаются из многослойных композитных материалов. Под действием солнечного излучения в стержнях возникают напряжения, которые существенно влияют на функции приборов, находящихся на выдвигаемой конструкции.

В данном параграфе рассмотрен упруго-пластический коробчатый стержень, который изгибается поперечной силой. Предполагается, что деформации в стержне упруго-пластические, и боковая поверхность его свободна от напряжений. Центр тяжести поперечного сечения не совпадает с

точкой приложения силы. Построено точное решение с помощью законов сохранения описывающее напряженное состояние этой конструкции. Напряженное состояние вычисляется в каждой точке рассмотренной фигуры, с помощью интегралов по внешним контурам поперечного сечения.

Вводные сведения

Проблема компактного размещения и развертывания крупногабаритных трансформируемых конструкций из транспортного положения в рабочее для наземных и комических условий ставит задачи поиска концепций, способных разрешить основное противоречие: минимальная масса, максимальные компактность и необходимые габариты в рабочем состоянии. Перспективный способ, развертывания крупногабаритных трансформируемых конструкций, базируется на упругой энергии, запасаемой в процессе компактного размещения. Перспективными составными частями таких конструкций являются гибкие, упругие стержни из армированных композиционных материалов. Проблема изгиба и кручения армированного композитного стержня во многом определяет потенциальные возможности конструкции в целом. Ситуация, когда масса изделия должна быть минимальна, а надежность развертывания максимальна требует детального изучения механики процесса, с полным пониманием ограничений, накладываемых на конструкцию, и как следствие ограничений на технологию изготовления составных частей таких конструкций.

В современной литературе имеется достаточно решений, описывающих напряженно–деформированное состояние упруго - пластических тел смотрите, например [155, 181, 183] и цитируемую там литературу. Построение точных частных решений опирается, в частности, на методы группового анализа дифференциальных уравнений: симметрии и законы сохранения [176, 181]. Теория симметрий позволяет строить решения так называемым полуобратным методом, когда к построенному тем или иным способом решению подбирается соответствующая краевая задача. Для решения конкретных краевых задач более перспективным, по мнению

авторов, являются законы сохранения, построенные для данной системы уравнений [178, 184]. При этом методика законов сохранения приводит к так называемому численно-аналитическому методу, когда окончательное решение получается в виде интегралов по границе заданной области. Законы сохранения уже показали свою эффективность для решения ряда краевых задач упругости и пластичности и даже уже применяются для многослойных и композитных материалов.

Постановка задачи

Рассмотрено упруго-пластическое состояние бруса коробчатого сечения, находящегося под действием поперечной силы (рис. 4.11). С помощью построенных законов сохранения вычислим напряженное состояние в каждой точке этой конструкции.

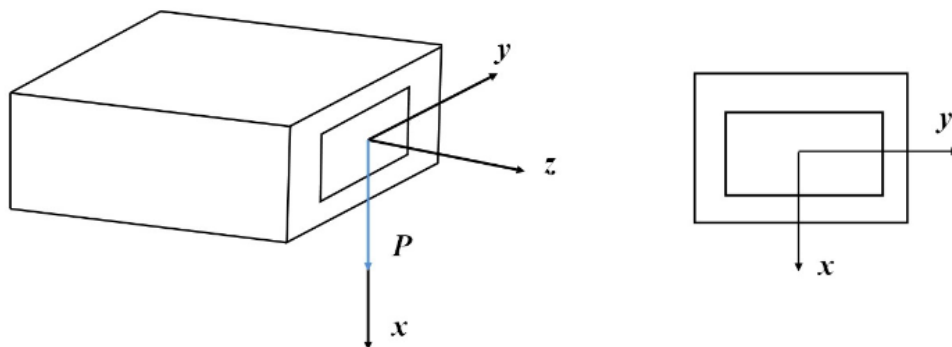


Рисунок 4.11 - Брус коробчатого сечения, находящийся под действием поперечной силы

В матрице S выполняются уравнение равновесия и уравнение, которое является следствием соотношений Бельтрами – Митчелла

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2}{\partial y} - P[\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0)] = 0, \\
 F_2 &= \frac{\partial \tau_1}{\partial y} - \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + P[\delta_1(y - y^0) - \delta_2(x - x^0)] + 2K = 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.88}$$

где S - поперечное сечение, I_{ij} - моменты инерции сечения, S_i - статические

моменты,
$$\delta_1 = -\frac{I_{11}S - I_{12}S_1^2}{\Delta}, \delta_2 = \frac{I_{12}S - I_{12}S_1S_2}{\Delta}, \Delta = \begin{vmatrix} I_{22} & I_{12} & S_2 \\ I_{12} & I_{11} & S_1 \\ S_2 & S_1 & S \end{vmatrix}, x^0 = \frac{S_2}{S}, y^0 = \frac{S_1}{S},$$

$$S = \iint_S ds, S_1 = \iint_S y ds, S_2 = \iint_S x ds, I_{11} = \iint_S y^2 ds, I_{12} = \iint_S xy ds, I_{22} = \iint_S x^2 ds, \tau_1 = \tau_{xz}, \tau_2 = \tau_{yz} -$$

компоненты тензора напряжений, ν - коэффициент Пуассона матрицы, x^0, y^0 - координаты центра тяжести сечения.

Пусть брус нагружен в концевом сечении силами, равномерно распределенными с равнодействующей $P = (P, 0, 0)$, которая действует в направлении оси x , центр тяжести поперечного сечения бруса не совпадает с началом координат. Постоянная K характеризует крутку вокруг продольной оси бруса, вычисление этой постоянной можно найти в [175, стр. 455].
Материал бруса имеет предел текучести k .

Замечание. Второе уравнение (4.88) без труда получается как следствие первого уравнения (1) и соотношений Бельтрами–Митчелла

$$\Delta \tau_1 = \frac{P \delta_1}{(1+\nu)}, \Delta \tau_2 = \frac{P \delta_2}{1+\nu}, \Delta - \text{оператор Лапласа.}$$

Граничные условия

Внешняя и внутренние поверхности бруса предполагаются свободной от напряжений, поэтому на них выполняются условия

$$\tau_1 n + \tau_2 m = 0, \quad (4.89)$$

а также условие пластичности

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 = k^2, \quad (4.90)$$

Здесь n, m - компоненты вектора внешней нормали к боковой поверхности. В результате из (4.89), (4.90) получаем следующие граничные условия

$$\tau_1 = -mk, \tau_2 = nk. \quad (4.91)$$

Законы сохранения уравнений (4.88)

Сохраняющийся ток закона сохранения ищем в виде

$$A = \alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1, B = \alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2, \quad (4.92)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ функции от x, y .

Имеем

$$\partial_x A + \partial_y B = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (4.93)$$

Подставляем (4.92) в (4.93), получаем

$$\begin{aligned} \partial_x(\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1) + \partial_y(\alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2) = \\ \omega_1(\partial_x \tau_1 + \partial_y \tau_2 + C) + \omega_2(\partial_x \tau_2 - \partial_y \tau_1 + D). \end{aligned} \quad (4.94)$$

В формулах (4.94) для краткости введены обозначения

$$C = -P[\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0)], D = P[\delta_1(y - y^0) - \delta_2(x - x^0)] + 2K.$$

Из (4.94) получаем

$$\begin{aligned} \alpha^1 = \beta^2, \alpha^2 = -\beta^1, \partial_x \beta^1 + \partial_y \alpha^1 = 0, \\ \partial_x \alpha^1 - \partial_y \beta^1 = 0, \partial_x \gamma^1 + \partial_y \gamma^2 = \alpha^1 C + \beta^1 D. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Из (4.95) следует, что система уравнений (4.88) допускает бесконечную серию законов сохранения.

Вычисления компонент тензора напряжений в брус

Пусть $(x_0, y_0) \in S$. Рассмотрим решение уравнений (4.95), которое имеет особенность в этой точке.

$$\begin{aligned} \alpha^1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma^1 = P\{-[\delta_1(x_0 - x^0) + \delta_2(y_0 - y^0) + \frac{2K}{y - y_0}] \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0} + \\ + \frac{[\delta_1(y_0 - y^0) - \delta_2(x_0 - x^0)]}{2} \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + \\ - \delta_2(x - x_0), \gamma^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Опишем вокруг точки $(x_0, y_0) \in S_1$ окружность радиуса $\varepsilon: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$, сделаем разрез, как это изображено на рис. 4.12.

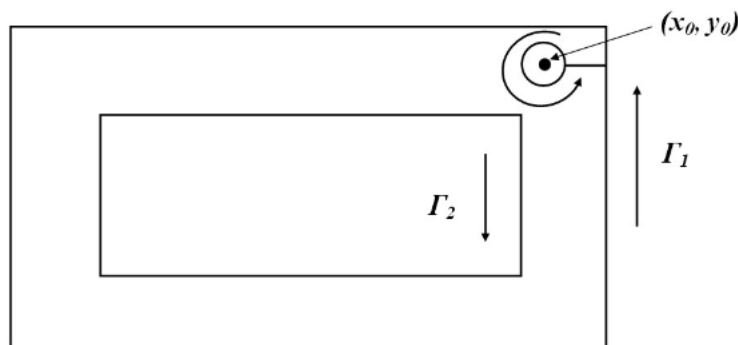


Рисунок 4.12 - Направление обхода контуров при вычислении интеграла

По формуле Грина получаем

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} A dy - B dx - \oint_{\varepsilon} A dy - B dx = 0, \quad (4.97)$$

где ε окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$.

Рассмотрим решение (4.96), полагая $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi, y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$, тогда из (4.98) с учетом (4.95), при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$2\pi\tau_{12}(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \left(m_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - n_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma^1 \right) dy - \left(m_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) dx. \quad (4.98)$$

Рассмотрим другое решение уравнений (4.95)

$$\alpha_*^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta_*^2 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$\partial_x \gamma_*^1 + \partial_y \gamma_*^2 = \alpha_*^1 C + \beta_*^2 D.$$

$$\gamma_*^1 = P[-\delta_1(x - x_0) + \frac{(-\delta_1(x_0 - x^0) + \delta_2(y_0 - y^0))}{2} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + (\delta_2(x_0 - x^0) - \delta_1(y_0 - y^0) + \frac{2K}{y - y_0}) \arctg \frac{x - x_0}{y - y_0}], \quad \gamma_*^2 = 0. \quad (4.99)$$

Почти дословно повторяя предыдущие рассуждения с решением (4.99), получаем

$$2\pi\tau_{23}(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma_0} \left(m_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) dy - \quad (4.100)$$

$$-(-m_0k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + n_0k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + \gamma_*^1))dx.$$

Таким образом, в данном параграфе построены законы сохранения для уравнений, описывающих напряженное состояние упругого–пластического бруса коробчатого сечения под действием поперечной силы. Законы сохранения позволили вычислить напряженное состояние в каждой точке бруса по формулам (4.99) и (4.100) с помощью интегралов по внешним границам бруса.

4.7 Анизотропная антиплоская упругопластическая задача

В данном параграфе решена анизотропная антиплоская упругопластическая задача о напряженном состоянии в теле, ослабленном отверстием, ограниченном кусочно гладким контуром. Приведены законы сохранения, которые позволили свести вычисления компонент тензора напряжений к криволинейному интегралу по контуру отверстия. Законы сохранения позволили найти границу между упругой и пластической областями.

Вводные сведения

Напряженное антиплоское состояние возникает в цилиндрическом теле бесконечной длины под действием нагрузок, направленных по образующим цилиндра и постоянным вдоль образующих [6]. При этом при достаточно большой нагрузке в теле имеются как упругие, так и пластические зоны. Как и в любой задаче подобного рода необходимо найти заранее неизвестную границы, разделяющей упругую и пластическую зоны. Отыскание такой границы не простая задача, но специфика упругопластических задач об антиплоской деформации состоит в том, что решение подобных задач проще, чем решение аналогичных упругих задач. По-видимому, впервые этот факт отметил Г.П.Черепанов [6]. Упругопластическим задачам об антиплоской деформации посвящена обширная литература, ее обзор можно увидеть,

например, в [6]. Во всех статьях, в которых решаются задачи о напряженном состоянии в условиях антиплоской деформации, существенно используют представление напряжений и смещений в упругой зоне в комплексном виде., при этом всегда рассматривается только изотропный случай. В предлагаемой работе решены задачи о сложном сдвиге с помощью законов сохранения для анизотропной среды.

Основные соотношения

Поля смещений и напряжений в рассматриваемом случае таковы [6]

$$\begin{aligned} u = v = 0, w = w(x, y), \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = \tau^1(x, y), \tau_{yz} = \tau^2(x, y). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Здесь u, v, w – компоненты вектора смещения, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненты тензора напряжений, x, y, z – декартовы координаты, ось z направлена параллельно образующей.

В упругой зоне имеют место соотношения

$$\frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^2}{\partial y} = 0 \text{ уравнение равновесия.} \quad (4.102)$$

$$\tau^1 = \frac{\partial w}{\partial x}, \tau^2 = G_2 \frac{\partial w}{\partial y} \text{ закон Гука.} \quad (4.103)$$

Здесь G_i – постоянные, называемые модулями упругости [20].

Из (4.102), (4.103) следуют соотношения в упругой зоне

$$G_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (4.104)$$

$$G_2 \frac{\partial \tau^1}{\partial y} = G_1 \frac{\partial \tau^2}{\partial x} \quad (4.105)$$

Из (4.102) и (4.105) следует, что τ^1, τ^2 удовлетворяют системе линейных уравнений

$$F_1 = \frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^2}{\partial y} = 0, F_2 = \frac{\partial \tau^1}{\partial y} - n \frac{\partial \tau^2}{\partial x} = 0, \quad (4.106)$$

где $n = G_1/G_2$.

В пластической области имеет место соотношение (4.102), а также

$$a_{13}(\tau^1)^2 + a_{23}(\tau^2)^2 = 1 \text{ условие текучести.} \quad (4.107)$$

$$\tau^2 \frac{\partial w}{\partial x} = \tau^1 \frac{\partial w}{\partial y} \text{ уравнение Генки.} \quad (4.108)$$

Здесь a_{13}, a_{23} – постоянные, называемые коэффициентами анизотропии.

На границе упругой и пластической областей предполагается непрерывными напряжения и смещения.

Законы сохранения

Законом сохранения для системы уравнений (4.106) назовем соотношение вида

$$\frac{\partial A(x, y, \tau^1, \tau^2)}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y, \tau^1, \tau^2)}{\partial y} = \omega^1 F_1 + \omega^2 F_2, \quad (4.109)$$

где $\omega^i = \omega^i(x, y, \tau^1, \tau^2)$ – некоторые функции, одновременно не равные тождественно нулю.

Замечание. С более общим определением законов сохранения и их использованием в механике деформируемого твердого тела можно ознакомиться, например, в [40, 129, 190].

Для тех целей, которые поставлены в параграфе, вполне подойдет упрощенная формулировка в виде (4.109).

В случае (4.109), величины A, B называются компонентами сохраняющегося тока.

Предположим, что компоненты A, B имеют следующий вид

$$A = \alpha^1 \tau^1 + \beta^1 \tau^2 + \gamma^1, B = \alpha^2 \tau^1 + \beta^2 \tau^2 + \gamma^2, \quad (4.110)$$

где $\alpha^i = \alpha^i(x, y), \beta^i = \beta^i(x, y), \gamma^i = \gamma^i(x, y)$ – некоторые гладкие функции, подлежащие определению.

Подставим (4.110) в (4.109), в результате получаем

$$\begin{aligned} \alpha_x^1 \tau^1 + \alpha^1 \tau_x^1 + \beta_x^1 \tau^2 + \beta^1 \tau_x^2 + \gamma_x^1 + \alpha_y^2 \tau^1 + \alpha^2 \tau_y^1 + \beta_y^2 \tau^2 + \beta^2 \tau_y^2 + \\ \gamma_y^2 = \omega^1 (\tau_x^1 + \tau_y^2) + \omega^2 (\tau_y^1 - n \tau_x^2) = 0, \end{aligned} \quad (4.111)$$

где индекс внизу означает производную по соответствующей переменной.

Из (4.111) получаем

$$\begin{aligned} \alpha^1 = \omega^1, \beta^1 = -n \omega^2, \alpha^2 = \omega^2, \\ \beta^2 = \omega^1, \alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \\ \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Из (4.112), исключая ω^i , получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \beta^1 = -n\alpha^2, \quad (4.113)$$

$$\alpha_x^1 - n\beta_y^1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \quad \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = 0$$

В силу соотношений (4.112) компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A = \alpha^1\tau^1 + \beta^1\tau^2 + \gamma^1, B = \frac{-\beta^1}{n}\tau^1 + \alpha^1\tau^2 + \gamma^2 \quad (4.114)$$

Поскольку правая часть (4.109) равна нулю, то по формуле Грина получаем

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_{\partial S} A dy - B dx = \quad (4.115)$$

$$= \oint_{\partial S} (\alpha^1\tau^1 + \beta^1\tau^2 + \gamma^1) dy - \left(\frac{-\beta^1}{n}\tau^1 + \alpha^1\tau^2 + \gamma^2 \right) dx = 0.$$

Где S - область, ∂S - ее кусочно гладкая граница. Все функции, входящие в (4.115) предполагаются гладкими.

Упруго пластическая задача для произвольного отверстия в случае, когда пластическая область охватывает все отверстие

Пусть C - кусочно гладкий контур, к нему приложена нагрузка

$$l_1\tau^1 + l_2\tau^2 = \tau_n, |\tau_n| \leq \sqrt{\frac{l_1^2 a_{23} + l_2^2 a_{13}}{a_{13} a_{23}}}, \quad (4.116)$$

где (l_1, l_2) - компоненты вектора нормали к контуру C . Контур пластической области L полностью охватывает отверстие C (см. рис. 4.13).

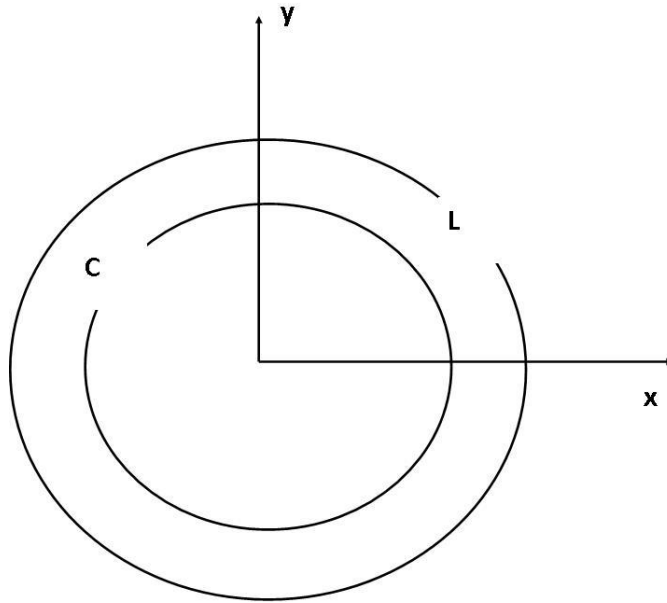


Рисунок 4.13 - Контур пластической области L

В этом случае на контуре C , кроме условия (4.116) выполняется и условие текучести (4.107). Таким образом на C имеют место два условия:

$$l_1 \tau^1 + l_2 \tau^2 = \tau_n = \tau_n, a_{13} (\tau^1)^2 + a_{23} (\tau^2)^2 = 1. \quad (4.117)$$

Из условий (4.117) находим компоненты тензора напряжений на контуре C

$$\tau^1 = -\frac{l_2}{l_1} \tau^2 + \frac{\tau_n}{l_1}, \tau^2 = \frac{a_{13} l_2 \tau_n \mp l_1 \sqrt{l_1^2 a_{23} + l_2^2 a_{13} - a_{13} a_{23} \tau_n^2}}{l_1^2 a_{23} + l_2^2 a_{13}} \quad (4.118)$$

В дальнейшем, для определенности, в формулах (4.118) будем выбирать верхний знак.

Использование законов сохранения для нахождения компонент тензора напряжений в области

Пусть точка $M(x_m, y_m)$ лежит вне контура C . Построим окружность радиуса ε с центром в точке M . Имеем $\varepsilon: (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = \varepsilon^2$. Пусть D - прямая соединяющая точку M с контуром C . Получаем замкнутый контур, состоящий из окружности ε , прямой D и контура C (см. рис. 4.14). Из (4.115) получаем

$$\oint_C A dy - B dx + \int_{D^+} A dy - B dx + \int_{D^-} A dy - B dx + \oint_\varepsilon A dy - B dx = 0 \quad (4.119)$$

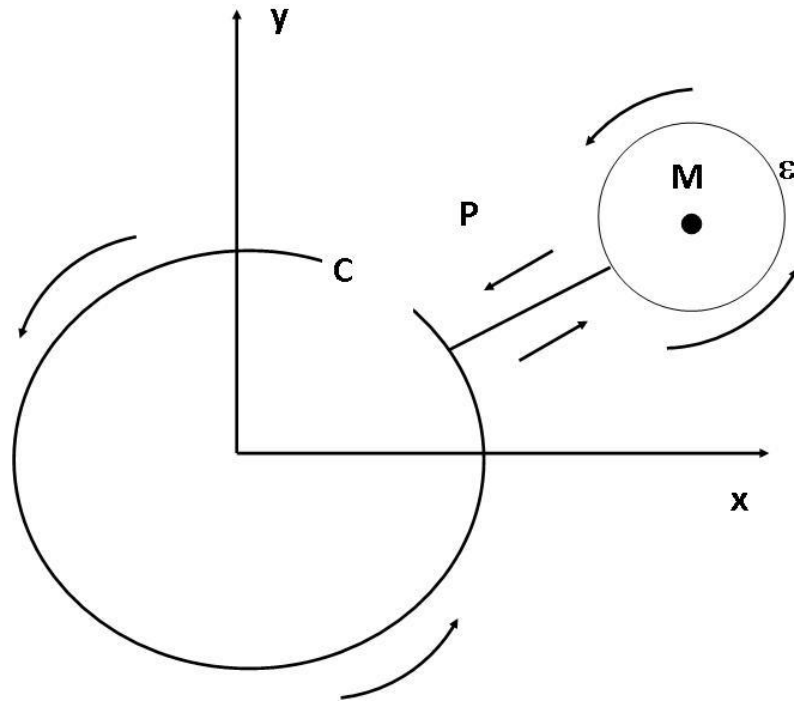


Рисунок 4.14 – Нахождение компонент тензора напряжений в области

Сумма второго и третьего слагаемых в (4.119) равна нулю, поскольку интегралы вычисляются в разных направлениях. Окончательно из (4.119) имеем

$$\oint_C A dy - B dx = - \oint_\varepsilon A dy - B dx \quad (4.120)$$

Преобразуем правую часть уравнения (4.120), введя параметризацию $x = \varepsilon \cos t, y = \varepsilon \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. В результате имеем

$$\oint_\varepsilon A dy - B dx = \varepsilon \int_0^{2\pi} (A \cos t + B \sin t) dt \quad (4.121)$$

Пусть в (4.115)

$$\alpha^1 = \frac{x}{x^2 + ny^2}, \beta^1 = -\frac{y}{x^2 + ny^2} \quad (4.122)$$

Тогда из (4.121) получаем

$$\begin{aligned} & \oint_\varepsilon A_1 dy - B_1 dx \\ &= \varepsilon \int_0^{2\pi} (A_1 \cos t + B_1 \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \tau^1 dt = 2\pi \tau^1(x_m, y_m) \end{aligned} \quad (4.123)$$

Последнее равенство в (4.123) получено с использованием теоремы о среднем при ε , стремящемся к нулю.

Пусть в (4.115)

$$\alpha^1 = \frac{\sqrt{ny}}{x^2 + ny^2}, \beta^1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x}{x^2 + ny^2} \quad (4.124)$$

Тогда из (4.121) получаем

$$\begin{aligned} & \oint_{\varepsilon} A_2 dy - B_2 dx \\ &= \varepsilon \int_0^{2\pi} (A_2 \cos t + B_2 \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \tau^2 dt = 2\pi \tau^2(x_m, y_m) \end{aligned} \quad (4.125)$$

Последнее равенство в (4.125) получено с использованием теоремы о среднем при ε , стремящемся к нулю.

Из формулы (4.120), а также из (4.123) и (4.125) получаем

$$\oint_C A_1 dy - B_1 dx = -2\pi \tau^1(x_m, y_m), \oint_C A_2 dy - B_2 dx = -2\pi \tau^2(x_m, y_m) \quad (4.126)$$

Формулы (4.126) дают возможность найти компоненты тензора напряжений в любой точке x_m, y_m вне контура C . Это позволяет установить границу между упругой и пластической областями. Если выполнено условие пластичности $a_{13}(\tau^1)^2 + a_{23}(\tau^2)^2 = 1$ в точке x_m, y_m , то эта точка принадлежит пластической области; если в точке выполнено условие $a_{13}(\tau^1)^2 + a_{23}(\tau^2)^2 < 1$, то - упругой.

Замечание. Установленные выше формулы позволяют решать упруго пластические задачи, даже если пластический контур не полностью охватывает контур C , лишь бы на контуре C было выполнено условие пластичности (4.107).

4.8 Использование законов сохранения для решения задачи о волне нагрузки в упругопластическом стержне

В данном параграфе рассмотрен процесс распространения пластических деформаций в полубесконечном упруго пластическом стержне, вызванных

приложенной к концу стержня динамической нагрузкой, неубывающей во времени. Уравнения записаны в лагранжевой системе координат. Предполагается, что в процессе деформации не происходит бокового выпучивания стержня и что влияние поперечных деформаций стержня на процесс распространения продольных волн пренебрежимо мало. В начальный момент стержень находится в деформированном состоянии и состоянии покоя. Рассмотрены малые деформации стержня. Плотность стержня в процессе деформирования не изменяется. Единственной отличной от нуля составляющей тензора напряжений будет компонента вдоль оси ox , отличными от нуля составляющими тензора деформаций будут компоненты вдоль осей ox , oy . В результате построена система двух квазилинейных однородных уравнения первого порядка. Уравнения являются гиперболическими. Для них построены характеристики и соотношения на них. Далее уравнения записаны в терминах инвариантов Римана. Для построенных уравнений найдены законы сохранения, в случае, когда сохраняющийся ток зависит только от искомым функций. В результате получена система линейных уравнений с коэффициентами, зависящими только от искомым функций. Построение законов сохранения сведено к решению краевой задачи для известных уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу. Эта задача решена с помощью функций Римана. Законы сохранения позволили найти координаты точек пересечения характеристик, а значит, и решить поставленную задачу. В заключение рассмотрен случай, когда одна из характеристик пересекает линию, на которой заданы начальные условия. В этом случае, как известно, задача Коши решена быть не может. Это приводит к процедуре, которая с помощью законов сохранения, позволяет выяснить вопрос о разрешимости задачи Коши. Она сводится к решению несложного интегрального уравнения методом последовательных приближений.

Вводные сведения

Законы сохранения, применительно к дифференциальным уравнениям, появились в литературе более 100 лет назад в статье Эммы Нетер [54]. Она

установила общий принцип, связывающий группы симметрий и законы сохранения для дифференциальных уравнений, выведенных из вариационного принципа. Более 70 лет все результаты в этом направлении основывались на этой статье. Более общие концепции, позволяющие вычислять законы сохранения для произвольных систем дифференциальных уравнений, появились в работах А.М. Виноградова [19, 193]. Достаточно долгое время законы сохранения фигурировали в литературе как чисто математический результат, далекий от приложений. В работах [40, 116, 127] было показано, как законы сохранения можно использовать для решения задач Коши и Римана, а также построены точные решения этих задач. Позднее техника законов сохранения была использована для решения задач со свободной границей - упруго- пластических задач [119, 179, 182]. Впервые частный случай задачи о распространении волны нагрузки, которая решена с помощью законов сохранения построен в работе [111, 130]. В этом параграфе рассмотрен более общий случай, а также сформулировано условие, при котором существует решение задачи Коши.

Вывод основных уравнений

1. Рассмотрим процесс распространения пластических деформаций в полубесконечном упругопластическом стержне, вызванных приложенной к концу стержня динамической нагрузкой $p(t)$, неубывающей во времени (т.е. $dp/dt \geq 0$) (рис. 4.15).

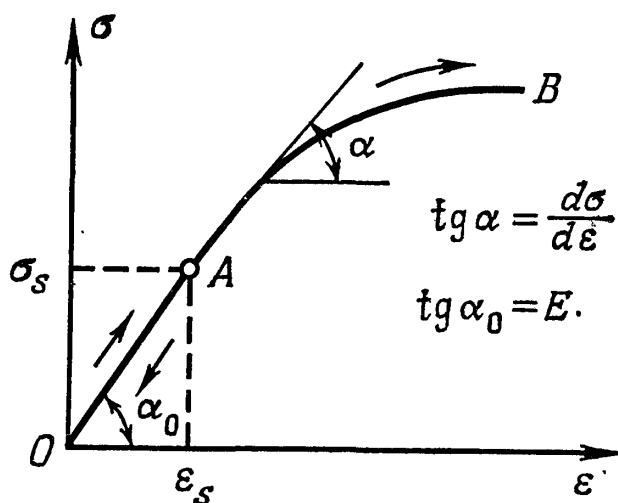


Рисунок 4.15 – Процесс распространения пластических деформаций в полубесконечном упругопластическом стержне

Проведем решение в лагранжевой системе координат: за ось x возьмем ось стержня, начало координат $x = 0$ выберем на левом конце стержня. Предположим, что в процессе деформации не происходит бокового выпучивания стержня и что влияние поперечных деформаций стержня на процесс распространения продольных волн пренебрежимо мало. Рассмотрим малые деформации стержня и будем предполагать, что плотность стержня в процессе деформирования не изменяется. Единственной отличной от нуля составляющей тензора напряжений будет $\sigma_{xx} = \sigma$, отличными от нуля составляющие тензора деформаций будут $\varepsilon_{xx} = \varepsilon$ и $\varepsilon_{yy} = \nu\varepsilon$.

В этом случае уравнение движения без учета массовых внешних сил приобретает вид [55]:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (4.127)$$

где $\sigma = \sigma_{xx}$ – компонента тензора напряжений, v – скорость частиц среды вдоль оси Ox , ρ – плотность.

Поскольку плотность постоянна, то без потери общности ниже полагаем $\rho = 1$.

Принимая определяющие соотношения деформационной теории пластичности (для одноосного напряженного состояния) в следующем виде

$$\sigma = \sigma(\varepsilon). \quad (4.128)$$

Будем считать, что $\sigma(\varepsilon)$ есть монотонно возрастающая по ε функция (рис. 4.16) и что для всех ε производная $d\sigma/d\varepsilon$ есть монотонно убывающая функция (т. е. $d^2\sigma/d^2\varepsilon < 0$). Для напряжений $\sigma \leq \sigma_s$ (σ_s – предел текучести) зависимость $\sigma(\varepsilon)$, согласно закону Гука, линейна

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.129)$$

где E – модуль упругости (модуль Юнга). При этом значении модуля Юнга E подобрано так чтобы при $\sigma = \sigma_s$ зависимость (4.129) была непрерывна.

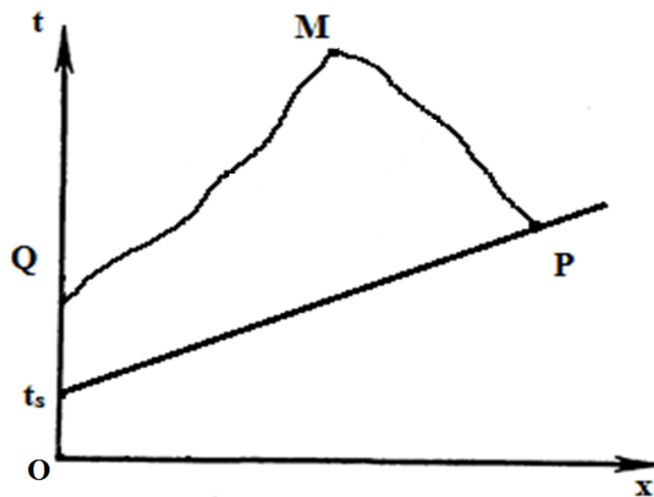


Рисунок 4.16 - Процесс распространения пластических деформаций в полубесконечном упругопластическом стержне

Из уравнения сплошности в случае малых деформаций получим соотношение

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dv}{dx}. \quad (4.130)$$

Учитывая зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ при нагружении и, вводя обозначение,

$$a^2(\sigma) = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}, \quad (4.131)$$

где $d\sigma/d\varepsilon$ - тангенс угла наклона касательной к кривой $\sigma(\varepsilon)$, α - постоянная, $0 < \alpha < 1$, $a^2(\sigma) = \sigma^{2\beta}$ - скорость распространения продольных волн в стержне, имеем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{1}{a^2(\sigma)} \frac{\partial\sigma}{\partial t}. \quad (4.132)$$

Подставляя соотношение (4.130) в (4.132), получим систему двух уравнений с частными производными первого порядка [55]:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\sigma}{dx}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{a^2(\sigma)} \frac{\partial\sigma}{\partial t}, \quad (4.133)$$

для двух функций $v(x,t), \sigma(x,t)$.

В этом уравнении $a(\varepsilon)$ есть скорость распространения продольных волн в стержне.

Так как скорость распространения волн в общем случае есть функция напряжения, то система уравнений (4.133) является системой квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка гиперболического типа. Определим для нее характеристики и соотношения на характеристиках.

Характеристики системы уравнений (4.133) определяются путем интегрирования дифференциальных уравнений характеристик:

$$dx = \mp a(\sigma) dt. \quad (4.134)$$

Эти уравнения в общем случае не удастся проинтегрировать в плоскости (x,t) до того, как решена задача, так как a - есть функция напряжения $\sigma(x,t)$.

Вдоль характеристик $dx = \mp a(\sigma) dt$ выполняются соотношения

$$dv \mp \frac{1}{a(\sigma)} d\sigma = 0. \quad (4.135)$$

Эти соотношения носят название дифференциальных уравнений характеристик в плоскости годографа (σ, v) . После интегрирования получим

$$v = \mp \int_0^\sigma \frac{d\sigma_1}{a(\sigma_1)} + C_{1,2} \text{ при } dx = \mp a(\sigma) dt. \quad (4.136)$$

Рассмотрим теперь простейший случай распространения волн нагружения в однородном полубесконечном стержне, находившемся в начальный момент в невозмущенном состоянии.

Определим решение уравнения (4.133) при заданных начальных условиях (условиях Коши):

$$v(x, 0) = v(x), \quad (4.137)$$

и краевом условии

$$\sigma(0, t) = -p(t), \quad (p(t) > 0), \quad dx = \mp a(\sigma) dt. \quad (4.138)$$

причем, чтобы обеспечить процесс нагрузки, должно быть $p'(t) > 0$.

Условия (4.137) – (4.138) означают, что в начальный момент стержень находится в деформированном состоянии и состоянии покоя. Удовлетворение начальным условиям связано с решением задачи Коши в области (рис. 4.17), ограниченной осью x и положительной характеристикой $t_s Q$.

2. Для простоты рассмотрим следующее выражение для функции (4.128)

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon, \quad \text{при } \sigma < \sigma_s, \\ \sigma(\varepsilon) &= \frac{1}{\alpha} \varepsilon^\alpha, \quad \text{при } 0 < \alpha < 1 \quad dx = \mp a(\sigma) dt. \end{aligned} \quad (4.139)$$

Общий случай рассматривается аналогично.

Для непрерывности функции $\sigma(\varepsilon)$ в точке ε_s полагаем $E = \frac{1}{\alpha} \varepsilon_s^{\alpha-1}$.

В этом случае плоскость xOt разобьется на две области: упругую, ограниченную осью x и прямой $t_s P$, и пластической областью, расположенной выше прямой $t_s P$. Заметим, что уравнение этой прямой имеет вид $x = a_0(t - t_s)$, где t_s – момент времени, когда σ достигает предела текучести σ_s (рис. 4.17). В упругой области имеем линейную задачу, которая без труда решается традиционными методами. Поэтому будем искать решение задачи Коши для уравнений (4.133) только в пластической области.

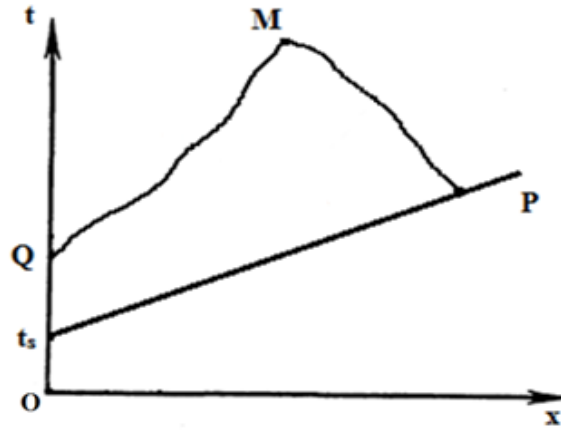


Рисунок 4.17 – Процесс распространения пластических деформаций в полубесконечном упругопластическом стержне

Постановка задачи

Найти значение функций $v(x,t), \sigma(x,t)$ в точке $M(x_m, t_m)$, если известно значение искомых функций вдоль $t_s P$ и $t_s Q$. Здесь точки $Q(0, t_q), P(x_p, t_p)$ определяются как точки пересечения соответствующих характеристик с осью Ot и прямой $t_s P$, проведенных из точки M . В силу (4.139) уравнения (4.133)–(4.136) запишутся так

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\sigma}{dx}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sigma^{2\beta} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\alpha-1}{\alpha} \quad (4.140)$$

Характеристики этой системы уравнений, согласно (4.134) имеют вид

$$dx = \mp \sigma^\beta dt.$$

Соотношение на характеристиках (4.135) после интегрирования запишутся так

$$v \mp \frac{\sigma^{-\beta+1}}{-\beta+1} = C_{1,2},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Введем инварианты Римана по формулам $\xi = v + \frac{\sigma^{-\beta+1}}{-\beta+1}, \eta = v - \frac{\sigma^{-\beta+1}}{-\beta+1}$,

тогда система (4.140) запишется в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \sigma^\beta \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sigma^\beta \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (4.141)$$

Использование законов сохранения для решения уравнений, описывающих волну нагрузки в упругопластическом стержне

Законы сохранения для системы уравнений (4.141) ищем в виде

$$\partial_t A + \partial_x B = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A(\xi, \eta) + \frac{\partial}{\partial x} B(\xi, \eta) = \left(\sigma^\beta \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(-\sigma^\beta \frac{\partial A}{\partial \eta} + \frac{\partial B}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (4.142)$$

Отсюда получаем уравнение для определения A и B

$$\sigma^\beta \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \xi} = 0, \quad -\sigma^\beta \frac{\partial A}{\partial \eta} + \frac{\partial B}{\partial \eta} = 0. \quad (4.143)$$

Исключая из (4.142) функцию B получаем уравнение для определения функции A .

$$\frac{8}{\beta(-\beta+1)} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} - \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{\partial A}{\partial \eta} \right) \frac{1}{\xi - \eta} = 0.$$

Введем в этом уравнении обозначение $\frac{8}{\beta(-\beta+1)} = \omega^{-1}$. В результате получим уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу [38]

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\omega}{\xi - \eta} \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{\partial A}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (4.143)$$

Для определения функции B получим аналогичное уравнение

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\omega}{\xi - \eta} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} - \frac{\partial B}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Используя (4.124) запишем интеграл по замкнутому контуру $t_s QMP$

$$\oint Adx - Bdt = 0. \quad (4.144)$$

Разобьем этот интеграл на четыре интеграла взятые по контурам $t_s P$, PM , MQ , Qt_s .

Вдоль контуров $t_s P$ и Qt_s интегралы можно вычислить после определения A , B и с учетом начальных и граничных условий (4.137), (4.138).

Определим A и B таким образом, чтобы вдоль характеристик PM и MQ интегралы обратились в ноль. Имеем

$$\int_{PM} A dx - B dt = \int_{PM} (-\sigma^\beta A - B) dt.$$

Вычисляем полученный интеграл по частям

$$\int_{PM} (-\sigma^\beta A - B) dt = t(-\sigma^\beta A - B) \Big|_Q^M - \int_{PM} t d(-\sigma^\beta A - B).$$

Аналогично вдоль MQ получаем

$$\int_{MQ} A dx - B dt = t(\sigma^\beta A - B) \Big|_M^Q - \int_{MQ} t d(\sigma^\beta A - B).$$

Окончательно получаем

$$d(\sigma^\beta A + B) \Big|_{\xi=\xi_0=const} = 0, \quad d(\sigma^\beta A - B) \Big|_{\eta=\eta_0=const} = 0.$$

Из первого соотношения имеем

$$\beta \sigma^{\beta-1} \left(\frac{1}{2} \sigma^\beta \right) A + \sigma^\beta A_\eta + B_\eta = -\frac{\beta}{2} A \sigma^{\beta-1} + 2A_\eta = 0 \text{ вдоль } \xi = \xi_0.$$

Поскольку $\sigma^{\beta-1} = \frac{2}{(\xi - \eta)(-\beta + 1)}$, то получим дифференциальное уравнение

на A вдоль $\xi = \xi_0$

$$-\frac{\beta}{-\beta + 1} A + A_\eta (\xi_0 - \eta) = 0.$$

Интегрируя его, получаем

$$\frac{\beta}{2(\beta - 1)} \ln(\eta - \xi_0) = \ln A + \ln C_3, \tag{4.145}$$

или $A = C_3 |\eta - \xi_0|^{\frac{\beta}{2(\beta-1)}}$, $B = -\sigma^\beta A - 1$, вдоль $\xi = \xi_0$.

Аналогично вдоль $\eta = \eta_0$ имеем

$$\beta \sigma^{\beta-1} \left(\frac{1}{2} \sigma^\beta \right) A + \sigma^\beta A_\xi - B_\xi = \beta \sigma^{\beta-1} \frac{1}{2} A \sigma^\beta + 2\sigma^\beta A_\xi = 0.$$

Отсюда следует, что вдоль $\eta = \eta_0$

$$A = C_4 |\eta_0 - \xi|^{\frac{\beta}{2(\beta-1)}}, \quad B = \sigma^\beta A, \tag{4.146}$$

Согласование условий (4.145) и (4.146) в точке $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ дает $C_3 = C_4$.

Поэтому для окончательного решения задачи необходимо решить уравнение (4.143) с граничными условиями (4.145) и (4.146).

Для решения этой задачи используем функцию Римана. Эта функция имеет вид

$$w(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = \left(\frac{\xi_0 - \eta_0}{\xi_0 - \eta} \right)^\omega \left(\frac{\xi_0 - \eta_0}{\xi - \eta_0} \right)^\omega F(\omega, \omega; 1, t), \quad (4.147)$$

где $1-t = \frac{(\xi - \eta)(\xi_0 - \eta_0)}{(\xi_0 - \eta)(\xi - \eta_0)}$, F – гипергеометрическая функция второго рода.

Пусть N произвольная точка из области $t_s PMQ$ (рис. 4.18). Соединяем точку N с MP характеристикой $NK - \xi_N$, а с QM характеристикой $NL - \eta_N$. В результате значение функции A в точке N будет равно

$$A(N) = A(M)w(M) + \int_{KM} w \left(-\frac{A\omega}{(\xi - \eta)} + A_\xi \right) d\xi + \int_{ML} w \left(\frac{A\omega}{(\xi - \eta)} + A_\eta \right) d\eta,$$

где функция w определена формулой (22).

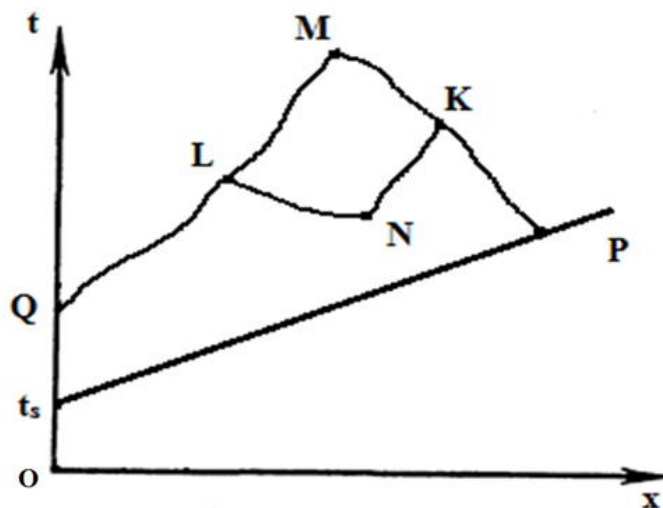


Рисунок 4.18 – Процесс распространения пластических деформаций в полубесконечном упругопластическом стержне

Аналогичная формула будет для определения значения функции B в точке N

$$B(N) = B(M)w(M) + \int_{KM} w \left(-\frac{B\omega}{(\xi - \eta)} + B_\xi \right) d\xi + \int_{ML} w \left(\frac{B\omega}{(\xi - \eta)} + B_\eta \right) d\eta.$$

Теперь из (19), с учетом полученных соотношений получаем

$$\oint_{t_s, PMQ} A dx - B dt = \oint_{t_s, Q} A dx - B dt + \oint_{Pt_s} A dx - B dt + t_m - t_q = 0$$

Отсюда имеем

$$t_m - t_q = \oint_{t_s, Q} B dt - \oint_{Pt_s} A dx - B dt$$

Аналогичные вычисления, позволяют найти координаты точки x_m

$$x_m - x_q = \oint_{t_s, Q} B dt - \oint_{Pt_s} A dx - B dt$$

Далее по значениям v, σ в точках Q и P , зная соотношения вдоль характеристик PM и QM , находим величины $v(x_m, t_m)$ и $\sigma(x_m, t_m)$.

В заключение рассмотрим вопрос о разрешимости задачи Коши, который всегда возникает при решении систем нелинейных дифференциальных уравнений. Как известно, задача Коши разрешима, если каждая характеристика пересекает линии Qt_s, t_sP только один раз [38]. Оказывается, этот вопрос также можно решить с помощью законов сохранения. Предположим, что характеристика QM пересекает линию t_sP в точке M . (см. рис. 4.19).

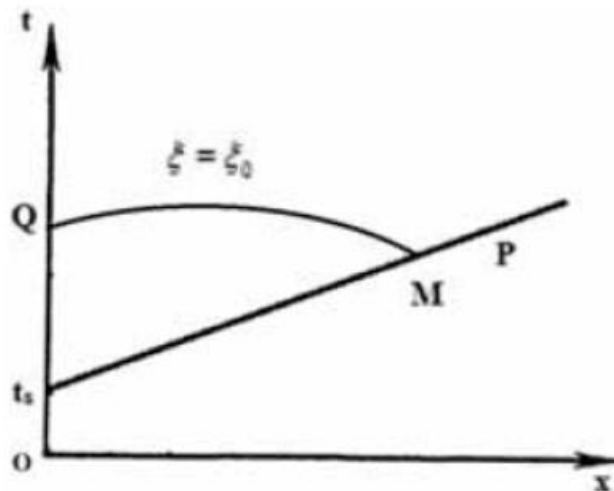


Рисунок 4.19 - Нахождения точки пересечения характеристики и кривой, на которой заданы начальные условия

Тогда имеем закон сохранения

$$\oint_{t_s M Q} Adx - Bdt = 0 \quad (4.148)$$

Пусть, как и ранее

$$A = C_3 |\eta - \xi_0|^{\frac{\beta}{2(\beta-1)}}, \quad B = -\sigma^\beta A - 1, \quad \text{вдоль } \xi = \xi_0. \quad (4.149)$$

Тогда из (4.148) получаем, точно также как и выше,

$$t_m - t_q = \oint_{t_s Q} Bdt - \oint_{P t_s} Adx - Bdt \quad (4.150)$$

Таким образом, если уравнение (4.150) разрешимо, то мы можем найти точку пересечения характеристики и начальной кривой. В этом случае задача Коши не разрешима. Уравнение (4.150) без труда решается методом последовательных приближений.

ГЛАВА 5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

5.1 Упругое кручение двухслойного стержня коробчатого сечения

В настоящее время имеется достаточно много общих точных решений, описывающих напряженно-деформированное состояние упругих тел (см., например, работы [65, 66, 98] и библиографию к ним). В данном параграфе построены законы сохранения для уравнений, описывающих напряженное состояние упругого двухслойного стержня коробчатого сечения под действием крутящего момента. Законы сохранения позволили вычислить напряженное состояние в каждой точке стержня по с помощью интегралов по внешней границе стержня.

Постановка задачи

Рассмотрено упругое состояние двухслойного стержня коробчатого сечения под действием крутящего момента. Контакт между двумя упругими слоями из различных материалов предполагается жестким. С помощью построенных законов сохранения вычислено напряженное состояние в каждой точке этой конструкции (рис. 5.1).

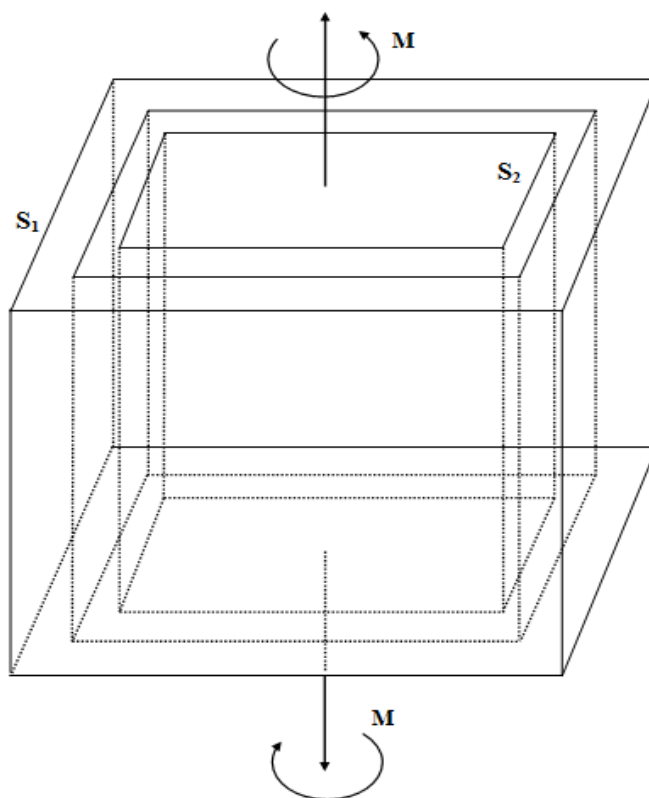


Рисунок 5.1 - Двухслойный стержень коробчатого сечения под действием крутящего момента

В первом слое S_1 выполняются уравнения равновесия и совместности деформаций

$$F_1 = \partial_x \tau_1^+ + \partial_y \tau_2^+ = 0, \quad F_2 = \partial_x \tau_2^+ - \partial_y \tau_1^+ = -2G_1 \theta = -D_1. \quad (5.1)$$

Во втором слое S_2 выполняются аналогичные уравнения

$$F_3 = \partial_x \tau_1^- + \partial_y \tau_2^- = 0, \quad F_4 = \partial_x \tau_2^- - \partial_y \tau_1^- = -2G_2 \theta = -D_2, \quad (5.2)$$

где $\tau_1 = \tau_{xz}, \tau_2 = \tau_{yz}$ - компоненты тензора напряжений, G_i - модули упругости материала в соответствующих слоях, θ - угол закручивания поперечного сечения.

Отрезки $L_1^2, L_1^5, L_d^2, L_d^5$ являются линиями контакта между слоями (см. рис. 5.2).

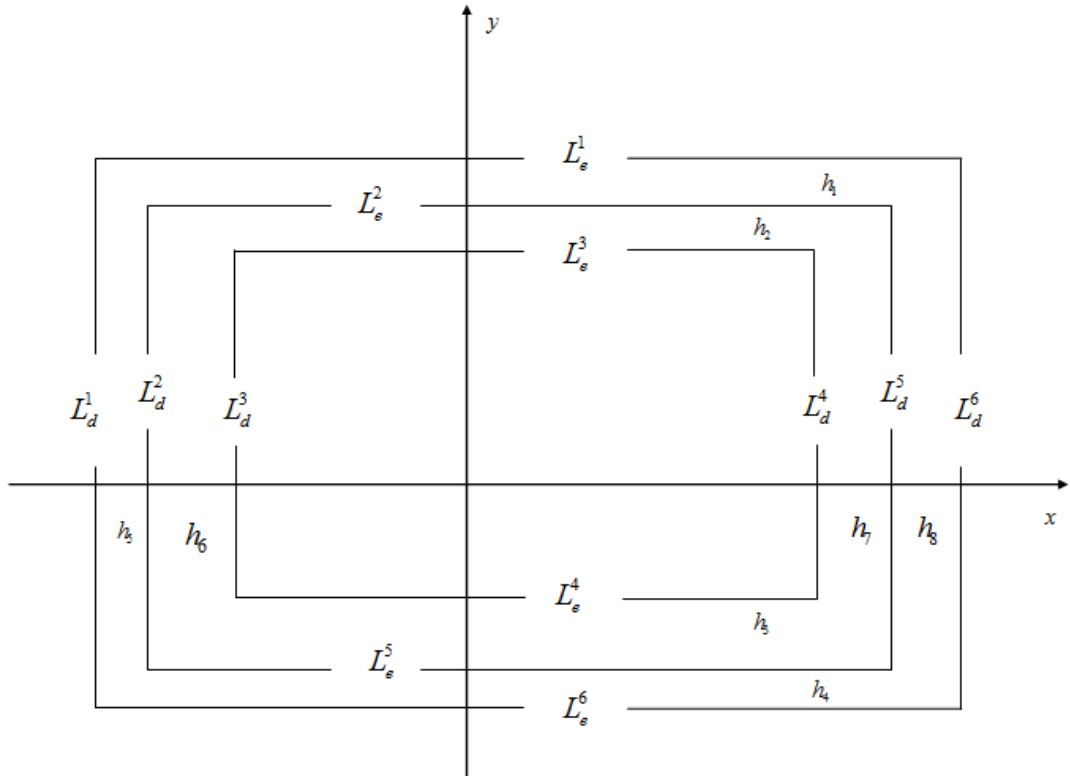


Рисунок 5.2 – Сечение двуслойного стержня

Предполагается, что конструкция является сплошной, поэтому на этих линиях выполняются условия

$$\tau_1^+ = \tau_1^-, \quad \tau_2^+ = \tau_2^-. \quad (5.3)$$

Боковые поверхности предполагаются свободной от напряжений, поэтому на ней выполняются условия для слоя S_1

$$\tau_1^+ n_1 + \tau_2^+ n_2 = 0, \quad (5.4)$$

либо

$$\tau_1^- n_1 + \tau_2^- n_2 = 0, \quad (5.5)$$

слоя S_2 . Здесь n_1, n_2 - компоненты вектора внешней нормали к боковой поверхности. В результате из (5.4), (5.5) получаем следующие граничные условия

$$\begin{aligned} L_1^1: & \quad -l - h_5 \leq x \leq l + h_8, \quad y = d + h_1, \quad \tau_1^+ = \tau_1(x, d + h_1) \leq 0, \quad \tau_2^+ = 0, \\ L_1^3: & \quad -l + h_6 \leq x \leq l - h_7, \quad y = d - h_2, \quad \tau_1^- = \tau_1(x, d - h_2) \geq 0, \quad \tau_2^- = 0, \\ L_1^4: & \quad -l + h_6 \leq x \leq l - h_7, \quad y = -d + h_3, \quad \tau_1^- = \tau_1(x, -d + h_3) \leq 0, \quad \tau_2^- = 0, \\ L_1^6: & \quad -l - h_5 \leq x \leq l + h_8, \quad y = -d - h_4, \quad \tau_1^+ = \tau_1(x, -d - h_4) \geq 0, \quad \tau_2^+ = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}
L_d^1: \quad & x = -l - h_5, -d - h_4 \leq y \leq d + h_1, \tau_1^+ = 0, \tau_2^+ = \tau_2(-l - h_5, y) \leq 0, \\
L_d^3: \quad & x = -l + h_6, -d + h_3 \leq y \leq d - h_2, \tau_1^- = 0, \tau_2^- = \tau_2(-l + h_6, y) \geq 0, \\
L_d^4: \quad & x = -l - h_7, -d + h_3 \leq y \leq d - h_2, \tau_1^- = 0, \tau_2^- = \tau_2(-l - h_7, y) \leq 0, \\
L_d^6: \quad & x = l + h_8, -d - h_4 \leq y \leq d + h_1, \tau_1^+ = 0, \tau_2^+ = \tau_2(l + h_8, y) \geq 0,
\end{aligned}$$

где $l > 0, d > 0, h_i \geq 0$ - постоянные.

Кроме того, потребуем согласование касательных напряжений в угловых точках

$$\begin{aligned}
\tau_1(-l - h_5, d + h_1) &= \tau_2(-l - h_5, d + h_1), \tau_1(-l - h_5, -d - h_4) = \tau_2(-l - h_5, -d + h_4), \\
\tau_1(l + h_8, d - h_4) &= \tau_2(l + h_5, d - h_4), \tau_1(l + h_8, d + h_1) = \tau_2(l + h_5, d + h_1), \\
\tau_1(-l - h_6, d - h_2) &= \tau_2(-l - h_6, d - h_2), \tau_1(-l - h_6, -d + h_3) = \tau_2(-l - h_6, -d + h_3), \\
\tau_1(l - h_7, d - h_2) &= \tau_2(l - h_7, d - h_2), \tau_1(l - h_7, -d + h_3) = \tau_2(l - h_7, -d + h_3).
\end{aligned}$$

Законы сохранения уравнений (5.1) - (5.2)

Сохраняющийся ток закона сохранения ищем в виде

$$A = \alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1, B = \alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2, \quad (5.7)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ функции от x, y .

Имеем

$$\partial_x A + \partial_y B = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (5.8)$$

Подставляем (5.7) в (5.8), получаем

$$\partial_x (\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1) + \partial_y (\alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2) = \omega_1 (\partial_x \tau_1 + \partial_y \tau_2) + \omega_2 (\partial_x \tau_2 - \partial_y \tau_1 + D_i), i = 1, 2. \quad (5.9)$$

Замечание. В формулах (5.8) и (5.9) опущены символы (+) и (-), поскольку они отличаются только постоянными D_i .

Из (5.9) получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \alpha^2 = -\beta^1, \partial_x \beta^1 + \partial_y \alpha^1 = 0, \partial_x \alpha^1 - \partial_y \beta^1 = 0, \partial_x \gamma^1 + \partial_y \gamma^2 - \beta^1 D_i = 0. \quad (5.10)$$

Из (5.10) следует, что в каждом из слоев допускается бесконечная серия законов сохранения.

Вычисления компонент тензора напряжений в слое S_1

Пусть $(x_0, y_0) \in S_1$. Рассмотрим решение уравнений (5.10), которое имеет особенность в этой точке.

$$\alpha^1 = \alpha^{1+} = \alpha^{1-} = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta^1 = \beta^{1+} = \beta^{1-} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (5.11)$$

$$\gamma^{1+} = \frac{D_1}{2} \ln \left(\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{l^2 + (y - y_0)^2} \right), \gamma^2 = 0, \gamma^{1-} = \frac{D_2}{2} \ln \left(\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{l^2 + (y - y_0)^2} \right), \gamma^{2-} = 0.$$

Опишем вокруг точки $(x_0, y_0) \in S_1$ окружность радиуса $\varepsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$, сделаем разрез, как это изображено на рис. 5.3.

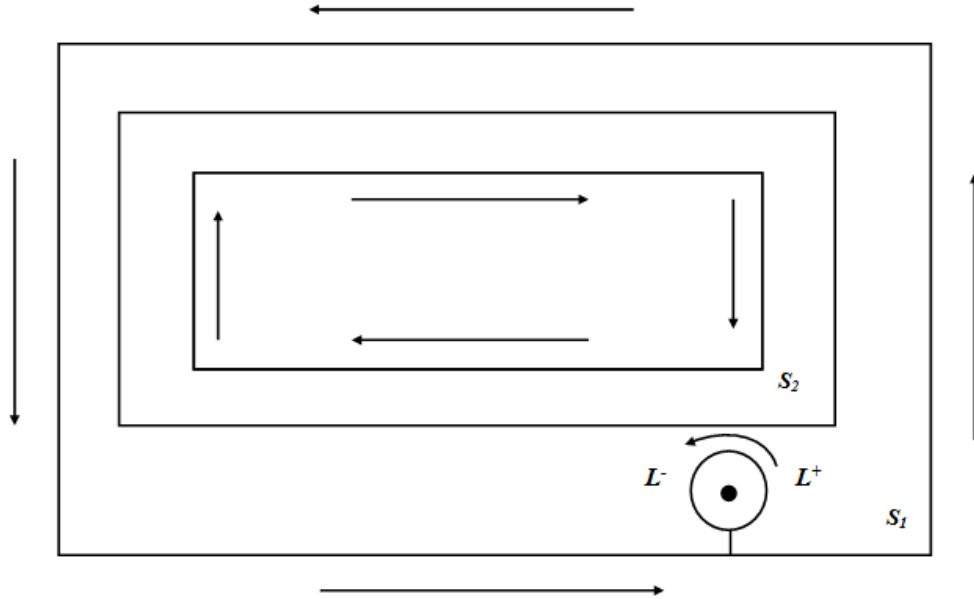


Рисунок 5.3 – Вычисление напряженного состояния в точке $(x_0, y_0) \in S_1$

По формуле Грина получаем

$$\iint_{S_1 \cup S_2} (\partial_x A + \partial_y B) dx dy =$$

$$= \int_{L^+} -A dy + B dx + \int_{L^-} -A dx + B dy + \int_{N^+} -A dx + B dy + \int_{N^-} -A dy + B dx + \int_{\varepsilon} -A dx + B dy = 0.$$

Здесь

$$L^+ = L^- = \{L_l^2 \cup L_d^5 \cup L_l^4 \cup L_d^3\},$$

где направление обхода у контуров L^+ и L^- противоположное.

$$N^+ = \{L_l^1 \cup L_d^6 \cup L_l^6 \cup L_d^1\}, N^- = \{L_l^3 \cup L_d^4 \cup L_l^4 \cup L_d^3\}.$$

Вычислим все интегралы последовательно.

$$\int_{L_l^1}^{l+h_8} (-\beta^1 \tau_1 + \alpha^1 \tau_2 + \gamma^2) |_{y=d+h_1} dx = - \int_{-j-h_5}^{l+h_8} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (d + h_1 - y_0)^2} \tau_1(x, d + h_1) dx,$$

$$\begin{aligned}
\int_{L_i^6}^{l+h_8} (-\beta^1 \tau_1 + \alpha^1 \tau_2 + \gamma^2) |_{y=-d-h_4} dx &= \int_{-l-h_5}^{l+h_8} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (d+h_4+y_0)^2} \tau_1(x, -d-h_4) dx, \\
\int_{L_i^3}^{l-h_7} (-\beta^1 \tau_1 + \alpha^1 \tau_2 + \gamma^2) |_{y=d-h_2} dx &= \int_{-l+h_6}^{l-h_7} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (d-h_2-y_0)^2} \tau_1(x, d-h_2) dx, \\
\int_{L_i^4}^{l-h_7} (-\beta^1 \tau_1 + \alpha^1 \tau_2 + \gamma^2) |_{y=-d+h_3} dx &= \int_{-l+h_6}^{l-h_7} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (d-h_3+y_0)^2} \tau_1(x, -d+h_3) dx, \\
\int_{L_d^1}^{d+h_1} -(\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1) |_{x=-l-h_5} dy &= \\
&= \int_{-d-h_4}^{d+h_1} \left(\frac{l+h_5+x_0}{(y-y_0)^2 + (l+h_5+x_0)^2} \tau_2(-l-h_5, y) + \frac{D_i}{2} \ln \frac{(l+h_5+x_0)^2 + (y-y_0)^2}{l^2 + (y-y_0)^2} \right) dy, \\
\int_{L_d^3}^{d-h_2} -(\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1) |_{x=-l+h_6} dy &= \\
&= \int_{-d+h_3}^{d-h_2} \left(-\frac{-l+h_6-x_0}{(y-y_0)^2 + (-l+h_6-x_0)^2} \tau_2(-l+h_6, y) + \frac{D_i}{2} \ln \frac{(-l+h_6-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{l^2 + y^2} \right) dy, \\
\int_{L_d^4}^{d-h_2} -(\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1) |_{x=l-h_7} dy &= \\
&= - \int_{-d+h_3}^{d-h_2} \left(\frac{l-h_7-x_0}{(y-y_0)^2 + (l-h_7-x_0)^2} \tau_2(l-h_7, y) + \frac{D_i}{2} \ln \frac{(l-h_7-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{l^2 + (y-y_0)^2} \right) dy, \\
\int_{L_d^6}^{d+h_1} -(\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1) |_{x=-l+h_8} dy &= \\
&= - \int_{-d-h_4}^{d+h_1} \left(\frac{-l+h_8-x_0}{(y-y_0)^2 + (-l+h_8-x_0)^2} \tau_2(-l+h_8, y) + \frac{D_i}{2} \ln \frac{(-l+h_8-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{l^2 + (y-y_0)^2} \right) dy.
\end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы

$$\int = \int_{L^+} + \int_{L_i^2} + \int_{L_d^5} + \int_{L_i^5} + \int_{L_d^2} + \int_{L^-} + \int_{L_i^2} + \int_{L_d^-} + \int_{L_i^5} + \int_{L_d^-}$$

Вычисляем их:

$$\int_{L_i^2} = \int_{L_i^+} (-\beta^1 \tau_1^+ + \alpha^1 \tau_2^+ + \gamma^{2+}) dx, \quad \int_{L_i^2} = \int_{L_i^-} (-\beta^1 \tau_1^- + \alpha^1 \tau_2^- + \gamma^{2-}) dx.$$

Поскольку $\tau_1^+ = \tau_1^-$, $\tau_2^+ = \tau_2^-$ на L_i^2 и $\gamma^{2+} = \gamma^{2-} = 0$, то $\int_{L_i^2} = - \int_{L_i^2}$.

Аналогично получаем $\int_{L_i^5} = - \int_{L_i^5}$.

$$\int_{L_d^+} = \int_{L_d^+} (\alpha^1 \tau_1^+ + \beta^1 \tau_2^+ + \gamma^{1+}) dx, \quad \int_{L_d^-} = \int_{L_d^-} (\alpha^1 \tau_1^- + \beta^1 \tau_2^- + \gamma^{1-}) dx.$$

Поскольку $\tau_1^+ = \tau_1^-$, $\tau_2^+ = \tau_2^-$ на L_d^5 и $\gamma^{1+} = \gamma^{1-} = 0$, то $\int_{L_d^+} = - \int_{L_d^-}$.

Следовательно, $\int_{L^+} = - \int_{L^-}$.

$$\begin{aligned} & \oint_{\varepsilon} -(\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^{1+}) dy + (-\beta^1 \tau_1 + \alpha^1 \tau_2 + \gamma^{2+}) dx = \\ & = \oint_{\varepsilon} -\left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \tau_1 + \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \tau_2 + \frac{D_1}{2} \ln \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{l^2 + (y-y_0)^2} \right) dy + \\ & + \left(-\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \tau_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \tau_2 \right) dx. \end{aligned}$$

Пусть $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi$, $y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, тогда

$$\oint_{\varepsilon} = - \int_0^{2\pi} \tau_2(x_0 + \varepsilon \cos \varphi, y_0 + \varepsilon \sin \varphi) d\varphi = -2\pi \tau_2(x_0, y_0).$$

Последнее равенство получается предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$ и использованием теоремы о среднем.

Сводя все формулы воедино, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} 2\pi \tau_2(x_0, y_0) = & - \int_{-l-h_5}^{l+h_8} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (d+h_1-y_0)^2} \tau_1(x, d+h_1) dx + \\ & + \int_{-l-h_5}^{l+h_8} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (d+h_4+y_0)^2} \tau_1(x, -d-h_4) dx + \\ & + \int_{-d-h_4}^{d+h_1} \left(\frac{l+h_5+x_0}{(y-y_0)^2 + (l+h_5+x_0)^2} \tau_2(-l-h_5, y) + \frac{D_1}{2} \ln \frac{(l+h_5+x_0)^2 + (y-y_0)^2}{l^2 + (y-y_0)^2} \right) dy - \\ & - \int_{-d-h_4}^{d+h_1} \left(\frac{-l+h_8-x_0}{(y-y_0)^2 + (-l+h_8-x_0)^2} \tau_2(-l+h_8, y) + \frac{D_1}{2} \ln \frac{(-l+h_8-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{l^2 + (y-y_0)^2} \right) dy + \\ & + \int_{-l+h_6}^{l-h_7} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (d-h_2-y_0)^2} \tau_1(x, d-h_2) dx + \int_{-l+h_6}^{l-h_7} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (d-h_2-y_0)^2} \tau_1(x, d-h_2) dx + \\ & + \int_{-d+h_3}^{d-h_2} \left(-\frac{-l+h_6-x_0}{(y-y_0)^2 + (-l+h_6-x_0)^2} \tau_2(-l+h_6, y) + \frac{D_2}{2} \ln \frac{(-l+h_6-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{l^2 + (y-y_0)^2} \right) dy - \\ & - \int_{-d+h_3}^{d-h_2} \left(\frac{l-h_7-x_0}{(y-y_0)^2 + (l-h_7-x_0)^2} \tau_2(l-h_7, y) + \frac{D_2}{2} \ln \frac{(l-h_7-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{l^2 + (y-y_0)^2} \right) dy. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Рассмотрим другое решение уравнений (5.10)

$$\alpha^1 = \alpha^{1+} = \alpha^{1-} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \beta^1 = \beta^{1+} = \beta^{1-} = -\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

$$\gamma^{1+} = 0, \gamma^{2+} = \frac{D_1}{2} \ln\left(\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{d^2 + (x-x_0)^2}\right), \gamma^{1-} = 0, \gamma^{2-} = \frac{D_1}{2} \ln\left(\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{d^2 + (x-x_0)^2}\right). \quad (5.13)$$

Почти дословно повторяя предыдущие рассуждения с решением (5.13), получаем

$$2\pi\tau_1(x_0, y_0) = - \int_{-j-h_5}^{l+h_8} \left(\frac{d+h_1-y_0}{(x-x_0)^2 + (d+h_1-y_0)^2} \tau_1(x, d+h_1) + \frac{D_1}{2} \ln \frac{(x-x_0)^2 + (d+h_1-y_0)^2}{(x-x_0)^2 + d^2} \right) dx +$$

$$+ \int_{-l-h_5}^{l+h_8} \left(\frac{-d-h_1-y_0}{(x-x_0)^2 + (d+h_4+y_0)^2} \tau_1(x, -d-h_4) + \frac{D_1}{2} \ln \frac{(x-x_0)^2 + (d+h_1+y_0)^2}{(x-x_0)^2 + d^2} \right) dx -$$

$$- \int_{-d-h_4}^{d+h_1} \frac{y-y_0}{(y-y_0)^2 + (l+h_5+x_0)^2} \tau_2(-l-h_5, y) dy - \int_{-d-h_4}^{d+h_1} \frac{-l+h_8-x_0}{(y-y_0)^2 + (-l+h_8-x_0)^2} \tau_2(-l+h_8, y) dy + \quad (5.14)$$

$$+ \int_{-l+h_6}^{l-h_7} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (d-h_2-y_0)^2} \tau_1(x, d-h_2) + \frac{D_2}{2} \ln \frac{(x-x_0)^2 + (d-h_2-y_0)^2}{(x-x_0)^2 + d^2} \right) dx +$$

$$+ \int_{-l+h_6}^{l-h_7} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (d-h_2-y_0)^2} \tau_1(x, d-h_2) + \frac{D_2}{2} \ln \frac{(x-x_0)^2 + (d-h_2-y_0)^2}{(x-x_0)^2 + d^2} \right) dx -$$

$$- \int_{-d+h_3}^{d-h_2} \frac{-l+h_6-x_0}{(y-y_0)^2 + (-l+h_6-x_0)^2} \tau_2(-l+h_6, y) dy - \int_{-d+h_3}^{d-h_2} \frac{l-h_7-x_0}{(y-y_0)^2 + (l-h_7-x_0)^2} \tau_2(l-h_7, y) dy.$$

Таким образом, построены законы сохранения, для уравнений описывающих напряженное состояние упругого двухслойного стержня коробчатого сечения под действием крутящего момента. Законы сохранения позволили вычислить напряженное состояние в каждой точке стержня по формулам (5.13) и (5.14) с помощью интегралов по внешней границе стержня.

5.2 Решение, описывающее сжатие двухслойного нелинейного материала

В данном параграфе построено решение, описывающее напряженно деформированное состояние нелинейно упругой двухслойной среды, находящейся между двумя жесткими плитами, сближающимися с постоянным ускорением вдоль оси OY .

Вводные сведения

Появление новых материалов и использование их в современном машиностроении и технике привели к всплеску интереса к нелинейным материалам и изучению их свойств. Нелинейной теории упругости посвящено достаточно много литературы. Разные подходы к нелинейной теории упругости и изучению, возникающих там уравнений имеются в книгах [48, 57] и цитированной там литературе. В отличие от линейной теории упругости, проблематика которой уже установилась, в нелинейной теории еще нет устоявшихся уравнений и методов их решения, кроме, может быть, одного класса так называемых «универсальных решений». Например, в статье [5] рассмотрен один из классов нелинейных уравнений упругости и использованы методы группового анализа для их решения. В данном параграфе, по-видимому, впервые построено точное решение, описывающее сжатие двухслойного нелинейного упругого материала.

Постановка задачи

Рассмотрим двухслойную нелинейную упругую среду, находящуюся между двумя жесткими плитами $y = \pm 1$. Один слой расположен в полосе $0 \leq y \leq 1$, а другой в полосе $-1 \leq y < 0$, $y = 0$ - линия контакта.

В первом слое компоненты тензора напряжений $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau^1$ связаны с компонентами вектора перемещений u^1, v^1 уравнениями, p^1 - гидростатическое давление.

$$\begin{aligned}\sigma_y^1 &= \frac{k_2 v_y^1}{\sqrt{(u_x^1)^2 + (v_y^1)^2 + (u_y^1 + v_x^1)^2}} + p^1(x, y), \\ \sigma_x^1 &= \frac{k_1 u_x^1}{\sqrt{(u_x^1)^2 + (v_y^1)^2 + (u_y^1 + v_x^1)^2}} + p^1(x, y), \\ \tau^1 &= \frac{k_3 (u_y^1 + v_x^1)}{\sqrt{(u_x^1)^2 + (v_y^1)^2 + (u_y^1 + v_x^1)^2}},\end{aligned}\tag{5.15}$$

где k_1, k_2, k_3 - постоянные.

Уравнения движения имеют вид

$$u''^1 = \partial_x \sigma_x^1 + \partial_y \tau^1, \quad v''^1 = \partial_x \tau^1 + \partial_y \sigma_y^1. \quad (5.16)$$

Упругая среда предполагается несжимаемой, поэтому

$$u_x^1 + v_y^1 = 0. \quad (5.17)$$

Во втором слое имеются аналогичные уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{k_4 u_x^2}{\sqrt{(u_x^2)^2 + (v_y^2)^2 + (u_y^2 + v_x^2)^2}} + p^2(x, y), \\ \sigma_y^2 &= \frac{k_5 v_y^2}{\sqrt{(u_x^2)^2 + (v_y^2)^2 + (u_y^2 + v_x^2)^2}} + p^2(x, y), \\ \tau^2 &= \frac{k_6 (u_y^2 + v_x^2)}{\sqrt{(u_x^2)^2 + (v_y^2)^2 + (u_y^2 + v_x^2)^2}}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где k_4, k_5, k_6 - постоянные.

$$u''^2 = \partial_x \sigma_x^2 + \partial_y \tau^2, \quad v''^2 = \partial_x \tau^2 + \partial_y \sigma_y^2. \quad (5.19)$$

Условие несжимаемости

$$u_x^2 + v_y^2 = 0. \quad (5.20)$$

На линии контакта $y = 0$ выполняются условия

$$\begin{aligned} \sigma_x^1(x, 0) &= \sigma_x^2(x, 0), \quad \sigma_y^1(x, 0) = \sigma_y^2(x, 0), \quad \tau^1(x, 0) = \tau^2(x, 0), \\ u^1(x, 0) &= u^2(x, 0), \quad v^1(x, 0) = v^2(x, 0). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Решение задачи

Ищем решение уравнений (5.15) - (5.20) в виде

$$u^1 = t^2(x + f(y)), \quad v^1 = -t^2 y, \quad u^2 = t^2(x + F(y)), \quad v^2 = -t^2 y, \quad (5.22)$$

где f, F - искомые функции, удовлетворяющие, в силу (5.21), условию $f(0) = F(0)$.

Замечание. Этому условию всегда можно удовлетворить, поскольку функции f и F , как показано ниже, есть решение дифференциальных уравнений второго порядка и, следовательно, каждая определена с точностью до двух произвольных постоянных.

Подставим первые два соотношения (5.22) в (5.15) - (5.17), получаем

$$\sigma_x^1 = \frac{k_1}{\sqrt{2+(f')^2}} + p^1(x, y), \quad \sigma_y^1 = -\frac{k_2}{\sqrt{2+(f')^2}} + p^1(x, y), \quad \tau^1 = \frac{k_3 f'}{\sqrt{4+(f')^2}}, \quad (5.23)$$

$$2f + 2x = p_x^1 + \frac{\partial}{\partial y} \frac{k_3 f'}{\sqrt{2+(f')^2}}, \quad -2y = p_y^1 - \frac{\partial}{\partial y} \frac{k_2}{\sqrt{2+(f')^2}}. \quad (5.24)$$

Из (5.23) и (5.24) следует

$$p^1 = x^2 - y^2 + \frac{k_2}{\sqrt{2+(f')^2}} + c_p^1, \quad (5.25)$$

где c_p^1 - постоянная.

$$2f = \frac{\partial}{\partial y} \frac{k_3 f'}{\sqrt{2+(f')^2}}. \quad (5.26)$$

Решим и исследуем уравнение (5.26).

После дифференцирования уравнение (5.26) запишется в виде

$$f = \frac{k_3 f''}{(2+(f')^2)^{3/2}}. \quad (5.27)$$

В (5.27) сделаем стандартную замену вида $f' = p(f)$, $f'' = p' p$, получаем

$$f = \frac{k_3 p p'}{(2+p^2)^{3/2}}.$$

После интегрирования получаем

$$f^2 + C_1 = -\frac{2k_3}{(2+p^2)^{1/2}}, \quad (5.28)$$

где C_1 - постоянная.

Формулу (5.28) запишем в виде

$$f' = 2\sqrt{\frac{4k_3^2 - 2(f^2 + C_1)^2}{(f^2 + C_1)^2}} \quad (5.29)$$

Или

$$(2+(f')^2)^{1/2} = -\frac{2k_3}{f^2 + C_1}. \quad (5.30)$$

Подставляем (5.29), (5.26) в соотношения (5.23), (5.24) имеем

$$p^1 = x^2 - y^2 - \frac{k_2(f^2 + C_1)}{2k_3} + c_p^1, \quad \sigma_x^1 = p^1 - \frac{k_1(f^2 + C_1)}{2k_3}, \quad (5.31)$$

$$\sigma_y^1 = x^2 - y^2 + c_p^1, \quad \tau^1 = -\frac{1}{2}\sqrt{4k_3^2 - 2(f^2 + C_1)^2}$$

Замечание. Решение уравнения (5.29) можно без труда получить через эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода. Но они нам не потребуются, поэтому здесь это решение не приводятся.

Полностью аналогично получаем также формулы для второго слоя. Они имеют вид

$$p^1 = x^2 - y^2 - \frac{k_5(F^2 + C_2)}{2k_6} + c_p^2, \quad \sigma_x^2 = p^1 - \frac{k_4(F^2 + C_2)}{2k_6}, \quad (5.32)$$

$$\sigma_y^2 = x^2 - y^2 + c_p^2, \quad \tau^1 = -\frac{1}{2}\sqrt{4k_6^2 - (F^2 + 2C_2)^2}.$$

Теперь удовлетворим условиям (5.21) на линии контакта $y = 0$.

Поскольку $\sigma_y^1(x,0) = \sigma_y^2(x,0)$, то получаем $c_p^1 = c_p^2$.

Из условия $\tau^1(x,0) = \tau^2(x,0)$ имеем

$$2(k_3^2 - k_6^2) - 2f^2(0)(C_1 - C_2) + C_1^2 - C_2^2 = 0 \quad (5.33)$$

Из условия $\sigma_x^1(x,0) = \sigma_x^2(x,0)$ получаем

$$k_6(f^2(0) + C_1)(k_1 + k_2) = k_3(f^2(0) + C_2)(k_4 + k_5). \quad (5.34)$$

Формулы (5.33) и (5.34) связывают параметры упругой среды k_1, \dots, k_6 с постоянными интегрирования C_1, C_2 и числом $f(0)$. Выполнение условий (5.33) и (5.34) гарантирует отсутствие разрывов в рассматриваемом слое.

Таким образом, построено решение, описывающее напряженно деформированное состояние нелинейно упругой двухслойной среды, находящейся между двумя жесткими плитами, сближающимися с постоянным ускорением вдоль оси OY . Заметим, что подобное решение может быть построено и для среды, законы упругости которой имеют вид

$$\sigma_x = \lambda_1(I_2)u_x, \quad \sigma_y = \lambda_2(I_2)v_y, \quad \tau = \lambda_3(I_2)(v_x + u_y),$$

где λ_i - некоторые гладкие функции, зависящие от второго инварианта тензора деформаций I_2 .

5.3 Упруго-пластическое кручение двухслойного стержня

В данном параграфе изучается упруго-пластическое кручение двухслойного стержня под действием крутящего момента. Предполагается, что стержень состоит из двух слоев. Каждый слой обладает своими упругими свойствами, но пластические свойства у обоих слоев одинаковые. Граница контакта слоев расположена вдоль оси ox . Боковая граница стержня свободна от напряжений, на границе раздела непрерывны перемещения и напряжения. Компоненты тензора напряжений в точке вычисляются с помощью контурных интегралов, полученных из законов сохранения, вычисленных по боковой границе. Далее второй инвариант тензора напряжений сравнивается с пределом текучести. В тех точках, где достигается предел текучести реализуется пластическое состояние, в остальных – упругое. Это позволяет построить границу между пластической и упругой областями. Данная методика дает способ вычислить упруго-пластические границы для основных прокатных профилей стержней. Это предполагается сделать в последующих работах. Напоминаем, что ранее с помощью законов сохранения решены основные краевые задачи для пластической двумерной среды, упруго-пластического кручения изотропных стержней и упругих сред для тел конечных размеров.

Вводные сведения

Уравнения упругости и пластичности уже достаточно давно изучаются с помощью симметрий [4, 59]. Далее было показано, законы сохранения можно использовать и они были использованы для решения краевых задач для двумерных уравнений пластичности [22, 40, 112, 116, 175, 176, 178, 183, 184, 190]. Эти работы показали, что законы сохранения более хорошо подходят для решения краевых задач, чем точечные симметрии, на которые ранее делалась ставка [59]. Это объясняется тем, что симметрии по своей природе являются локальными, в отличие от законов сохранения – глобальными по своей сути. Далее законы сохранения были применены для решения упруго-

пластических задач о кручении стержней и изгибе консолей, а также решению упруго-пластических задач для пластин конечных размеров, ослабленных отверстиями [113, 141, 160, 171, 179, 182]. В данном параграфе показано, что законы сохранения можно использовать и для решения краевых задач для многослойных материалов.

Постановка задачи

Рассмотрим прямолинейный стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 5.4. Пусть S_1 и S_2 - области, занятые упруго-пластическими изотропными материалами, у которых предел текучести при чистом сдвиге одинаковый и равен k , а упругие постоянные Ламе различны и равны λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 соответственно. Пусть линия раздела материалов прямолинейна. Выберем ось координат Ox вдоль линии раздела. Предполагается, как обычно, что боковая поверхность стержня свободна от напряжений, а стержень скручивается парой сил с моментом

$$M = \iint (y\sigma_{13} - x\sigma_{23}) dx dy.$$

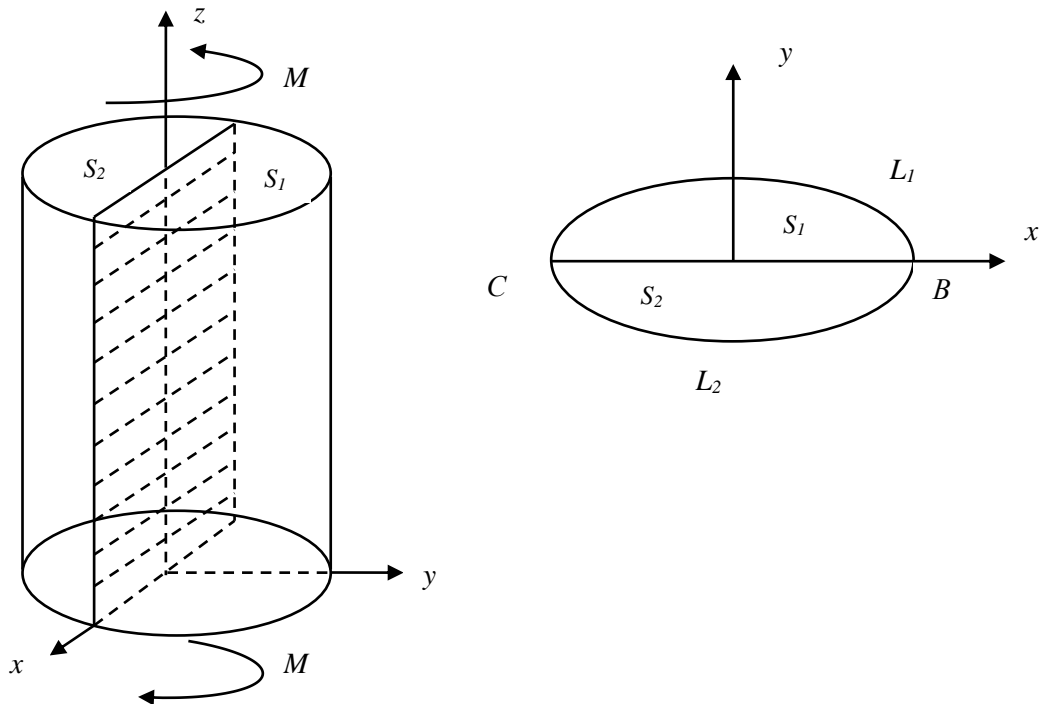


Рисунок 5.4 - Кручение двухслойного стержня

В этом случае уравнения, описывающие напряженное состояние в области S_i $i=1,2$ имеют вид

$$F_1 = \partial_x \sigma_{13} + \partial_y \sigma_{23} = 0, F_2 = \partial_y \sigma_{13} - \partial_x \sigma_{23} + \mu_i \omega = 0, \mu_i \omega = K_i, \quad (5.35)$$

где σ_{13}, σ_{23} – компоненты тензора напряжений, ω – угол закручивания, он предполагается постоянным.

На боковой поверхности стержня выполняются условия

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0, \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2, \quad (5.36)$$

которые означают, что боковая поверхность свободна от напряжений и находится в пластическом состоянии.

Из (5.36) получаем

$$\sigma_{13} = kn_1, \sigma_{23} = -kn_2. \quad (5.37)$$

Также предполагаем, что на линии раздела CD компоненты тензора напряжений непрерывны, это означает отсутствие разрыва напряжений для данного стержня вдоль CD .

Законы сохранения

Закон сохранения ищем в виде

$$A_x + B_y = \rho_1 F_1 + \rho_2 F_2, \quad (5.38)$$

где ρ_1, ρ_2 – некоторые функции, одновременно тождественно не равные нулю, буквенные индексы внизу означают производные по соответствующим переменным.

Пусть

$$A = \alpha^1 u + \alpha^2 v + \alpha^3, B = \beta^1 u + \beta^2 v + \beta^3, \quad (5.39)$$

где для удобства положили $\sigma_{13} = u, \sigma_{23} = v, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \beta^1, \beta^2, \beta^3$ – предполагаются функциями только x, y .

Подставляя (5.39) в (5.38) получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \alpha^2 = -\beta^1, \alpha_x^1 - \alpha_y^2 = 0, \alpha_y^1 + \alpha_x^2 = 0, \alpha_x^3 + \beta_y^3 = -\alpha^2 K_i, \quad (5.40)$$

Пусть

$$\alpha_x^{1(i)} - \alpha_y^{2(i)} = 0, \alpha_y^{1(i)} + \alpha_x^{2(i)} = 0, \alpha_x^{3(i0)} + \beta_y^{3(i0)} = -\alpha^2 K_i, \quad i=1,2 \quad (5.41)$$

Здесь индекс i в скобках соответствует области S_i .

Предположим, что в точке x_0, y_0 подынтегральные функции имеют особенность и эта точка находится в круге радиуса $\varepsilon: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varepsilon^2$ (рис. 5.5), тогда из (5.38) получаем

$$\begin{aligned} \iint_S (A_x + B_y) dx dy &= \iint_{S_1} (A^1_x + B^1_y) dx dy + \iint_{S_2} (A^2_x + B^2_y) dx dy = - \int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx + \\ &+ \int_{L_1} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_2} A^2 dy - B^2 dx + \int_{CD} A^1 dy - B^1 dx + \int_{DC} A^2 dy - B^2 dx = 0 \end{aligned}$$

Имеем вдоль CD

$$\begin{aligned} \int_{CD} A^1 dy - B^1 dx + \int_{DC} A^2 dy - B^2 dx &= \int_{CD} (\alpha^{1(1)} u + \alpha^{2(1)} v + \alpha^{3(1)}) dy - (-\alpha^{2(1)} u + \alpha^{1(1)} v + \beta^{3(1)}) dx + \\ &+ \int_{DC} (\alpha^{1(2)} u + \alpha^{2(2)} v + \alpha^{3(2)}) dy - (-\alpha^{2(2)} u + \alpha^{1(2)} v + \beta^{3(2)}) dx = 0 \end{aligned}$$

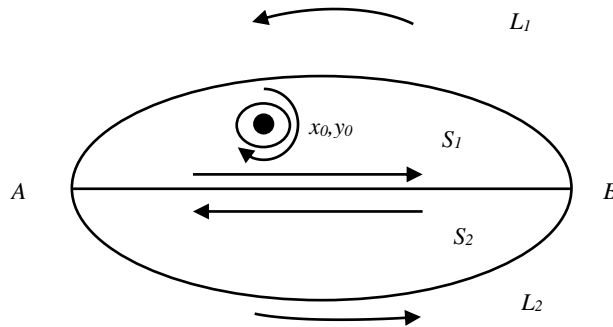


Рисунок 5.5 - Схема взятия интегралов по поперечному сечению

Поскольку вдоль CD $dy = 0$, то полагаем $\beta^{3(i)} = 0$, $\alpha_x^{3(i)} = \alpha^{2(i)} K_i$, поэтому $\alpha^{1(1)} = \alpha^{1(2)}$, $\alpha^{2(1)} = \alpha^{2(2)}$.

В результате получаем

$$\int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx = \int_{L_1} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_2} A^2 dy - B^2 dx. \quad (5.42)$$

Воспользуемся формулой (5.42) для нахождения функций u, v в точке

Для этого рассмотрим решение уравнений (5.41) в виде

$$\alpha^1 = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \alpha^2 = -\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \alpha^3 = \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0}. \quad (5.43)$$

Подставляя (5.43) в (5.42), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx &= \int_{\varepsilon} (\alpha^1 u + \alpha^2 v + \alpha^3) dy - (-\alpha^2 u + \alpha^1 v) dx = \\ &= \int_{\varepsilon} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} u - \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} v + \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0} \right) dy - \left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} u \right) dx + \\ &\quad + \int_{\varepsilon} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} v \right) dx \end{aligned}$$

Пусть $x-x_0 = \varepsilon \cos \phi$, $y-y_0 = \varepsilon \sin \phi$.

Тогда получаем

$$\int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx = \int_0^{2\pi} [(u \cos \phi + v \sin \phi) \cos \phi + (u \sin \phi + v \cos \phi) \sin \phi] d\phi = \int_0^{2\pi} u d\phi = 2\pi u(x_0, y_0).$$

В последнем равенстве использована теорема о среднем и предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$.

В результате из формулы (5.42) следует

$$\begin{aligned} 2\pi \sigma_{13}(x_0, y_0) &= \\ &\int_{L_1} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0} \right) dy - \\ &\quad - \left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\ &+ \int_{L_2} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \omega \mu_2 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0} \right) dy - \\ &\quad - \left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Рассмотрим решение уравнений (5.41) в виде

$$\alpha^1 = \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad \alpha^2 = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad \alpha^3 = \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2). \quad (5.45)$$

Подставляя (5.45) в (5.42), получаем

$$\begin{aligned} 2\pi \sigma_{23}(x_0, y_0) &= \\ &\int_{L_1} \left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) \right) dy - \\ &\quad - \left(-\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx + \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$+ \int_{L_2} \left(-\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) dy - \right. \\ \left. - \left(-\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx. \right.$$

Таким образом, формулы (5.44), (5.46) позволяют вычислить значения компонент тензора напряжений во всех точках поперечного сечения. Далее в каждой точке x_0, y_0 проверяется условие пластичности $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2$. Те точки, где $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 < k^2$, принадлежат упругой зоне, а остальные точки – пластической области. Тем самым описанная процедура позволяет выделить пластические и упругие зоны и построить упруго-пластическую границу, которая заранее была неизвестна и подлежала определению.

5.4 Упруго - пластическое кручение многослойного стержня

В данном параграфе исследуется упруго-пластическое кручение многослойного стержня, состоящего из нескольких слоев. Упругие свойства слоев различны, но коэффициент пластичности у всех слоев одинаковый. Для простоты рассмотрен стержень, состоящий из трех слоев. Границы контакта слоев параллельны. Боковая граница стержня свободна от напряжений, на границах раздела слоев непрерывны напряжения и перемещения. Построены законы сохранения, которые позволили вычислить компоненты тензора напряжений с помощью контурных интегралов по границе слоев. Во всех точках второй инвариант тензора напряжений сравнивается с пределом текучести. В тех точках, где достигается предел текучести при чистом сдвиге, реализуется пластическое состояние, в остальных – упругое. В результате решения задачи можно построить границу между пластической и упругой областями. Этот метод позволяет построить упруго-пластические границы для стержней различных профилей.

Постановка задачи

Дан прямолинейный стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 5.6.

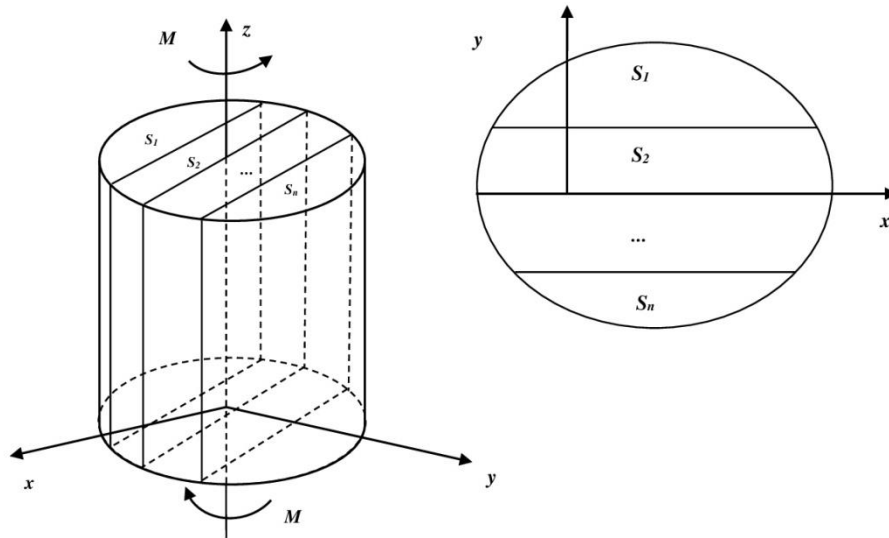


Рисунок 5.6 – Скручивание многослойного стержня

Пусть S_1, S_2, \dots, S_n - области, состоят из изотропных упруго–пластических материалов, у которых предел пластичности при чистом сдвиге одинаковый и равен k , а упругие постоянные Ламе различны и равны $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \dots, \lambda_n, \mu_n$ соответственно. Пусть линия раздела материалов прямолинейна. Выберем ось координат Ox вдоль линии раздела. Далее, для простоты вычислений, не теряя общности, будем считать $n=3$. Предполагается, как обычно, что боковая поверхность стержня свободна от напряжений, а стержень скручивается парой сил с моментом

$$M = \iint (y\sigma_{13} - x\sigma_{23}) dx dy.$$

В этом случае уравнения, описывающие напряженное состояние в области S_i $i=1,2,3$ имеют вид

$$F_1 = \partial_x \sigma_{13} + \partial_y \sigma_{23} = 0, F_2 = \partial_y \sigma_{13} - \partial_x \sigma_{23} + \mu_i \omega = 0, \quad \mu_i \omega = K_i, \quad (5.47)$$

где σ_{13}, σ_{23} - компоненты тензора напряжений, ω - угол закручивания, он постоянен для всех слоев.

На боковой поверхности стержня граничные условия следующие

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0, \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2, \quad (5.48)$$

они означают, что боковая поверхность находится в пластическом состоянии и свободна от напряжений.

Из (5.48) следует

$$\sigma_{13} = kn_1, \sigma_{23} = -kn_2. \quad (5.49)$$

AB и CD – прямолинейные линии раздела, на них σ_{13}, σ_{23} непрерывны, это означает отсутствие разрыва напряжений для данного стержня вдоль линий контакта.

Законы сохранения

Законом сохранения назовем выражение вида

$$A_x + B_y = \rho_1 F_1 + \rho_2 F_2, \quad (5.50)$$

где ρ_1, ρ_2 - некоторые функции, одновременно тождественно не равные нулю, буквенные индексы внизу означают производные по соответствующим переменным.

Предположим, что

$$A = \alpha^1 u + \alpha^2 v + \alpha^3, B = \beta^1 u + \beta^2 v + \beta^3, \quad (5.51)$$

где для удобства обозначим $\sigma_{13} = u, \sigma_{23} = v, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \beta^1, \beta^2, \beta^3$ являются функциями только x, y .

Подставляя формулы (5.51) в выражения (5.50), получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \alpha^2 = -\beta^1, \alpha_x^1 - \alpha_y^2 = 0, \alpha_y^1 + \alpha_x^2 = 0, \alpha_x^3 + \beta_y^3 = -\alpha^2 K_i, \quad (5.52)$$

Пусть

$$\alpha_x^{1(i)} - \alpha_y^{2(i)} = 0, \alpha_y^{1(i)} + \alpha_x^{2(i)} = 0, \alpha_x^{3(i)} + \beta_y^{3(i)} = -\alpha^2 K_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.53)$$

Здесь индекс i в скобках соответствует области S_i .

Если в точке x_0, y_0 подынтегральные функции имеют особенность, и эта точка находится в круге радиуса $\varepsilon : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varepsilon^2$, тогда из (5.50) получаем

$$\begin{aligned} \iint_S (A_x + B_y) dx dy &= \iint_{S_1} (A^1_x + B^1_y) dx dy + \iint_{S_2} (A^2_x + B^2_y) dx dy + \iint_{S_3} (A^3_x + B^3_y) dx dy = \\ &= -\int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_1} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_2} A^2 dy - B^2 dx + \int_{L_3} A^3 dy - B^3 dx + \\ &+ \int_{AB} A^1 dy - B^1 dx + \int_{BA} A^2 dy - B^2 dx + \int_{CD} A^2 dy - B^2 dx + \int_{DC} A^3 dy - B^3 dx = 0. \end{aligned}$$

Имеем вдоль MN (рис. 5.7)

$$\begin{aligned} \int_{AB} A^1 dy - B^1 dx + \int_{BA} A^2 dy - B^2 dx &= \\ &= \int_{AB} (\alpha^{1(1)} u + \alpha^{2(1)} v + \alpha^{3(1)}) dy - (-\alpha^{2(1)} u + \alpha^{1(1)} v + \beta^{3(1)}) dx + \\ &+ \int_{BA} (\alpha^{1(2)} u + \alpha^{2(2)} v + \alpha^{3(2)}) dy - (-\alpha^{2(2)} u + \alpha^{1(2)} v + \beta^{3(2)}) dx = 0. \end{aligned}$$

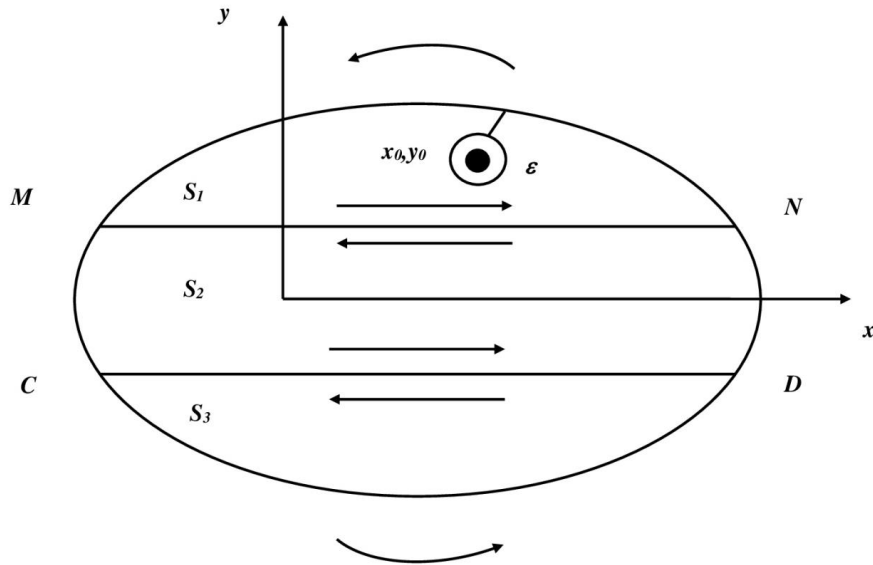


Рисунок 5.7 – Схема вычисления напряженного состояния

Так как вдоль MN $dy = 0$, то для удобства полагаем $\beta^{3(i)} = 0$, $\alpha_x^{3(i)} = \alpha^{2(i)} K_i$, поэтому $\alpha^{1(1)} = \alpha^{1(2)}$, $\alpha^{2(1)} = \alpha^{2(2)}$.

Аналогичные выражения можно получить и вдоль отрезка CD .

В результате имеем

$$\int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx = \int_{L_1} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_2} A^2 dy - B^2 dx + \int_{L_3} A^3 dy - B^3 dx. \quad (5.54)$$

Используем формулу (8) для нахождения функций u, v в точке.

Для этого рассмотрим решение уравнений (5.53) в виде

$$\alpha^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \alpha^2 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \alpha^3 = \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0}. \quad (5.55)$$

Подставляя (5.55) в (5.54), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx &= \int_{\varepsilon} (\alpha^1 u + \alpha^2 v + \alpha^3) dy - (-\alpha^2 u + \alpha^1 v) dx = \\ &= \int_{\varepsilon} \left(\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} u - \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} v + \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0} \right) dy - \\ &- \left(\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} u \right) dx + \int_{\varepsilon} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} v dx. \end{aligned}$$

Пусть $x - x_0 = \varepsilon \cos \phi, y - y_0 = \varepsilon \sin \phi$, тогда получаем

$$\int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx = \int_0^{2\pi} [(u \cos \phi + v \sin \phi) \cos \phi + (u \sin \phi + v \cos \phi) \sin \phi] d\phi = \int_0^{2\pi} u d\phi = 2\pi u(x_0, y_0).$$

В последнем равенстве использован предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ и теорема о среднем.

$$\begin{aligned} 2\pi \sigma_{13}(x_0, y_0) &= \int_{L_1} \left(\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \right. \\ &+ \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0} \left. \right) dy - \left(\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\ &+ \int_{L_2} \left(\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \omega \mu_2 \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0} \right) dy - \\ &- \left(\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\ &+ \int_{L_3} \left(\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \omega \mu_2 \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0} \right) dy - \\ &- \left(\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Пусть решение уравнений (5.53) имеет вид

$$\begin{aligned}
\alpha^1 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\
\alpha^2 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\
\alpha^3 &= \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2).
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Подставим (5.57) в (5.54) и получаем

$$\begin{aligned}
2\pi \sigma_{23}(x_0, y_0) &= \int_{L_1} \left(\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) dy - \left(- \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \right. \\
&+ \left. \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\
&\int_{L_2} \left(- \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x - x_0)^2 + \right. \\
&+ \left. (y - y_0)^2) dy - \left(- \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx + \right. \\
&+ \int_{L_3} \left(- \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega \mu_2 \ln((x - x_0)^2 + \right. \\
&+ \left. (y - y_0)^2) dy - \left(- \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Формулы, аналогичные (5.56) и (5.58), без труда получаем и для точек x_0, y_0 , принадлежащих областям S_2, S_3 .

Таким образом, формулы (5.56), (5.58) позволяют вычислить значения σ_{13}, σ_{23} во всех точках исследуемого сечения. Далее в каждой точке x_0, y_0 проверяется условие пластичности $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2$.

В тех точках, где $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2$, они принадлежат пластической области, а остальные точки – упругой области. Тем самым описанная методика позволяет выделить упругие и пластические зоны и построить упругопластическую границу, которая подлежала определению и заранее была неизвестна.

5.5 Упруго-пластическое кручение двухслойного стержня, ослабленного отверстиями

В данном параграфе изучается упруго-пластическое кручение многосвязного двухслойного призматического стержня, находящегося под действием пары сил с заданным моментом. Предполагается, что стержень состоит из двух слоев. Каждый слой обладает своими упругими свойствами, но пластические характеристики у обоих слоев одинаковые. Граница контакта слоев расположена вдоль оси ox . Боковая граница стержня свободна от напряжений, на границе раздела непрерывны перемещения и напряжения. Компоненты тензора напряжений в точке вычисляются с помощью контурных интегралов, полученных из законов сохранения, вычисленных по боковой границе и границам отверстий. В тех точках стержня, где достигается предел текучести – имеется пластическое состояние, в остальных – упругое. Это позволяет построить границу между пластической и упругой областями.

Вводные сведения

Уравнения упругости и пластичности уже более 50 лет изучаются с помощью симметрий [4, 59]. Это позволило построить ряд точных решений и изучить некоторые качественные свойства этих уравнений. Были попытки с помощью симметрий решать краевые задачи [59], но хороших результатов здесь достичь не удалось, что объясняется локальной природой симметрий. Найденные законы сохранения оказались более подходящими для решения краевых задач уравнений механики [40, 112, 116, 172]. Впервые законы сохранения были использованы для решения краевых задач для двумерных уравнений пластичности [40, 175, 176, 186 и др.] и с их помощью удалось решить основные краевые задачи. Это объясняется тем, что симметрии по своей природе являются локальными, в отличие от законов сохранения – глобальными по своей сути. Далее законы сохранения были применены для решения упруго-пластических задач о кручении стержней и изгибе консолей, а также решению упруго-пластических задач для пластин конечных

размеров, ослабленных отверстиями. В параграфе показано, что законы сохранения можно использовать успешно и для решения краевых задач для многослойных материалов.

Постановка задачи

Рассмотрим прямолинейный стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 5.8.

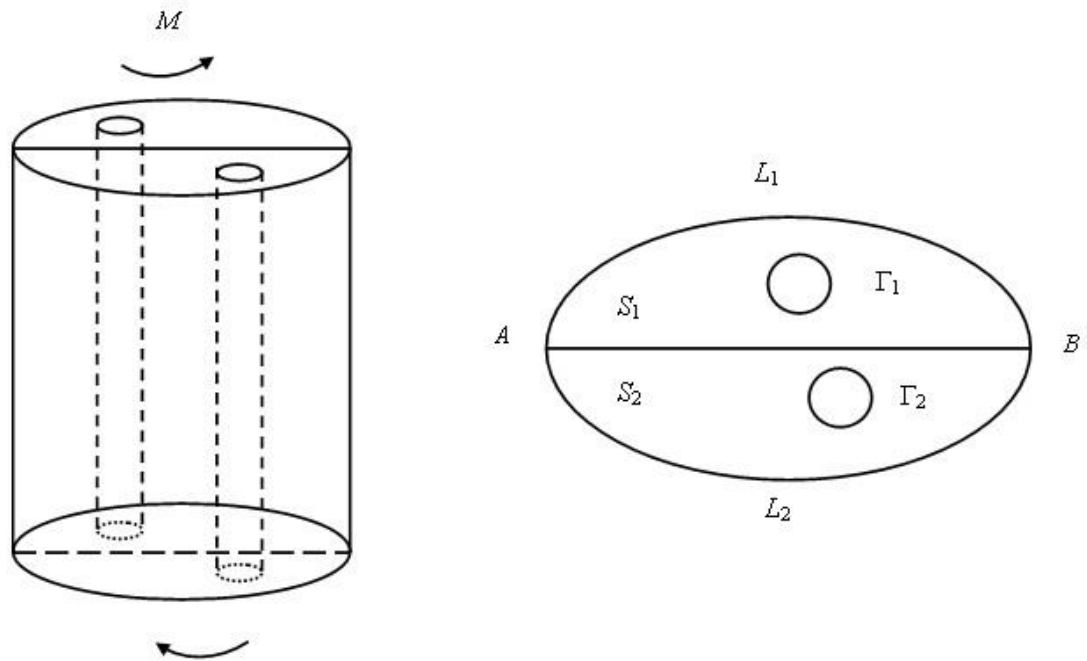


Рисунок 5.8 – Прямолинейный стержень и его сечение

Пусть S_1 и S_2 области, занятые упруго – пластическими изотропными материалами, у которых предел текучести при чистом сдвиге одинаковый и равен k , а упругие постоянные Ламе различны и равны λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 соответственно. Имеются два отверстия, ограниченные контурами Γ_1 и Γ_2 . Пусть линия раздела материалов прямолинейна. Выберем ось координат Ox вдоль линии раздела. Предполагается, как обычно, что боковая поверхность стержня и боковые стенки отверстий свободны от напряжений, а стержень скручивается парой сил с моментом

$$M = \iint (y\sigma_{13} - x\sigma_{23}) dx dy.$$

В этом случае уравнения, описывающие напряженное состояние в области S_i $i=1,2$ имеют вид

$$F_1 = \partial_x \sigma_{13} + \partial_y \sigma_{23} = 0, F_2 = \partial_y \sigma_{13} - \partial_x \sigma_{23} + \mu_i \omega = 0, \quad \mu_i \omega = K_i, \quad (5.59)$$

где σ_{13}, σ_{23} - компоненты тензора напряжений, ω - угол закручивания, он предполагается постоянным.

На боковой поверхности стержня и отверстий выполняются условия

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0, \quad \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2, \quad (5.60)$$

которые означают, что боковая поверхность и стенки отверстий свободны от напряжений и находятся в пластическом состоянии.

Из (5.60) получаем

$$\sigma_{13} = kn_1, \quad \sigma_{23} = -kn_2. \quad (5.61)$$

Также предполагаем, что на линии раздела AB компоненты тензора напряжений непрерывны, это означает отсутствие разрыва напряжений для данного стержня вдоль AB .

Законы сохранения

Закон сохранения ищем в виде

$$A_x + B_y = \rho_1 F_1 + \rho_2 F_2, \quad (5.62)$$

где ρ_1, ρ_2 - некоторые функции, одновременно тождественно не равные нулю, буквенные индексы внизу означают производные по соответствующим переменным.

Пусть

$$A = \alpha^1 u + \alpha^2 v + \alpha^3, \quad B = \beta^1 u + \beta^2 v + \beta^3, \quad (5.63)$$

где для удобства положили $\sigma_{13} = u, \sigma_{23} = v, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \beta^1, \beta^2, \beta^3$ - предполагаются функциями только x, y .

Подставляя (5.63) в (5.62), получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \quad \alpha^2 = -\beta^1, \quad \alpha_x^1 - \alpha_y^2 = 0, \quad \alpha_y^1 + \alpha_x^2 = 0, \quad \alpha_x^3 + \beta_y^3 = -\alpha^2 K_i, \quad (5.64)$$

Пусть

$$\alpha_x^{1(i)} - \alpha_y^{2(i)} = 0, \quad \alpha_y^{1(i)} + \alpha_x^{2(i)} = 0, \quad \alpha_x^{3(i0)} + \beta_y^{3(i0)} = -\alpha^2 K_i, \quad i=1,2 \quad (5.65)$$

Здесь индекс i в скобках соответствует области S_i .

Предположим, что в точке x_0, y_0 подынтегральные функции имеют особенность, и эта точка находится в круге радиуса $\varepsilon: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varepsilon^2$, тогда из (5.62) получаем

$$\begin{aligned} \iint_S (A_x + B_y) dx dy &= \iint_{S_1} (A^1_x + B^1_y) dx dy + \iint_{S_2} (A^2_x + B^2_y) dx dy = - \int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx + \\ &+ \int_{L_1} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_2} A^2 dy - B^2 dx + \int_{\Gamma_1} A^1 dy - B^1 dx + \int_{\Gamma_2} A^2 dy - B^2 dx + \int_{AB} A^1 dy - B^1 dx \\ &+ \int_{BA} A^2 dy - B^2 dx = 0 \end{aligned}$$

Имеем вдоль AB (рис. 5.9.)

$$\begin{aligned} \int_{AB} A^1 dy - B^1 dx + \int_{BA} A^2 dy - B^2 dx &= \int_{AB} (\alpha^{1(1)} u + \alpha^{2(1)} v + \alpha^{3(1)}) dy - (-\alpha^{2(1)} u + \alpha^{1(1)} v + \beta^{3(1)}) dx + \\ + \int_{BA} (\alpha^{1(2)} u + \alpha^{2(2)} v + \alpha^{3(2)}) dy &- (-\alpha^{2(2)} u + \alpha^{1(2)} v + \beta^{3(2)}) dx = 0 \end{aligned}$$

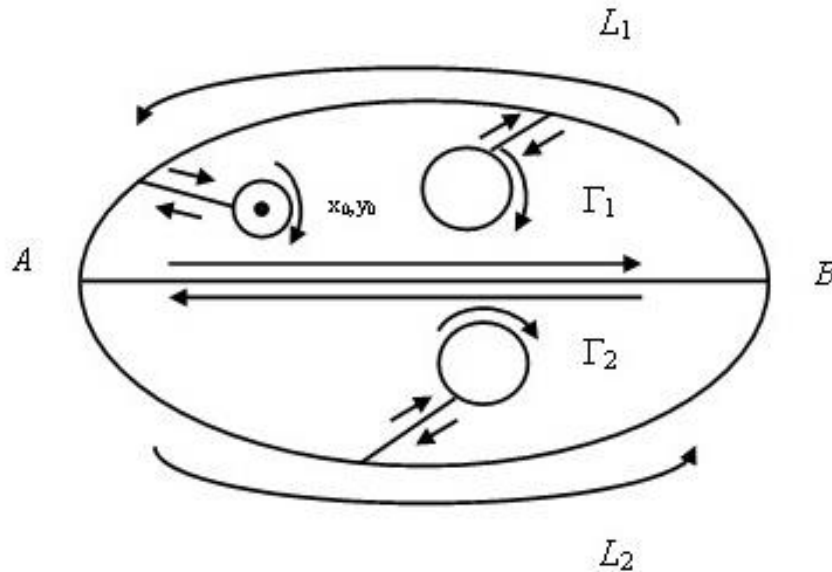


Рисунок 5.9 – Схема вычисления интегралов

Поскольку вдоль AB $dy = 0$, то полагаем $\beta^{3(i)} = 0, \alpha_x^{3(i)} = \alpha^{2(i)} K_i$, поэтому $\alpha^{1(1)} = \alpha^{1(2)}, \alpha^{2(1)} = \alpha^{2(2)}$.

В результате получаем

$$\int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx = \int_{L_1} A^1 dy - B^1 dx + \tag{5.66}$$

$$+ \int_{\Gamma_1} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_2} A^2 dy - B^2 dx + \int_{\Gamma_2} A^2 dy - B^2 dx.$$

Воспользуемся формулой (5.66) для нахождения функций u, v в точке x_0, y_0 .

Для этого рассмотрим решение уравнений (5.65) в виде

$$\alpha^1 = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \alpha^2 = -\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \alpha^3 = \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0}. \quad (5.67)$$

Подставляя (5.67) в (5.66), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx &= \int_{\varepsilon} (\alpha^1 u + \alpha^2 v + \alpha^3) dy - (-\alpha^2 u + \alpha^1 v) dx = \\ &= \int_{\varepsilon} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} u - \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} v + \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0} \right) dy - \left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} u \right) dx + \\ &+ \int_{\varepsilon} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} v \right) dx \end{aligned}$$

Пусть $x-x_0 = \varepsilon \cos \varphi, y-y_0 = \varepsilon \sin \varphi$, тогда получаем

$$\int_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx = \int_0^{2\pi} [(u \cos \varphi + v \sin \varphi) \cos \varphi + (u \sin \varphi + v \cos \varphi) \sin \varphi] d\varphi = \int_0^{2\pi} u d\varphi = 2\pi u(x_0, y_0).$$

В последнем равенстве использована теорема о среднем и предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$.

В результате из формулы (5.66) следует

$$\begin{aligned} 2\pi \sigma_{13}(x_0, y_0) &= \\ &= \int_{L_1} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0} \right) dy - \\ &- \left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\ &+ \int_{\Gamma_1} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \omega \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0} \right) dy - \\ &- \left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx + \\ &+ \int_{L_2} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \omega \mu_2 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0} \right) dy - \\ &- \left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$+ \int_{\Gamma_2} \left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \omega\mu_2 \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y-y_0} \right) dy -$$

$$- \left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx.$$

Рассмотрим решение уравнений (5.65) в виде

$$\alpha^1 = \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad \alpha^2 = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

$$\alpha^3 = \frac{1}{2} \omega\mu_2 \ln((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2). \quad (5.69)$$

Подставляем (5.69) в (5.66), получаем

$$2\pi \sigma_{23}(x_0, y_0) =$$

$$\int_{L_1} \left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega\mu_2 \ln((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) \right) dy -$$

$$- \left(-\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx +$$

$$\int_{\Gamma_1} \left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 - \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega\mu_2 \ln((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) \right) dy -$$

$$- \left(-\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx + \quad (5.70)$$

$$+ \int_{L_2} \left(-\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega\mu_2 \ln((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) \right) dy -$$

$$- \left(-\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_2} \left(-\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 + \frac{1}{2} \omega\mu_2 \ln((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) \right) dy -$$

$$- \left(-\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_1 + \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} kn_2 \right) dx.$$

Таким образом, формулы (5.68), (5.70) позволяют вычислить значения компонент тензора напряжений во всех точках поперечного сечения. Далее в каждой точке x_0, y_0 проверяется условие пластичности $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2$.

Те точки, где $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 < k^2$ принадлежат упругой области, а остальные точки – пластической области. Тем самым описанная процедура позволяет выделить пластические и упругие зоны и построить упруго-пластическую границу, которая заранее была неизвестна и подлежала определению.

5.6 Напряженное состояние композитной консоли

В данном параграфе решена задача о напряженном состоянии упруго-пластической консоли, армированной упругими волокнами. Для решения задачи использованы законы сохранения дифференциальных уравнений. Предложенный метод решения позволяет построить упруго-пластическую границу в композитной консоли и тем самым оценить ее несущую способность

Вводные сведения

В настоящее время большое внимание уделяется всестороннему исследованию композиционных материалов. Так, в [7] разработана многослойная броня алюмооксидная керамика - тканый материал, армированная эпоксидной смолой и алюминиевым сплавом. В [68] исследованы колебания композитной балки из функционально-градиентного в двух направлениях материала, армированного углеродными нанотрубками. В работе [39] определена и сопоставлена эффективность различных схем облицовки пластины композитными покрытиями. В [31] исследована устойчивость подкрепленного отсека фюзеляжа самолета, выполненного из композиционного материала, при чистом изгибе и нагружении внутренним давлением. В [21] проведены исследования стойкости формируемого композитного материала при высокоскоростном соударении. В [49] приводится математическая постановка задачи о вынужденных установившихся и собственных колебаниях рассматриваемых смарт-систем, а также результаты численных расчетов, из которых следует, что графеновые композиты могут быть использованы для дополнительного демпфирования колебаний смарт-структур на основе пьезоэлементов. В работе [69] на основе метода конечных элементов разработан вычислительный алгоритм для решения ограниченного класса задач об изгибе композитных пластин, армированных системами однонаправленных высокопрочных волокон.

Разработана модель динамического деформирования и разрушения композитных материалов, в которой учитывается нелинейность диаграмм ударного нагружения с упрочнением, зависящего от скорости деформирования [139].

Ю.Н. Работнов в [73] предложил модель композитного материала с упруго-пластическим связующим и упругими волокнами. При этом между волокнами и связующим, при нагружении действует постоянное касательное напряжение. На основе этой модели предлагается рассмотреть напряженное состояние консоли, изготовленной из композиционных материалов. Задача решена с помощью законов сохранения, которые уже применяются для решения и других задач механики.

Постановка задачи

Рассмотрим консоль, изготовленную из упруго пластического материала, армированную упругими n волокнами. Один конец консоли закреплен в точке $x = 0$, на втором конце консоли при $x = l$ подвешен груз весом P . (см. рис. 5.10)

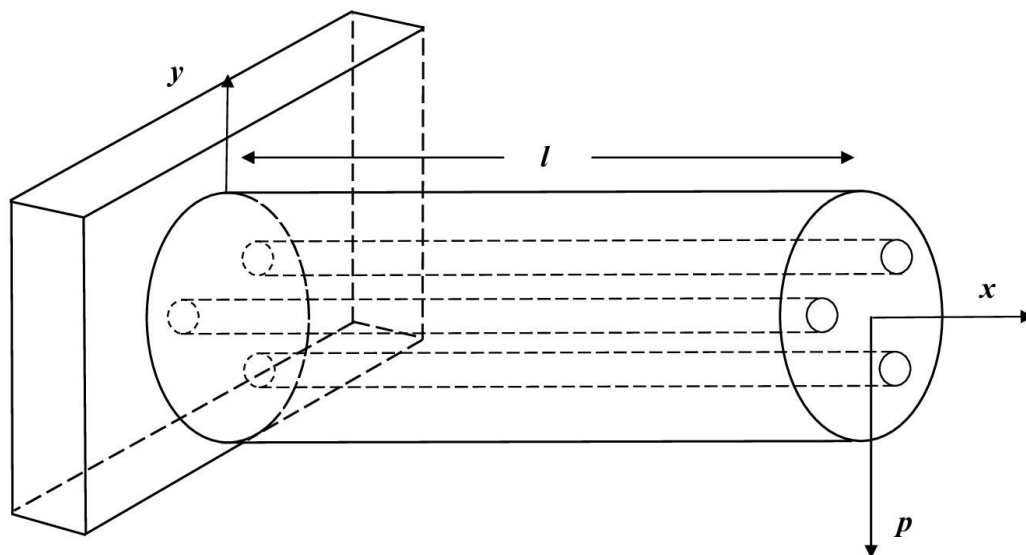


Рисунок 5.10 – Консоль с грузом весом P

Матрица консоли имеет модуль упругости G и предел текучести при чистом сдвиге k . Волокна расположены вдоль консоли в произвольном порядке параллельно оси x . Каждое волокно имеет круглое сечение, центр располагается в точке с координатами (x_i, y_i) , радиус волокна равен R , модуль упругости G_i . Пределы текучести волокон превосходят предел текучести матрицы. Касательное напряжение между волокном и матрицей равно $\tau < k$.

Заданный процесс описывается уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{Px}{l} \quad (5.71)$$

и уравнением совместности деформаций

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}. \quad (5.72)$$

Граничные условия на боковой поверхности консоли, свободной от напряжений, и находящейся в пластическом состоянии

$$\tau_{xz} n_0 + \tau_{yz} m_0 = 0, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2,$$

где n_0, m_0 - компоненты вектора нормали к боковой поверхности; которые можно записать в виде

$$\tau_{xz} = \mp mk, \tau_{yz} = \pm nk. \quad (5.73)$$

На границе между волокном и матрицей выполняются условия

$$\tau_{xz} m_i - \tau_{yz} n_i = \tau, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2,$$

где n_i, m_i - компоненты вектора нормали к боковой поверхности i -го волокна, которые запишем в виде.

$$\tau_{xz} = m\tau \pm n\sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad \tau_{yz} = n\tau \pm m\sqrt{k^2 - \tau^2}. \quad (5.74)$$

Далее в формулах (5.73) - (5.74) выбирается верхний знак.

Законы сохранения уравнений (5.71) - (5.72)

Для удобства дальнейших вычислений введем следующие обозначения

$$\tau_{xz} = u, \tau_{yz} = v,$$

Тогда задача (5.71) - (5.74) запишется так

$$F_1 = u_x + v_y + Px/l = 0, F_2 = u_y - v_x = 0, \quad (5.75)$$

на боковой поверхности

$$u = \mp mk, v = \pm nk,$$

на границе волокна и матрицы

$$u = m\tau \pm n\sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad v = n\tau \pm m\sqrt{k^2 - \tau^2}.$$

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (5.75) назовем выражение вида

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (5.76)$$

где ω_1, ω_2 - некоторые линейные операторы, одновременно не равные тождественно нулю.

Пусть

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \quad (5.77)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ - функции только от x, y .

Подставляя (5.77) в (5.76), получаем

$$\alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \alpha^1 = \omega_1,$$

$$\beta^1 = -\omega_2, \alpha^2 = \omega_2, \beta^2 = \omega_1, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = \omega_1 \frac{P}{l} x.$$

Отсюда следует

$$\alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = \alpha^1 \frac{P}{l} x. \quad (5.78)$$

Рассмотрим для системы уравнений (5.78) два решения:

$$1) \quad \alpha^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta^1 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (5.79)$$

$$\gamma^1 = 0, \gamma^2 = \frac{Px}{l} \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

$$2) \quad \alpha^1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (5.80)$$

$$\gamma^1 = 0, \gamma^2 = \frac{px}{l}((y - y_0) - (x - x_0) \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}),$$

где x_0, y_0 - постоянные.

Вычисление напряженного состояния в точке x_0, y_0

Пусть (x_0, y_0) - произвольная точка, принадлежащая связующему, и пусть в этой точке сохраняющийся ток имеет особенность вида (5.79) или (5.80). Тогда, из (5.76) следует

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_{\Gamma_0} A dy - B dx - \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} A dy - B dx - \oint_{\varepsilon} A dy - B dx = 0, \quad (5.81)$$

где ε - окружность: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$.

Сечение консоли показано на рис. 5.11.

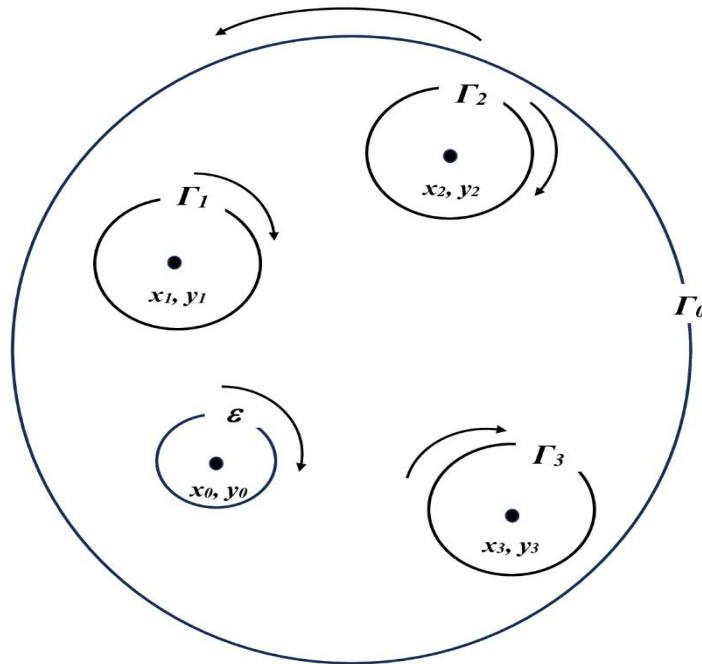


Рисунок 5.11 – Сечение консоли

Рассмотрим решение (5.79), полагая $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi, y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$, тогда из (5.81) с учетом (5.79), при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$2\pi\tau_{xz}(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma_0} (m_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - n_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) dy - \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned}
& - (m_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \frac{px}{l} \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}) dx + \\
& + \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} (\frac{(m_i \tau + n_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - n_0 k \frac{(-n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) dy - \\
& - (m_i \tau + n_i \sqrt{k^2 - \tau^2} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \\
& \quad + \frac{px}{l} \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}) dx, \\
& 2\pi \tau_{yz}(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma_0} (m_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) dy - \\
& - (-m_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \frac{px}{l} (y - y_0 - (x - x_0) \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0})) dx + \\
& + \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} (\frac{(m_i \tau + n_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{(-n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) dy - \tag{5.83} \\
& - ((m_i \tau + n_i \sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \\
& \quad + \frac{px}{l} (y - y_0 - (x - x_0) \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0})) dx.
\end{aligned}$$

Таким образом, формулы (15.82) и (5.83) позволяют вычислить напряженное состояние в любой точке связующего материала. Те точки, где $\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2$ - будут находиться в пластическом состоянии, остальные точки среды, а также волокна, будут оставаться упругими. Предложенный метод решения позволяет построить упруго-пластическую границу в композитной консоли и тем самым оценить ее несущую способность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все решения, найденные, с помощью законов сохранения и других методов группового анализа дифференциальных уравнений, в работе для уравнений упругости, пластичности и композиционных материалов, обладают большой теоретической значимостью. Формулы, полученные в диссертации, сводят решение краевых задач к вычислению интегралов по контурам или поверхностям изучаемого деформируемого тела. При этом не требуется доказательств сходимости или устойчивости метода. Нет необходимости в особой гладкости поверхностей, по которым проводится интегрирование. Угловые точки, представляющие препятствие для решения многих задач, в предложенных методах не являются проблемой; предлагаемая методика их просто «не замечает».

В целом, для разделов механики деформируемого твердого тела получены следующие новые результаты.

Для уравнений теории упругости. Построены законы сохранения для разрешающей и автоморфной систем уравнений упругости, позволяющих решить первую краевую задачи для уравнений теории упругости в двумерном и трехмерном случаях, а также асимметричном случае. Найдены решения, описывающие напряженное состояние, возникающее при кручении параллелепипеда вокруг трех ортогональных осей. При этом параллелепипед может находиться как в упругом, так и в пластическом состоянии.

Для уравнений теории идеальной пластичности. Найдены точные решения для описания пластического кручения стрежня вокруг трех ортогональных осей, новые решения, соответствующее однородному напряженному трехмерному пластическому состоянию, содержащее произвольную гладкую функцию. Найдены пространственные решения, описывающие динамические решения, которые можно для описания сжатия между жесткими плитами пластического изотропного и анизотропного материалов.

Для уравнений, описывающих упруго-пластическое состояние. Построена бесконечная система законов сохранения, которая позволяет свести задачу вычисления упруго-пластической границы к нескольким квадратурам, по внешнему контуру поперечного сечения. Это позволяет построить упруго-пластическую границу в следующих случаях: для бруса, изгибаемого поперечной силой; для плоской задачи о напряженном состоянии в условиях сложного сдвига в теле, ослабленном отверстием; для скручиваемых стрижней прокатного профиля; в задаче о напряженно деформированном состоянии пластины с отверстиями произвольной формы и в задаче, описывающей кручение прямолинейного ортотропного стержня. Использована гомотопия двух известных точных решений: Прандтля и Надаи, позволяющая построить линии разрыва напряжений для двумерной пластической области. Построено точное решение, описывающее напряженное состояние бруса коробчатого сечения, изгибаемого подвешенным грузом. Построено решение, описывающее распространение волны нагрузки в одномерном упругопластическом стержне.

Для композиционных и слоистых материалов. Построена бесконечная система законов сохранения, которая: позволила найти точное решение, определяющее напряженное состояние в каждой точке двуслойного стержня коробчатого сечения; позволила построить решение, описывающее напряженно деформированное состояние нелинейно упругой двухслойной среды, находящейся между двумя жесткими плитами, сближающимися с постоянным ускорением вдоль оси OY ; позволила найти границу между упругими и пластическими областями при кручении многослойного стержня и двухслойного стержня, ослабленного отверстиями; позволила решить задачу о напряженном состоянии упруго-пластической консоли, армированной упругими волокнами.

Основные результаты диссертационного исследования представлены на следующих конференциях: XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (21 – 25 августа 2023 г., г. Санкт-Петербург), XII

Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, (19 – 24 августа 2019 г., г. Уфа), Всероссийская конференция «Математические проблемы механики сплошных сред», посвященная 105-летию со дня рождения академика Л.В. Овсянникова (13 – 17 мая 2024 г., г. Новосибирск), Symmetry 2024 Conference Proceedings (22 – 26 января 2024 г., Таиланд), 28-ая Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (10 – 15 июля, 2023 г. г. Красноярск), Международная конференция Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, посвященная академику М. А. Лаврентьеву (2015, 2020 г., г. Новосибирск), VIII международная конференция по математическому моделированию (04 – 08 июля 2017 г., г. Якутск), Решетневские чтения: международная научно-практическая конференция, посвященная памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева (2016 – 2023 г., г. Красноярск), и на семинарах «Механика деформируемого твердого тела» под руководством профессора С.И. Сенашова, СибГУ им. М.Ф. Решетнева (2014 – 2024 г., г. Красноярск).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзикович, С. М. Анализ упругих и упругопластических моделей при интерпретации результатов наноиндентирования / И. А. Панфилов, С. М. Айзикович, А. С. Васильев // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика, 24:2 (2024), с. 245–253
2. Айзикович, С. М. Аналитическое решение задачи о дискообразной трещине в функционально-градиентном пространстве / С. М. Айзикович, В. М. Александров, И. С. Трубчик, Л. И. Кренев, Докл. РАН, 424:2 (2009), с. 185–189
3. Айзикович, С.М. Контактные задачи для упругих оснований с функционально-градиентными покрытиями сложной структуры / С. М. Айзикович, Л. И. Кренев, И. С. Трубчик // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика, 9:4(2) (2009), с. 3–8
4. Аннин, Б.Д., Бытев, В.О., Сенашов, С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск, Наука, 1985. -142 с.
5. Аннин, Б.Д. Групповой анализ и точные решения уравнений плоской деформации несжимаемого нелинейного упругого тела / Б.Д. Аннин, В.Д. Бондарь, С.И. Сенашов // Сибирский журнал индустриальной математики. 2020. Т. 23, №1. С. 11-16.
6. Аннин, Б.Д., Черепанов, Г.П. Упруго пластическая задача. Новосибирск : Наука, 1983.-239 с.
7. Ахмед, П. С. Экспериментальное исследование и численное моделирование баллистического воздействия на гибридный композит (оксид алюминия - тканый материал - эпоксидная смола - алюминий), используемый при изготовлении бронезилета / Абед М. С., Салим И. А. // Прикладная механика и техническая физика. 2023. №4. с.3-13.
8. Бабский, В. Г., Колпачевский, Н. Д., Мышкис, А. Д. и др . Гидродинамика невесомости. М. : Наука, 1975.

9. Бельмецов, Н. Ф. Точные решения уравнений динамической асимметричной модели теории упругости / Н. Ф. Бельмецов, Ю. А. Чиркунов // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 38–50.
10. Бицадзе, А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М. : Наука, 1966. 204 с.
11. Буренин, А. А. Адиабатический нагрев материала при упругопластическом кручении с конечными деформациями / Г. М. Севастьянов, А. А. Буренин // Прикладная механика и техническая физика, 2019
12. Буренин, А. А. Анализ упругопластического деформирования вращающегося сплошного цилиндра при общем кусочно-линейном условии пластичности / А. Н. Прокудин, А. А. Буренин // Прикладная механика и техническая физика, 62:5 (2021), С. 68–79
13. Буренин, А. А. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся цилиндре с жестким включением / С. В. Фирсов, А. Н. Прокудин, А. А. Буренин // Сибирский журнал индустриальной математики, 22:4 (2019), 121–133
14. Буренин, А. А. Задача Гадолина о процессе сборки двухслойной предварительно напряженной трубы / А. А. Буренин, А. В. Ткачева // Прикладная механика и техническая физика, 64:5 (2023), с. 225–240
15. Буренин, А.А., Ковтанюк, Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Монография. Владивосток : Дальнаука. 2013. – 312 с.
16. Буренин, А. А. Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, В. А. Рычков // Проблемы механики сплошных сред: Сборник научных работ. Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 1996. С. 116 - 128.
17. Быковцев, Г. И. О распространении ударных волн в упругопластических средах / Г. И. Быковцев, Л. Д. Кретьева // ПИМ. 1972. Том 36, вып. 1. С. 106 - 116.

18. Виноградов, А.М., Красильщик, И.С., Лычагин, В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1986. – 336 с.
19. Виноградов, А.М., Красильщик, И.С., Лычагин, В.В. Симметрии и законы сохранения. М. : Факториал, 1997. - 464 с.
20. Галин, Л.А. Упругопластические задачи. М. : Наука, 1984. -232 с.
21. Гольшев, А.А. Влияние керамического волокна SiC в металломатричном композите на его стойкость при высокоскоростном нагружении / А.А. Гольшев, С.В. Долгова // Прикладная механика и техническая физика. 2022. №6. С. 145-149
22. Гомонова, О.В. Определение областей упругого и пластического деформирования в задаче об одноосном растяжении пластины, ослабленной отверстиями / О.В. Гомонова, С.И. Сенашов // Прикладная механика и техническая физика, 2021, т. 62, №1, С. 179 - 186.
23. Гомонова, О.В. Групповой анализ уравнений идеальной пластичности / О.В. Гомонова, С.И. Сенашов, О.Н. Черепанова // Прикладная механика и техническая физика, 2021, т. 62, №5, С. 208 - 216.
24. Григорьев, Ю.М. Некоторые решения пространственных статических уравнений Ламе // Математические проблемы механики сплошных сред, 1984, вып.67, С.29 - 36.
25. Дильман, В.Л. Исследование математических моделей напряженногосостояния неоднородного поперечного слоя в круглом стержне / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». 2009. Вып. 4. – No 37 (170). С. 65–77
26. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях: монография / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. 2011. 276 с.
27. Евтихов, Д.О. О построении линий разрыва напряжений для двумерной пластической области / Д.О. Евтихов, А.Н. Яхно, И.Л.

Савостьянова // Сибирский аэрокосмический журнал, 2022. том 23, №3, С. 364-371.

28. Евтихов, Д.О., Савостьянова, И.Л. Построение характеристик задачи Коши для идеальной пластичности. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024612683, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 02.02.2024.

29. Ерошкина, Т.В. Математическое моделирование напряженного состояния поперечного пластического слоя в круглом стержне / Т.В. Ерошкина, В.Л. Дильман // Известия ВУЗов. Математика. 2011. №11. С. 1 – 11

30. Ерошкина, Т.В. Математическое моделирование напряженного состояния неоднородных цилиндрических стержней: дис. ... канд. физ.-мат.наук / Т.В. Ерошкина. Челябинск, 2010. 103 –с.

31. Железнов, Л.П. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитной оболочки при чистом изгибе и внутреннем давлении / Л.П. Железнов, А.Н. Серьезнов // Прикладная механика и техническая физика. 2022. №2. с.207-216

32. Задоян, М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М. : Наука, 1992. -382с.

33. Ивлев, Д.Д. Теория идеальной пластичности. – М. : Наука, 1966. – 232 с.

34. Ивлев, Д.Д., Быковцев, Г.И. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. -526с.

35. Ивлев, Д.Д. и др. Предельное состояние деформированных тел и горных пород. / Д.Д. Ивлев, Л.А. Максимова, Р.И. Непершин, С.И. Сенашов / М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008.– 832 с.

36. Ивлев, Д.Д. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университетаим. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 576 – 579.

37. Ишлинский, А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М. : Физматлит, 2001.– 701 с.
38. Качанов, Л.М. Теория пластичности. М. : Наука, 1969.-420 с.
39. Кирпичников, В.Ю. Экспериментальное исследование эффективности армированных вибропоглощающих покрытий / А.П. Кощев, А.И. Сятковский // Прикладная механика и техническая физика. 2022. №1. с.65-70.
40. Киряков, П.П., Сенашов, С.И., Яхно, А.Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 193 с.
41. Козлова, Л. С. Кручение сектора анизотропного кругового кольца при действии переменного давления / Л. С. Козлова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2010. № 4 (68). С. 132–136.
42. Козлова, Л. С. Предельное состояние призматических стержней при кручении / Л. С. Козлова; Чуваш. гос. пед ун-т им. И. Я. Яковлева. Москва. 2010. 7 с. Библиогр.: 3 назв. - Рус. Деп. в ВИНТИ 29.04.10, № 232-В2010.
43. Кондрин, А.В., Сенашов, С.И., Савостьянова, И.Л. Построение упруго-пластической границы при изгибе консоли прямоугольного сечения. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016660878, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 22.09.2016
44. Кургузов, В. Д. Моделирование расслоения стальных труб при сложном нагружении // Прикладная механика и техническая физика, 2023, том 64, выпуск 6, страницы 155–167
45. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М. : Наука, 1977. 416 с.
46. Лимарев, А. Е. О распространении ударных волн в упруго-пластической среде с упрочнением / А. Е. Лимарев, А. Д. Чернышев // ПММ. 1971. Том 35, вып. 6. С. 1083 - 1088.

47. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Наука, 1975.
48. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости. М. : Наука, 1980.
49. Матвеевко, В.П., Использование электропроводящих композиционных материалов для дополнительного демпфирования смарт-систем на основе пьезоэлементов / В.П. Матвеевко, Д.А. Ошмарин, Н.А. Юрлова // Прикладная механика и техническая физика. 2021. №5. с. 45-57
50. Миронов, Б. Г. Деформированное состояние трансляционно-анизотропных тел при кручении / Б. Г. Миронов, Т. В. Митрофанова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2011. № 4 (72). С. 57 - 60.
51. Миронов, Б. Г. О кручении призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей / Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2006. № 1(48). С. 98 – 10.
52. Миронов, Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней / Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2012. № 4 (76). С. 108 - 112
53. Монахов, В.Н. Краевые задачи со свободной границей для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, Наука, СО РАН., 1977.
54. Нётер, Э. Инвариантные вариационные задачи. В кн.: Вариационные принципы механики. М. Физматгиз, 1959.
55. Новацкий, В. Волновые задачи теории пластичности. М., Мир, 1978.-307 с.
56. Новацкий, В. Теория упругости. М., Мир, 1975. 870 с.
57. Новожилов, В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948.
58. Носачева, А.И. Математическое моделирование напряженного состояния неоднородной полосы с наружным макродефектом / А.И. Носачева

// Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». 2013. Т. 6. No 3. С. 79-84.

59. Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 399 с.

60. Ольшак В., Мруз, З, Пежина, П. Современное состояние теории пластичности. М. : Мир, 1964.-244с.

61. Ольшак, В., Мруз, З., Пежина, П. Неоднородная теория пластичности. М. : Мир, 1964. - 156 с.

62. Ольшак, В., Рыхлевский, Я., Урбановский, В. Теория пластичности неоднородных тел. – М. : Мир, 1964. — 156 с

63. Остросаблин, Н.И. Диагонализация системы статических уравнений Ламе линейной изотропной упругости / Н.И. Остросаблин // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012, т.15. №3, с. 87-98.

64. Остросаблин, Н.И. Общее решение и приведение системы уравнений линейной изотропной упругости к диагональному виду / Н.И. Остросаблин // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010, т.12. №2, с.79-83.

65. Остросаблин, Н.И. Общие решения и приведение систем уравнений линейной теории упругости к диагональному виду / Н.И. Остросаблин // Прикладная механика и техническая физика, 1993, №5, т.34, с. 112-122.

66. Остросаблин, Н.И. Операторы симметрии и общие решения уравнений линейной теории упругости / Н.И. Остросаблин // Прикладная механика и техническая физика, 1995, №5, т.36, с. 98-104.

67. Остросаблин, Н.И. Общие решения и симметрии уравнений линейной теории упругости / Н.И. Остросаблин, С.И. Сенашов // Докл. РАН, т. 322, в. 3,1992, с. 513-515.

68. Пан, М. Свободные колебания композитной балки из функционально-градиентного в двух направлениях материала, армированной углеродными нанотрубками / М. Пан, С. М. Чжоу, Б. Л. Ху, Ю. Ц. Чжан // Прикладная механика и техническая физика. 2023. №5, с.166-178.

69. Петраков, И.Е. Анализ изгиба композитных пластин с учетом различия сопротивлений растяжению и сжатию / И.Е. Петраков, В.М. Садовский, О.В. Садовская // Прикладная механика и техническая физика. 2021. №1. с.172-183
70. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М. : Физматлит, 2001. 576 с.
71. Прагер, В. Трехмерное пластическое течение при однородном напряженном состоянии.
72. Прудников, В.Ю. Групповое расслоение уравнений Ламе / В.Ю. Прудников, Ю.А. Чиркунов // Прикладная математика и механика, т. 52, в.3, с. 471 – 477.
73. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. Москва: Наука, 1979.
74. Савостьянова, И. Л. Законы сохранения и решения первой краевой задачи для двумерных и трехмерных уравнений теории упругости / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Сибирский журнал индустриальной математики. 2024. Т. 27. № 1, С. 100-111.
75. Савостьянова, И. Л. Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения, армированного упругими волокнами / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика 2024 (в печати)
76. Савостьянова, И. Л. Изгиб композитного бруса / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова, А. Н. Яхно // Сибирский аэрокосмический журнал. 2024. Т. 25, № 1. С. 25–32. Doi: 10.31772/2712-8970-2024-25-1-25-32.
77. Савостьянова, И.Л. Законы сохранения и решения первой краевой задачи для уравнений двумерной теории упругости / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Сибирский аэрокосмический журнал, 2022, том 23, №3, с.417-422. DOI 10.31772/2712-8970-2022-23-417-422
78. Савостьянова, И.Л. Антиплоская упругопластическая задача для анизотропной и неоднородной среды / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова, О.Н.

Черепанова // IX международная конференция лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, посвященная 120-летию академика М. А. Лаврентьева, (7 – 11 сентября 2020 г. Новосибирск), С. 215

79. Савостьянова, И.Л. Групповые свойства уравнений, описывающих упругое кручение круглых валов переменного диаметра / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Решетневские чтения. Материалы XXV Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. В 2-х частях. Красноярск, 2021. С. 617 - 618.

80. Савостьянова, И.Л. Групповые свойства уравнения, описывающего кручение упрочняющихся стержней / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова, О.Н. Черепанова // Решетневские чтения. Материалы XXV Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. В 2-х частях. Красноярск, 2021. С. 619 - 622.

81. Савостьянова, И.Л. Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. (в печати)

82. Савостьянова, И.Л. Использование законов сохранения для решения задачи Коши уравнений динамической теории упругости / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Решетневские чтения. Материалы XXVI Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева. Красноярск, 2022. С. 696 - 698.

83. Савостьянова, И.Л. Использование законов сохранения для решения краевых задач системы Моисила –Теодореску / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Сибирский журнал индустриальной математики. 2022, т.25. №4, С.1 - 13.

84. Савостьянова, И.Л. Кручение призматических ортотропных упругопластических стержней / А.А. Буренин, И.Л. Савостьянова, С.И. Сенашов // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22. № 1. С. 8 - 17.

85. Савостьянова, И.Л. Метод решения динамических уравнений идеальной пластичности / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Решетневские чтения: материалы XXII междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева (11–15 нояб. 2019, г. Красноярск) / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; СибГУ им. М.Ф. Решетнева

86. Савостьянова, И.Л. Моделирование в механике деформируемого твердого тела: учеб. пособие / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова, Е. В. Филюшина; СибГУ им. М. Ф. Решетнева. – Красноярск, 2019. – 210с.

87. Савостьянова, И.Л. Напряженно-деформированное состояние неоднородной консоли / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Решетневские чтения. Материалы XXVII Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. В 2-х частях. Красноярск, 2023. С. 641 - 642.

88. Савостьянова, И.Л. Напряженное состояние композитной консоли / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Композиты и наноструктуры. 2024. Т.16. №1, С. 56 – 61.

89. Савостьянова, И.Л. Новые решения динамических уравнений идеальной пластичности / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22. №4(80), С. 89 - 91.

90. Савостьянова, И.Л. Новые решения, описывающее предельное состояние деформируемых тел / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // 28-ая Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, Красноярск, 10-15 июля, 2023 г. https://ptep.icm.krasn.ru/public/#/archive?pub_id=111

91. Савостьянова, И.Л. Новые трехмерные пластические течения, соответствующие однородному напряженному состоянию / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22. №3. С. 114–117.

92. Савостьянова, И.Л. О законах сохранения для решения задач механики деформируемого твердого тела / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. Минск, 2022. С. 163-167.

93. Савостьянова, И.Л. О построении линий разрыва напряжений при пластическом кручении стержня / И.Л. Савостьянова, В.С. Сенашов // Решетневские чтения: материалы XXIII междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева (10–13 нояб. 2020, г. Красноярск) / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; СибГУ им. М.Ф. Решетнева, Т.2. С. 512.

94. Савостьянова, И.Л. О построении трехмерных решений уравнений идеальной пластичности / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Решетневские чтения: материалы XXIII междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева (10–13 нояб. 2020, г. Красноярск) / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; СибГУ им. М.Ф. Решетнева, Т.2. С. 513 - 514.

95. Савостьянова, И.Л. О предельном состоянии анизотропных деформируемых тел / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева серия: Механика предельного состояния. 2017. №4(34) С. 87 - 96.

96. Савостьянова, И.Л. О предельном состоянии деформируемых тел / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // VIII международная конференция по математическому моделированию. Тезисы докладов. Якутск, 04 - 08 июля 2017 г. С. 154.

97. Савостьянова, И.Л. О решении задачи Коши для уравнений упругости в динамическом случае / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова //

Решетневские чтения. Материалы XXVII Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. В 2-х частях. Красноярск, 2023. С. 643 - 645.

98. Савостьянова, И.Л. Об упругом кручении вокруг трех осей / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021, т.24, №1, с. 120 - 125.

99. Савостьянова, И.Л. Построение упругопластической границы в задаче о растяжении пластинки, ослабленной отверстиями с условием текучести общего вида / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова, О.В. Гомонова // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (19-24 августа 2019 года г. Уфа).

100. Савостьянова, И.Л. Решения задачи Дирихле для уравнений асимметричной теории упругости / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика Предельного Состояния. 2022.N2 (52). С. 36–41 DOI: 10.37972/chgpru.2022.52.2.004

101. Савостьянова, И.Л. Тесты по механике сплошных сред: учебное пособие / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова, Е.В. Филюшина, Красноярск: СибГАУ, 2017. – 60 с.

102. Савостьянова, И.Л. Точные решения уравнений анизотропной теории пластичности / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 1 (39). С. 32 - 35.

103. Савостьянова, И.Л. Трехмерные пластические течения, соответствующие однородному напряженному состоянию / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Решетневские чтения: материалы XXII междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева (12–16 нояб. 2018, г.

Красноярск) / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; СибГУ им. М.Ф. Решетнева Ч.1 С. 581 - 582.

104. Савостьянова, И.Л. Упругое кручение двухслойного стержня коробчатого сечения / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова, А.Ю. Власов // Прикладная механика и техническая физика. Т. 65. № 3 (385). С. 161 - 168

105. Савостьянова, И.Л. Упругое состояние пластины с отверстиями произвольной формы / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 128-134.

106. Савостьянова, И.Л. Упругопластическая задача в условиях сложного сдвига / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1 (43). С. 66 - 72.

107. Савостьянова, И.Л. Упруго-пластическое кручение многослойного стержня / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 2 (56). С. 28 - 35.

108. Садовский, В. М. К теории распространения упругопластических волн в упрочняющихся средах / В. М. Садовский // Прикладная механика и техническая физика. 1994. №5. С. 166 - 172.

109. Сенашов, С.И., Гомонова, О.В., Яхно, А.Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности. Красноярск, Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2012. – 139 с.

110. Сенашов, С. И. Об одном классе точных решений уравнений идеальной пластичности / С. И. Сенашов // Журнал прикладной механики и технической физики. 1986. № 1. С. 139 – 142

111. Сенашов, С.И. Аналитическое решение задачи о волне нагрузки в упругопластическом стержне. / С.И. Сенашов, Е.В. Филюшина // Динамика сплошной среды: Сб. научн. тр. / Институт гидродинамики СО РАН.- Новосибирск, 2012.- вып. 127, С.94-97.

112. Сенашов, С.И. Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнений пластичности / С.И. Сенашов // Доклады РАН, 1995, т. 345. №5. С. 619.

113. Сенашов, С.И. Законы сохранения уравнений плоской теории упругости / С.И. Сенашов, Е.В. Филюшина // Вестник СибГАУ, 2014, №1(53), С. 79 – 81.

114. Сенашов, С.И. Использование законов сохранения для решения задачи о течении вязкопластической жидкости/ С.И.Сенашов, И.Л. Савостьянова // Решетневские чтения: материалы XXII междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева (11–15 нояб. 2019, г. Красноярск) / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; СибГУ им. М.Ф. Решетнева

115. Сенашов, С.И. Новые классы решений уравнения минимальных поверхностей / С.И. Сенашов, О.Н. Черепанова // Journal of Siberian Federal University. Math.&Phys., 2010, 3(2), С. 248 - 255.

116. Сенашов, С.И. О законах сохранения уравнений пластичности / С.И. Сенашов // Докл. АН СССР. - 1991. - Т. 320, № 3. С. 606 - 608.

117. Сенашов, С.И. О предельном состоянии деформируемых материалов / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // Материалы XXI Международной научной конференции «Решетневские чтения», посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева, 2017. № 21-1. С. 628.

118. Сенашов, С.И. Об упруго-пластическом кручении двухслойного стержня / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова, О.Н. Черепанова // 28-ая Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, Красноярск, 10-15 июля, 2023 г. https://ptep.icm.krasn.ru/public/#/archive?pub_id=112

119. Сенашов, С.И. Об упругопластическом кручении стержня / С.И. Сенашов, О.Н. Черепанова, А.В. Кондрин // Вестник СибГАУ, 2013, в.3(49), С.100 - 103.

120. Сенашов, С.И. Использование законов сохранения для решения задач упругопластичности / С.И. Сенашов, А.В. Кондрин // В книге: Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций. Сборник материалов III Всероссийской конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Ю.Н. Работнова. 2014. С. 97.

121. Сенашов, С.И. Построение упруго – пластической границы для плоской упруго-пластической задачи с помощью законов сохранения / С.И. Сенашов, Е.В. Филюшина, И.Л. Савостьянова // VIII международная конференция лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, посвященная 115-летию академика М. А. Лаврентьева, (7 – 11 сентября 2015 г. Новосибирск), С. 234.

122. Сенашов, С.И. Построение упруго-пластических границ с помощью законов сохранения / С.И. Сенашов, Е.В. Филюшина, О.В. Гомонова // Вестник СибГАУ, 2015. Т. 16. № 2. С. 343 - 359

123. Сенашов, С.И. Разработка информационной системы для нахождения упруго-пластической границы стержней прокатного профиля / С.И. Сенашов, А.В. Кондрин // Вестник СибГАУ, 2014. № 4(56). С. 119 – 125

124. Сенашов, С.И. Точные решения уравнений идеальной пластичности в случае плоского напряженного состояния / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова, Е.В. Филюшина // Материалы XXI Международной научной конференции «Решетневские чтения», посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева. 2017. № 21-2. С. 31 - 32.

125. Сенашов, С.И. Упругопластическая задача в случае неоднородной пластичности условиях сложного сдвига / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова, О.Н. Черепанова // Сибирский журнал науки и технологий. 2020. Т. 21. № 2. С. 201 - 205.

126. Сенашов, С.И. Упруго-пластическое кручение двухслойного стержня / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова, С.В. Лукьянов // Сибирский аэрокосмический журнал. 2023. Т. 24. № 1. С. 35 - 41.

127. Сенашов, С.И., Гомонова О.В., Яхно А.Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности. Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, Красноярск, 2012. -139 с.

128. Сенашов, С.И., Савостьянова И.Л. Упруго-пластическое кручение многослойного стержня / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. сборник тезисов докладов: в 4 т. Министерство науки и высшего образования РФ; Российская академия наук; Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. (21–25 августа 2023 г., г. Санкт-Петербург). С. 301 - 303.

129. Сенашов, С.И., Савостьянова И.Л. Упруго-пластичность и законы сохранения. Монография / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова. – СибГУ им. М.Ф. Решетнева, 2023. – 192 с. ISBN 978-5-86433-926-8

130. Сенашов, С.И., Филюшина Е.В. Упругопластические задачи для ортотропных сред. Красноярск, СибГУ им. М.Ф. Решетнева, 2017.-116 с.

131. Сенашов, С.И. Построение новых решений и их характеристик для двумерной идеальной пластичности с помощью симметрий / С.И. Сенашов, А.Н. Яхно, Л.В. Яхно // Вестник ЧГПУ. 2010 №2(8). С. 473 - 491.

132. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. Т. 4, ч. 2. М. : Наука, 1981. 550 с.

133. Соболев, С.Л., Уравнения математической физики. 3-е изд. – М. : Гостехиздат, 1954. - 444 с.

134. Федоренко, А.Н. Моделирование ударного воздействия на демпфирующие элементы, изготовленные из композитных материалов / А.Н. Федоренко, Б.Н. Федулов, Е.В. Ломакин // Прикладная механика и техническая физика. 2021. №1, С. 100 - 107.

135. Хилл, Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1954. - 407 с.
136. Чехонин, К.А. Трехмерная задача компрессионного формования системы «композитный корпус – малосжимаемый отверждающийся наполнитель» / В. К. Булгаков, К. А. Чехонин // Матем. моделирование, 14:11 (2002), с. 113–127
137. Bobylev, A.V. Group analysis of the generalized burnett equations / A.V. Bobylev, S.V. Meleshko // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2020. Т. 27. № 3. pp. 494 - 508.
138. Caevmani, Ch. Group analysis of one-dimensional equations of gas dynamics in Lagrangian coordinates and conservation laws / Ch. Caevmani, S.V. Meleshko // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2020. v. 61. № 2 (360). pp. 40 - 59.
139. Ebobisse, F. A fourth-order gauge-invariant gradient plasticity model for polycrystals based on Kröner's incompatibility tensor / F. Ebobisse, P. Neff // Mathematics and Mechanics of Solids. 2020, Vol. 25(2) pp. 129 – 159
140. Eroshkina, T.V. Mathematical modeling of the state stress of a transverse plastic layer in a round rod / T.V. Eroshkina, V.L. Dilman // Russian Mathematics. 2011. V. 55, Issue 11. pp. 9 – 17.
141. Gomonova, O.V. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes / O.V. Gomonova, S.I. Senashov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. v. 62. № 1. pp. 179 – 186.
142. Grigoriev, Yu.N. A group classification of the spatially homogeneous and isotropic Boltzmann equation with source II / Yu.N. Grigoriev, S.V. Meleshko, A. Suriyawichitseranee // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. Vol.61. pp.15 - 18.
143. Grigoriev, Yu.N. Qualitive properties of a certain kinetic problem of binary gas / Yu.N. Grigoriev, M.I. Omel'aynchuk // Sib. Math. J. 2005. Vol. 46(5). pp. 813 - 825.

144. Kaptsov, E.I. Analysis of the one-dimensional Euler–Lagrange equation of continuum mechanics with a lagrangian of a special form / E.I. Kaptsov, S.V. Meleshko // *Applied Mathematical Modelling*. 2020. T. 77. № 2. pp. 1497 - 1511.
145. Kaptsov, E.I. Conservation laws of the two-dimensional gas dynamics equations / E.I. Kaptsov, S.V. Meleshko // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2019. T. 112. pp. 126 - 132.
146. Kaptsov, O.V. Waves and structures in the Boussinesq equations / O.V. Kaptsov, D.O. Kaptsov // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2019. T. 60. № 2. pp. 377 - 381.
147. Long, E.S. Application of the a Lie group admitted by a homogeneous equation for group classification of a corresponding inhomogeneous equation / E.S. Long, A. Karnbanjong, A. Suriyawichitseranee, Yu.N. Grigoriev, S.V. Meleshko // *Common. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2017.Vol. 48. pp. 350-360.
148. Meleshko, S.V. Complete group classification of the two-dimensional shallow water equations with constant coriolis parameter in lagrangian coordinates // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2020. T. 89. p. 105293.
149. Meleshko, S.V. Group classification of the two-dimensional shallow water equations with the beta-plane approximation of coriolis parameter in lagrangian coordinates / S.V. Meleshko, N.F. Samatova // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2020. T. 90. p. 105337.
150. Meleshko, S.V. On steady two-dimensional analytical solutions of the viscoelastic maxwell equations / S.V. Meleshko, N.P. Moshkin, V.V. Pukhnachev, V. Samatova // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2019. T. 270. pp. 1 - 7.
151. Moisil, G.G., Theodoresco, N. Fonctions holomorphes dan’s l’tspase. - *Mathematica*, 5, 141, 1931.
152. Nakpim, W. Conservation laws of the one-dimensional equations of relativistic gas dynamics in lagrangian coordinates / W. Nakpim, S.V. Meleshko // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2020. T. 124. pp. 103496.

153. Olver, P. Conservation laws in elasticity 1. General result. Arch. Rat. Mech. Anal. 85 (1984). pp. 111 – 129.
154. Olver, P. Conservation laws in elasticity 11. Linear homogeneous isotropic elastostatic. // Arch. Rat. Mech. Anal. 85 (1984). P. 131 – 160.
155. Ovsyannikov, L.V. Group Analysis of Differential Equations. – Academic Press, New York, 1982.
156. Polyanin, A. D. Handbook of nonlinear partial differential equations / A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. 2nd Edition, 2012. Taylor&Francis Group.
157. Polyanin, A.D., Zaitsev, V.F. Handbook of nonlinear partial differential equations. CRC Press, London, New York, Second Edition, 2012. 1876 p.
158. Savostyanova, I. About the limit state of deformable bodies 21st International scientific conference / S. Senashov, I. Savostyanova // Reshetnev Reading-2017 IOP Publishing / IOP Conf. Series Math. Science and Engineering 467 (2019) 012006 doi: 10.1088/1757-899x/467/1/012006
159. Savostyanova, I. L. New Solutions of Dynamical Equations of Ideal Plasticity / S. I. Senashov, I. L. Savostyanova // Journal of Applied and Industrial Mathematics, Volume 13, Issue 4, 2019, pp. 1 - 7.
160. Savostyanova, I.L. About Elastic Torsion around Three Axes / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova // Journal of Applied and Industrial Mathematics 15(1), pp. 141 - 145
161. Savostyanova, I.L. Anisotropic antiplane elastoplastic problem / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova, O.N. Cherepanova // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2020. T. 13. № 2. pp. 213 - 217.
162. Savostyanova, I.L. Elastoplastic bending of the bar with transverse force / S.I. Senashov, O.N. Cherepanova, I.L. Savostyanova // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2018. T.11, №3, pp. 356 - 363.
163. Savostyanova, I.L. Elastoplastic Bending of the Console with Transverse Force / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova, O.N. Cherepanova // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019,12(5), pp. 637 – 643.

164. Savostyanova, I.L. Elasto-plastic twisting of a two-layer rod weakened by holes / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova, O.N. Cherepanova // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2023. T. 16. № 5. С. 591 - 597.

165. Savostyanova, I.L. New Three-Dimensional Plastic Flows Corresponding to a Homogeneous Stress State / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova // Journal of Applied and Industrial Mathematics. vol.13, 2019, pp. 536 – 538.

166. Savostyanova, I.L. Solution of the problem of compression of a two-layer nonlinear material / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics 64(4):712-714, DOI: 10.1134/S002189442304017X October 2023

167. Savostyanova, I.L. Symmetries and conservation laws in the theory of plasticity / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova, O.V. Gomonova, O.N. Cherepanova // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Reshetnev Readings 2018. 2020. C. 012030.

168. Savostyanova, I.L. The exact solutions of the equation describing antiplanet plastic flow / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova // Lobachevsky Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 15. pp. 3741 - 3746.

169. Savostyanova, I.L. Use of conservation laws to solve the problem of load wave in an elastoplastic rod / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova, E.V Filyushina // Сибирский журнал науки и технологий. 2018. Т. 19. № 2. С. 272 - 232.

170. Savostyanova, I.L. Using Conservation Laws to Solve Boundary Value Problems for the Moisil–Theodoresco System / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 2, pp. 349 – 355. ISSN 1990-4789

171. Senashov, S. I. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes / S. I. Senashov, O. V. Gomonova // Intern. J. Non. Lin. Mech. 2019. V. 108. pp. 7 – 10.

172. Senashov, S. I., Vinogradov, A. M. Symmetries and Conservation Laws of 2-Dimensional Ideal Plasticity. – Proc. of Edinb. Math. Soc. 31 (1988). pp. 415 – 439.

173. Senashov, S. Longitudinal shear waves in an elastic parallelepiped / S. Senashov., I. Savostyanova, O. Cherepanova // Reshetnev Readings 2019. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 1230 (2022) 012017 IOP Publishing doi:10.1088/1757-899X/1230/1/012017

174. Senashov, S.I. About torsion of parallelepiped around three axis / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova, E.V. Filyushina // Сибирский журнал науки и технологий. 2017. Т. 18. № 3. С. 545-550.

175. Senashov, S.I. Conservation Laws of Three-Dimensional Perfect Plasticity Equations under von Mises Yield Criterion / S.I. Senashov, A.N. Yakhno // Abstract and Applied Analysis, vol 2013(2013), pp. 702 - 732.

176. Senashov, S.I. Conservation Laws. Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity / S.I. Senashov, A.N. Yakhno // SIGMA, 8, 2012, pp.71 - 87.

177. Senashov, S.I. Construction of elastoplastic boundary in problem of tension of a plate weakened by holes / S.I. Senashov, O.V. Gomonova // International Journal of Non-Linear Mechanics V. 108, January 2019, pp. 7 - 10

178. Senashov, S.I. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries / S.I. Senashov, A.N. Yakhno // Nonlinear analysis 71(2009). pp.1274 – 1284

179. Senashov, S.I. Elastoplastic Bending of Beam / S.I.Senashov, O.N. Cherepanova, A.V. Kondrin // J. Siberian Federal Univ., Math. and Physics., 7(2)(2014), pp.203 - 208.

180. Senashov, S.I. Hook's law as Lie group / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova Hook's // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Reshetnev Readings 2018. 2020. C. 012031.

181. Senashov, S.I. New classes of solution of minimal surfaces / S.I. Senashov, O.N. Cherepanova // J. Siberian Federal Univ., Math. and Physics., 3(2), 2010, pp. 248 - 255.

182. Senashov, S.I. On Elastoplastic Torsion of a Rod with Multiply Connected Cross-Section / S.I. Senashov, A.V. Kondrin, O.N. Cherepanova // J. Siberian Federal Univ., Math. and Physics, 7(1), 2015, pp. 343 - 351.

183. Senashov, S.I. Reproduction of solutions for bi-dimensional ideal plasticity / S.I. Senashov, A.N. Yakhno // Journal of Non -Linear Mechanics , 42, 2007, pp. 500 - 503.

184. Senashov, S.I. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system / S.I. Senashov, A.N. Yakhno // J. Phys. A: Math. Theor, 46, 2013, 355202.

185. Senashov, S.I. System analysis of dynamic problems of anisotropic plasticity theory / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova, O.N. Cherepanova // Сибирский журнал науки и технологий. 2019. Т. 20. № 3. С. 320 - 326.

186. Senashov, S.I. Using conservation laws to solving the boundary value problems of deformable solid mechanics / S.I. Senashov, O.V. Gomonova, I.L. Savostyanova // Symmetry 2024 Conference Proceedings. January 22-26, 2024, Thailand

187. Senashov, S.I. Construction of elasto-plastic boundaries using conservation laws / S.I. Senashov, E.V. Filyushina, O.V. Gomonova // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. 2015.Т. 16. № 2. С. 343 - 360.

188. Senashov, S.I. Solution of Boundary Value Problems of Plasticity with the Use of Conservation Laws / S.I. Senashov, O.N. Cherepanova, I.L. Savostyanova // J. Siberian Federal Univ., Math. and Physics. 2018. Т.11, №3, pp. 356 - 363

189. Senashov, S.I., Nonstruction of elasto-plastic boundaries using conservation laws / S.I. Senashov, E.V. Filyushina, O.V. Gomonova // Vestnik SibGAU, 16(2), 2015, pp.343 - 359.

190. Senashov, S.I. Symmetries and conservation Laws of 2-dimensional equations of ideal plasticity / S.I. Senashov, A.M. Vinogradov // Proc. Edinburg Math. Soc. 1988, v.31, pp.415 - 439.

191. Siriwat, P. Invariant solutions of one-dimensional equations of two-temperature relaxation gas dynamics / P. Siriwat, Y.N. Grigoriev, S.V. Meleshko // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020. T. 43. № 5. pp. 2444 - 2457.
192. Vaneeva, O.O. Extend group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities / O.O. Vaneeva, R.O. Popovich, C. Sopotocleus // *J. Math. Anal.* - 2012.-vol. 396. pp.225 - 242.
193. Vinogradov, A. M. Local symmetries and conservation laws / A.M. Vinogradov // *Acta Appl. Math.* 1984. № 6. pp. 56 – 64.