На правах рукописи

Петраков Игорь Евгеньевич

# Моделирование упругого деформирования композитных пластин, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию

1.1.8 «Механика деформируемого твердого тела»

## Автореферат

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук»

Научный руководитель:

Садовский Владимир Михайлович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, зав. отделом вычислительной механики деформируемых сред Института вычислительного моделирования – обособленного подразделения ФИЦ КНЦ СО РАН, г. Красноярск.

Официальные оппоненты:

**Любимова Ольга Николаевна,** доктор физикоматематических наук, доцент, профессор отделения машиностроения, морской техники и транспорта Инженерного департамента Политехнического института (школы) ФГАОУ ВО Дальневосточного федерального университета, г. Владивосток.

Севастьянов Георгий Мамиевич, кандидат физикоматематических наук, старший научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук ФГБУН Хабаровского Федерального исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Комсомольск-на-Амуре.

Ведущая организация:

 $\Phi \Gamma AOУ$  BO «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет», г. Новосибирск.

Защита состоится «19» октября 2023 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета 24.2.316.03 при  $\Phi\Gamma$ БОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет» по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, проспект Ленина, д. 27. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке  $\Phi\Gamma$ БОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет» и на сайте www.knastu.ru

Отзывы на автореферат в двух экземплярах (заверенных печатью учреждения) просим присылать по адресу: 81013, г. Комсомольск-на-Амуре, проспект Ленина, д. 27, ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет», ученому секретарю диссертационного совета 24.2.316.03 и по адресу diss@knastu.ru

Автореферат разослан «02» августа 2023 г.

Ученый секретарь диссертационного совета 24.2.316.03, канд. физ.-мат. наук Григорьева Анна Леонидовна

## Общая характеристика работы

Потребность промышленности в легких, высокопрочных, недорогих материалах привела к развитию принципиально нового подхода в области их конструирования. Результатом этого подхода в XX веке стала разработка композитных материалов, активное использование которых стало одним из решающих факторов промышленного прогресса в таких областях как автомобилестроение, авиастроение, в космической отрасли промышленности и др. (Р. Кристенсен, Б.Е. Победря). В настоящее время композитные материалы продолжают широко использоваться как в промышленности так и, например, для создания переправ, дорог, площадок для разгрузки морских судов, взлетно-посадочных полос и т.п. в условиях холодных территорий. При этом в аэрокосмической отрасли растут объемы использования композитных материалов, в современных самолетах доля композитов составляет от 15% до 30% от общей массы, а в ракетных двигателях достигает 90% (В.М. Бузник, А.А. Буланов).

В процессе развития механики деформируемого твердого тела одной из основных гипотез являлась гипотеза об однородности сплошной среды. Однако, свойства композитных материалов существенно отличаются от свойств однородных составляющих. Для создания композитных материалов с заданными свойствами, а также расчета конструкций из таких неоднородных материалов необходимо развивать теоретические знания, явным образом учитывающие эту неоднородность. Это привело к тому, что при создании математических моделей и методов расчета сложных конструкций необходимо учитывать специфические свойства композитов, такие как разномодульность и разнопрочность. Под разномодульностью здесь понимается разные модули упругости, а разнопрочность означает различные пределы прочности при растяжении и сжатии. Необходимо отметить, что при конструировании объектов из композитных материалов в реальных приложениях используются поправки для учета свойств разномодульности и разнопрочности, которые определяются, в основном, экспериментально, что приводит к удорожанию и увеличению времени проектирования конструкций. Таким образом, учет неоднородности композитов на этапе математического моделирования поведения материала под действием различной нагрузки является актуальной задачей и, в целом, может быть использован для оптимизации промышленного использования композитных материалов.

Одним из подходов, которые позволяют построить модель, учитывающую разномодульность композита, является обобщенный реологический метод, предложенный В.М. Садовским. С его помощью можно строить корректные с точки зрения термодинамики определяющие уравнения волокнистых композитов. Метод основан на построении реологических схем с помощью базовых элементов (упругой пружины, вязкого демпфера и пластического шарнира) и нового элемента — жесткого контакта, имитирующего поведение идеальной сыпучей среды с абсолютно твердыми частицами. Реологический метод хорошо зарекомендовал себя при моделировании динамики и статики сыпучих и пористых материалов с пороговым изменением жесткости при схлопывании пор. Аналогичное изменение жесткости происходит в волокнистом композите при смене знака деформации.

**Актуальность работы** обусловлена широким распространением композитных материалов. Моделирование микроструктуры композита является сложной задачей из-за трудоемкости описания распределения и ориентации инородных включений и армирующих элементов в матрице материала, а также из-за необходимости описания механических взаимодействий на микроуровне.

Построение определяющих уравнений для волокнистых композитов с различным сопротивлением сжатию и растяжению в настоящий момент является нерешенной задачей и для более детального моделирования необходимы математические модели, не требующие больших вычислительных мощностей для проведения расчетов и способные описать особенности композитных материалов.

Степень разработанности темы. В настоящее время существуют различные методы моделирования композитных материалов, однако общепринятой модели, позволяющей учитывать разномодульность материала и удовлетворяющей всем необходимым критериям, не разработано. Как было указано выше, одним из подходов, позволяющим построить модель, учитывающую разномодульность композита является обобщенный реологический метод, разработанный В.М. Садовским. К описанию поведения композитных материалов этот метод будет применяться впервые.

**Цель исследования** состоит в создании методов расчета напряженнодеформированного состояния композитных пластин под действием произвольной системы сил, включая математическую модель, учитывающую разное сопротивление волокнистых композитов растяжению и сжатию, а также алгоритмическую и программную реализацию предложенной модели.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

- 1. построить определяющие уравнения многослойных композитных материалов, учитывающие разное сопротивление растяжению и сжатию;
- 2. разработать методику решения краевых задач квазистатического деформирования пластин из многослойных композитных материалов;
- 3. выполнить расчеты напряженно-деформированного состояния слоистых композитных пластин при растяжении-сжатии в плоскости пластин, при чистом изгибе и их совокупности.

**Научная новизна.** Особенность этой задачи состоит в том, что определяющие уравнения должны быть представимы в потенциальной форме, что гарантирует выполнение фундаментальных принципов термодинамики. Для получения уравнений, описывающих упругую деформацию волокнистых композитов с различным сопротивлением сжатию и растяжению, впервые был применен обобщенный реологический метод.

**Теоретическая значимость.** Полученные в работе математические модели и определяющие уравнения являются важным этапом на пути к созданию математической модели композитного материала, учитывающей разномодульность и позволяющей описывать напряженнодеформированное состояние конструкций из композитных материалов с различными способами армирования под действием произвольных систем сил. В данной работе развивается обобщенный реологический метод и его применение к описанию композитных материалов.

**Практическая значимость.** Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы в различных областях промышленности при проектировании конструкций из композитных материалов, проведении прочностных расчетов, решении оптимизационных задач.

**Методология и методы исследования.** При построении математической модели упругого композита применяется обобщенный реологический подход. Для проведения расчетов в рамках моделей разномодульных композитных материалов требуется нахождение проекций на

выпуклые множества в пространствах напряжений и деформаций, для вычисления которых применены методы решения вариационных неравенств — метод множителей Лагранжа и итерационный алгоритм Удзавы. Программный продукт реализован на основе метода конечных элементов, который широко используется при решении задач механики деформируемого твердого тела и позволяет с помощью метода последовательных приближений учесть нелинейные определяющие уравнения развиваемых моделей. В качестве метода исследования в работе используется вычислительный эксперимент, включающий в себя следующие этапы: математическая формулировка задачи, построение численного алгоритма, его программная реализация, проведение расчетов и анализ полученных результатов.

#### Положения выносимые на защиту.

- 1. Определяющие уравнения многослойного волокнистого композитного материала, учитывающие разное сопротивление растяжению и сжатию, применимые к задачам расчета напряженно-деформированного состояния пластин из композитного материала.
- 2. Алгоритм и компьютерная программа, реализующая определяющие уравнения композитного материала при решении краевых квазистатических задач для слоистых композитных пластин.
- 3. Результаты расчетов напряженно-деформированного состояния слоистых композитных пластин при растяжении-сжатии в плоскости пластин, при чистом изгибе и их совокупности.

Достоверность. Получаемые с помощью обобщенного реологического метода определяющие уравнения относятся к теории гиперупругости. Для них определены упругие потенциалы напряжений и деформаций, что гарантирует выполнение фундаментальных принципов равновесной термодинамики. В работе проведены вычислительные эксперименты, проведено сравнение полученных решений с решениями, полученными с помощью конечно-элементного комплекса Abaqus.

**Апробация работы.** Основные результаты работы изложены в виде докладов на 7 конференциях:

- XI Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященной памяти академика А.Ф.Сидорова с элементами школы молодых ученых.
   1-7 сентября 2022 г., пос. Кабардинка, Краснодарский край, Россия;
- 2. Междисциплинарной конференции молодых учёных ФИЦ КНЦ СО РАН (КМУ-XXIV). 29 апреля 2021, г. Красноярск;
- 3. 27-ой Всероссийской конференции с участием зарубежных учёных по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, посвященной 100-летию со дня рождения Николая Николаевича Яненко. г. Красноярск, Сибирский федеральный университет, 5-9 июля 2021 г.;
- 4. XI, XIII Международных конференциях по применению математических подходов в технических и естественных науках (AMiTaNS'19, AMiTaNS'20, AMiTaNS'21), Албена, Болгария, 2019, 2020, 2021 гг.;

5. Всероссийской конференция молодых учёных-механиков 3-12 сентября 2021 года, пансионат МГУ «Буревестник», г. Сочи, Россия.

Работа была поддержана проектом РФФИ №20-31-90032 «Моделирование напряженнодеформированного состояния многослойных волокнистых композитов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию».

**Личный вклад** автора состоит в получении определяющих уравнений на основе обобщенного реологического метода, разработке вычислительных алгоритмов и программы для ЭВМ, проведении расчетов, обработке и анализе полученных результатов, подготовке научных статей и докладов по теме диссертационной работы. Научному руководителю Садовскому В.М. принадлежат постановки задач, общая оригинальная идея использования обобщенного реологического метода в применении к моделям волокнистых композитных материалов и критическое сравнение результатов с известными алгоритмами.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 13 печатных изданиях, из которых 3 изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 6 – в тезисах докладов, 5 индексируются в базах данных Web of Science, 6 – в базах Scopus, из них 5 публикации индексируются одновременно в Web of Science и Scopus.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 119 страниц с 31 рисунком и 4 таблицами. Список литературы содержит 138 наименований.

## Содержание работы

Во введении кратко описан объект исследования, сформулирована цель диссертационной работы и выделены задачи, поставленные для достижения этой цели. Обоснована актуальность работы, теоретическая и практическая значимость, достоверность результатов и описаны методы исследования. Также перечислены основные публикации по теме работы и дана общая характеристика работы.

Первая глава посвящена обзору моделей композитных материалов. В разделе 1.1 проведен исторический обзор развития методов моделирования композитных материалов. Основополагающий вклад в развитие механики композитов внесли Ю.Н. Работнов и его ученики (Б.Д. Аннин, Ю.В. Немировский и др.). Так исходя из трехмерных уравнений теории упругости на основе метода гомогенизации были построены усредненные модели неоднородных тонкостенных конструкций и выполнены исследования асимптотических свойств классических моделей. Проектированию композитных материалов и развитию подхода построения структурной механики произвольных типов слоисто-волокнистых конструкций посвящены работы Ю.В.Немировского, С.К. Голушко, А.П. Вахмянина, С.Б. Бушманова и др. Предложенные подходы позволяют получать единый математический аппарат анализа поведения конструкций для широкого спектра структур армирования, разрабатывать на его основе единообразные схемы и программы численных расчетов.

Особенностью волокнистых композитов является то, что они проявляют различные свойства при растяжении и сжатии. Первыми работами по исследованию и моделированию разномодульных материалов являются работы С.А. Амбарцумяна, А.А. Хачатрян, Г.С. Шапиро, Н.М. Матченко и др. Одной из основных работ в области разномодульной теории упругости является

монография С.А. Амбарцумяна, которая посвящена изложению общей теории упругости материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию, и в которой также рассматривается теория оболочек из разномодульного материала. На основе этих работ разномодульная теория упругости получила свое развитие в различных направлениях, таких как получение аналитических решений, модификация определяющих соотношений, которой посвящены работы С.В. Берта, Р.М. Джонса, Е.В. Ломакина и др. Помимо обратимого деформирования различное поведение материалов при растяжении и сжатии также оказывает значительное влияние при необратимых процессах деформирования таких как ползучесть. Моделированию деформирования и исследованию ползучести в разномодульных материалах посвящены работы А.А. Буренина и В.М. Ярушиной. В работах А.И. Олейникова, С.Н. Коробейникова и К.С. Бормотина рассматривается моделирование анизотропных разносопротивляющихся сплавов и предложен алгоритм численного решения задач ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии. Расчеты с учетом разного сопротивления при кручении стержней и моделирование пластин учитывающее упрочнение материала предаставлены в работах И.А. Банишиковой. Анализ литературы показывает, что построение определяющих уравнений для волокнистых композитов с различным сопротивлением сжатию и растяжению относится к проблемам, нерешенным как в прикладном, так и в теоретическом плане. Особенность этой задачи состоит в том, что определяющие уравнения должны адекватно описывать имеющиеся экспериментальные данные по сжатию и растяжению образцов, а также должны быть представимы в потенциальном виде, чтобы гарантировать реализацию фундаментальных принципов термодинамики.

В разделе 1.2 описан обобщенный реологический метод, который был разработан ранее для описания разнопрочных и зернистых сред. Реологический метод является основой феноменологического подхода к описанию напряженно-деформированного состояния сред со сложными механическими свойствами. Помимо традиционных реологических элементов (пружина, вязкий демпфер, пластический шарнир) предлагается использование жесткого контакта, служащего для учета различного сопротивления материала растяжению и сжатию.

На рисунке 1 изображено обозначение жесткого контакта в реологической схеме. Данному элементу соответствует сыпучая среда с абсолютно жесткими частицами: при растяжении частицы не контактируют между собой и напряжение в среде равно нулю, а при сжатии напряжения могут быть произвольными, но деформация равна нулю.



Рис. 1: Жесткий контакт

Выпишем определяющие соотношения для данного элемента:

$$\sigma \le 0, \qquad \varepsilon \ge 0, \qquad \sigma \varepsilon = 0.$$
 (1)

Для моделирования волокнистого композита более податливого при сжатии и жесткого при растяжении требуется использование жесткого контакта с обратным включением в реологическую схему. Такое включение жесткого контакта соответствует поведению гибкой нерастяжимой нити, которая не сопротивляется сжатию и не деформируется при растяжении. Реологи-

ческая схема показана на рисунке 2, а определяющие соотношения при одноосном растяжениисжатии совпадают с соотношениями, описывающими прямое включение с точностью до перемены знаков:

$$\sigma \ge 0, \qquad \varepsilon \le 0, \qquad \sigma \varepsilon = 0.$$
 (2)

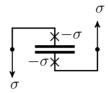


Рис. 2: Жесткий контакт с обратным включением

Предполагается, что в рассматриваемом диапазоне деформаций волокна не проскальзывают относительно матрицы и вследствие своих свойств и размеров не влияют на свойства композита при сжатии. В таком случае напряженно-деформированное состояние при сжатии описывается только модулями упругости матрицы, а при растяжении композит приобретает дополнительную жесткость за счет жесткости волокон. Такому поведению будет соответствовать схема, приведенная на рисунке 3, где  $\sigma$  — тензор действительных напряжений,  $\sigma'$  — тензор дополнительных напряжений, a — тензор модулей упругости при сжатии, b — тензор дополнительных модулей при растяжении.

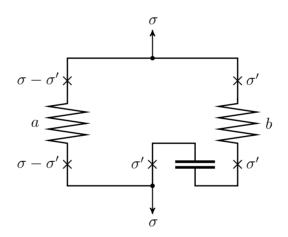


Рис. 3: Реологическая схема волокнистого композита

Исходя из этой схемы получено определяющее уравнение общего вида:

$$\sigma = a : \varepsilon + b : (\varepsilon - \Pi(\varepsilon)), \tag{3}$$

где  $\Pi(\varepsilon)$  является проекцией тензора  $\varepsilon$  на конус в пространстве деформаций, который строится исходя из направлений волокон армирования.

Существование потенциалов является существенным преимуществом обобщенного реологического метода построения определяющих уравнений, поскольку это гарантирует термодинамическую корректность полученных уравнений. Для определяющего уравнения (3) были получены потенциал напряжений и потенциал деформаций:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon : a : \varepsilon + \frac{1}{2}(\varepsilon - \Pi(\varepsilon))^2, \quad \Psi(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma : a^{-1} : \sigma - \frac{1}{2}\|\pi(\bar{\sigma})\|^2,$$

где  $\pi(\bar{\sigma})$  – проекция тензора условных напряжений  $\bar{\sigma}$  на конус, сопряженный к конусу C по норме  $\|\sigma\|^2 = \sigma : (a^{-1} + b^{-1}) : \sigma$ .

Представленные определяющие уравнения позволяют строить устойчивые вычислительные процедуры для решения краевых задач квазистатического состояния и динамического деформирования волокнистых композитов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Во второй главе рассматривается задача изгиба тонкой композитной балки. В разделе 2.1 к анализу изгиба тонкой балки из волокнистого композита применялось обобщенное уравнение эластики Эйлера, учитывающее разное сопротивление материала растяжению и сжатию. Для получения классического уравнения эластики Эйлера, описывающего плоский изгиб тонкой гибкой балки прямоугольного сечения при произвольном прогибе применялся вариационный принцип Лагранжа. В соответствии с этим принципом состояние равновесия балки минимизирует на множестве вариаций, согласованных с главными краевыми условиями, интегральный функционал упругой энергии

$$J(x, y, \theta) = \int_{0}^{l} \left( \frac{1}{2} D(s) |\theta'|^{2} - \mu gy \right) ds - F_{x} x(l) - F_{y} y(l) - M \theta(l), \tag{4}$$

где l — длина балки;  $\mu$  — погонная масса; g — ускорение свободного падения;  $F_x$  и  $F_y$  — проекции вектора изгибающей силы, приложенной к правому концу:  $F_x = F \cos \alpha$ ,  $F_y = F \sin \alpha$ , M — изгибающий момент; D — изгибная жесткость; штрих означает производную по s. Угол наклона  $\theta(s)$  оси балки и координаты x(s), y(s) точки на оси удовлетворяют геометрическим ограничениям:

$$x' = \cos \theta, \qquad y' = \sin \theta. \tag{5}$$

Для простоты левый конец балки считается закрепленным. Граничные условия жесткого закрепления на левом конце балки формулируются в виде:  $\theta(0) = x(0) = y(0) = 0$ . Задача условной минимизации (4), (5) эквивалентна задаче о безусловном минимуме лагранжиана

$$L(x,y,\theta) = J(x,y,\theta) - \int_{0}^{l} \lambda_x (x' - \cos\theta) ds - \int_{0}^{l} \lambda_y (y' - \sin\theta) ds, \tag{6}$$

где  $\lambda_x(s)$ ,  $\lambda_y(s)$  — множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (5). Варьируя функционал (6) по трем независимым аргументам, получим следующие уравнения:

$$(D(s) \theta')' = -\lambda_x \sin \theta + \lambda_y \cos \theta, \qquad \lambda'_x = 0, \qquad \lambda'_y = \mu g$$

и граничные условия на правом конце:

$$D(l) \theta'(l) = M, \qquad \lambda_x(l) = -F_x, \qquad \lambda_y(l) = -F_y.$$

Отсюда следует, что угол наклона оси балки является решением краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$(D(s)\theta')' = F\sin(\theta - \alpha) + \mu g(s - l)\cos\theta, \quad \theta(0) = 0, \quad D(l)\theta'(l) = M. \tag{7}$$

Изгибная жесткость балки D найдена из условия равенства нулю продольных усилий находим

$$\int_{0}^{h_{+}} \sigma dz + \int_{-h_{-}}^{0} \sigma dz = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E^{+}h_{+}^{2} = E^{-}h_{-}^{2}, \tag{8}$$

где  $h_+$  и  $h_-$  – толщина растягиваемой и сжимаемой части балки,  $E^+$  и  $E^-$  – модули Юнга при растяжении и при сжатии соответственно. Для момента справедлива формула:

$$M = \int_{0}^{h_{+}} \sigma z dz + \int_{-h_{-}}^{0} \sigma z dz = -D\omega'', \tag{9}$$

где D — изгибная жесткость балки.

В разделе 2.2 доказано существование и единственность нейтральной линии при изгибе композитной балки. Для этого введена функция равная интегралу напряжений по толщине балки в зависимости от расположения нейтральной линии

$$f(z_0) = \int_0^h \sigma(z)dz = \int_0^{z_0} E^{-\frac{z-z_0}{R}} dz + \int_{z_0}^h E^{+\frac{z-z_0}{R}} dz.$$
 (10)

Показано, что данная функция имеет единственное нулевое значение на отрезке [0; h]. Для этого рассмотрено поведение на концах отрезка и монотонность функции:

$$f(0) = \int_{0}^{h} E^{+} \frac{z}{R} dz = E^{+} \frac{h^{2}}{2R} > 0, \tag{11}$$

$$f(h) = \int_{0}^{h} E^{-\frac{z-h}{R}} dz = -E^{-\frac{h^2}{2R}} < 0,$$
(12)

$$f'(z_0) = \left(-\frac{E^-}{2R}z_0^2 + \frac{E^+}{2R}(z_0 - h)^2\right)' = -\frac{E^-}{R}z_0 + \frac{E^+}{R}(z_0 - h) < 0.$$
 (13)

Функция на концах отрезка принимает значения разных знаков, производная функции меньше нуля на всем отрезке и функция монотонно убывает на [0;h], следовательно,  $f(z_0)$  принимает нулевое значение в единственной точке на [0;h]. Так выражения (11)-(13) показывают, что при  $E^+ > E^- > 0$  возможно единственное расположение нейтральной линии.

Интегрированием выражения для продольных усилий было получено квадратное уравнение относительно  $z_0$ :  $a_k z_0^2 + b_k z_0 + c_k = 0$ , где

$$a_k = \frac{-E_k^- + E_k^+}{2}, \quad b_k = \sum_{i=1}^{k-1} -E_i^-(z_i - z_{i-1}) + E_k^- z_{k-1} - E_k^+ z_k + \sum_{i=k+1}^n -E_i^+(z_i - z_{i-1}),$$

$$c_k = \sum_{i=1}^{k-1} E_i^{-} \left( \frac{z_i^2 - z_{i-1}^2}{2} \right) - E_k^{-} \frac{z_{k-1}^2}{2} + E_k^{+} \frac{z_k^2}{2} + \sum_{i=k+1}^{n} E_i^{+} \left( \frac{z_i^2 - z_{i-1}^2}{2} \right).$$

Зная положение нейтральной линии изгибная жесткость вычисляется по формуле:

$$D = \int_{0}^{z_0} E^{-} z^2 dz + \int_{z_0}^{h} E^{+} z^2 dz.$$

Проинтегрировав и расписав значения  $E^+$  и  $E^-$  по слоям получено следующее выражение:

$$D = \sum_{i=1}^{k} E_i^{-} \frac{(z_{i+1} - z_i)^3}{3} + E_k^{-} \frac{(z_0 - z_k)^3}{3} + E_k^{+} \frac{(z_{k+1} - z_0)^3}{3} + \sum_{i=k+1}^{n} E_i^{+} \frac{(z_{i+1} - z_i)^3}{3}.$$

В разделе 2.3 для того чтобы показать важность учета различного сопротивления растяжению и сжатию была решена обратная задача по определению модуля упругости волокнистого композитного материала при сжатии. Модуль упругости композита при растяжении измерялся непосредственно в экспериментах. Один из надежных способов определения модуля упругости при сжатии связан с задачей сильного изгиба тонкой длинной балки. Сопоставляя расчетные данные с измеренным прогибом балки, можно подобрать наиболее подходящее значение жесткости балки на изгиб, что позволяет однозначно определить искомый модуль упругости при сжатии. Была проведена серия экспериментов для получения изображений консольно закрепленной балки изогнутой под действием груза на свободном конце. Полученные фотографии обрабатывались для получения плоской проекции, после чего положение балки оцифровывалось. Данные о прогибе по длине балки использовались при решении обратной задачи определения изгибной жесткости D (жесткость считалась постоянной) по методу наименьших квадратов. С помощью встроенных функций Matlab была решена задача минимизации среднеквадратичного отклонения:

$$\delta^{2} = \sum_{k=1}^{m} |y(x_{k}) - \bar{y}_{k}|^{2}.$$

Здесь  $y(x_k)$  – расчетные значения прогиба балки в заданной системе точек по горизонтальной оси  $x_1, x_2, ..., x_m$ ;  $\bar{y}_k$  – измеренные (оцифрованные) значения прогиба в этих же точках. Прямое решение задачи проводилось на основе уравнения эластики Эйлера:

$$(D\theta')' = F\sin(\theta - \alpha) + \mu g(s - l)\cos\theta \tag{14}$$

с граничными условиями

$$\theta(0) = 0, \qquad D(l)\theta'(l) = M. \tag{15}$$

Здесь l — длина балки;  $\mu$  — погонная масса; g — ускорение свободного падения; F — модуль вектора изгибающей силы, приложенной к правому концу, M — изгибающий момент; D — изгибная жесткость, где штрих означает производную по s,  $x' = \cos \theta$ ,  $y' = \sin \theta$ , x(0) = y(0) = 0.

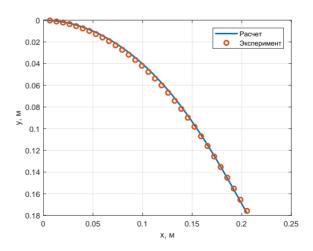


Рис. 4: Изгибное состояние балки

Проведены расчеты и найдена изгибная жесткость, минимизирующая среднеквадратичное отклонение по системе из m=30 равноотстоящих точек. Сравнение упругой линии, полученной после расчетов, с результатами измерений изображено на рисунке 4.

По найденным из экспериментов D и  $E^+$  было получено значение  $E^-=56.8\ \Gamma\Pi a$ , которое составляет  $49.8\ \%$  от  $E^+$ . Таким образом, рассматриваемый композитный материал является существенно разномодульным. Дополнительные расчеты показали, что если принять модуль Юнга на сжатие равным экспериментальному модулю на растяжение, то это приведет к заниженному значению прогиба. Величина относительной ошибки при этом составит 16%.

Для проверки достоверности полученного значения изгибной жесткости была выполнена серия экспериментов по изгибу более коротких и более длинных балок из того же композита, а также проводился консольный изгиб балок различной толщины при фиксированной силе.

В **третьей главе** рассматривается плоское напряженное состояние многослойной композитной пластины.

В разделе 3.1 описано получение определяющих уравнений. Получены выражения, связывающие напряжения и деформации. Пусть ось  $x_1$  декартовой системы координат  $Ox_1x_2$  расположена по направлению укладки волокон. Будем считать, что при сжатии материал пластины описывается законом Гука для трансверсально изотропного тела, тогда уравнение описывающее поведение материала при сжатии можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix}
\varepsilon_{11} \\
\varepsilon_{22} \\
\varepsilon_{12}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 \\
-\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2G}
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
\sigma_{11} - \sigma'_{11} \\
\sigma_{22} - \sigma'_{22} \\
\sigma_{12} - \sigma'_{12}
\end{pmatrix},$$
(16)

где  $E_1$  и  $E_2$  – модули Юнга в направлении и перпендикулярно укладке волокон соответственно,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  соответствующие коэффициенты Пуассона, а G модуль сдвига. В обозначениях введенных на схеме на рисунке 3 данное выражение связывает тензоры  $\varepsilon$  и  $\sigma-\sigma'$  с помощью тензора модулей упругости матрицы  $a^{-1}$ .

При растяжении волокон появляется дополнительное напряжение

$$\sigma'_{11} = b\varepsilon_{11}$$
,

которое вводится с помощью тензора b. Для того чтобы введенный тензор был невырожденным и положительно определенным введем малые положительные компоненты  $\beta$  и  $\gamma$ , которые впоследствии устремим к нулю. Тогда уравнение описывающее дополнительную жесткость возникающую при растяжении за счет работы армирования запишем следующим образом:

$$\begin{pmatrix}
\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}' \\
\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}' \\
\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}'
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{b} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2\gamma}
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
\sigma_{11}' \\
\sigma_{22}' \\
\sigma_{12}'
\end{pmatrix}.$$
(17)

Конус деформаций C и сопряженный конус напряжений K для случая однонаправленного армирования примут следующий вид:

$$C = \{ \varepsilon | \varepsilon_{11} \le 0 \}, \quad K = \{ \sigma | \sigma_{11} \ge 0, \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0 \}.$$

Приведем полученные формулы, связывающие напряжения и деформации, операторы проекций потенциалы напряжений и деформаций. Проекция тензора  $\varepsilon$  на конус C:

$$\Pi_{11} = \begin{cases} 0, \text{при } \varepsilon_{11} > 0, \\ \varepsilon_{11}, \text{при } \varepsilon_{11} \leq 0, \end{cases} \quad \Pi_{22} = \varepsilon_{22}, \quad \Pi_{12} = \varepsilon_{12}.$$

Проекция тензора  $\bar{\sigma}$  на конус K:

$$\pi_{11} = \begin{cases} \bar{\sigma}_{11}, \text{при } \bar{\sigma}_{11} > 0, \\ 0, \text{при } \bar{\sigma}_{11} \le 0. \end{cases}$$

Формулы для вычисления напряжений через деформации:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E_1(\varepsilon_{11} + \nu_2 \varepsilon_{22})}{1 - \nu_1 \nu_2} + b(\varepsilon_{11} - \Pi_{11}), \\ \sigma_{22} = \frac{E_2(\varepsilon_{22} + \nu_1 \varepsilon_{11})}{1 - \nu_1 \nu_2}, \\ \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \end{cases}$$

Формулы для вычисления деформаций по заданным напряжениям:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - \pi_{11}}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_{22}}{E_2}, \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \nu_1 \frac{\sigma_{11} - \pi_{11}}{E_1}, \\ \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G}. \end{cases}$$

Потенциалы напряжений и деформаций:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} \left( E_1 \varepsilon_{11}^2 + (\nu_1 E_2 + \nu_2 E_1) \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + E_2 \varepsilon_{22}^2 \right) + 2G \varepsilon_{12}^2 + \frac{b}{2} (\varepsilon_{11} - \Pi_{11})^2;$$

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{11}^2}{E_1} - \left( \frac{\nu_1}{E_1} + \frac{nu_2}{E_2} \right) \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{\sigma_{22}^2}{E_2} \right) + \frac{\sigma_{12}^2}{G} - \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{b} \right) \frac{\pi_{11}^2}{2}.$$

С помощью вариационного метода Лагранжа и метода начальных напряжений получен функционал упругой энергии

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \nabla \vec{u} : (a+b) : \nabla \vec{u} - \Delta \sigma^{k-1} : \nabla \vec{u} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \vec{q} \cdot \vec{u} d\Gamma, \tag{18}$$

где  $\vec{u}$  – вектор перемещений в сечении пластины  $\Omega$  срединной плоскостью,  $\nabla$  – оператор Гамильтона,  $\vec{q}$  – вектор напряжения на границе пластины  $\Gamma_{\sigma}$ , а верхний индекс k обозначает номер итерации. Минимизируя данный функционал на каждом шаге алгоритма, можно получить искомый вектор перемещений u. Задача минимизации функционала (18) эквивалента следующему вариационному уравнению

$$\int_{\Omega} \left( \nabla \vec{u} : (a+b) : \delta \nabla \vec{u} - \Delta \sigma^{k-1} : \delta \nabla \vec{u} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_{\sigma}} \vec{q} \cdot \delta \vec{u} \, d\Gamma, \tag{19}$$

для решения которого использовался метод конечных элементов.

В разделе 3.2 представлены результаты расчетов плоского напряженного состояния композитной пластины. Было проведено несколько серий вычислительных экспериментов, в которых рассматривалось плоское напряженное состояние тонкой прямоугольной пластины с круглым вырезом.

Приведем параметры первой серии вычислительных экспериментов и ее результаты. Рассматривалось плоское напряженное состояние тонкой прямоугольной пластины с круглым вырезом. На пластину вдоль всей ее границы действовало равномерно распределенное касательное напряжение  $\sigma_{12}=\tau$ , а нормальные напряжения на границе отсутствовали. Также учитывалось различное сопротивление при сжатии и растяжении материала. Расчеты производились со следующими параметрами пластины:  $l_1=150,\ l_2=100\,\mathrm{mm}$ , толщина  $h=2,5\,\mathrm{mm}$ , радиус окружности выреза  $r=30\,\mathrm{mm}$ . Угол армирования  $\alpha$  равен 45 на рисунке 5 и -45 на рисунке 6. Внешнее касательное напряжение  $\tau=0,15\,\Gamma\Pi$ а выбрано таким образом, чтобы уровень деформаций в обоих вариантах армирования не превышал 10%. Параметры упругости  $E_1=56.8; E_2=6; G=3.5; b=57.2\,\Gamma\Pi$ а соответствует армированному углеродным волокном полимеру, используемому в вышеописанных экспериментах по сильному изгибу тонких длинных балок.

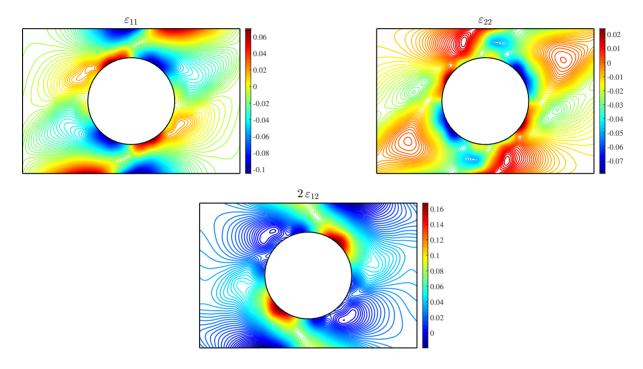


Рис. 5: Линии уровня деформаций в однослойной пластине с армированием под углом  $\alpha=45$  под действием касательных напряжений на границе

При такой схеме нагружения пластина после деформации принимает форму, близкую к параллелограмму. Волокна, расположенные под углом  $\alpha=45^\circ$ , растягиваются, так как ориентированы в направлении главной диагонали параллелограмма, которая длиннее диагонали прямоугольника. Материал приобретает дополнительную жесткость при растяжении, поэтому деформация пластины происходит в основном за счет сжатия по оси  $x_1$ . Противоположная ситуация наблюдается при армировании под углом  $\alpha=-45^\circ$ . В этом случае волокна ориентированы в направлении побочной диагонали параллелограмма, длина которой меньше длины диагонали прямоугольника. Волокна сжимаются, не обеспечивая дополнительной жесткости; поэтому преобладающая деформация пластины вдоль оси  $x_1$  происходит за счет растяжения. То же самое наблюдается на качественном уровне при деформации пластины в направлении оси  $x_2$ . Отметим, что диапазон изменения деформации сдвига в обоих вариантах практически одинаков. На рисунках 5 и 6 видно, что в направлениях поперек укладки волокна формируются полосы сдвига, которые соединяют горизонтальные стороны пластины с границей кругового реза. Направления полос сдвига согласованы с направлениями укладки волокон и различны при рассматриваемых углах армирования.

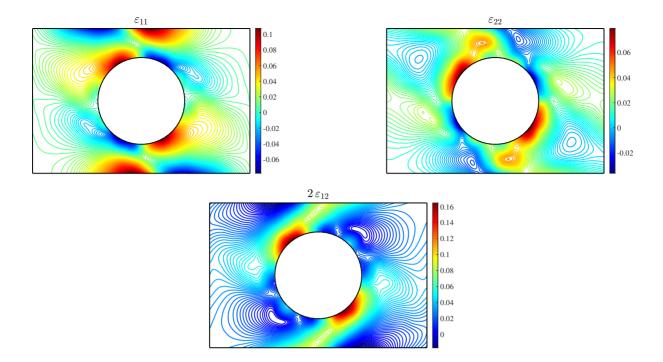


Рис. 6: Линии уровня деформаций в однослойной пластине с армированием под углом  $\alpha = -45$  под действием касательных напряжений на границе

Вторая серия вычислительных экспериментов проводилась для пластины, армированной жесткими волокнами в направлении горизонтальной оси. Сравнение по деформации  $\varepsilon_{11}$  с расчетами, не учитывающими разное сопротивление, выявляет значительную разницу между результатами как в качественном, так и в количественном отношении. Это различие объясняется тем, что из-за разных модулей Юнга волокон при сжатии и растяжении деформации сжатия в направлении оси  $x_1$  в пластине примерно вдвое превышают деформации растяжения по абсолютной величине. Как показывают расчеты, линии уровня деформаций в направлении оси  $x_2$  и линии уровня деформации сдвига различаются в меньшей степени, а разница между максимальными и минимальными значениями лежит в диапазоне 1%.

Также были проведены расчеты для двухслойных и трехслойных пластин с углами армирования  $\alpha_1=0^\circ$ ;  $\alpha_2=45^\circ$  и  $\alpha_1=45^\circ$ ;  $\alpha_2=0^\circ$ ;  $\alpha_1=-45^\circ$ , которые показали, что дополнительно армирование под углом уменьшает разницу между результатами, полученными с учетом и без учета разного сопротивления на сжатие и растяжение.

В четвертой главе рассматривается чистый изгиб композитной пластины под действием сосредоточенной силы и при контакте с жестким штампом. Предполагается, что для пластины выполняются гипотезы Кирхгофа и в области пластины существует нейтральная плоскость, в которой отсутствуют деформации. В разделе 4.1 выписан закон Гука для многослойной композитной пластины с заданными углами армирования каждого слоя и известным положением нейтральной поверхности. С помощью вариационного принципа Лагранжа составлен функционал упругой энергии

$$J(w) = \iint\limits_{\Omega} \left( \int\limits_{0}^{h} \Phi \, dx_3 - qw \right) dx_1 dx_2 - \int\limits_{\Gamma} \left( \left( Q + \frac{\partial M_{\tau}}{\partial \tau} \right) w + M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds, \tag{20}$$

где  $\Phi = \frac{1}{2}(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12})$  – потенциал напряжений,  $\Omega$  – двумерная область с границей  $\Gamma$  занятая нижней стороной пластины,  $q(x_1,x_2)$  – поперечная нагрузка,  $Q(x_1,x_2)$ ,  $M_n(x_1,x_2)$  и  $M_{\tau}(x_1,x_2)$  – поперечное усилие, нормальный и касательный изгибающий момент на краях,  $\partial/\partial n$  – оператор производной по направлению внешней нормали к границе,  $\partial/\partial \tau$  – оператор производной по направлению касательной к границе, ds – элемент дуги с главными краевыми условиями в виде уравнений

$$w = w_0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \gamma_0(x_1, x_2),$$
 (21)

которые задают прогиб и угол поворота на границе. В результате варьирования функционала (20) получено следующее дифференциальное уравнение для прогиба, обобщающее уравнение Софи Жермен в классической теории пластин:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + \left(2D_{12} + F_{12}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 2F_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 2F_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} = q.$$

В разделе 4.2 с помощью теоремы Лакса-Мильграмма показано существование и единственность минимума функционала (20). Для численного решения применялся метод конечных элементов. В качестве конечного элемента был выбран треугольный элемент Белла класса  $C^1$  с 18-тью степенями свободы. В области  $\Omega$  строится нерегулярная треугольная сетка и вводится вектор обобщенных координат W размерностью 6n, где n – число узлов сетки. Координатами этого вектора служат узловые значения прогиба и его производных первого и второго порядка. Функционал J(w) представим в виде суммы интегралов по всем треугольникам сетки:

$$J(W) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} \iint_{\Omega_{l}} (W^{l})^{T} D_{l}^{T} K D_{l} W^{l} - Q^{T} W dx_{1} dx_{2},$$

где  $\Omega_l$  — область l-го конечного элемента,  $W^l$  — локальный вектор обобщенных координат, K — матрица изгибных жесткостей,  $D_l$  — матрица дифференцирования, Q — глобальный вектор обобщенных сил, верхний индекс T означает транспонирование. Глобальная матрица жесткости C составляется путем сложения в определенных позициях элементов локальных матриц жесткости  $C_l = D_l^T K D_l$ . В результате получим функционал:

$$J(W) = \frac{1}{2} W^T C W - Q W ,$$

минимальное значение которого определяется системой уравнений, служащей для вычисления прогибов:

$$\frac{\partial J}{\partial W} \equiv C W - Q = 0. \tag{22}$$

В разделе 4.3 приведены расчеты изгиба двухслойной пластины из углепластика с объемным содержанием армирующего углеграфитового волокна 50%, размером  $100 \times 100$  мм, с толщиной слоев 2.5 мм. Пластина жестко закреплена по двум боковым сторонам, противоположным по направлению оси  $x_1$ . На пластину действует поперечная нагрузка.

Чтобы показать необходимость учета разного сопротивления материала растяжению и сжатию, были проведены расчеты, в которых параметры упругости композита при сжатии считались равными параметрам упругости при растяжении. Максимальный прогиб при расчете без учета разномодульности равен  $5.91\,\mathrm{mm}$ , что составляет приблизительно  $62\,\%$  от максимального прогиба с учетом разномодульности, равного  $9.54\,\mathrm{mm}$ .

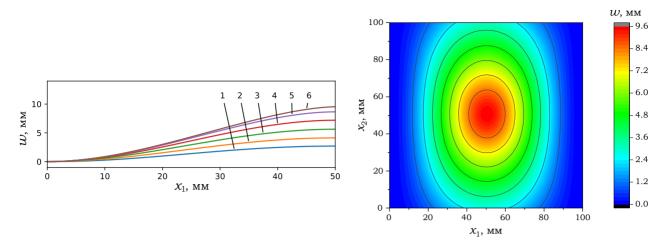


Рис. 7: Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев  $(90^{\circ}, 0^{\circ})$ 

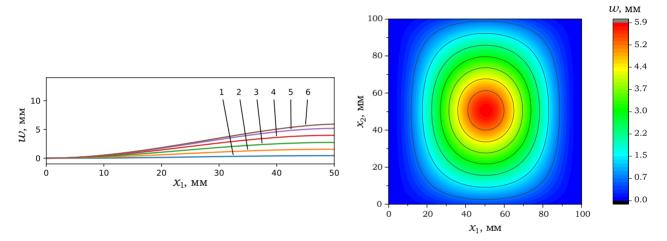


Рис. 8: Прогиб двухслойной пластины (90°, 0°) без учета разномодульности

В разделе 4.4 рассмотрен изгиб пластины жестким штампом. Контакт со штампом описан в с помощью ограничения в виде неравенства

$$w(x_1, x_2) \ge \varphi(x_1, x_2) \tag{23}$$

для всей области  $\Omega$ . Для нахождения минимума функционала с заданными ограничениями применен метод множителей Лагранжа. Для множителей Лагранжа введем вектор  $\Lambda$ , а для функции определяющей, форму штампа вектор —  $\Phi$  размерностей n, где значения компонентов вектора  $\Phi$  равны значениям в узлах сетки функции  $\phi$ . Построим Лагранжиан  $L(w,\lambda)$  в виде суммы интегралов по всем треугольникам сетки:

$$L(W, \Lambda) = \Lambda_0 \sum_{l=1}^{m} \iint_{\Omega_l} (W^l)^T D_l^T K D_l W^l - Q^T W + \Lambda^T (\Phi - W) dx_1 dx_2,$$

где  $\Omega_l$  — область l-го конечного элемента,  $W^l$  — локальный вектор обобщенных координат, K — матрица изгибных жесткостей,  $D_l$  — матрица дифференцирования, Q — глобальный вектор обобщенных сил, где верхний индекс T означает транспонирование. Глобальная матрица жесткости C представима в виде суммы локальных матриц жесткости  $C_l = D_l^T K D_l$ . В результате получим функционал:

$$L(W, \Lambda) = \Lambda_0 W^T C W - Q W + \Lambda (\Phi - W).$$

Поскольку  $L(W,\Lambda)$  является квадратичным функционалом по W, а матрица C обладает диагональным преобладанием и является положительно определенной, то согласно теореме Куна-Таккера для того, чтобы  $W^*$  являлся минимумом J(W), необходимо, чтобы для неотрицательных множителей  $\Lambda$  выполнялись условия дополняющей нежесткости и стационарности. Для выполнения строгого неравенства  $\Lambda_0 > 0$  достаточно выполнения условия Слейтера: должен существовать  $\tilde{W}$ , что  $\Phi - \tilde{W} < 0$ . Введем следующие требования для функции  $\varphi \colon \varphi \in H^2(\Omega)$ ,  $\exists c \colon w_0 \ge \varphi + c$ . Если выбрать  $\tilde{W} = w_0$  на границе  $\Gamma$  и  $\tilde{w} = \varphi + c$  в области  $\Omega$ , то условие Слейтера выполняется. Для определенности возьмем  $\lambda_0 = 1$ . При выполнении условия Слейтера, пара  $w^*, \lambda^*$  удовлетворяет всем перечисленным ограничением тогда и только тогда, когда является седловой точкой Лагранжиана  $L(w,\lambda)$ . Для нахождения седловой точки применялся алгоритм Удзавы.

В разделе 4.5 представлены расчеты изгиба двухслойных композитных пластин жестким штампом. Проведены вычисления для различных форм штампа. Для того чтобы показать важность учета разного сопротивления материала растяжению и сжатию, была проведена серия вычислительных экспериментов, в которых параметры упругости композита при сжатии считались равными параметрам упругости при растяжении. Показано сравнение линий уровня прогиба при расчетах с учетом разномодульности и без учета. В случае неучета, пластина считается более жесткой и форма прогиба от воздействия штампа меняется.

Показано влияние направления армирования на прогиб пластины. Рассматривались пластины с углами армирования слоев  $(0^{\circ}, 90^{\circ})$  и  $(90^{\circ}, 0^{\circ})$  жестко закрепленные во двум противоположным боковым сторонам. На графиках прогиба можно заметить, что величина прогиба на свободной части границы значительно больше в случае закрепления пластины в направлении, перпендикулярном направлению армирования растягиваемого слоя.

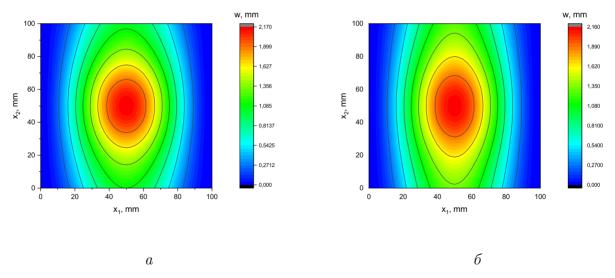


Рис. 9: Линии уровня прогиба без учета (а) и при учете (б) разномодульности

В пятой главе рассматривается напряженно-деформированное состояние композитной пластины под действием произвольной системы сил, при котором деформация представляет собой совокупность деформации срединной поверхности и деформаций, возникающих в следствие изгиба пластины. В рассматриваемой постановке отсутствует предположение о существовании нейтральной поверхности, что позволяет описывать пластины под действием более сложных систем нагружения и не ограничивает класс задач.

В разделе 5.1 получен нелинейный функционал упругой энергии с использованием проектора, учитывающий различное сопротивление композита растяжению и сжатию.

Поскольку не предполагалось наличие нейтральной поверхности в пластине, рассматривалась совокупность деформаций срединной поверхности пластины и деформаций, возникающих вследствие изгиба. Тогда вектор перемещений задается определяется образом:

$$u_1 = u(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = v(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w(x_1, x_2),$$

где  $u(x_1, x_2)$ ,  $v(x_1, x_2)$ ,  $w(x_1, x_2)$  – функции, определяющие перемещение срединной плоскости. А компоненты тензора малых деформаций принимают вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \,, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \,, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \,.$$

Воспользовавшись определяющим уравнением композитного материала в общем виде и подставив в него выражения для напряжений и деформаций, получим следующие формулы для связи напряжений и деформаций в отдельном слое армированном под углом  $\alpha$ :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \left( R^{-\alpha} \right) \begin{pmatrix} \frac{E_1(\varepsilon_{11}^{\alpha} + \nu_2 \varepsilon_{22}^{\alpha})}{1 - \nu_1 \nu_2} + b(\varepsilon_{11}^{\alpha} - \Pi_{11}^{\alpha}) \\ \frac{E_2(\varepsilon_{22}^{\alpha} + + \nu_1 \varepsilon_{11}^{\alpha} +)}{1 - \nu_1 \nu_2} \\ \frac{2G \varepsilon_{12}^{\alpha}}{1 - \nu_1 \nu_2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = (R^{-\alpha}) \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{11}^{\alpha} - \pi_{11}}{E1} - \nu_2 \frac{\sigma_{22}^{\alpha}}{E_2} \\ \frac{\sigma_{22}^{\alpha}}{E_2} - \nu_1 \frac{\sigma_{11}^{\alpha} - \pi_{11}^{\alpha}}{E_1} \\ \frac{\sigma_{12}^{\alpha}}{2G} \end{pmatrix},$$

где

$$(R^{\alpha}) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ -\frac{\sin 2\alpha}{2} & \frac{\sin 2\alpha}{2} & \cos 2\alpha \end{pmatrix},$$

а также соответствующий потенциал напряжений:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} \left( E_1 \varepsilon_{11}^2 + (\nu_1 E_2 + \nu_2 E_1) \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + E_2 \varepsilon_{22}^2 \right) + 2G \varepsilon_{12}^2 + \frac{b}{2} (\varepsilon_{11} - \Pi_{11})^2.$$

С помощью вариационного метода Лагранжа получен функционал упругой энергии

$$\iint_{\Omega} \left( \int_{-h/2}^{h/2} \Phi \, dx_3 - \vec{q} \vec{u} \right) dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left( \vec{Q} \vec{u} + M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds, \tag{24}$$

где  $\Omega$  – двумерная область с границей  $\Gamma$  занятая нижней стороной пластины,  $\vec{u}$  – вектор перемещений,  $\vec{q}(x_1,x_2)$  – распределенная нагрузка,  $\vec{Q}(x_1,x_2)$  – усилие на границе пластины,  $M_n(x_1,x_2)$  – нормальный изгибающий момент на краях,  $\partial/\partial n$  – оператор производной по направлению внешней нормали к границе, ds – элемент дуги со следующими главными краевыми условиями:

$$u = u_0(x_1, x_2), \quad v = v_0(x_1, x_2), \quad w = w_0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \gamma_0(x_1, x_2),$$
 (25)

которые задают перемещения срединной поверхности пластины и углы поворота на границе.

Воспользуемся методом начальных напряжений и заменим определяющее уравнение итерационной формулой:

$$\sigma^k = (a+b) : \varepsilon^k - \Delta \sigma^{k-1}, \quad \Delta \sigma^{k-1} = b : \Pi(\varepsilon^{k-1}),$$

на первом шаге которой тензор  $\Delta \sigma^0$  считается тождественно равным нулю.

На k-ом шаге алгоритма задача сводится к минимизации следующего интегрального функционала:

$$\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left( \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon : (a+b) : \varepsilon - b : \Pi\left(\varepsilon^{k-1}\right) : \varepsilon \, dx_3 - 2\vec{q}\vec{u} \right) dx_1 \, dx_2 - \int_{\Gamma} \left( \vec{Q}\vec{u} + M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds.$$

Для дальнейшего перехода к методу конечных элементов обозначим матрицу a+b как K и запишем функционал в перемещениях:

$$J(\hat{u}) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left( \int_{-h/2}^{h/2} \hat{u}^T S^T K S \hat{u} - b \Pi \left( S \hat{u}^{k-1} \right) S \hat{u} dx_3 - 2\vec{q} \hat{u} \right) dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left( \vec{Q} \hat{u} + M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds, \quad (26)$$

где  $\hat{u} = (u, v, w)$  – вектор перемещений срединной поверхности, S – дифференциальный оператор, связывающий перемещения и деформации, равный

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & -x_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & -x_3 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} & -x_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Такое представление является абстрактным, поскольку применение оператора S к матрице жесткости некорректно, но оно удобно для дальнейшего перехода к разностным операторам, получаемым с помощью метода конечных элементов.

Для численного решения применялся метод конечных элементов. В качестве конечного элемента применяется треугольный элемент с 24-мя степенями свободы, тремя узлами и следующими величинами заданными в узлах:  $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ .

Построим нерегулярную треугольную сетку в области  $\Omega$ . Для искомых вводится вектор обобщенных координат U размерности 8n, где n – число узлов сетки. Перейдем к дискретному аналогу функционала энергии и представим интеграл по области  $\Omega$  в виде суммы интегралов по всем треугольникам сетки:

$$J(U) = \sum_{l=1}^{m} \iint_{\Omega_{l}} \int_{-h/2}^{h/2} (U_{l}^{k})^{T} S^{T} K S U_{l}^{k} - b \Pi(S U_{l}^{k-1}) S U_{l}^{k} dx_{3} - q_{l} U_{l}^{k} dx_{1} dx_{2},$$

где  $\Omega_l$  — область l-го конечного элемента,  $U_l$  — локальный вектор обобщенных координат,  $S_l$  — локальная матрица связи перемещений и деформаций, K — матрица упругих постоянных, Q — глобальный вектор обобщенных сил, верхний индекс T означает транспонирование.

Поскольку вычисление оператора проектора зависит от  $x_3$ , матрица жесткости зависит от текущей деформации пластины, поэтому интеграл по толщине пластины также вычисляется численно и в зависимости от того находится каждый слой пластины в состоянии сжатия или растяжения происходит учет дополнительной жесткости с помощью оператора проектора.

Решена задача деформации пластины жестким штампом с использованием описанной в этой главе модели. Воздействие штампа моделируется с помощью ограничения в виде неравенства

$$w(x_1, x_2) \ge \varphi(x_1, x_2),\tag{27}$$

где  $w(x_1, x_2)$  перемещение по оси  $x_3$  срединной поверхности пластины, а функция  $\varphi(x_1, x_2)$  задает форму штампа. Для получения перемещений, решена задача минимизации функционала (24) с главными краевыми условиями (25) и ограничением (27). Для этого применялся метод множителей Лагранжа и выписан Лагранжиан в виде суммы интегралов по элементам сетки:

$$J(U) = \sum_{l=1}^{m} \iint_{\Omega_{l}} \int_{-h/2}^{h/2} \left( (U_{l})^{T} S^{T} K S U_{l} - b \Pi(S U_{l}^{k-1}) S U_{l} \right) dx_{3} - Q_{l} U_{l} + \Lambda^{T} (\Phi_{l} - U_{l}) dx_{1} dx_{2},$$

где  $\Omega_l$  — область l-го конечного элемента,  $U^l$  — локальный вектор обобщенных координат,  $S_l$  — локальная матрица связи перемещений и деформаций, K — матрица упругих постоянных, Q — глобальный вектор обобщенных сил,  $\Lambda$  — вектор множителей Лагранжа,  $\Phi$  — вектор значений функции определяющей форму штампа с элементами  $\Phi_i = \varphi(x_i, y_i)$ , верхний индекс T означает транспонирование.

В **разделе 5.2** рассматривались результаты расчетов для напряженнодеформированного состояния однослойных и двухслойных композитных пластин. Проводилось несколько серий вычислительных экспериментов. При проведении вычислительных экспери-

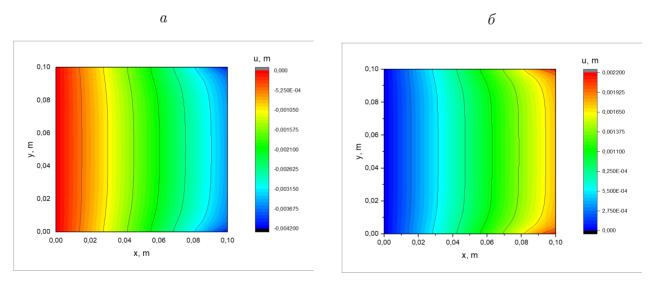


Рис. 10: Перемещение пластины в плоском случае при сжатии (a) и растяжении (b)

ментов были рассмотрены однослойные и двухслойные композитные пластины с толщиной слоев  $h=5\,\mathrm{mm}$ . Параметры упругости были взяты для углепластика с объемным содержанием армирующего углеграфитового волокна

$$E_1^+ = 114, \ E_1^- = 57, \ E_2 = 48, \ G = 3.5 \ \Gamma \Pi a, \ \nu_1 = 0.19, \ \nu_2 = 0.02.$$

В первой серии экспериментов рассматривалось плоское напряженное состояние пластины. На рисунке 10 представлены перемещения по оси x для однослойной пластины размером  $0.1 \times 0.1$ м. с консольным закреплением по левой стороне и нагружением по правой стороне пластины.

Из рисунка видно, что величина максимального перемещения по оси x отличается приблизительно в два раза в зависимости от знака нагружения, что соответствует отношению модулей упругости при растяжении сжатии вдоль волокон.

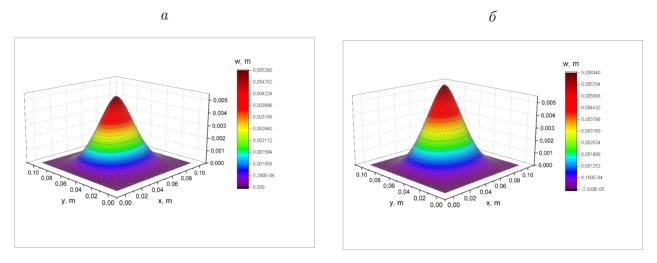


Рис. 11: Прогиб пластины без учета (а) и при учете (б) сдвига нейтральной поверхности

Второй серией вычислительных экспериментов был расчет чистого изгиба консольно закрепленной по контуру квадратной пластины. Расчеты проводились для однослойной пластины толщиной  $5\,\mathrm{mm}$ , размером  $0.1\times0.1\mathrm{m}$ , на центр которой действовала сосредоточенная сила. Проведено сравнение с расчетом, в котором не проводился сдвиг нейтральной поверхности и перерасчет с учетом областей растяжения-сжатия. В этом случае, пластина считалась более жесткой и прогиб уменьшается. Прогиб пластины при неучете изменения областей растяжения-сжатия составил 82%. Результаты вычислительного эксперимента приведены на рисунке 11.

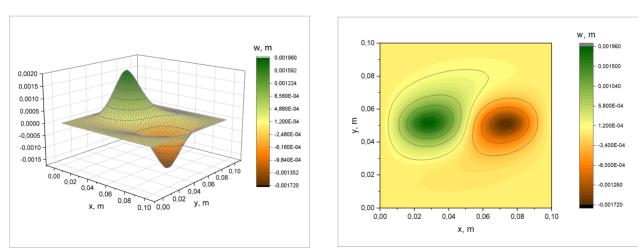


Рис. 12: Прогиб консольно-закрепленной пластины под действием двух сил

Проведено сравнение с решениями полученными с помощью программного комплекса Abaqus. Поскольку в Abaqus отсутствует возможность учета разномодульности, однослойная пластина из второй серии вычислительных экспериментов моделировалась как двухслойный компо-

зит со слоями толщиной  $2.5 \,\mathrm{mm}$ . Величина прогиба составила 76% от прогиба полученного при расчете, учитывающем разномодульность и сдвиг нейтральной поверхности.

Следующей серией вычислительных экспериментов были расчеты для пластин под действием систем сил, при которых положение нейтральной поверхности различно в различных областях пластины или нейтральная поверхность отсутствует. На рисунке 12 показан график и линии уровня прогиба для консольно закрепленной однослойной пластины под действием двух сил. Для моделирования была выбрана однослойная пластина, толщиной 5 мм., размером  $0.1 \times 0.1$ м., равные сосредоточенные силы противоположных знаков действуют на пластину в точках (0.025, 0.05) и (0.075, 0.05) соответственно.

Проведено сравнение с расчетом в программном комплексе Abaqus. Максимальное значение прогиба составило 150%. Такое расхождение объясняется невозможностью учета сдвига нейтральной поверхности и осреднением изгибных жесткостей в модели композита используемой комплексом Abaqus.

Заключение. В рамках работы решены следующие задачи:

- 1. Предложена и реализована методика идентификации (калибровки) модуля Юнга волокнистого композитного материала при сжатии на основе регистрации упругой линии консольно изогнутого тонкого стержня в лабораторных условиях, численного решения задачи сильного изгиба с последующим решением обратной задачи определения цилиндрической жесткости стержня по методу наименьших квадратов. С помощью этой методики показано, что для углепластиков, применяемых в аэрокосмической промышленности, модули Юнга при сжатии и при растяжении могут значительно различаться.
- 2. Построены новые пространственные определяющие уравнения упругого композита, поразному сопротивляющегося растяжению и сжатию, термодинамическая корректность которых обеспечивается наличием выпуклых потенциалов напряжений и деформаций. Разработан итерационный алгоритм для численного решения методом конечных элементов задач деформирования многослойных композитных пластин при плоском напряженном состоянии. В задаче для пластины с круговым вырезом проведено сравнение решений с учетом и без учета разносопротивляемости, в результате которого установлено существенно разное распределение напряжений и деформаций вблизи выреза.
- 3. Разработаны конечноэлементные алгоритмы для расчета изгиба слоистых пластин с учетом различия сопротивлений материала растяжению и сжатию в рамках предположения о существовании нейтральной плоскости и при произвольном распределении внешних сил и моментов сил. Для демонстрации работоспособности алгоритмов выполнены методические расчеты серии задач изгиба пластин под действием системы сосредоточенных сил и контактных задач изгиба пластин штампами произвольной формы.

В дальнейшем предложенные методы возможно развивать с целью учета дополнительных эффектов, возникающих при деформации композита, разработки вязко-упругой модели композитного материала и моделирования механизмов разрушения.

## Список опубликованных работ по теме диссертации

#### Публикации в рецензируемых научных изданиях:

- 1. Петраков И.Е. Контактная задача изгиба многослойной композитной пластины с учётом различных модулей упругости при растяжении и сжатии / И.Е. Петраков // Сибирский журнал индустриальной математики. − 2022. − Т. 25, №4. − С. 153-163.
- Petrakov I.E., Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Analysis of bending of composite plates with account for the difference in resistance to tension and compression / I.E. Petrakov, V.M. Sadovskii, O.V. Sadovskaya // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2021.
   Vol. 62. – No 5. – P. 851-860.
- 3. Annin B.D., Sadovskii V.M., Petrakov I.E., Vlasov A.Yu. Strong Bending of a Beam from a Fibrous Composite, Differently Resistant to Tension and Compression / B.D. Annin, V.M. Sadovskii, I.E. Petrakov, A.Yu. Vlasov // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. − 2019. − Vol. 12. − №5. − P. 533-542.
- 4. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Petrakov I.E. On the theory of constitutive equations for composites with different resistance in compression and tension / V.M. Sadovskii, O.V. Sadovskaya, I.E. Petrakov // Composite Structures. 2021. Vol. 268. P. 113921.
- 5. Petrakov I.E. Modeling the bending of a multilayer composite plate with a rigid stamp / I.E. Petrakov // AIP Conference Proceedings. 2022. Vol. 2522. P. 080004.
- 6. Petrakov I.E., Sadovskii V.M. Mathematical modeling of plane stress state of a multilayer fibrous composite, differently resistant to tension and compression / I.E. Petrakov, V.M. Sadovskii // AIP Conference Proceedings: Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: 12th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. Albena: American Institute of Physics Inc., 2020. P. 090003.
- Petrakov I.E., Sadovskii V.M. Identification of the elastic modules of a fibrous composite by solving inverse problems / I. E. Petrakov, V. M. Sadovskii // AIP Conference Proceedings: Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: 11th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. – Albena: American Institute of Physics Inc., 2019. – P. 090004.

#### Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ:

1. Петраков И.Е. Расчет напряженно-деформированного состояния композитной пластины с учетом разномодульности / 18.08.2022 / Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022665584.