

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный
центр Дальневосточного отделения Российской академии наук



На правах рукописи

Цой Георгий Ильич

**Модифицированные методы двойственности для решения
вариационных и квазивариационных неравенств
механики**

Специальность 05.13.18 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Намм Роберт Викторович

Хабаровск — 2019

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Решение полукоэрцитивного квазивариационного неравенства Синьорини	13
1.1 Краевая и вариационная постановки задачи	13
1.2 Метод последовательных приближений	15
1.3 Классический и модифицированный функционалы Лагранжа	16
1.4 Алгоритм поиска седловой точки	18
1.5 Сглаживание вспомогательного функционала	19
1.6 Конечно-элементная реализация алгоритма	21
1.7 Численное решение квазивариационного неравенства Синьорини	28
Глава 2. Модифицированная схема двойственности для решения задачи о равновесии упругого тела с трещиной	34
2.1 Постановка задачи с трещиной внутри упругого тела	34
2.2 Постановка задачи с трещиной, выходящей на внешнюю границу	37
2.3 Общая схема двойственности	37
2.4 Численное решение задачи методом конечных элементов	45
2.5 Решение задачи о равновесии 3D упругого тела с плоской трещиной	55
2.5.1 Постановка задачи	56
2.5.2 Классическая и модифицированная схемы двойственности	58
2.5.3 Численные эксперименты	62
Глава 3. Решение контактной задачи теории упругости с отслоившимся жёстким включением	71
3.1 Постановка задачи	71
3.2 Метод решения	74
3.3 Численное решение задачи	76
Заключение	80

	Стр.
Список сокращений и условных обозначений	82
Список литературы	83
Список рисунков	94
Список таблиц	95
Приложение А. Программный код	96

Введение

Задачи механики контактного взаимодействия упругих тел часто возникают в инженерной практике и представляют большой интерес как для специалистов, занимающихся теоретическими исследованиями этих задач, так и для прикладников, интересующихся внедрением полученных результатов в практику. Как правило, задачи такого типа допускают три эквивалентные математические постановки: краевая задача для дифференциальных уравнений в частных производных, задача минимизации выпуклого функционала потенциальной энергии на выпуклом замкнутом множестве, вариационное неравенство. При постановке задачи в вариационном виде вводится понятие обобщённого или слабого решения, которое позволяет смягчить ограничение на гладкость искомого решения.

Теория вариационных неравенств сформировалась во второй половине XX века. Одной из первых задач, сводящихся к вариационному неравенству, была задача Синьорини о контакте упругого тела с жёстким основанием. Данная задача была впервые подробно изучена в работе Фикеры Г. [1], в которой были сформулированы основы теории вариационных неравенств. Далее исследования вариационных неравенств были продолжены в трудах Стампакьи Г., Лионса Ж.Л. и их учеников [2–8].

В настоящее время данная теория находится в стадии активного развития и представляет огромный интерес как для математиков-механиков, так и для экономистов. Например, при исследовании и моделировании равновесных задач экономики и исследовании операций. Среди отечественных учёных, внёсших вклад в развитие данного направления, следует отметить следующих исследователей: Мосолова П.П. и Мясникова В.П. [9], Бердичевского В.Л. [10], Уральцеву Н.Н. [11], Коннова И.В. [12], Хлуднева А.М. и Ковтуненко В.А. [13], Хлуднева А.М. [14], Рудого Е.М. [15; 16], Вихтенко Э.М. и Намма Р.В. [17–20], Чеботарева А.Ю. [21], Лапина А.В. и Игнатьеву М.А. [22], Бадриева И.Б., Бандерова В.В. и Задворнова О.А. [23; 24], Аннина Б.Д., Садовского В.М., Черепанова Г.П. [25; 26] и многих других.

Всё больший интерес в наше время представляют нелинейные краевые задачи, вариационная постановка которых заключается в нахождении минимума выпуклого функционала на замкнутом выпуклом подмножестве исходного

гильбертова пространства. В зависимости от определения допустимого множества вариационные постановки могут быть задачами как на условный, так и безусловный экстремум. В последние десятилетия интенсивно развиваются вариационные подходы для такого рода задач, в частности, как задача фильтрации [3; 27–29], задача о движении вязкопластичной среды Мосолова и Мясникова [30; 31], контактные задачи теории упругости [8; 14–20; 32–34], задача Синьорини [4–6; 35], задача об упругопластическом кручении стержня [2; 25; 26; 29], задача о препятствии [4], задачи теории пластичности [34] и другие.

Задачу, сводящуюся к решению квазивариационного неравенства, впервые рассмотрели Бенсусан А. и Лионс Ж.Л. в [36]. Это была эволюционная задача, связанная с теорией управления. Бенсусан А., Гурса М., Лионс Ж.Л. в [37] рассмотрели соответствующую стационарную задачу. Они ввели понятие ”квазивариационного неравенства” и доказали первый результат о существовании решения. Соответствующий результат о единственности был доказан Лаешом Т.В. в [38]. Применение и методы решения квазивариационных неравенств можно найти в работах [4; 5; 23; 39–41]. Они появляются во многих областях механики и экономики, поэтому исследование и разработка методов их решения является актуальной и важной. Характерной особенностью квазивариационных неравенств, вследствие которой для их исследования пришлось создавать особые методы, является то, что их решения принадлежат подмножествам, границы которых зависят от самого решения.

В данной работе проводится исследование и решение вариационных и квазивариационных неравенств механики, соответствующих контактной задаче теории упругости с трением между упругим телом и абсолютно твёрдой опорой [42], задаче теории упругости с трещиной с условиями непроникания берегов трещины друг в друга [43] и задаче о равновесии упругого тела с отслоившимся жёстким включением [44]. В задаче Синьорини с трением, заданным по закону Кулона, используется метод последовательных приближений для нахождения неподвижной точки оператора отображения. Причём в работе не доказывается сходимости к неподвижной точке, а каждый итерационный шаг определяется как решение задачи Синьорини с заданным трением.

Для анализа и исследования вариационных постановок используется функциональные пространства С.Л. Соболева, изложение теории которых можно найти в работах [45–49]. Для решения вариационных неравенств эффективно применяется аппарат математического программирования и выпуклого

анализа, развитый в работах Гроссмана К. и Каплана А.А. [50], Нурминского Е.А. [51], Васильева Ф.П. [52; 53], Пшеничного Б.Н. и Данилина Ю.М. [54], Мину М. [55], Рокафеллара Р. [56], Поляка Б.Т. [57], Экланда И. и Темама Р. [29] и во многих других.

Для исследования поставленных задач в работе был применён двойственный подход. Суть данного подхода заключается в том, что исходная задача условной минимизации заменяется задачей поиска седловой точки функции Лагранжа. В работах, указанных в предыдущем абзаце, можно найти подробное описание метода множителей Лагранжа. Отметим только, что функция Лагранжа зависит от переменных исходной и двойственной задач. Причём вектор прямых переменных седловой точки функции Лагранжа совпадает с решением исходной задачи выпуклого программирования. Однако у схемы двойственности, построенной на основе классической функции Лагранжа, есть ряд недостатков, которые осложняют её применение для конструирования вычислительных методов.

В работе используются модифицированные функции Лагранжа, которые не являются линейными относительно двойственной переменной и избавлены от недостатков классического аналога. Впервые термин «модифицированная функция Лагранжа» был представлен в работе [58], а благодаря работам [59] и [60] возник интерес к данным конструкциям. Затем в работах Гольштейна Е.Г. и Третьякова Н.В. [61], Антипина А.С. [62—64], Бертсекаса Д. [65], Ижуткина В.С. и Петропавловского М.В. [66], Голикова А.А. и Евтушенко Ю.Г. [67], Поляка Б.Т. и Третьякова Н.В. [68], Рокафеллара Р.Т. [69—71], Попова Л.Д. [72] исследовалось применение данных конструкций к конечномерным задачам выпуклого и линейного программирования. В настоящее время развиваются модифицированные схемы двойственности для решения вариационных задач, в которых для исходной задачи условной минимизации строится модифицированная функция Лагранжа. Данный подход применяется в работах [9; 17—20; 73].

При решении полукоэрцитивных вариационных неравенств возникает проблема нетривиальности ядра квадратичной формы функционала задачи, что влечёт за собой проблему со сходимостью численных алгоритмов, поэтому в данной работе применяется итеративная прох-регуляризация. Как правило, методы регуляризации используются для решения задач минимизации, в которых неточно задано допустимое множество или целевая функция; применение мето-

дов регуляризации можно найти в работах Васильева Ф.П. и Антипина А.С. [74—77].

Впервые итерационный процесс, заменяющий задачу конечномерной оптимизации последовательностью задач минимизации исходной целевой функции с проксимальной регуляризирующей добавкой, был использован в работах [78; 79]. Главное преимущество прох-регуляризации, в отличие от регуляризации по Тихонову [80], заключается в том, что параметр регуляризации не нужно устремлять к нулю, достаточно взять его равным положительной постоянной. В работах Рокафеллара Р.Т. [70] и Антипина А.С. [62; 63] был предложен и исследован метод, который основан на введении регуляризирующей добавки в итерационный процесс поиска седловых точек модифицированной функции Лагранжа. В последнее время итеративная прох-регуляризация используется для решения большого класса некорректных задач; к примеру, использование методов с прох-регуляризацией можно найти в работах Рокафеллара Р.Т. [81], Гречка Г.Ю. [82], Попова Л.Д. [83], Стукалова А.С. [84], Gugat M. [85], Hare W.L. [86], Вихтенко Э.М. и Намма Р.В. [18] и других.

Для численного решения и исследования вариационных задач в работе используется метод конечных элементов. Данный метод впервые был исследован в середине XX века в работах Куранта Р. [87], и позже был рассмотрен инженерами [88; 89]. Метод получил название в работе Клафа Р.У. [90]. В работах Зенкевича О. [91], Марчука Г.И. и Агошкова В.Я. [92] можно найти подробное описание и применение метода конечных элементов, вариационно-разностных методов. В работе [93] приводится исследование вариационных неравенств с применением данного метода, на примере задачи об упругопластическом кручении, задачи с препятствиями, задачи о пластине, задачи о минимальной поверхности. В работе Гловински Р., Лионса Ж.Л. и Трёмольера Р. [6] подробно исследуется применение метода конечных элементов для решения вариационных неравенств и исследуются методы решения получаемых после аппроксимации конечномерных задач.

В настоящее время в исследованиях, относящихся к методам двойственности для решения вариационных и квазивариационных задач механики, как правило, используется классический подход. Часто классические схемы двойственности используются без строгих математических обоснований сходимости. В работе будет показано, что, вообще говоря, в полукоэрцитивном случае применение схем двойственности с классическим функционалом Лагранжа не

представляется возможным, а при решении коэрцитивных задач классический метод уступает по вычислительной эффективности модифицированному подходу.

Целью данной работы является обоснование и применение модифицированных методов двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики, соответствующих контактной задаче теории упругости с трением между упругим телом и абсолютно твердой опорой, задаче теории упругости с трещиной с условиями непроникания берегов трещины друг в друга и задаче о равновесии упругого тела с отслоившимся жестким включением.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Применить метод последовательных приближений для решения квазивариационного неравенства Синьорини, соответствующего контактной задаче теории упругости с трением между упругим телом и абсолютно твердой опорой.
2. Построить и обосновать метод, основанный на комбинировании алгоритма Удзавы и итеративной прох-регуляризации модифицированного функционала Лагранжа для решения вспомогательных полукоэрцитивных задач, возникающих в методе последовательных приближений.
3. Построить и обосновать схему двойственности, основанную на модифицированном функционале Лагранжа, для решения 2D и 3D задач теории упругости с внутренней трещиной и трещиной, выходящей на внешнюю границу. Доказать соотношение двойственности.
4. Исследовать и реализовать метод решения задачи теории упругости с отслоившимся жестким включением, основанный на модифицированном функционале Лагранжа.
5. Привести результаты численного решения поставленных задач с использованием метода конечных элементов. Проанализировать полученные результаты.

Научная новизна:

1. Для решения полукоэрцитивных вспомогательных задач построен и обоснован метод, основанный на комбинировании алгоритма Удзавы и итеративной прох-регуляризации модифицированного функционала Лагранжа.

2. Разработан алгоритм на основе метода конечных элементов и программное обеспечение для численного решения квазивариационного неравенства Синьорини. Проведены численные эксперименты, подтверждающие эффективность модифицированного метода двойственности.
3. Построена и обоснована модифицированная схема двойственности для решения 2D и 3D задач теории упругости с трещиной. Доказано соотношение двойственности. Получены численные результаты с применением метода конечных элементов.
4. Для решения задачи с отслоившимся жёстким включением исследован и применён метод решения с параметром управления, стремящимся к нулю.

Практическая значимость работы заключается в создании эффективных методов решения вариационных и квазивариационных неравенств механики. Исследования носят фундаментальный характер, но построенные в результате алгоритмы реализуются в виде комплексов программ и могут быть использованы при решении прикладных задач.

Методология и методы исследования. В работе использованы методы функционального анализа [94], теория пространств С.Л. Соболева [49; 94], вариационные принципы механики сплошной среды [7; 95], теория вариационных неравенств [3; 6; 7] и выпуклого анализа [56], методы вычислительной математики [47; 48; 53; 54] и математического программирования [55], общая теория нелинейных краевых задач [2; 7].

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построение и исследование новых методов двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики с нелинейными краевыми условиями.
2. Обоснование теоретической и численной сходимости к седловой точке в методах двойственности, основанных на модифицированных функционалах Лагранжа.
3. Модифицированные методы двойственности для решения квазивариационных неравенств механики, многомерных задач теории упругости с трещиной и условиями взаимного непроникания берегов трещины, задач с объёмными жёсткими включениями.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью постановок рассматриваемых задач и математических методов их исследова-

ния, а также вычислительными экспериментами и сравнением полученных результатов при решении задач различными методами. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на: международная научная конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Владивосток, 2016); международная школа-конференция «Соболевские чтения» (Новосибирск, 2016); научно-практическая конференция «Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления» (Хабаровск, 2017, 2019); II, III Дальневосточная школа-семинар «Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций» (Комсомольск-на-Амуре, 2017, 2018); 5-я Дальневосточная конференция с международным участием «Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твёрдого тела и прогрессивные технологии в машиностроении» (Комсомольск-на-Амуре, 2018); 9-я и 10-я международные научные конференции «Optimization and Applications» (Petrovac, Montenegro, 2018, 2019); международная научная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций» (Екатеринбург, 2019); семинары Вычислительного центра ДВО РАН.

Личный вклад. Автор принимал активное участие в разработке и обосновании модифицированных методов двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики, а также в реализации алгоритмов и компьютерных программ. Все численные расчёты проводились автором лично. Автор принимал активное участие в анализе и интерпретации полученных результатов, оформлении публикаций в виде научных статей и докладов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 6 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 5 — в тезисах докладов. Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [96; 97].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 108 страниц, включая 26 рисунков и 6 таблиц. Список литературы содержит 120 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даётся общее представление о задачах теории вариационных неравенств, их приложении для задач механики и методах решения. Приводится описание методов двойственности, основанных на модифицированном функционале Лагранжа, указываются их преимущества по сравнению с классическими аналогами. Приводится обзор научной литературы по наиболее значимым работам, посвящённым исследованию теории вариационных неравенств и модифицированных методов двойственности. Обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель работы и ставятся задачи для её достижения. Излагается научная новизна, а также теоретическая и практическая значимость представляемой работы. Кратко описывается структура и объём работы, ее содержание.

В первой главе рассматривается решение квазивариационного неравенства Синьорини, описывающего задачу о контакте между упругим телом и абсолютно твёрдой опорой с трением, заданным по закону Кулона. В начале главы приводится общее описание данной задачи и её краевая постановка. Главной сложностью при построении и исследовании методов решения квазивариационного неравенства Синьорини является зависимость силы трения от искомого решения. Для нахождения неподвижной точки используется метод последовательных приближений. Даётся вариационная формулировка вспомогательной задачи с заданным трением, возникающей на шаге метода последовательных приближений. Вводится описание классических и модифицированных функционалов Лагранжа, определение седловой точки и условие её единственности. Приводится алгоритм Удзавы отыскания седловой точки модифицированного функционала Лагранжа. На ряду с этим используется итеративная прох-регуляризация, обеспечивающая сильную выпуклость минимизируемых функционалов. В конце главы даётся описание алгоритма численного решения задачи с помощью метода конечных элементов. Приводятся результаты численного счёта.

Вторая глава посвящена решению задачи о равновесии упругого тела с трещиной. Классический подход к описанию данных задач заключается в том, что на берегах трещины, как правило, задаются нулевые поверхностные силы.

Это не исключает возможность проникания берегов трещины друг в друга, что с точки зрения механики является неестественным. Поэтому рассматривается нелинейная модель, в которой на берегах трещины ставятся условия вида неравенств, обеспечивающие условие взаимного непроникания берегов трещины. Приводится краевая постановка 2D задачи с трещиной внутри упругого тела и задачи с трещиной, выходящей на внешнюю границу под ненулевым углом. Строится и обосновывается общая схема двойственности. Доказывается основное равенство двойственности. Для решения задачи минимизации кусочно-квадратичного функционала, получаемого после дискретизации задачи с помощью МКЭ, используются метод покоординатного спуска и обобщенный метод Ньютона. Приводятся результаты численного счёта и сравнение методов. На примере 3D упругой задачи с трещиной приводится сравнение предложенного модифицированного метода двойственности с его классическим аналогом, показывается зависимость количества итераций алгоритма Удзавы от шага сдвига по двойственной переменной.

Третья глава посвящена решению контактной задачи теории упругости с отслоившимся жёстким включением. В начале главы приводится общее описание данной задачи и её краевая постановка. Приводится метод решения с параметром λ , стремящимся к нулю, позволяющий рассматривать задачу с отслоившимся жёстким включением как предельную для семейства задач о равновесии упругих тел с трещиной. Для задачи с фиксированным λ применяется схема двойственности, исследованная во второй главе. Приводятся результаты численного решения задачи с использованием обобщённого метода Ньютона.

В заключении диссертации формулируются основные результаты работы, намечаются направления дальнейших исследований.

В приложении приводится исходный код программы для решения задачи с трещиной с использованием библиотеки cuBLAS для вычислений на GPU.

Глава 1. Решение полукоэрцитивного квазивариационного неравенства Синьорини

В данной главе рассматривается квазивариационное неравенство Синьорини, соответствующее контактной задаче теории упругости с трением между упругим телом Ω и абсолютно твёрдой опорой [5; 39]. Для решения данной задачи применяется метод последовательных приближений. На каждом внешнем шаге данного метода возникает вспомогательная контактная задача с заданным трением. Для решения полукоэрцитивной вспомогательной задачи рассматривается итерационный метод Удзавы, основанный на модифицированном функционале Лагранжа, исследованный в работе [17].

Для преодоления проблемы вырожденности (полукоэрцитивности) в работе [18] исследуется метод итеративной проксимальной регуляризации модифицированного функционала Лагранжа.

Также рассматривается конечно-элементное решение задачи. На численном примере исследуется сходимость метода последовательных приближений.

1.1 Краевая и вариационная постановки задачи

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с достаточно регулярной границей Γ , $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ – непустые открытые попарно непересекающиеся подмножества Γ (рисунок 1.1). Рассмотрим контактную задачу теории упругости с трением между упругим телом Ω и абсолютно твёрдой опорой [98].

Для вектора перемещений $v = (v_1, v_2)$ определим тензор деформаций:

$$\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2,$$

и тензор напряжений¹

$$\sigma_{ij}(v) = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(v),$$

¹В работе используется правило Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам.

где $C = \{c_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$ - тензор модулей упругости, обладающий обычными свойствами симметрии и положительной определённости:

$$c_{ijkl} = c_{jilm} = c_{klij}, \quad c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega),$$

$$c_{ijkl} \xi_{km} \xi_{ij} \geq c_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

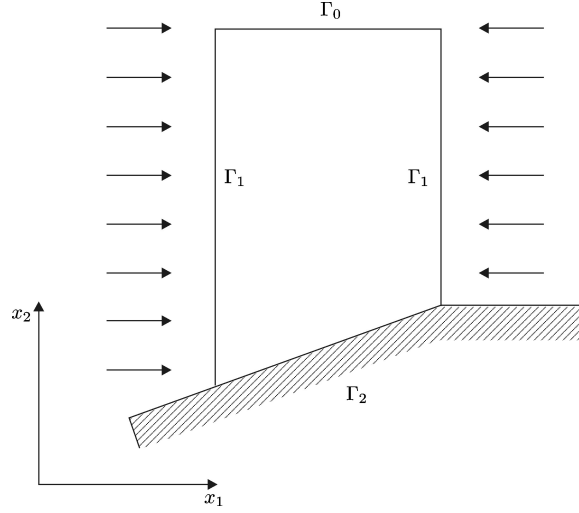


Рисунок 1.1 — Контакт между упругим телом и абсолютно твёрдой опорой

Пусть заданы $f = (f_1, f_2)$ - объёмная сила, $p = (p_1, p_2)$ - боковое усилие, F - коэффициент трения, $F \geq 0$ на Γ_2 . Тогда краевая постановка данной задачи будет следующей [5]:

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2,$$

$$u_n = 0, \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{на } \Gamma_0,$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \quad \text{на } \Gamma_1, \quad i = 1, 2.$$
(1.1)

На части границы Γ_2 , где упругое тело контактирует с абсолютно твёрдой опорой ставятся краевые условия вида:

$$u_n \leq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad u_n \sigma_n = 0 \quad \text{на } \Gamma_2,$$

$$|\sigma_\tau| \leq F |\sigma_n|, \quad (F |\sigma_n| - \sigma_\tau) u_\tau = 0, \quad u_\tau \sigma_\tau \leq 0 \quad \text{на } \Gamma_2.$$
(1.2)

Здесь $n = (n_1, n_2)$ - единичный вектор внешней нормали границы Γ , u_n и u_τ - нормальная и тангенциальная составляющие вектора перемещений u , $\sigma_i = \sigma_{ij} n_j$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$, $\sigma_\tau = \sigma - \sigma_n n$.

В данной нелинейной краевой задаче (1.1), (1.2) сила трения $F |\sigma_n(u)|$ зависит от искомого решения u , что является главной сложностью при построении и исследовании алгоритмов численного решения.

Зададим два множества:

$$V = \{v \in [H^1(\Omega)]^2 : v_n \equiv v_2 = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

$$K = \{v \in V : v_n \leq 0 \text{ на } \Gamma_2\}.$$

Пусть $f \in [L_2(\Omega)]^2$, $p \in [L_2(\Gamma_1)]^2$. В предположении, что решение $u \in K$ краевой задачи (1.1), (1.2) существует и принадлежит классу $[H^2(\Omega)]^2$, можно показать, что u удовлетворяет квазивариационному неравенству: для $\forall v \in K$ [5; 39]

$$a(u, v - u) + \int_{\Gamma_2} F |\sigma_n(u)| (|v_\tau| - |u_\tau|) d\Gamma \geq \int_{\Omega} f \cdot (v - u) d\Omega + \int_{\Gamma_1} p \cdot (v - u) d\Gamma, \quad (1.3)$$

где $a(u, v)$ – билинейная форма, определённая на $[H^1(\Omega)]^2 \times [H^1(\Omega)]^2$ следующим образом:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega. \quad (1.4)$$

Квазивариационные неравенства появляются во многих областях механики и экономики, поэтому исследование и разработка методов их решения является актуальной и важной [4; 39–41; 99].

1.2 Метод последовательных приближений

Как было сказано ранее для нахождения решения u удовлетворяющего неравенству (1.3) был использован метод последовательных приближений, исследованный в работах [5; 39]. Он состоит из следующих пунктов:

1. Задаём стартовую силу трения $g^0 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, $g^0 \geq 0$;
2. Находим решение u^k вариационного неравенства

$$a(u^k, v - u^k) + \int_{\Gamma_2} g^k (|v_\tau| - |u_\tau^k|) d\Gamma \geq$$

$$\geq \int_{\Omega} f \cdot (v - u^k) d\Omega + \int_{\Gamma_1} p \cdot (v - u^k) d\Gamma \quad \forall v \in K; \quad (1.5)$$

3. Вычисляем следующее приближение $g^{k+1} = F |\sigma_n(u^k)|$.

Метод выглядит естественным, но вопрос о сходимости вырабатываемой последовательности u^k к решению полукоэрцитивного квазивариационного неравенства (1.3) остаётся открытым. В коэрцитивном случае удаётся доказать только существование решения при малых значениях коэффициента трения F [5].

Вариационное неравенство (1.5) называется задачей с заданным трением [5]. Она эквивалентна следующей задаче минимизации недифференцируемого функционала:

$$\begin{cases} I(v) = \frac{1}{2}a(v,v) + \int_{\Gamma_2} g^k |v_\tau| d\Gamma - \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_1} p \cdot v d\Gamma \rightarrow \min, \\ v \in K. \end{cases} \quad (1.6)$$

Минимизируемый функционал не является сильно выпуклым в $[H^1(\Omega)]^2$, поэтому вспомогательная задача является полукоэрцитивной. Однако в работе [17] показано, что из условия

$$\int_{\Omega} f_1 d\Omega + \int_{\Gamma_1} p_1 d\Gamma > 0$$

следует

$$I(v) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \|v\|_{[H^1(\Omega)]^2} \rightarrow \infty \quad \forall v \in K,$$

т.е. имеет место коэрцитивность функционала на множестве K , что означает существование решения v^* задачи (1.6).

1.3 Классический и модифицированный функционалы Лагранжа

Для решения (1.6) определим на множестве $V \times L_2(\Gamma_2)$ классический функционал Лагранжа

$$L(v,l) = I(v) + \int_{\Gamma_2} lv_n d\Gamma.$$

Обозначим $(L_2(\Gamma_2))^+$ как множество неотрицательных функций на Γ_2 , интегрируемых со своим квадратом.

Определение 1. Пара $(v^*, l^*) \in V \times (L_2(\Gamma_2))^+$ называется седловой точкой функционала Лагранжа $L(v, l)$, если выполнено двустороннее неравенство

$$L(v^*, l) \leq L(v^*, l^*) \leq L(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in V \times (L_2(\Gamma_2))^+.$$

В работе [17] доказывається, что если решение \bar{u} вспомогательной задачи с заданным трением (1.6) принадлежит пространству $[H^2(\Omega)]^2$ и $\text{meas}\{x \in \Gamma_2 : \sigma_n(\bar{u}) < 0\} > 0$, то \bar{u} является искомым решением задачи (1.6), а вектор $(\bar{u}, -\sigma_n(\bar{u}))$ – единственной седловой точкой функционала Лагранжа $L(v, l)$.

Поэтому заменяя вспомогательную задачу (1.6) задачей поиска седловой точки функционала Лагранжа, мы находим решение u^k и значение нормального напряжения в зоне контакта в явном виде. Этот факт позволяет нам на последующем шаге метода последовательных приближений вычислить новое значение силы трения, что является удобным при реализации численных алгоритмов.

Однако применение алгоритмов поиска седловой точки с классическим функционалом Лагранжа $L(v, l)$ в полуконвективном случае не приводит к сходимости к седловой точке итерационного процесса. Это объясняется тем, что сходимость по прямой переменной v имеет место только при условии положительной определённости квадратичной формы функционала экстремальной задачи. При этом шаг сдвига по двойственной переменной l должен быть согласован с константой положительной определённости формы [6; 100]. Однако в полуконвективной задаче (1.6) квадратичная форма (1.4) является неотрицательно определённой [5].

Для устранения данного затруднения в работах [101; 102] был рассмотрен модифицированный функционал Лагранжа $M(v, l)$ на пространстве $V \times L_2(\Gamma_2)$ следующего вида:

$$M(v, l) = I(v) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_2} \left\{ [(l + rv_n)^+]^2 - l^2 \right\} d\Gamma,$$

где $(l + rv_n)^+ \equiv \max\{0, l + rv_n\}$, $r > 0 - \text{const}$.

Определение 2. Пара $(v^*, l^*) \in V \times L_2(\Gamma_2)$ называется седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа $M(v, l)$, если выполнено двустороннее неравенство

$$M(v^*, l) \leq M(v^*, l^*) \leq M(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in V \times L_2(\Gamma_2).$$

Известно, что множества седловых точек классического и модифицированного функционалов Лагранжа совпадают [17; 19; 20].

1.4 Алгоритм поиска седловой точки

Для отыскания седловой точки модифицированного функционала $M(v, l)$ применим метод, основанный на комбинировании алгоритма Удзавы и итеративной проксимальной регуляризации [18].

Алгоритм вырабатывает последовательность $\{(u^m, l^m)\}$ по следующему правилу.

1. Зададим начальное приближение $(u^0, l^0) \in V \times H^{1/2}(\Gamma_2)$.
2. Найдем u^{m+1} из критерия

$$\|u^{m+1} - \bar{u}^{m+1}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq \delta_m, \quad (1.7)$$

где

$$\bar{u}^{m+1} = \arg \min_{v \in V} \left\{ M(v, l^m) + \frac{1}{2} \|v - u^m\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2 \right\}, \quad (1.8)$$

$$\delta_m > 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m < \infty. \quad (1.9)$$

3. Вычислим следующее приближение двойственной переменной

$$l^{m+1} = (l^m + r u_n^{m+1})^+. \quad (1.10)$$

Критерий (1.7) означает, что вместо точного решения \bar{u}^{m+1} берётся его приближенное значение u^{m+1} , получаемое при численном решении задачи (1.8) методом конечных элементов.

Регуляризирующая добавка $\frac{1}{2} \|v - u^m\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2$ обеспечивает коэрцитивность в V минимизируемых функционалов (1.8), откуда вытекает единственность решения вспомогательных задач с заданным трением.

Отметим, что в работе [103] построен и исследован широкий класс устойчивых итеративных методов решения полукоэрцитивных вариационных неравенств, включающий в себя и метод итеративной проксимальной регуляризации.

Для данного метода справедлива следующая теорема.

Теорема 1. [18] Пусть последовательность \bar{u}^m , полученная по методу (1.7)-(1.10), удовлетворяет условиям $\bar{u}^m \in [H^2(\Omega)]^2$ и $\|\bar{u}^m\|_{[H^2(\Omega)]^2} \leq C$, $C > 0 - \text{const}$.

Тогда последовательность (u^m, l^m) сходится в $V \times L_2(\Gamma_2)$ к седловой точке $(\bar{u}, -\sigma_n(\bar{u}))$ функционала Лагранжа $M(v, l)$ при любом выборе начальной точки $l^0 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$ и любом фиксированном параметре $r > 0$.

1.5 Сглаживание вспомогательного функционала

Приближенное решение задачи (1.6) осложняется тем, что минимизируемый функционал не является дифференцируемым по переменной v . Для преодоления этого затруднения в этом пункте рассматривается модифицированный функционал Лагранжа с двумя множителями, позволяющий сгладить функционал задачи. Это позволяет перейти в итерационном процессе к задаче безусловной минимизации дифференцируемого функционала. Перепишем задачу (1.6) следующим образом:

$$\begin{cases} I(v, w) = \frac{1}{2}a(v, v) - \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega - \int_{\Gamma_1} p \cdot v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} g^k |v_{\tau} - w| \, d\Gamma \rightarrow \min, \\ v \in K, w \in L_2(\Gamma_2), w = 0 \text{ на } \Gamma_2. \end{cases} \quad (1.11)$$

На пространстве $V \times [L_2(\Gamma_2)]^3$ определим модифицированный функционал Лагранжа:

$$M(v, w, l_1, l_2) = I(v, w) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_2} \left\{ [(l_1 + rv_n)^+]^2 - l_1^2 \right\} d\Gamma + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_2} \left\{ l_2 w + \frac{r}{2} w^2 \right\} d\Gamma.$$

Тогда на шаге (1.8) алгоритма Удзавы мы получаем следующую задачу минимизации

$$\min_{v, w} \left\{ M(v, w, l_1^m, l_2^m) + \frac{1}{2} \|v - u^m\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2 \right\}.$$

Распишем данное выражение:

$$\begin{aligned} \min_{v, w} M(v, w, l_1^m, l_2^m) = \min_{v, w} & \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega - \int_{\Gamma_1} p \cdot v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (g^k |v_{\tau} - w| + \right. \\ & \left. + l_2^m w + \frac{r}{2} w^2) \, d\Gamma + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_2} \left\{ [(l_1^m + rv_n)^+]^2 - (l_1^m)^2 \right\} d\Gamma \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \min_v \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega - \int_{\Gamma_1} p \cdot v \, d\Gamma + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_2} \left\{ [(l_1^m + rv_n)^+]^2 - (l_1^m)^2 \right\} d\Gamma + \right. \\
&\quad \left. + \inf_w \int_{\Gamma_2} \left(g^k |v_\tau - w| + l_2^m w + \frac{r}{2} w^2 \right) d\Gamma \right\} = \\
&= \min_v \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega - \int_{\Gamma_1} p \cdot v \, d\Gamma + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_2} \left\{ [(l_1^m + rv_n)^+]^2 - (l_1^m)^2 \right\} d\Gamma + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Gamma_2} \inf_w \left(g^k |v_\tau - w| + l_2^m w + \frac{r}{2} w^2 \right) d\Gamma \right\}.
\end{aligned}$$

Функция $F(v_\tau)$ вида

$$F(v_\tau) = \inf_w \left(g^k |v_\tau - w| + l_2^m w + \frac{r}{2} w^2 \right)$$

является непрерывно дифференцируемой выпуклой функция скалярного аргумента. Она имеет явное представление

$$F(v_\tau) = \begin{cases} -g^k v_\tau - \frac{(g^k + l_2^m)^2}{2r}, & v_\tau < -\frac{g^k + l_2^m}{r}, \\ l_2^m v_\tau + \frac{r}{2} v_\tau^2, & -\frac{g^k + l_2^m}{r} \leq v_\tau \leq \frac{g^k - l_2^m}{r}, \\ g^k v_\tau - \frac{(g^k - l_2^m)^2}{2r}, & v_\tau > \frac{g^k - l_2^m}{r}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Отсюда получаем

$$F'(v_\tau) = \begin{cases} -g^k, & v_\tau < -\frac{g^k + l_2^m}{r}, \\ l_2^m + rv_\tau, & -\frac{g^k + l_2^m}{r} \leq v_\tau \leq \frac{g^k - l_2^m}{r}, \\ g^k, & v_\tau > \frac{g^k - l_2^m}{r}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Легко видеть, что $|F'(v_\tau)| \leq g^k$ для любых v_τ .

Таким образом, мы получаем задачу минимизации непрерывно дифференцируемого функционала

$$\min_v \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega - \int_{\Gamma_1} p \cdot v \, d\Gamma + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_2} \left\{ [(l_1^m + rv_n)^+]^2 - (l_1^m)^2 \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_2} F(v_\tau) \, d\Gamma + \frac{1}{2} \|v - u^m\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2 \right\}.$$

и вычисляем

$$\bar{w}^{m+1} = \begin{cases} -\frac{g^k + l_2^m}{r}, & \bar{u}_\tau^{m+1} < -\frac{g^k + l_2^m}{r}, \\ \bar{u}_\tau^{m+1}, & -\frac{g^k + l_2^m}{r} \leq \bar{u}_\tau^{m+1} \leq \frac{g^k - l_2^m}{r}, \\ \frac{g^k - l_2^m}{r}, & \bar{u}_\tau^{m+1} > \frac{g^k - l_2^m}{r}. \end{cases} \quad (1.14)$$

На третьем шаге алгоритма Удзавы корректируем вторую двойственную переменную l_2 по формуле

$$l_2^{m+1} = l_2^m + rw^{m+1}.$$

1.6 Конечно-элементная реализация алгоритма

Для решения задачи (1.5) применим метод поиска седловой точки (1.7) – (1.10). Реализуем данный алгоритм с помощью МКЭ на последовательности триангуляций F_{h_m} (h_m – параметр разбиения) области Ω , таких, что узлы предыдущей триангуляции включаются в узлы следующей. Если $\delta_m = h_m$, то для сходимости алгоритма (1.7) – (1.10) достаточно выполнения условия $\sum_{m=1}^{\infty} h_m < \infty$. Область Ω выбиралась в виде трапеции (см. рис. 1.1) с размерами 2, 1, 1, $\sqrt{2}$. Разбиение производилось путём построения регулярных сеток на сторонах трапеции с шагом h_m . В результате получаем, что $\Omega = \bigcup_1^{N_t} T_k$, где N_t – количество треугольных конечных элементов T_k .

Пронумеруем узлы триангуляции сверху вниз от 1 до N (N – количество узлов триангуляции). Для каждого узла i определена базисная функция $\varphi_i(x,y)$, такая что $\varphi_i(x_i,y_i) = 1$, для соседних узлов $j = i_k$ ($k = \overline{1,6}$) $\varphi_i(x_j,y_j) = 0$ (рисунок 1.2). В качестве базисных функций φ_i возьмём кусочно-линейные функции [91; 92].

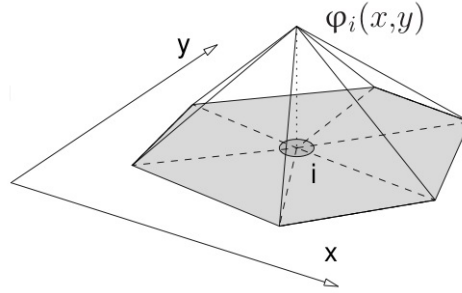


Рисунок 1.2 – Вид базисной функции $\varphi_i(x,y)$

Введем следующие обозначения: $P_{h_m} = \{D_1, \dots, D_N\}$ – множество узлов триангуляции ($D_i = D_i(x_i, y_i)$), $I_{h_m} = \{M_1, \dots, M_R\}$ – множество узлов триангуляции на Γ_2 , V_{h_m} – линейная оболочка соответствующих базисных функций $\varphi_i(x,y)$, $u^m = (u_1^m, u_2^m)$ – конечно-элементное решение:

$$u_i^m(x,y) = \sum_{j=1}^N t_j^{(i)} \varphi_j(x,y), \text{ для } i = 1,2 \text{ и } t_j^{(i)} \in R.$$

Отметим, что так как Ω – многоугольник, обеспечено вложение $V_{h_m} \subset V$, $m = 1,2, \dots$. Таким образом заменим задачу (1.8) конечно-элементной задачей:

$$u^{m+1} = \arg \min_{v \in V_{h_m}} \left\{ M(v, l^m) + \frac{1}{2} \|v - u^m\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2 \right\}. \quad (1.15)$$

Предполагаем, что точные решения \bar{u}^m задач (1.8) удовлетворяют условиям теоремы 1. Так как в двумерном случае пространство $[H^2(\Omega)]^2 \subset [C^2(\bar{\Omega})]^2$, то для точного решения \bar{u}^m существует кусочно-линейное восполнение $\bar{u}_I^m = (\bar{u}_1^I, \bar{u}_2^I)$:

$$\bar{u}_i^I(x,y) = \sum_{j=1}^N \bar{u}_i^m(D_j) \varphi_j(x,y), \text{ для } i = 1,2.$$

Задачу минимизации (1.8) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\hat{M}_m(v) = & \frac{1}{2}a(v,v) + \frac{1}{2}\|v\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2 - \int_{\Omega} (f + u^m) \cdot v \, d\Omega - \int_{\Gamma_1} p \cdot v \, d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_2} g^k |v_\tau| \, d\Gamma + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_2} [(l^m + rv_n)^+]^2 \, d\Gamma \rightarrow \min, \quad (1.16) \\
& v \in K.
\end{aligned}$$

Теорема 2. *Предположим, что последовательность $\{\bar{u}^m\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а последовательность $\{l^m\}$ ограничена в $L_2(\Gamma_2)$. Тогда справедлива оценка:*

$$\|u^m - \bar{u}^m\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq Ch_m^{1/2}, \quad C > 0 - const \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

Доказательство. Функционал $\hat{M}_m(v)$ является сильно выпуклым на пространстве V , что гарантирует существование и единственность решения \bar{u}^{m+1} задачи (1.16). В силу того, что $\bar{u}_I^{m+1} \in V_{h_m} \subset V$, то для \bar{u}^{m+1} , \bar{u}_I^{m+1} , u^{m+1} имеет место неравенство

$$\hat{M}_m(u^{m+1}) - \hat{M}_m(\bar{u}^{m+1}) \leq \hat{M}_m(\bar{u}_I^{m+1}) - \hat{M}_m(\bar{u}^{m+1}). \quad (1.18)$$

Оценим снизу левую часть неравенства (1.18). Пусть

$$T_m(v) = \int_{\Omega} (f_i + u_i^m)v_i \, d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i v_i \, d\Gamma.$$

Очевидно, что $T_m(v)$ - линейный непрерывный функционал на V . Имеем

$$\begin{aligned}
\hat{M}_m(u^{m+1}) - \hat{M}_m(\bar{u}^{m+1}) = & a(\bar{u}^{m+1}, u^{m+1} - \bar{u}^{m+1}) + \int_{\Omega} \bar{u}_i^{m+1} (u_i^{m+1} - \bar{u}_i^{m+1}) \, d\Omega - \\
& - T_m(u^{m+1} - \bar{u}^{m+1}) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_2} \{ [(l^m + ru_n^{m+1})^+]^2 - [(l^m + r\bar{u}_n^{m+1})^+]^2 \} \, d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_2} g^k (|u_\tau^{m+1}| - |\bar{u}_\tau^{m+1}|) \, d\Gamma + \frac{1}{2}a(u^{m+1} - \bar{u}^{m+1}, u^{m+1} - \bar{u}^{m+1}) + \\
& + \frac{1}{2}\|u^{m+1} - \bar{u}^{m+1}\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2.
\end{aligned}$$

В свою очередь задача минимизации функционала (1.16) равносильна следующему вариационному неравенству для $\forall v \in V$ [29]:

$$a(\bar{u}^{m+1}, v - \bar{u}^{m+1}) + \int_{\Omega} \bar{u}_i^{m+1} (v_i - \bar{u}_i^{m+1}) d\Omega - T_m(v - \bar{u}^{m+1}) + \\ + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_2} \{ [(l^m + rv_n)^+]^2 - [(l^m + r\bar{u}_n^{m+1})^+]^2 \} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} g^k (|v_\tau| - |\bar{u}_\tau^{m+1}|) d\Gamma \geq 0 .$$

Поэтому [104]

$$\hat{M}_m(u^{m+1}) - \hat{M}_m(\bar{u}^{m+1}) \geq \frac{1}{2} a(u^{m+1} - \bar{u}^{m+1}, u^{m+1} - \bar{u}^{m+1}) + \\ + \frac{1}{2} \|u^{m+1} - \bar{u}^{m+1}\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2 \geq C_1 \|u^{m+1} - \bar{u}^{m+1}\|_{[H^1(\Omega)]^2}^2, \quad C_1 > 0 - \text{const.} \quad (1.19)$$

Теперь оценим правую часть неравенства (1.18). Используя неравенство Гёльдера и предположения теоремы 1, нетрудно показать, что [92]

$$\left| a(\bar{u}^{m+1}, \bar{u}_I^{m+1} - \bar{u}^{m+1}) + \int_{\Omega} \bar{u}_i^{m+1} ((\bar{u}_I^{m+1})_i - \bar{u}_i^{m+1}) d\Omega - T_m(\bar{u}_I^{m+1} - \bar{u}^{m+1}) \right| \leq \\ \leq C_2 h_m, \quad C_2 > 0 - \text{const.}$$

Из вложения $[H^1(\Omega)]^2$ в $[H^{1/2}(\Omega)]^2$ и предположений теоремы 1 вытекает неравенство

$$\left| \int_{\Gamma_2} g^k (|(\bar{u}_I^{m+1})_\tau| - |\bar{u}_\tau^{m+1}|) d\Gamma \right| \leq C_3 h_m, \quad C_3 > 0 - \text{const.}$$

Легко видеть, что

$$\left| a(\bar{u}_I^{m+1} - \bar{u}^{m+1}, \bar{u}_I^{m+1} - \bar{u}^{m+1}) + \|\bar{u}_I^{m+1} - \bar{u}^{m+1}\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2 \right| \leq C_4 h_m, \quad C_4 > 0 - \text{const.}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части неравенства (1.18), опустив при этом константу $\frac{1}{2r}$:

$$\left| \int_{\Gamma_2} \{ [(l^m + r(\bar{u}_I^{m+1})_n)^+]^2 - [(l^m + r\bar{u}_n^{m+1})^+]^2 \} d\Gamma \right| =$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Gamma_2} [(l^m + r(\bar{u}_I^{m+1})_n)^+ - (l^m + r\bar{u}_n^{m+1})^+][(l^m + r(\bar{u}_I^{m+1})_n)^+ + (l^m + r\bar{u}_n^{m+1})^+] d\Gamma \right| \leq \\
& \int_{\Gamma_2} |(l^m + r(\bar{u}_I^{m+1})_n)^+ - (l^m + r\bar{u}_n^{m+1})^+| |(l^m + r(\bar{u}_I^{m+1})_n)^+ + (l^m + r\bar{u}_n^{m+1})^+| d\Gamma \leq \\
& \leq \int_{\Gamma_2} |l^m + r(\bar{u}_I^{m+1})_n - l^m - r\bar{u}_n^{m+1}| |(l^m + r(\bar{u}_I^{m+1})_n)^+ + (l^m + r\bar{u}_n^{m+1})^+| d\Gamma \leq \\
& \leq r \int_{\Gamma_2} |(\bar{u}_I^{m+1})_n - \bar{u}_n^{m+1}| |(l^m + r(\bar{u}_I^{m+1})_n)^+ + (l^m + r\bar{u}_n^{m+1})^+| d\Gamma \leq C_5 h_m.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из условий теоремы 1 и предположения ограниченности l^m в $L_2(\Gamma_2)$. Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned}
\hat{M}_m(\bar{u}_I^{m+1}) - \hat{M}_m(\bar{u}^{m+1}) &\leq C_6 h_m, \\
C_6 &= C_2 + C_3 + \frac{1}{2}C_4 + \frac{1}{2r}C_5.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

В результате из неравенств (1.19) и (1.20) мы получаем утверждение теоремы. \square

Последовательность конечно-элементных решений $\{u^m\}$ будет сходиться в V к решению вспомогательной задачи (1.6), если $\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m < \infty$ ($\delta_m = h_m$).

Для удобства определим вектор $t = (t_1, t_2, \dots, t_{2N})$, где первые N его компонент $t_j = t_j^{(1)}$, $j = \overline{1, N}$, а последние $t_j = t_{j-N}^{(2)}$, $j = \overline{N+1, 2N}$. Как правило, также используется нумерация компонент вектора t следующего вида: $t_{2j-1} = t_j^{(1)}$, $t_{2j} = t_j^{(2)}$, $j = \overline{1, N}$. Тогда задача минимизации (1.16) сводится к нахождению оптимальных значений t_i . Для этого в работе был применён метод покоординатного спуска.

Пусть матрица жёсткости A и вектор F определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
A &= \left\{ a(\psi_i, \psi_j) + \int_{\Omega} \psi_i \psi_j d\Omega \right\}_{i,j=\overline{1, 2N}}, \\
F &= \left\{ \int_{\Omega} (f + u^m) \psi_i d\Omega + \int_{\Gamma_1} p \psi_i d\Gamma \right\}_{i=\overline{1, 2N}},
\end{aligned}$$

где ψ_i это вектор функции вида

$$\psi_i = \begin{cases} (\varphi_i, 0), & i \leq N, \\ (0, \varphi_{(i-N)}), & i > N. \end{cases}$$

Благодаря тому, что для данной задачи область Ω разбивается с помощью регулярной сетки без сгущений, элементы матрицы жёсткости достаточно легко посчитать аналитически. Во второй главе будет рассмотрен более общий подход, позволяющий построить локальную матрицу жёсткости для произвольного треугольного элемента с использованием функций формы. По сути функция формы для каждого узла треугольного элемента T_k является сужением соответствующей базисной функции на этом конечном элементе.

Таким образом, мы имеем вычислительную формулу для всех узлов, не лежащих на Γ_2 : $D_{(i \bmod N)} \in P_h \setminus I_h$, $i = \overline{1, 2N}$

$$t_i^{s+1} = -\frac{1}{A_{ii}} \left(\sum_{j < i} A_{ij} t_j^{s+1} + \sum_{j > i} A_{ij} t_j^s - F_i \right). \quad (1.21)$$

Рассмотрим далее формулы для узлов $D_{(i \bmod N)} \in I_h$, лежащих на Γ_2 . Для этого перейдём от переменных u_1, u_2 к u_n, u_τ , где α - острый угол области Ω :

$$\begin{cases} u_1 = u_n \cos \alpha + u_\tau \sin \alpha, \\ u_2 = -u_n \sin \alpha + u_\tau \cos \alpha. \end{cases}$$

Сперва получим формулу для вычисления компоненты t_n . Для этого аппроксимируем граничный интеграл на Γ_2 с помощью квадратурной формулы трапеций при $v_n > -\frac{l^m}{r}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_2} \left\{ [(l^m + rv_n)^+]^2 - (l^m)^2 \right\} d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \left(l^m v_n + \frac{r}{2} v_n^2 \right) d\Gamma \approx \\ & \approx \sum_{j=1}^{R-1} \left(l^m(M_j) v_n(M_j) + l^m(M_{j+1}) v_n(M_{j+1}) + \frac{r}{2} (v_n^2(M_j) + v_n^2(M_{j+1})) \right) \frac{|M_j, M_{j+1}|}{2}. \end{aligned}$$

Далее для простоты изложения опускаем оператор \bmod . Пусть $|M_j, M_{j+1}| = H$ для $j = \overline{1, R-1}$, для удобства обозначим через

$$A_n = A_{ii} \cos^2 \alpha + A_{i+N, i+N} \sin^2 \alpha - 2A_{ii+N} \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$A_\tau = A_{ii} \cos \alpha \sin \alpha + A_{ii+N} \cos^2 \alpha - A_{i+N, i} \sin^2 \alpha - A_{i+N, i+N} \cos \alpha \sin \alpha,$$

коэффициенты при t_n и t_τ после замены переменных. Также определим

$$\mathbb{L}(D_i) = \frac{\partial}{\partial t_n} \left(\int_{\Gamma_2} l^m v_n d\Gamma \right) \approx \begin{cases} l^m(D_i)H, & D_i \in \{M_2, \dots, M_{R-1}\}, \\ l^m(D_i)\frac{H}{2}, & D_i \in \{M_1, M_R\}, \end{cases}$$

$$\mathbb{B}(D_i) = \frac{\partial^2}{\partial t_n^2} \left(\int_{\Gamma_2} \frac{r}{2} v_n^2 d\Gamma \right) \approx \begin{cases} rH, & D_i \in \{M_2, \dots, M_{R-1}\}, \\ r\frac{H}{2}, & D_i \in \{M_1, M_R\}, \end{cases}$$

где $t_n = v_n(D_i)$. Выражения $\mathbb{L}(D_i)$, $\mathbb{B}(D_i)$ обозначают соответствующие частные производные от граничных интегралов после аппроксимации.

Таким образом, чтобы найти оптимальное значение t_n , сперва вычисляем

$$\Phi_i = -\frac{1}{A_n} \left(t_\tau^s A_\tau + \sum_{j<i} A_{ij} \cos \alpha t_j^{s+1} + \sum_{\substack{j>i \\ j \neq i+N}} A_{ij} \cos \alpha t_j^s - F_i \cos \alpha - \right. \\ \left. - \sum_{j<i} A_{i+Nj} \sin \alpha t_j^{s+1} - \sum_{\substack{j>i \\ j \neq i+N}} A_{i+Nj} \sin \alpha t_j^s + F_{i+N} \sin \alpha \right) = -\frac{1}{A_n} \omega_i.$$

Здесь через ω_i обозначено выражение внутри скобок. Тогда

$$t_n^{s+1} = \begin{cases} \Phi_i, & \Phi_i \leq -\frac{l^m(D_i)}{r}, \\ -\frac{\omega_i + \mathbb{L}(D_i)}{A_n + \mathbb{B}(D_i)}, & \Phi_i > -\frac{l^m(D_i)}{r}. \end{cases} \quad (1.22)$$

Аналогичным образом находим t_τ на $(i+N)$ -ом шаге метода покоординатного спуска. Распишем вариант без сглаживания функционала. Аппроксимируем

$$\int_{\Gamma_2} g^k |v_\tau| d\Gamma \approx \sum_{j=1}^{R-1} (g^k(M_j) |v_\tau(M_j)| + g^k(M_{j+1}) |v_\tau(M_{j+1})|) \frac{|M_j, M_{j+1}|}{2}.$$

Обозначим

$$A_n^* = A_{ii} \cos \alpha \sin \alpha - A_{ii+N} \sin^2 \alpha + A_{i+N_i} \cos^2 \alpha - A_{i+N_{i+N}} \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$A_\tau^* = A_{ii} \sin^2 \alpha + A_{i+N_{i+N}} \cos^2 \alpha + 2A_{ii+N} \cos \alpha \sin \alpha,$$

коэффициенты при t_n и t_τ и

$$\mathbb{G}(D_i) = \begin{cases} g(D_i)H, & D_i \in \{M_2, \dots, M_{R-1}\}, \\ g(D_i)\frac{H}{2}, & D_i \in \{M_1, M_R\}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \xi_i = & t_n^s A_n^* + \sum_{\substack{j < i+N \\ j \neq i}} A_{ij} \sin \alpha t_j^{s+1} + \sum_{j > i+N} A_{ij} \sin \alpha t_j^s + \sum_{\substack{j < i+N \\ j \neq i}} A_{i+Nj} \cos \alpha t_j^{s+1} + \\ & + \sum_{j > i+N} A_{i+Nj} \cos \alpha t_j^s - F_i \sin \alpha + F_{i+N} \cos \alpha . \end{aligned}$$

Тогда расчетная формула для t_τ можно записать следующим образом

$$t_\tau^{s+1} = \begin{cases} -\frac{\xi_i + \mathbb{G}(D_i)}{A_\tau^*}, & \xi_i < -\mathbb{G}(D_i), \\ -\frac{\xi_i - \mathbb{G}(D_i)}{A_\tau^*}, & \xi_i > \mathbb{G}(D_i), \\ 0, & -\mathbb{G}(D_i) \leq \xi_i \leq \mathbb{G}(D_i). \end{cases} \quad (1.23)$$

Для варианта со сглаживанием можно использовать конечномерные аналоги формул (1.12), (1.14). Вычислив t_n , t_τ переходим обратно к исходным переменным.

Итерации (1.21) – (1.23) для метода покоординатного спуска оканчиваем, как только выполнится критерий

$$\max_i |t_i^{s+1} - t_i^s| < 10^{-10}, \quad i = \overline{1, 2N}.$$

Для алгоритма Удзавы и метода последовательных приближений условие останова имеет следующий вид

$$\max_{i=1, R} |l_i^{m+1} - l_i^m| < 10^{-8}, \quad \max_{i=1, R} |g_i^{k+1} - g_i^k| < 10^{-8}.$$

1.7 Численное решение квазивариационного неравенства Синьорини

В данном пункте представлены результаты численного решения квазивариационного неравенства Синьорини (1.3). Для решения задачи с заданным трением (1.5) применяется алгоритм Удзавы (1.7) – (1.10). Конечно-элементное решение задачи минимизации (1.15) рассмотрено в разделе 1.5.

Расчётная область Ω выбиралась в виде трапеции (рисунок 1.1) со сторонами $2, 1, 1, \sqrt{2}$. Разбиение области Ω проводилось с помощью построения регулярных сеток на сторонах трапеции с шагом h_m .

Решение каждой вспомогательной задачи с заданным трением проводилось на последовательности разбиений области Ω с $h_m = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ (рисунок 1.3). При этом сетка дробилась не на каждом шаге m алгоритма (1.7) – (1.10), а на одной сетке проводилось несколько итераций алгоритма. Следует отметить, что решение, полученное на предыдущей сетке, используется в качестве стартового элемента на следующем шаге.

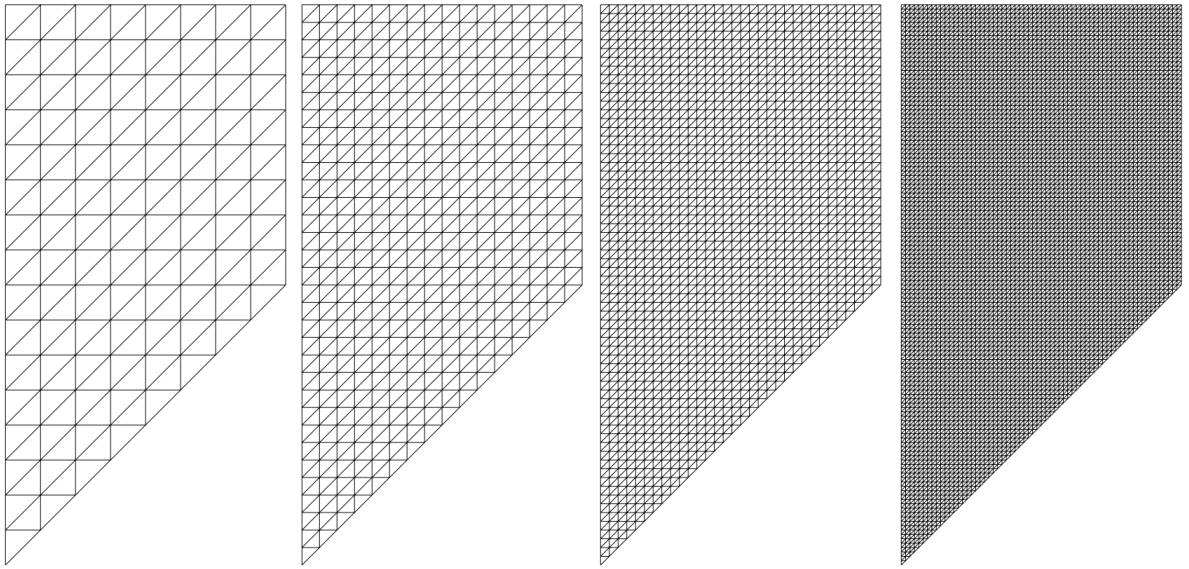


Рисунок 1.3 – Последовательность триангуляций

Значения параметров брались следующими: объёмные силы $f_1 = f_2 = 0$, боковые усилия с левой $p_1|_{\Gamma_1} = 90$ МПа и правой $p_1|_{\Gamma_1} = -100$ МПа сторон, $p_2|_{\Gamma_1} = 0$ МПа, коэффициент трения $F = 0.3$, модуль упругости Юнга $E = 210000$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, константа $r = 10^8$.

Отметим, что задача, рассмотренная в данном разделе, детально исследовалась в работе [5], в которой приводятся результаты численного решения полукоэрцитивного квазивариационного неравенства методом последовательных приближений.

При этом в [5] при решении вспомогательной задачи (1.6) использовалась иная схема двойственности, в которой для исключения недифференцируемости минимизируемого функционала применялась классическая схема двойственности, не обеспечивающая, как известно [6; 100], в полукоэрцитивном случае теоретическую сходимость метода Удзавы.

Расчёты показали, что численный метод решения задачи работает намного эффективней при больших значениях константы r : при увеличении r число итераций (1.10) сильно уменьшается [105]. Этот факт объясняется тем, что компонента u_n прямой переменной близка к нулю. При $r = 10^8$ выполняется 15 внешних итераций метода последовательных приближений. Из таблицы 1 видно, что при решении возникающих вспомогательных задач с заданным трением требуется всего порядка 10 итераций по двойственной переменной. Также видно, что применение сглаживающего метода, описанного в пункте 1.5, не влечёт за собой увеличение количества итераций, причём решения, полученные с помощью разных подходов, совпадают. Применение сглаживания недифференцируемого функционала предпочтительно с теоретической точки зрения, так как позволяет уменьшить погрешность при численном интегрировании с помощью метода трапеций.

Таблица 1 — Количество итераций по прямой и двойственной переменной.

h_m	1/8	1/16	1/32	1/64
без сглаживания				
II Кол-во итераций по t	132	990	4458	16862
II Кол-во итераций по l	5	6	8	10
III Кол-во итераций по t	1034	2430	11164	50426
III Кол-во итераций по l	6	7	10	14
со сглаживанием				
II Кол-во итераций по t	133	985	4465	16860
II Кол-во итераций по l	5	6	8	10
III Кол-во итераций по t	1034	2434	11182	50562
III Кол-во итераций по l	6	7	10	14

На рисунке 1.4 представлены результаты численного решения поставленной задачи, а именно значения функций u_n , u_τ , $|\sigma_n|$ в зоне контакта упругого тела и абсолютно жёсткой опоры. На графиках u_n и $|\sigma_n|$ видно, что в вершине тупого угла происходит отлипание тела от жёсткой опоры. Это следует из того, что $u_n < 0$ и $|\sigma_n| = 0$ в этой точке.

На рисунке 1.5 цветом показаны значения функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ в области Ω .

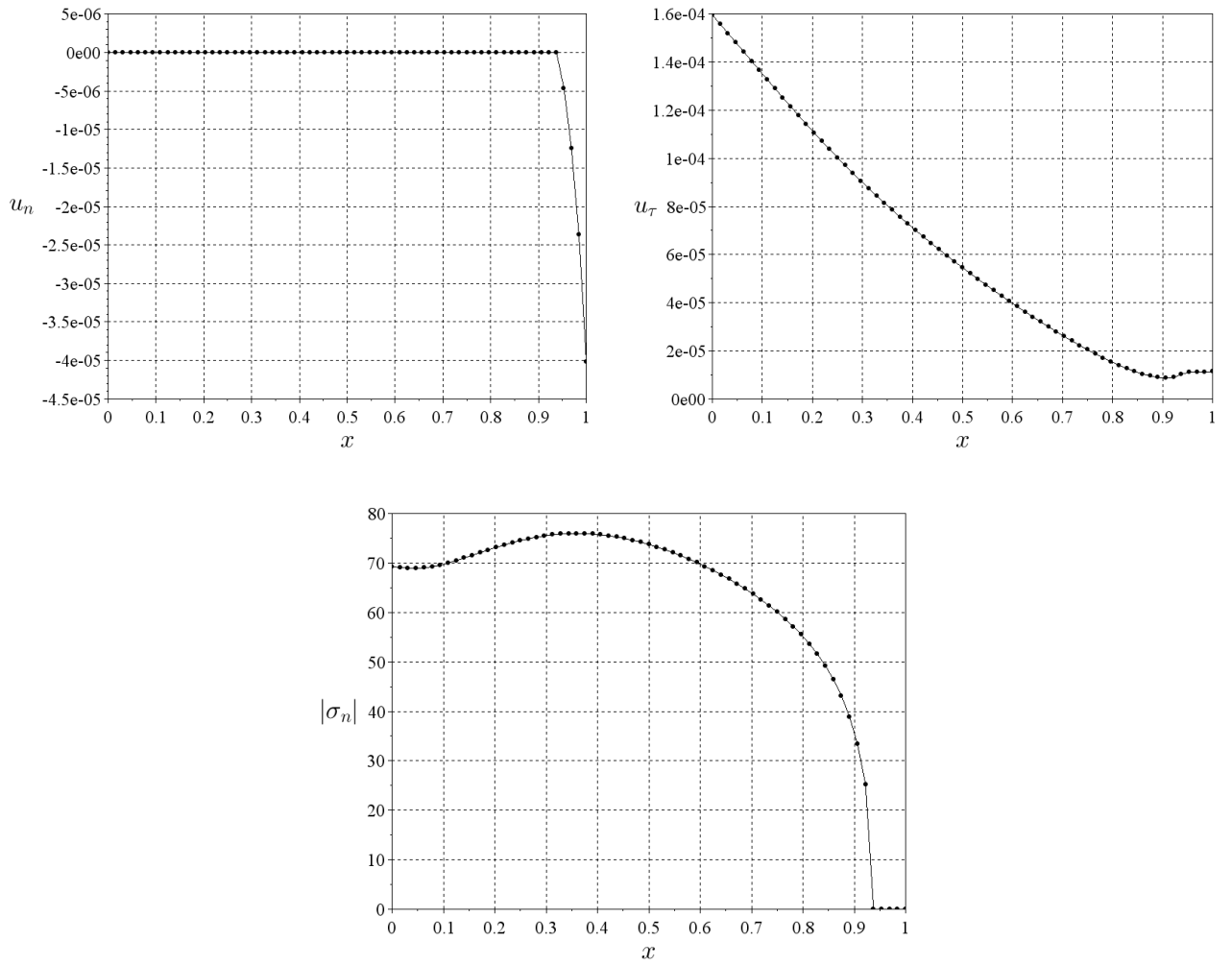


Рисунок 1.4 — Результаты вычислений №1

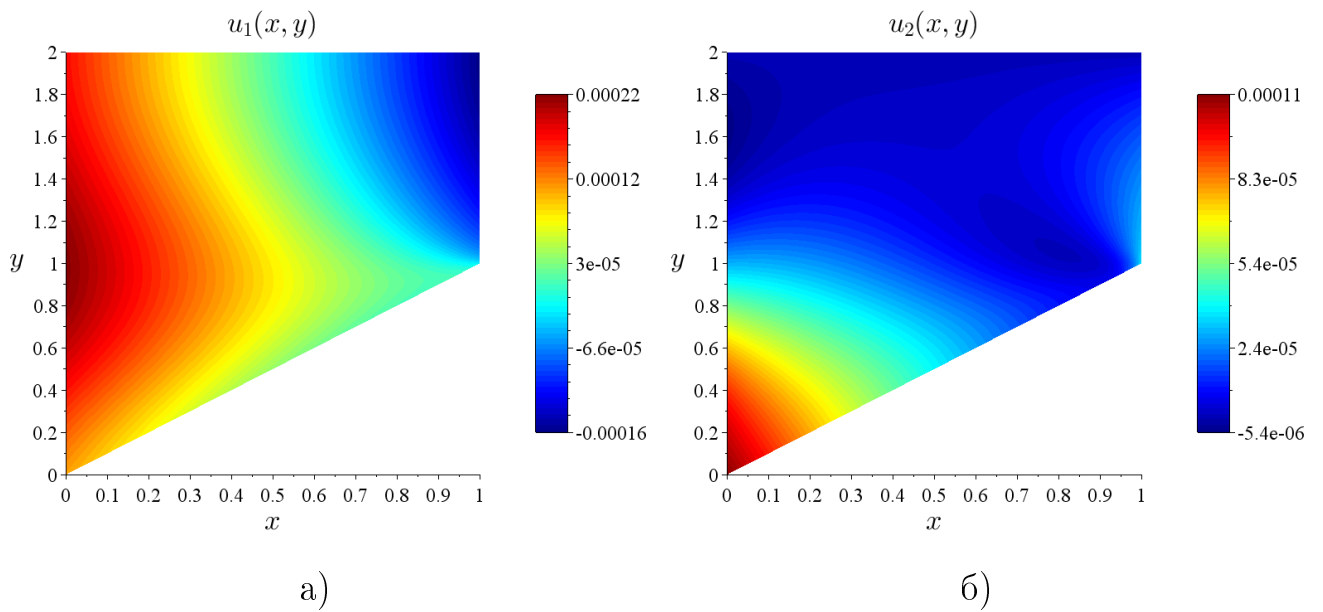


Рисунок 1.5 — Значение функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$

Приведём пример, когда тело Ω слипается с абсолютно твёрдой опорой. Для этого изменим боковые усилия с левой $p_1|_{\Gamma_1} = 100$ МПа и правой $p_1|_{\Gamma_1} = -50$ МПа сторон. Остальные параметры оставим неизменными. Таким образом, мы получим следующие численные результаты (рисунок 1.6).

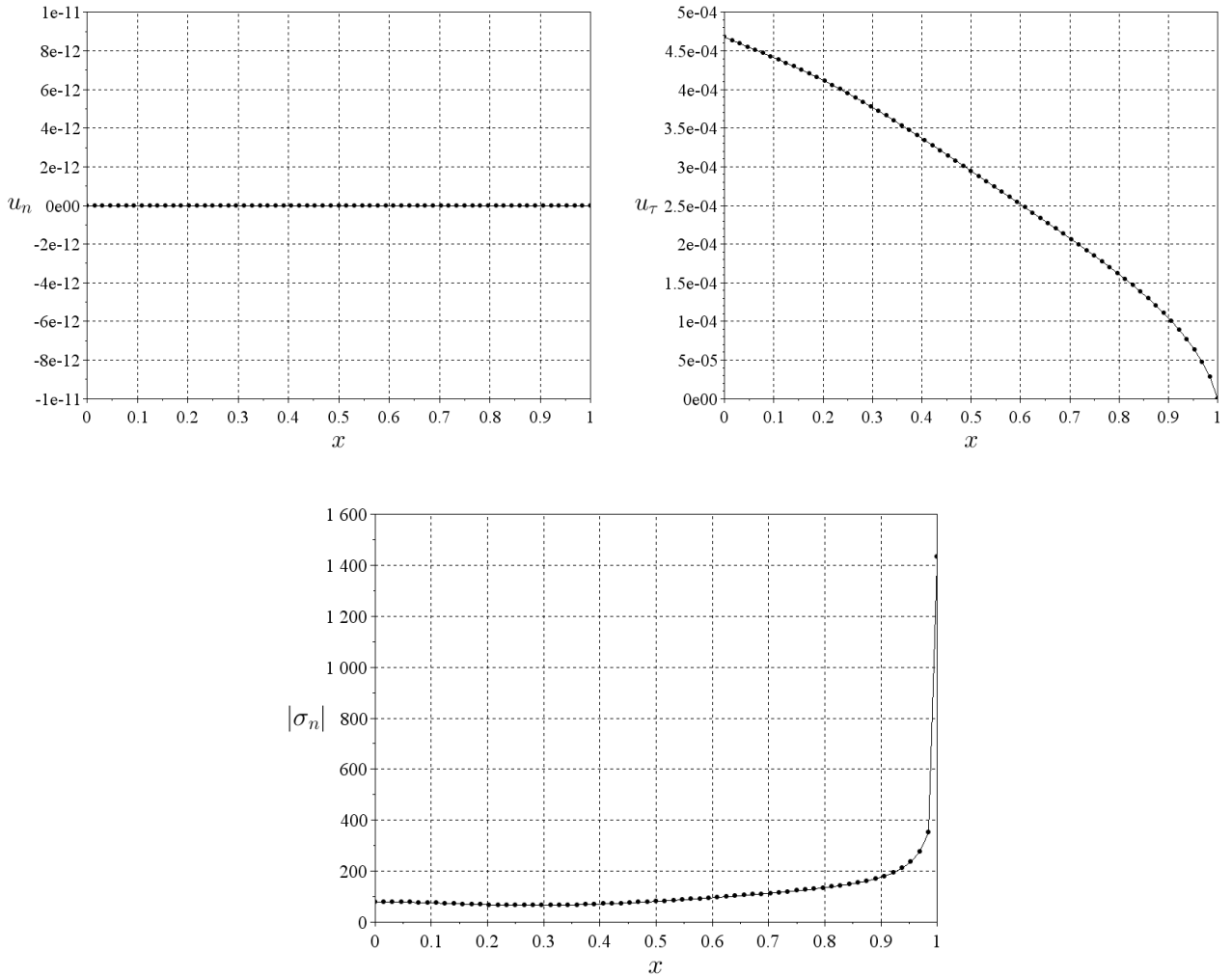


Рисунок 1.6 — Результаты вычислений №2

На графиках видно, что u_n в узлах на границе Γ_2 принимает значение близкое к нулю (меньше чем точность вычислений $\varepsilon = 10^{-10}$), $u_\tau > \varepsilon$, т.е. в зоне контакта происходит сжатие тела Ω . График нормального напряжения показывает, что $|\sigma_n| > 0$ всюду на границе Γ_2 . Это означает, что происходит слипание тела с опорой.

На рисунке 1.7 цветом показаны значения функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ в области Ω .

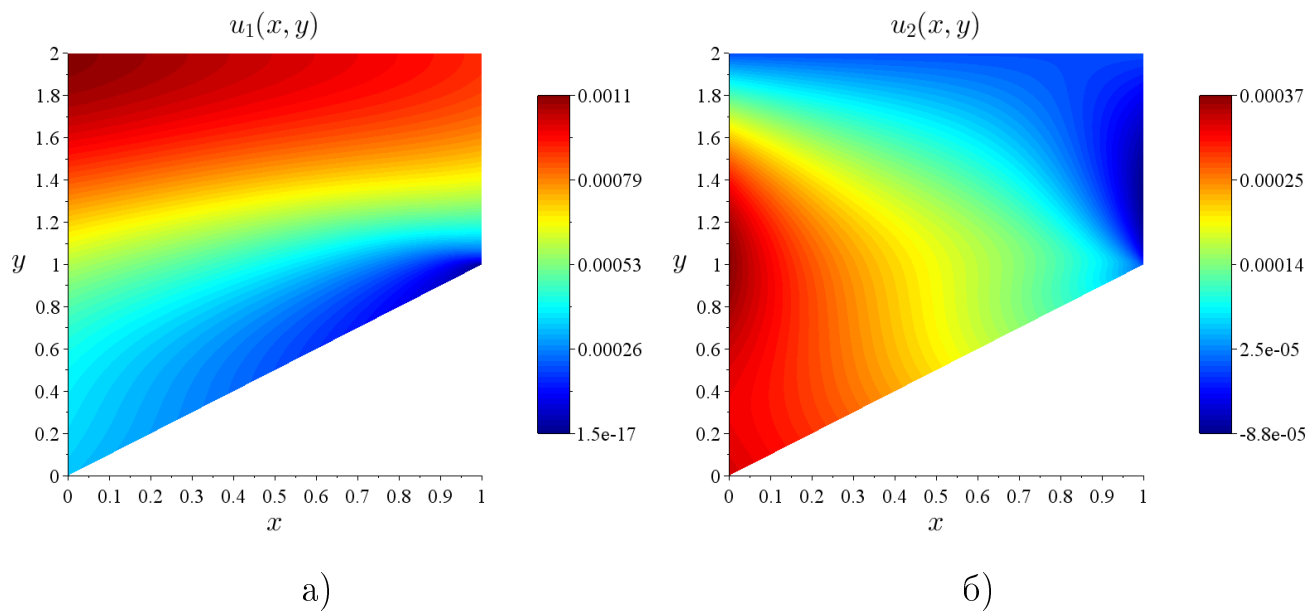


Рисунок 1.7 — Значение функций $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$

Глава 2. Модифицированная схема двойственности для решения задачи о равновесии упругого тела с трещиной

В классических постановках задачи о равновесии упругого тела с трещиной на берегах трещины задаются краевые условия типа равенств [106]. Как правило, эти краевые условия соответствуют нулевым поверхностным силам. Получаемые при этом линейные краевые задачи не исключают возможности проникновения берегов трещины друг в друга, что является неестественным с точки зрения механики. В связи с этим, в работах по теории трещин широкое развитие получили модели с нелинейными краевыми условиями вида неравенств на берегах трещины, обеспечивающие взаимное непроникание берегов друг в друга [14].

Эти модели допускают вариационную постановку в виде минимизации выпуклого функционала потенциальной энергии на замкнутом выпуклом множестве или в виде вариационных неравенств. Особенно актуальной становится разработка эффективных методов приближенного решения указанных вариационных неравенств.

В данной главе для решения задачи теории упругости с трещиной и условиями взаимного непроникания берегов применяется схема двойственности, построенная на основе модифицированных функционалов Лагранжа. Как правило, рассматриваются две основные постановки задачи с трещиной. Задача с трещиной внутри упругого тела и задача с трещиной, выходящей на внешнюю границу. В работе строится и обосновывается общая схема двойственности для данных задач.

2.1 Постановка задачи с трещиной внутри упругого тела

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - ограниченная область с липшицевой границей Γ , и $\gamma \subset \Omega$ - разрез (трещина) внутри Ω . Предполагаем, что $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^- \cup \Gamma_1^*$, где $\Gamma_0, \Gamma_1^+, \Gamma_1^-, \Gamma_1^*$ - непустые открытые попарно непересекающиеся подмножества Γ и $\Gamma_1 = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^- \cup \Gamma_1^*$ (рисунок 2.1).

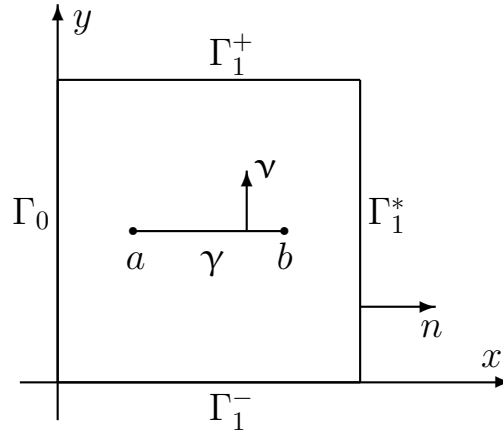


Рисунок 2.1 — Упругое тело с трещиной внутри.

Предполагаем, что концевые точки a и b - вершины трещины не выходят на внешнюю границу Γ . Обозначим через $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$, где $\bar{\gamma} = \gamma \cup \{a\} \cup \{b\}$. На трещине γ выберем вектор единичной нормали \mathbf{v} . В этом случае можем говорить о положительном (верхнем) γ^+ и отрицательном (нижнем) γ^- берегах трещины γ соответственно. Рассмотрим задачу теории упругости с трещиной.

Как и в первой главе определим для вектора перемещений $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ тензоры деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{ij}\}$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$, связанные линейным законом Гука. Пусть заданы вектор-функции $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ и $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ объёмных и поверхностных сил соответственно. Краевая постановка задачи с трещиной выглядит так

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= f_i \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad i = 1, 2, \\ u &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ \sigma_{ij} n_j &= p_i \quad \text{на } \Gamma_1, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ - вектор единичной внешней нормали к Γ . На участке γ ставятся следующие условия

$$\begin{aligned} [u_\mathbf{v}] &\geq 0, \quad [\sigma_\mathbf{v}(u)] = 0, \quad \sigma_\mathbf{v}(u) \cdot [u_\mathbf{v}] = 0, \quad \text{на } \gamma, \\ \sigma_\mathbf{v}(u) &\leq 0, \quad \sigma_\tau(u) = 0 \quad \text{на } \gamma^\pm. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $u_\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $[u_\mathbf{v}] = u_\mathbf{v}^+ - u_\mathbf{v}^-$, $\sigma_\mathbf{v}(u) = \sigma_{ij}(u) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j$, $[\sigma_\mathbf{v}(u)] = \sigma_\mathbf{v}^+(u) - \sigma_\mathbf{v}^-(u)$, $\sigma_\tau(u) = \boldsymbol{\sigma}(u) - \sigma_\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, где $\boldsymbol{\sigma}(u) = (\sigma_1(u), \sigma_2(u))$, $\sigma_i(u) = \sigma_{ij}(u) \mathbf{v}_j$, $i = 1, 2$.

Условия (2.2) обеспечивают взаимное непроникание берегов трещины γ^+ и γ^- друг в друга. Одной из трудных проблем, относящихся к задаче о равновесии тела с трещиной, является асимптотика решения вблизи вершины трещины. Для линейных моделей теории трещин этот вопрос исследован с достаточной

полнотой. Что же касается модели (2.1), (2.2) с нелинейными краевыми условиями на берегах, то вопрос об асимптотике решения, по всей видимости, является открытым. В работе [14] были получены асимптотические оценки для нелинейной модельной задачи с трещиной.

Рассмотрим вариационную задачу для области с трещиной, соответствующую краевой задаче (2.1), (2.2). Введём множество допустимых перемещений

$$K = \{v \in [H^1(\Omega_\gamma)]^2 : [v_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma, v = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

где, как и ранее, $[v_\nu] = v_\nu^+ - v_\nu^-$ - скачок функции $v_\nu = v \cdot \nu$ на γ . Значение функции v_ν на трещине γ понимается в смысле значений следов функций v_ν на γ [14, с. 12], $v_\nu^\pm \in H^{1/2}(\gamma)$. Норма в пространстве $H^{1/2}(\gamma)$ определяется как

$$\|v_\nu\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 = \|v_\nu\|_{L^2(\gamma)}^2 + \int_\gamma \int_\gamma \frac{|v_\nu(x) - v_\nu(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy.$$

В дальнейшем нам понадобится пространство $H_{00}^{1/2}(\gamma)$ [14, с. 53]

$$H_{00}^{1/2}(\gamma) = \left\{ w \in H^{1/2}(\gamma) : \frac{w}{\sqrt{\rho}} \in L_2(\gamma) \right\}$$

с нормой

$$\|w\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)}^2 = \|w\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 + \left\| \frac{w}{\sqrt{\rho}} \right\|_{L^2(\gamma)}^2,$$

где $\rho(x) = \text{dist}(x, \partial\gamma)$.

Краевая задача (2.1), (2.2) соответствует следующей вариационной задаче [14]

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \int_{\Omega_\gamma} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i v_i d\Gamma \rightarrow \min, \\ v \in K, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $a(u, v) = \int_{\Omega_\gamma} c_{ijpm} \varepsilon_{pm}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega$, $f \in [L_2(\Omega_\gamma)]^2$, $p \in [L_2(\Gamma_1)]^2$.

Задача (2.3) равносильна вариационному неравенству

$$u \in K : a(u, v - u) - \int_{\Omega_\gamma} f_i (v_i - u_i) d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i (v_i - u_i) d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K. \quad (2.4)$$

Известно, что решение $u \in K$ задачи (2.3) существует и единственно и удовлетворяет уравнениям (2.1) и неравенствам (2.2) в смысле обобщённых функций.

2.2 Постановка задачи с трещиной, выходящей на внешнюю границу

Пусть Ω будет той же областью, что и в пункте 2.1, а $\gamma \subset \Omega$ трещиной, выходящей на внешнюю границу (рисунок 2.2).

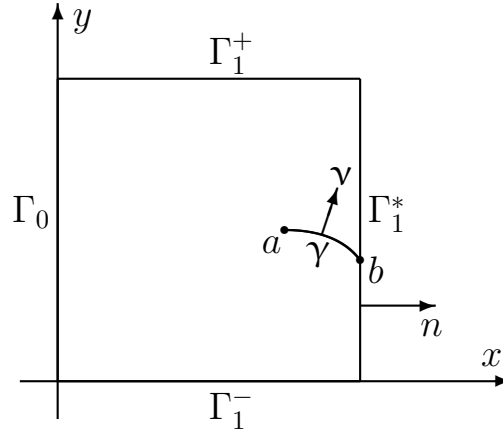


Рисунок 2.2 — Упругое тело с трещиной, выходящей на внешнюю границу.

Краевая постановка задачи с трещиной, выходящей на внешнюю границу, имеет такой же вид (2.1)-(2.2), как в пункте 2.1. Соответственно допускается вариационная постановка задачи (2.3) и вариационное неравенство (2.4). Однако для разрешимости задачи (2.3) мы предполагаем, что трещина γ выходит на внешнюю границу Γ в точке b под ненулевым углом. При доказательстве разрешимости используется неравенство Корна

$$\int_{\Omega_\gamma} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega \geq c \|v\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega_\gamma)}^2 \quad \forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega_\gamma)^2,$$

для выполнения которого необходимо располагать определённой гладкостью границы области, $c > 0$ – const. В случае, если граница не обладает достаточной регулярностью, в частности, если трещина выходит на внешнюю границу под нулевым углом, неравенство Корна не выполняется.

2.3 Общая схема двойственности

Для решения задач, приведённых в пунктах 2.1 и 2.2, построим общую схему двойственности, основанную на модифицированном функционале

Лагранжа. В то же время, теоретическое обоснование двойственного метода проведём только для задачи с внутренней трещиной [43]. Доказательства основных теорем имеют практически одинаковый вид, но проводятся в различных функциональных пространствах $H_{00}^{1/2}(\gamma)$ и $H^{1/2}(\gamma)$ [107; 108].

Определим пространство

$$W = \{v \in [H^1(\Omega_\gamma)]^2 : v = 0 \text{ на } \Gamma_0\}$$

и множество K_m , где $m \in L_2(\gamma)$ – произвольное

$$K_m = \{v \in W : -[v_\nu] \leq m \text{ п. в. на } \gamma\}.$$

Легко видеть, что K_m – выпуклое замкнутое по норме $H^1(\Omega_\gamma)$ множество.

Определим на пространстве $L_2(\gamma)$ функционал чувствительности

$$\chi(m) = \begin{cases} \inf_{v \in K_m} J(v), & \text{если } K_m \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Если $K_m \neq \emptyset$, то коэрцитивность $J(w)$ на $H^1(\Omega_\gamma)$ обеспечивает разрешимость задачи $\inf_{v \in K_m} J(v)$. Отметим, что условие ограниченности снизу функции m обеспечивает непустоту множества K_m . Если функция $m \in L_2(\gamma) \setminus H_{00}^{1/2}(\gamma)$, то множество K_m может быть пустым [14].

Выпуклый функционал $\chi(m)$ является собственным на $L_2(\gamma)$. Но его эффективная область $\text{dom } \chi = \{m \in L_2(\gamma) : \chi(m) < +\infty\}$ является выпуклым подмножеством в $L_2(\gamma)$, при этом $\overline{\text{dom } \chi} = L_2(\gamma)$.

Определим на $W \times L_2(\gamma) \times L_2(\gamma)$ функционал

$$Q(v, l, m) = \begin{cases} J(v) + \int_{\gamma} l m d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 d\Gamma, & \text{если } -[v_\nu] \leq m \text{ п. в. на } \gamma, \\ +\infty & \text{– в противном случае} \end{cases}$$

и модифицированный функционал Лагранжа $M(v, l)$ на пространстве $W \times L_2(\gamma)$:

$$M(v, l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} Q(v, l, m) = J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left\{ [(l - r[v_\nu])^+]^2 - l^2 \right\} d\Gamma,$$

где $(l - r[v_\nu])^+ \equiv \max\{0, l - r[v_\nu]\}$, $r > 0 - \text{const}$.

Введём модифицированный двойственный функционал

$$\underline{M}(l) = \inf_{v \in W} M(v, l) = \inf_{v \in W} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left\{ [(l - r[v_{\nu}])^+]^2 - l^2 \right\} d\Gamma \right\}.$$

Исходя из равенства

$$\inf_{v \in W} \inf_{m \in L_2(\gamma)} Q(v, l, m) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} \inf_{v \in W} Q(v, l, m),$$

для $\underline{M}(l)$ получаем другое представление [109]:

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_{\gamma} l m d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 d\Gamma \right\}.$$

Очевидно, что для любых $l \in L_2(\gamma)$ имеет место оценка

$$\underline{M}(l) \leq \chi(0) = \inf_{v \in K} J(v). \quad (2.5)$$

Определим для функционала $\underline{M}(l)$ двойственную задачу

$$\begin{cases} \underline{M}(l) - \sup, \\ l \in L_2(\gamma). \end{cases} \quad (2.6)$$

Модифицированные функционалы Лагранжа и двойственные методы их решения исследовались в работах [20; 109] в предположении разрешимости задачи (2.6). Отметим, что двойственная задача разрешима, если решение u исходной задачи минимизации принадлежит пространству $[H^2(\Omega_{\gamma})]^2$. Однако для задачи (2.1), (2.2) с трещиной предполагать большую регулярность решения, чем $[H^1(\Omega_{\gamma})]^2$, является неестественным. Далее исследуется двойственный метод, в котором заранее не предполагается разрешимость двойственной задачи (2.6). Сходное исследование двойственного метода для решения скалярной модельной задачи с трещиной ранее проведено в [110].

Далее исследуется двойственный функционал $\underline{M}(l)$ вместе с функционалом чувствительности $\chi(m)$.

Теорема 3. Пусть \bar{m} не принадлежит эффективной области функционала чувствительности χ . Тогда для любой последовательности $\{m_i\} \subset \text{dom } \chi$ такой, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \|m_i - \bar{m}\|_{L_2(\gamma)} = 0$, выполняется предельное равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) = +\infty$.

Доказательство. Для функции $\bar{m} \notin \text{dom } \chi$ рассмотрим произвольную последовательность $\{m_i\} \subset \text{dom } \chi$ такую, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \|m_i - \bar{m}\|_{L_2(\gamma)} = 0$. Из непустоты множества K_{m_i} и коэрцитивности функционала $J(v)$ вытекает существование и единственность элемента $v^i = \arg \min_{v \in K_{m_i}} J(v)$, ($i = 1, 2, \dots$) [14]. Докажем, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \|v^i\|_W = +\infty$.

Допустим противное, т.е. пусть у последовательности $\{v^i\}$ существует ограниченная подпоследовательность $\{v^{i_j}\}$, $\|v^{i_j}\|_W \leq c$ для всех i_j , где $c > 0 - \text{const}$. Из теоремы о следах функций следует, что $\| [v_{\gamma}^{i_j}] \|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)} \leq c_1$, где $c_1 > 0 - \text{const}$ [14, с. 14]. Тогда $\{ [v_{\gamma}^{i_j}] \}$ является компактной последовательностью в $L_2(\gamma)$. Пусть $t \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$ есть слабая предельная точка этой последовательности. Не ограничивая общности рассуждений полагаем, что t есть слабый предел $\{ [v_{\gamma}^{i_j}] \}$ в $H_{00}^{1/2}(\gamma)$. Тогда $\{ [v_{\gamma}^{i_j}] \}$ сходится к t по норме в $L_2(\gamma)$. Так как $- [v_{\gamma}^{i_j}] \leq m_i$, то $-t \leq \bar{m}$ на γ . Поэтому, $K_{\bar{m}} \neq \emptyset$ или $\bar{m} \in \text{dom } \chi$. Из полученного противоречия вытекает, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \|v^i\|_W = +\infty$. Так как функционал $J(v)$ коэрцитивен на W , то $\lim_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} J(v^i) = +\infty$. \square

Теорема 4. Пусть \bar{m} принадлежит эффективной области функционала чувствительности χ . Тогда для любой последовательности $\{m_i\} \subset \text{dom } \chi$, сходящейся к \bar{m} в $L_2(\gamma)$, выполняется неравенство

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) \geq \chi(\bar{m}).$$

Доказательство. Теперь полагаем, что $\{m_i\} \subset \text{dom } \chi$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} \|m_i - \bar{m}\|_{L_2(\gamma)} = 0$, где $\bar{m} \in \text{dom } \chi$. Из последовательности $\{m_i\}$ выделим подпоследовательность $\{m_{i_j}\}$, такую что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \chi(m_{i_j}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i).$$

Выберем подпоследовательность $\{v_{i_j}\}$, где $v_{i_j} = \arg \min_{v \in K_{m_{i_j}}} J(v)$. Последовательность $\{v_{i_j}\}$ является ограниченной последовательностью в W (иначе $\lim_{i \rightarrow \infty} \chi(m_{i_j}) = +\infty$ и требуемое неравенство доказано). Так как $W \subset [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, то $\|v_{i_j}\|_{[H^{1/2}(\Gamma)]^2} \leq c$, где $c > 0 - \text{const}$. Более того, $\{v_{i_j}\}$ является компактной последовательностью в $L_2(\Gamma)$. Пусть $\hat{v} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^2$ есть слабая предельная точка этой последовательности. Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что \hat{v} есть слабый предел $\{v_{i_j}\}$. Тогда $\{v_{i_j}\}$ сходится к \hat{v} в $L_2(\Gamma)$. Из теоремы о следах [14, с. 14] также вытекает, что последовательность $\{ [v_{i_j}] \}$

слабо компактна в $H_{00}^{1/2}(\gamma)$. Пусть $t \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$ - слабая предельная точка этой последовательности. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $\{[v_{i_j}]\}$ есть слабо сходящаяся последовательность, т.е. t есть слабый предел $\{[v_{i_j}]\}$ в $H_{00}^{1/2}(\gamma)$.

В силу того, что пространство $H_{00}^{1/2}(\gamma)$ компактно вкладывается в $L_2(\gamma)$, а $L_2(\gamma)$ вкладывается в $H_{00}^{-1/2}(\gamma)$, то $[v_{i_j}]$ сходится к t по норме в $L_2(\gamma)$. Здесь $H_{00}^{-1/2}(\gamma)$ - пространство, двойственное к $H_{00}^{1/2}(\gamma)$. Из сходимостей m_{i_j} к \bar{m} в $L_2(\gamma)$, $[v_{i_j}]$ к t в $L_2(\gamma)$ и условия $-[v_{i_j}] \leq m_{i_j}$ получаем $-t \leq \bar{m}$ на γ .

Обозначим $\tilde{t} = \arg \min_{v \in W_t} J(v)$, где $W_t = \{v \in W : [v_\gamma] = t \text{ на } \gamma, v = \hat{v} \text{ на } \Gamma_1\}$. Имеем

$$\begin{aligned} J(v^{i_j}) - J(\tilde{t}) &= a(\tilde{t}, v^{i_j} - \tilde{t}) - \int_{\Omega_\gamma} f_s(v_s^{i_j} - \tilde{t}_s) d\Omega + \frac{1}{2} a(v^{i_j} - \tilde{t}, v^{i_j} - \tilde{t}) - \int_{\Gamma_1} p_s(v_s^{i_j} - \hat{v}_s) d\Gamma = \\ &= \langle \mu_1, v^{i_j} - \hat{v} \rangle + \langle \mu_2, [v_\gamma^{i_j}] - t \rangle - \int_{\Gamma_1} p_s(v_s^{i_j} - \hat{v}_s) d\Gamma + \frac{1}{2} a(v^{i_j} - \tilde{t}, v^{i_j} - \tilde{t}), \end{aligned}$$

где $\mu_1 \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$, $\mu_2 \in H_{00}^{-1/2}(\gamma)$.

Здесь

$$\langle \mu_1, v^{i_j} - \hat{v} \rangle + \langle \mu_2, [v_\gamma^{i_j}] - t \rangle = a(\tilde{t}, v^{i_j} - \tilde{t}) - \int_{\Omega_\gamma} f_s(v_s^{i_j} - \tilde{t}_s) d\Omega$$

и, при этом, $\mu_1 + \mu_2 \in ([H^{1/2}(\Gamma)]^2 \times H_{00}^{1/2}(\gamma))^*$, где $([H^{1/2}(\Gamma)]^2 \times H_{00}^{1/2}(\gamma))^*$ - двойственное к $[H^{1/2}(\Gamma)]^2 \times H_{00}^{1/2}(\gamma)$ пространство.

Так как $\{v_{i_j}\}$ слабо сходится к \hat{v} в $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$, а $\{[v_{i_j}]\}$ слабо сходится к t в $H_{00}^{1/2}(\gamma)$, то из единственности слабого предела следует

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \mu_1, v^{i_j} - \hat{v} \rangle + \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \mu_2, [v_\gamma^{i_j}] - t \rangle = 0.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \chi(m_{i_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} J(v^{i_j}) \geq J(\tilde{t}) \geq \chi(\bar{m})$$

и, следовательно,

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) \geq \chi(\bar{m}).$$

□

Из теорем 3, 4 следует полунепрерывность снизу на $L_2(\gamma)$ функционала чувствительности χ , а в силу выпуклости $\chi(m)$ и слабая полунепрерывность снизу на $L_2(\gamma)$.

Рассмотрим функционал $F_l(m)$, где l произвольный фиксированный элемент из $L_2(\gamma)$

$$F_l(m) = \chi(m) + \int_{\gamma} l m d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 d\Gamma, \quad r > 0 - \text{const}.$$

Легко видеть, что $F_l(m)$ - слабо полунепрерывный снизу функционал на $L_2(\gamma)$.

Из полунепрерывности снизу $\chi(m)$ в $L_2(\gamma)$ следует выпуклость и замкнутость его надграфика $\text{epi } \chi$ в $L_2(\gamma) \times R$, $R = (-\infty, +\infty)$. Из теоремы отделимости Мазура [111, с. 164] вытекает существование таких $\alpha \in L_2(\gamma)$ и $\beta \in R$, что

$$\chi(m) + \int_{\gamma} \alpha m d\Gamma + \beta \geq 0 \quad \forall m \in \text{dom } \chi.$$

Поэтому, для функционала $F_l(m)$ справедлива оценка снизу

$$F_l(m) \geq - \int_{\gamma} \alpha m d\Gamma + \int_{\gamma} l m d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 d\Gamma - \beta \geq 0 \quad \forall m \in L_2(\gamma).$$

Следовательно $F_l(m) \rightarrow +\infty$ при $\|m\|_{L_2(\gamma)} \rightarrow +\infty$, т.е. $F_l(m)$ коэрцитивен в $L_2(\gamma)$.

Так как функционал $F_l(m)$ слабо полунепрерывен снизу и коэрцитивен, то для любого $l \in L_2(\gamma)$ существует элемент $m(l) \in L_2(\gamma)$ такой, что

$$m(l) = \arg \min_{m \in L_2(\gamma)} F_l(m).$$

Из сильной выпуклости $F_l(m)$ на $\text{dom } \chi$ [52] следует, что элемент $m(l)$ единственный.

Для двойственного функционала $\underline{M}(l)$ справедливы следующие теоремы, доказательства которых для модельной задачи можно найти в [19].

Теорема 5. *Двойственный функционал $\underline{M}(l)$ непрерывен в $L_2(\gamma)$.*

Теорема 6. Двойственный функционал $\underline{M}(l)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\gamma)$, и его производная $\nabla \underline{M}(l)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\frac{1}{r}$, т.е. справедливо неравенство

$$\|\nabla \underline{M}(l') - \nabla \underline{M}(l'')\|_{L_2(\gamma)} \leq \frac{1}{r} \|l' - l''\|_{L_2(\gamma)} \quad \forall l', l'' \in L_2(\gamma).$$

Доказывается, что $\nabla \underline{M}(l) = m(l) = \max\{-[u_\nu], -\frac{l}{r}\} \quad \forall l \in L_2(\gamma)$.

Двойственная задача (2.6) решается градиентным методом [19]

$$l^{k+1} = l^k + \theta_k m(l^k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

с любым стартовым значением $l^0 \in L_2(\gamma)$, $\theta_k \in [\beta, 2r - \beta]$, $\beta \in (0, r]$.

Теорема 7. Для построенной по градиентному методу (2.7) последовательности $\{l^k\}$ справедливо предельное равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \|m(l^k)\|_{L_2(\gamma)} = 0$.

Градиентный метод (2.7) соответствует алгоритму Удзавы для решения задачи (1.6). На шаге $k = 0$ задаётся начальная функция $l^0 \in L_2(\gamma)$ и для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ последовательно определяются [19]:

$$(i) \quad u^{k+1} = \arg \min_{v \in W} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left\{ [(l^k - r[v_\nu])^+]^2 - (l^k)^2 \right\} d\Gamma \right\}; \quad (2.8)$$

$$(ii) \quad l^{k+1} = l^k + \theta_k \max\{-[u_\nu^{k+1}], -\frac{l^k}{r}\}, \quad \theta_k \in [\beta, 2r - \beta], \quad \beta \in (0, r]. \quad (2.9)$$

Теорема 8. Справедливо равенство двойственности

$$\sup_{l \in L_2(\gamma)} \underline{M}(l) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Доказательство. Из неравенства (2.5) следует, что

$$\underline{M}(l^k) \leq \chi(0) = \inf_{v \in K} J(v), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Так как функционал $\chi(m)$ полунепрерывен снизу на $L_2(\gamma)$, то из теоремы 7 вытекает, что $\liminf_{k \rightarrow \infty} \chi(m(l^k)) \geq \chi(0)$. Неравенство (2.5) может быть записано как

$$\chi(m(l^k)) + \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l^k) d\Gamma \leq \chi(0), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Тем самым

$$\int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma \leq \chi(0) - \chi(m(l^k)) - \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l^k) d\Gamma, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma \leq 0$. Докажем, что $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = 0$.

Предположим обратное, т.е. $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = \delta < 0$. В этом случае можно выбрать такое δ_1 , $\delta < \delta_1 < 0$, и число N , что $\int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma < \delta_1 \quad \forall k > N$.

Получаем

$$\begin{aligned} \|l^{k+1}\|_{L_2(\gamma)}^2 &= \|l^k + 2\theta_k m(l^k)\|_{L_2(\gamma)}^2 = \\ &= \|l^k\|_{L_2(\gamma)}^2 + 2\theta_k \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma + \theta_k^2 \|m(l^k)\|_{L_2(\gamma)}^2 \leq \\ &\leq \|l^k\|_{L_2(\gamma)}^2 + 2\theta_k \delta_1 + \theta_k^2 \|m(l^k)\|_{L_2(\gamma)}^2. \end{aligned}$$

Из теоремы 7 следует $\lim_{k \rightarrow \infty} \|m(l^k)\|_{L_2(\gamma)}^2 = 0$, поэтому для достаточно больших чисел k мы получаем оценку $\|l^{k+1}\|_{L_2(\gamma)}^2 \leq \|l^k\|_{L_2(\gamma)}^2$. В этом случае $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = 0$, что противоречит предположению, сделанному ранее, т.е. $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = 0$.

Выберем из последовательности $\{l^k\}$ подпоследовательность $\{l^{k_j}\}$, для которой

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^{k_j} m(l^{k_j}) d\Gamma.$$

В силу того, что последовательность $\{\underline{M}(l^{k_j})\}$ монотонно возрастает [20; 57] и ограничена снизу значением $\chi(0)$, то

$$\begin{aligned} \chi(0) &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\chi(m(l^k)) + \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l^k) d\Gamma \right) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\chi(m(l^{k_j})) + \int_{\gamma} l^{k_j} m(l^{k_j}) d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l^{k_j}) d\Gamma \right) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \chi(m(l^{k_j})) \geq \chi(0) = \inf_{v \in K} J(v). \end{aligned}$$

Таким образом, сходимость метода (2.8), (2.9) обеспечивается в смысле предельного равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{M}(l^k) = J(u^*) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Это гарантирует выполнение соотношения двойственности для исходной и двойственной задач

$$\sup_{l \in L_2(\gamma)} \underline{M}(l) = \inf_{v \in K} J(v).$$

□

Из разрешимости двойственной задачи (2.6) следует, ограниченность последовательности $\{l^k\}$ в $L_2(\gamma)$ [20; 109]. Из теоремы 7 теперь вытекает равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = 0.$$

Отсюда следует сходимость метода (2.8), (2.9) по функционалу задачи (2.3), т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(m(l^k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(u^{k+1}) = J(u),$$

где u - решение задачи (2.3). При этом последовательность $\{l^k\}$ слабо сходится к решению двойственной задачи (2.6).

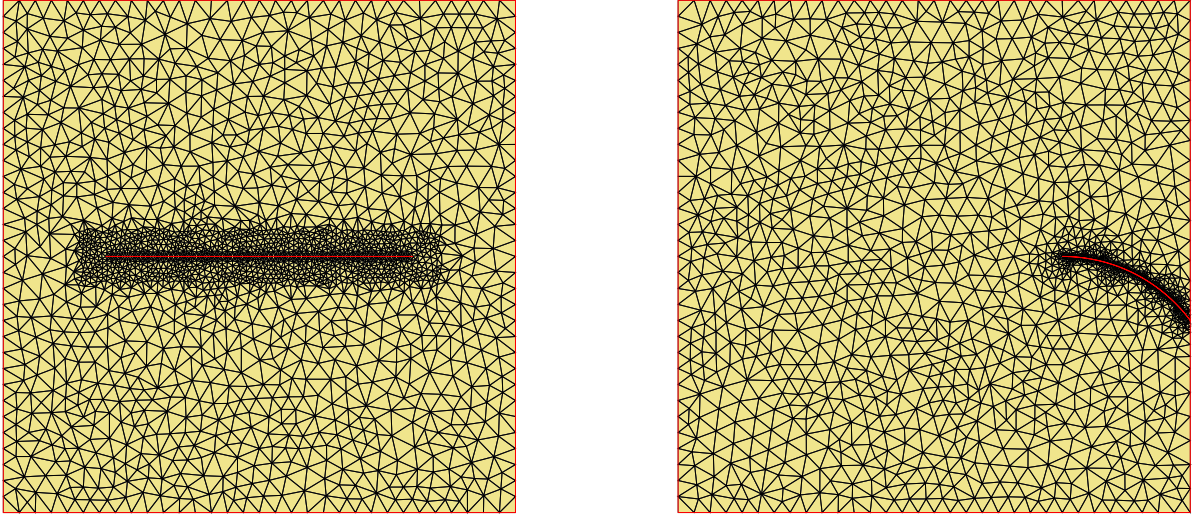
2.4 Численное решение задачи методом конечных элементов

Область Ω выбиралась в виде единичного квадрата. Рассматривались две трещины:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{(x, y) : 0.2 \leq x \leq 0.8, y = 0.5\}, \\ \gamma_2 &= \{(x, y) : 0.75 \leq x \leq 1, y = \sqrt{0.3125^2 - (x - 0.75)^2} + 0.1875\}, \end{aligned}$$

где γ_1 - это трещина внутри упругого тела, а γ_2 - трещина, выходящая на внешнюю границу под ненулевым углом. Для численного решения задачи (2.8) воспользуемся методом конечных элементов. На рисунке 2.3 изображена триангуляция области со сгущением сетки вблизи трещины. Для разбиения области на конечные элементы в работе использовалась библиотека Fade2D (<http://www.geom.at/fade2d/html>), реализующая алгоритм триангуляции Делоне. В качестве базисных возьмём кусочно-линейные функции $\varphi_i(x, y)$ ($i = \overline{1, N}$), где N это количество узлов триангуляции области Ω .

Введём следующие обозначения: h - шаг сетки на γ , N_γ - количество узлов триангуляции на γ , W_h - линейная оболочка базисных функций $\varphi_i(x, y)$, вектор



а) с трещиной γ_1

б) с трещиной γ_2

Рисунок 2.3 — Триангуляция Делоне области Ω

$t = (t_1, t_2, \dots, t_{2N})$, $u_h = (u_1^h, u_2^h) \in W_h$ – конечно-элементное решение:

$$u_1^h(x, y) = \sum_{j=1}^N t_j \varphi_j(x, y), \quad u_2^h(x, y) = \sum_{j=N+1}^{2N} t_j \varphi_{j-N}(x, y), \quad \text{для } t_j \in R.$$

Отметим, что так как Ω – многоугольник, обеспечено вложение $W_h \subset W$. Таким образом заменим задачу (2.8) конечно-элементной задачей:

$$u^{k+1} = \arg \min_{v \in W_h} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left\{ [(l^k - r[v_\nu])^+]^2 - (l^k)^2 \right\} d\Gamma \right\}. \quad (2.10)$$

Рассмотрим произвольный треугольный элемент Ω^e (рисунок 2.4). Элемент имеет шесть степеней свободы, соответствующих компонентам вектора перемещений в узлах $\{u_{x_i}, u_{y_i}\}$, $i = 1, 2, 3$. Для удобства их также можно записать в векторном виде:

$$u^e = [u_{x_1} \ u_{y_1} \ u_{x_2} \ u_{y_2} \ u_{x_3} \ u_{y_3}]^T.$$

Вектор перемещений $u^e(x, y)$ на элементе Ω^e можно интерполировать с помощью значений перемещений в узлах 1, 2, 3. Предполагаем, что для обеих компонент смещения используются одни и те же интерполяционные функции. Таким образом

$$u_x(x, y) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{N}_i^e(x, y) u_{x_i}, \quad u_y(x, y) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{N}_i^e(x, y) u_{y_i}, \quad (2.11)$$

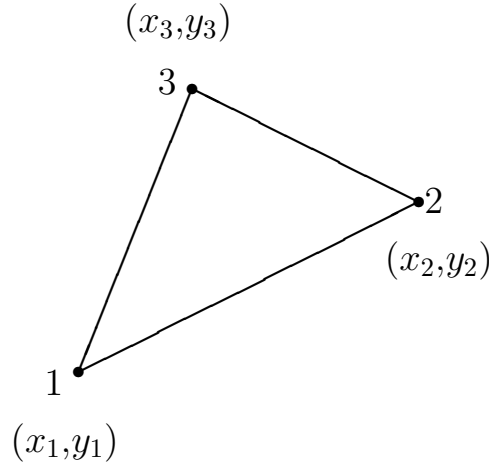


Рисунок 2.4 — Треугольный элемент с вершинами 1, 2, 3 и координатами (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)

здесь $N_i^e(x, y)$ – функции формы на Ω^e , которые равны единице в i -ом узле и нулю в остальных. В матричном виде (2.11) можно записать как

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e \end{bmatrix} u^e = Nu^e. \quad (2.12)$$

В работе рассматривается трехузловой конечный элемент с линейными функциями формы, поэтому они просто совпадают с треугольными координатами (изопараметрическими координатами) ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 . То есть, $N_i^e = \xi_i$, $i = 1, 2, 3$. Связь между декартовыми координатами $\{x, y\}$ и треугольными координатами $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ задаётся следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Отсюда следует, что три треугольные координаты не являются независимыми, а связаны одним соотношением:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1.$$

На рисунке 2.5 представлено геометрическое пояснение математического смысла введённых треугольных координат.

Уравнения вида $\xi_i = \text{const}$ представляют собой набор прямых линий, параллельных стороне, противоположной i -му углу. Сами узлы Ω^e имеют координаты $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Обратная связь между системами координат

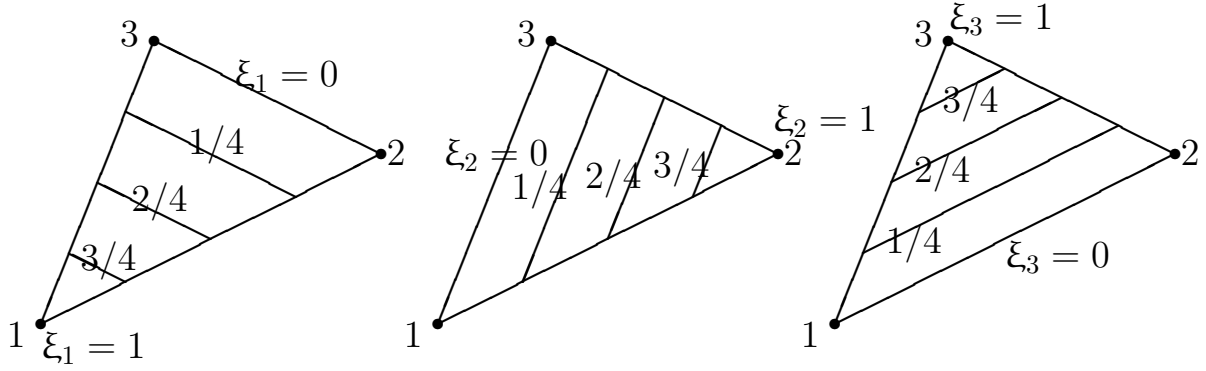


Рисунок 2.5 — Треугольные координаты

определяется как:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\mathbb{A}} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_{23} & x_{32} \\ x_1y_1 - x_1y_3 & y_{31} & x_{13} \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Здесь \mathbb{A} - площадь треугольника, $x_{jk} = x_j - x_k$, $y_{jk} = y_j - y_k$.

Связь между перемещениями, напряжениями и деформациями для анизотропного идеально-упругого материала записывается в виде:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}.$$

Или в более компактном виде: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$. Здесь $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$ - матрица модулей упругости, элементы которой для изотропного тела с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона μ определяются как: $E_{11} = E_{22} = \frac{E^*}{1 - \mu^{*2}}$, $E_{33} = \frac{E^*}{2(1 + \mu^*)} = G$, $E_{12} = \mu^*E_{11}$ и $E_{13} = E_{23} = 0$, где $E^* = \frac{E}{1 - \mu^2}$, $\mu^* = \frac{\mu}{1 - \mu}$. Мы используем E^* , μ^* вместо E , μ , так как в работе рассматривается задача, в которой деформации вдоль оси z равны нулю (плоская деформация).

Используя (2.12) получаем, что $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{N}\mathbf{u}^e$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \xi_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_3}{\partial y} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{u}^e = \mathbf{B}\mathbf{u}^e. \quad (2.16)$$

Используя соотношения (2.14) можно получить вид матрицы \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\mathbb{A}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Таким образом, матрица жёсткости для одного конечного элемента может быть вычислена с помощью общей формулы:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{h}\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega^e, \quad (2.18)$$

где \mathbf{h} – толщина тела, которую для простоты мы полагаем равной единице. Тогда, так как Ω^e – треугольник, формула примет следующий вид:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \int_{\Omega^e} d\Omega^e = \mathbb{A} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}. \quad (2.19)$$

Далее приведём формулу для вычисления сил, действующих на конечный элемент. Для заданных объёмных сил $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$ вектор объёмных узловых сил:

$$\mathbf{F}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega^e. \quad (2.20)$$

В нашем случае плотность объёмных сил постоянна на всем Ω , тогда достаточно посчитать интегралы:

$$\int_{\Omega^e} \xi_1 d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \xi_2 d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \xi_3 d\Omega^e = \frac{1}{3}\mathbb{A}. \quad (2.21)$$

Подставляя полученные значения в (2.20) получаем:

$$\mathbf{F}^e = \frac{\mathbb{A}}{3} [f_x \ f_y \ f_x \ f_y \ f_x \ f_y]^T. \quad (2.22)$$

Заметим, что компоненты вектора \mathbf{F}^e можно получить в нашем случае путём простого равномерного распределения суммарной силы, равной $\mathbb{A}f$, между тремя узлами. Аналогичным образом можно получить и вектор поверхностных сил, действующих по нормали на одну из граней треугольного конечного элемента.

Глобальная матрица жёсткости A и вектор суммарных сил F представляют собой сумму вкладов отдельных конечных элементов. Ансамблирование матрицы осуществляется простым суммированием матриц жёсткости отдельных конечных элементов по соответствующим вершинам. Аналогично для суммарного вектора сил, действующих на тело.

$$A[C[e, i], C[e, j]] = A[C[e, i], C[e, j]] + \mathbf{K}^e[i, j], \quad i, j = \overline{1, 6}. \quad (2.23)$$

$$F[C[e, i]] = F[C[e, i]] + \mathbf{F}^e[i], \quad i = \overline{1, 6}. \quad (2.24)$$

Здесь $C[e, i]$ – вектор (массив), связывающий номера узлов в конечном элементе e с глобальными номерами узлов триангуляции.

Для решения задачи (2.10) в конечно-элементном приближении аппроксимируем граничный интеграл по γ с помощью квадратурной формулы трапеций. Для решения задачи минимизации кусочно-квадратичного функционала (2.10) в работе применялись метод покоординатного спуска и обобщенный метод Ньютона [112]. Для метода покоординатного спуска необходимо сделать замену переменных на нижнем берегу трещины: $t_j^- = t_j^+ + \theta_j$, где $\theta_j = -[t_j] = -(t_j^+ - t_j^-)$, тем самым получив вектор $t = (t_1, t_2, \dots, \theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \dots, \theta_{i_{N_\gamma}}, \dots, t_{2N})$ и определив скачок функции как новую переменную. Так как конечномерный функционал в (2.10) является сильно выпуклым и непрерывно дифференцируемым функционалом, метод покоординатного спуска обладает теоретической сходимостью. Более того, в коэрцитивном случае квадратичная форма $a(u, v)$ обладает свойством положительной определённости, что гарантирует линейную скорость сходимости. Метод покоординатного спуска является простым в реализации методом оптимизации, однако проблемой данного метода является сложность в его распараллеливании.

В свою очередь, обобщенный метод Ньютона легко и хорошо поддаётся распараллеливанию и его основная вычислительная сложность заключается в нахождении обратной матрицы Гессе. Однако, так как функционал задачи (2.10) является лишь непрерывно дифференцируемым, то в методе используется обобщённая матрица Гессе. Обобщенный метод Ньютона, применительно

к данной задаче, является эвристическим методом, позволяющим ускорить решение задачи (2.10).

После дискретизации задачи мы получаем глобальную матрицу жёсткости $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ и вектор правой части $F = (f_i) \in \mathbb{R}^{2N}$. Обозначим через вектор $\alpha^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_{N_\gamma}^k)$ приближенное значение двойственной переменной l^k в узлах на трещине и градиент $g(t)$ конечномерного функционала (2.10).

$$g(t) = At - F + \beta(t), \quad (2.25)$$

где $\beta(t) = (b_i) \in \mathbb{R}^{2N}$. Для удобства обозначим как $\{i_j^+\}, \{i_j^-\}_{j=1, N_\gamma}$ - номера узлов лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах трещины. Тогда

$$b_i = 0, \text{ для всех } i \neq \{i_j^+, i_j^-, i_j^+ + N, i_j^- + N\}.$$

В противном случае, если

$$\lambda_j(t) = \alpha_j^k - r(t_{i_j^+} - t_{i_j^-})\mathbf{v}_j^1 - r(t_{i_j^+ + N} - t_{i_j^- + N})\mathbf{v}_j^2, \quad j = 1, N_\gamma,$$

здесь $(\mathbf{v}_j^1, \mathbf{v}_j^2)$ - вектор нормали в j -ом узле на трещине, то

$$\begin{aligned} b_{i_j^+} &= -h\mathbf{v}_j^1(\lambda_j(t))^+, \\ b_{i_j^-} &= h\mathbf{v}_j^1(\lambda_j(t))^+, \\ b_{i_j^+ + N} &= -h\mathbf{v}_j^2(\lambda_j(t))^+, \\ b_{i_j^- + N} &= h\mathbf{v}_j^2(\lambda_j(t))^+. \end{aligned}$$

Обобщенный метод Ньютона выглядит следующим образом:

- 1) На начальном шаге задаём t^0 .
- 2) Для каждого $m = 0, 1, 2, \dots$ последовательно вычисляем

$$t^{m+1} = t^m - (\partial g(t^m))^{-1}g(t^m). \quad (2.26)$$

- 3) Проверяем условие останова

$$\|t^{m+1} - t^m\|_\infty < \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = 10^{-12}.$$

Здесь $\partial g(t)$ это обобщенный Якобиан $g(t)$:

$$\partial g(t) = A + D(t),$$

где $D(t) = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ разреженная симметричная матрица. Если $\lambda_j(t) > 0$, тогда матрица $D(t)$ будет иметь следующие ненулевые элементы:

$$\begin{aligned} d_{i_j^+, i_j^+} &= rh(\mathbf{v}_j^1)^2, \quad d_{i_j^+, i_j^-} = -rh(\mathbf{v}_j^1)^2, \quad d_{i_j^+, i_j^+ + N} = rh\mathbf{v}_j^1\mathbf{v}_j^2, \quad d_{i_j^+, i_j^- + N} = -rh\mathbf{v}_j^1\mathbf{v}_j^2, \\ d_{i_j^-, i_j^-} &= rh(\mathbf{v}_j^1)^2, \quad d_{i_j^-, i_j^+} = -rh(\mathbf{v}_j^1)^2, \quad d_{i_j^-, i_j^- + N} = rh\mathbf{v}_j^1\mathbf{v}_j^2, \quad d_{i_j^-, i_j^+ + N} = -rh\mathbf{v}_j^1\mathbf{v}_j^2, \\ d_{i_j^+ + N, i_j^+ + N} &= rh(\mathbf{v}_j^2)^2, \quad d_{i_j^+ + N, i_j^- + N} = -rh(\mathbf{v}_j^2)^2, \quad d_{i_j^+ + N, i_j^+} = rh\mathbf{v}_j^1\mathbf{v}_j^2, \quad d_{i_j^+ + N, i_j^-} = -rh\mathbf{v}_j^1\mathbf{v}_j^2, \\ d_{i_j^- + N, i_j^- + N} &= rh(\mathbf{v}_j^2)^2, \quad d_{i_j^- + N, i_j^+ + N} = -rh(\mathbf{v}_j^2)^2, \quad d_{i_j^- + N, i_j^-} = rh\mathbf{v}_j^1\mathbf{v}_j^2, \quad d_{i_j^- + N, i_j^+} = -rh\mathbf{v}_j^1\mathbf{v}_j^2. \end{aligned}$$

На шаге (ii), находим новое значение двойственной переменной:

$$\alpha_j^{k+1} = (\lambda_j(t))^+ = \max\{0, \lambda_j(t)\}, \quad j = \overline{1, N_\gamma}. \quad (2.27)$$

Для алгоритма Удзавы условие останова имеет следующий вид

$$\|\alpha^{k+1} - \alpha^k\|_\infty < \varepsilon_\alpha, \quad \varepsilon_\alpha = 10^{-8}.$$

Численные эксперименты были проведены на гибридном вычислительном кластере ВЦ ДВО РАН на базе архитектуры OpenPOWER. Вариант с использованием метода покоординатного спуска считался на процессоре IBM POWER8 4.023 GHz. Вычисления для обобщённого метода Ньютона проводились на NVIDIA Tesla P100 GPU с использованием библиотеки cuBLAS. Это дало существенный прирост в скорости выполнения счета.

Значения параметров брались следующими: $f = (f_1, f_2) = (0, 0)$, поверхностное усилие с правой $p_1|_{\Gamma_1^*} = g \cdot (1 - |2y - 1|)$, $p_2|_{\Gamma_1^*} = 0$ МПа, верхней $p_1|_{\Gamma_1^+} = 0$ МПа, $p_2|_{\Gamma_1^+} = -1$ МПа и нижней $p_1|_{\Gamma_1^-} = 0$ МПа, $p_2|_{\Gamma_1^-} = 1$ МПа сторон, модуль упругости Юнга $E = 73000$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.34$, константа $r = 10^8$, параметр h на трещине равен 0.005.

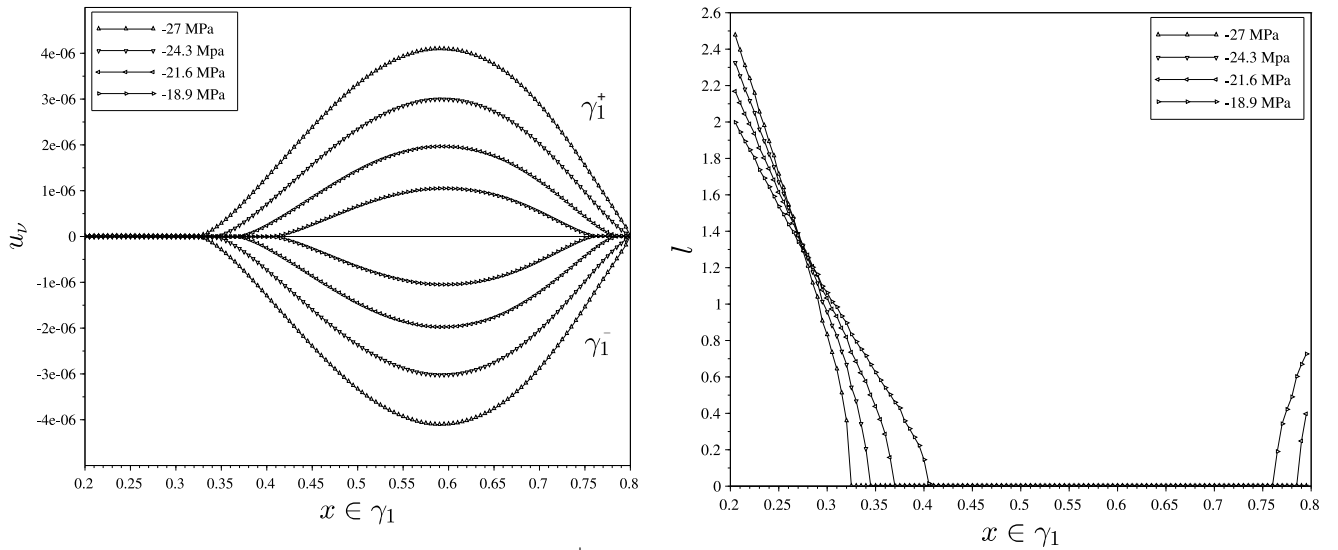
Приведём результаты численного решения для задачи с внутренней трещиной γ_1 . В таблице 2 представлено среднее количество итераций по прямой переменной t и количество итераций по двойственной переменной α с использованием разных методов минимизации на шаге (2.10). Из неё видно, что обобщенный метод Ньютона сходится за небольшое количество итераций, причём разница между полученными решениями оказалась порядка 10^{-11} . Это говорит о близости полученных решений.

На рисунке 2.6 представлены значения u_ν на берегах трещины γ_1^\pm и значения двойственной переменной при разных боковых усилиях с правой стороны: $g = \{-27 \text{ МПа}; -24.3 \text{ МПа}; -21.6 \text{ МПа}; -18.9 \text{ МПа}\}$.

Таблица 2 — Результаты счета алгоритма Удзавы

	Метод		Обобщенный		Δ
	покоординатного спуска*		метод Ньютона**		
$-g$, МПа	Итер. по t	Итер. по α	Итер. по t	Итер. по α	$\ \theta^{**} - \theta^*\ _\infty$
27	32510	8	3	8	$2 \cdot 10^{-11}$
24.3	28353	8	3	8	$1 \cdot 10^{-11}$
21.6	21776	8	3	8	$1.9 \cdot 10^{-11}$
18.9	18723	8	3	8	$2.5 \cdot 10^{-11}$

На рисунке 2.6а видно, что взаимное проникание берегов трещины друг в друга отсутствует, скачок функции $[u_\nu] \geq 0$ всюду на трещине. Помимо этого, на графиках 2.6б видно, что значение двойственной переменной больше нуля в зонах контакта берегов трещины. Это говорит о наличии нормального напряжения в этих узлах.

а) Значение функции u_ν на γ_1^\pm

б) Значение двойственной переменной

Рисунок 2.6 — Результаты численного решения с внутренней трещиной

На рисунке 2.7 цветом показаны значения функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ в области Ω .

Аналогично приведём результаты численного решения для задачи с трещиной γ_2 . Для этого изменим поверхностное усилие с правой стороны следующим образом $p_1|_{\Gamma_1^*} = g$. Параметр $h = 0.003$ для трещины γ_2 . Следует отметить, что в работах [113; 114] подробно исследуется численное решение задачи теории упругости с трещиной, выходящей на границу области. Причём в [114] рассматривается применение классических методов двойственности.

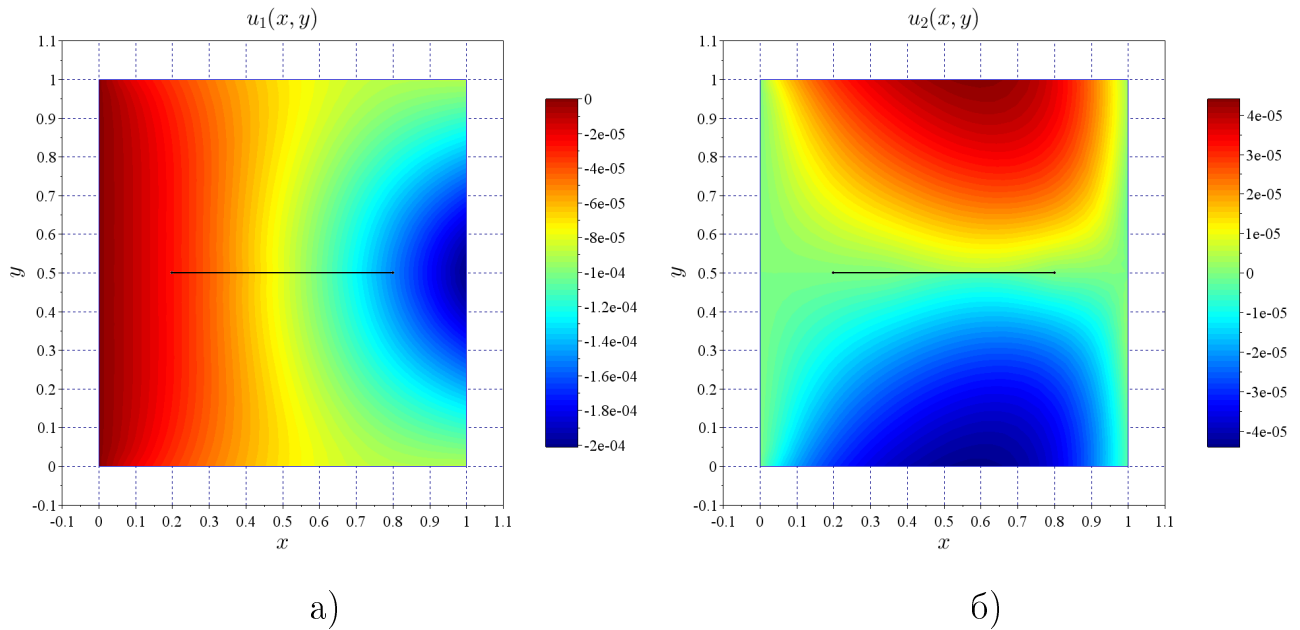
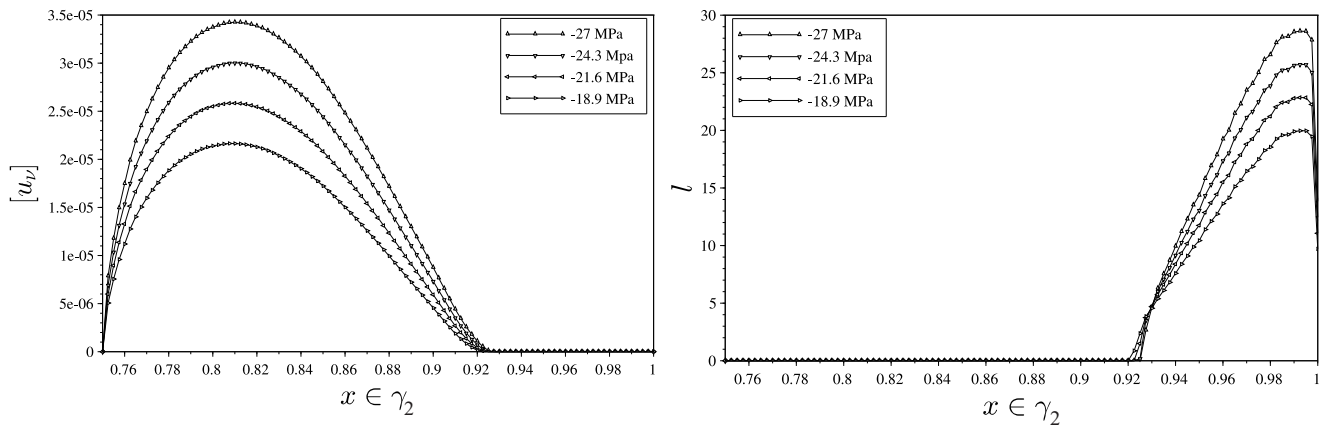


Рисунок 2.7 — Значение функций $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ при $g = 27$ МПа с трещиной γ_1



а) Значение скачка u_ν на γ_2

б) Значение двойственной переменной

Рисунок 2.8 — Результаты численного решения с трещиной γ_2

Как и для задачи с внутренней трещиной, на рисунке 2.8а видно, что скачок $[u_\nu]$ везде неотрицательный. Это означает, что как и ранее, не происходит взаимное проникание берегов трещины. На рисунке 2.8б изображено значение двойственной переменной l , из которого видно, что вблизи внешней вершины трещины нормальное напряжение растёт. Это естественно, так как с точки зрения механики вершины трещины являются концентраторами напряжения. Значения функций $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ изображены на рисунке 2.9.

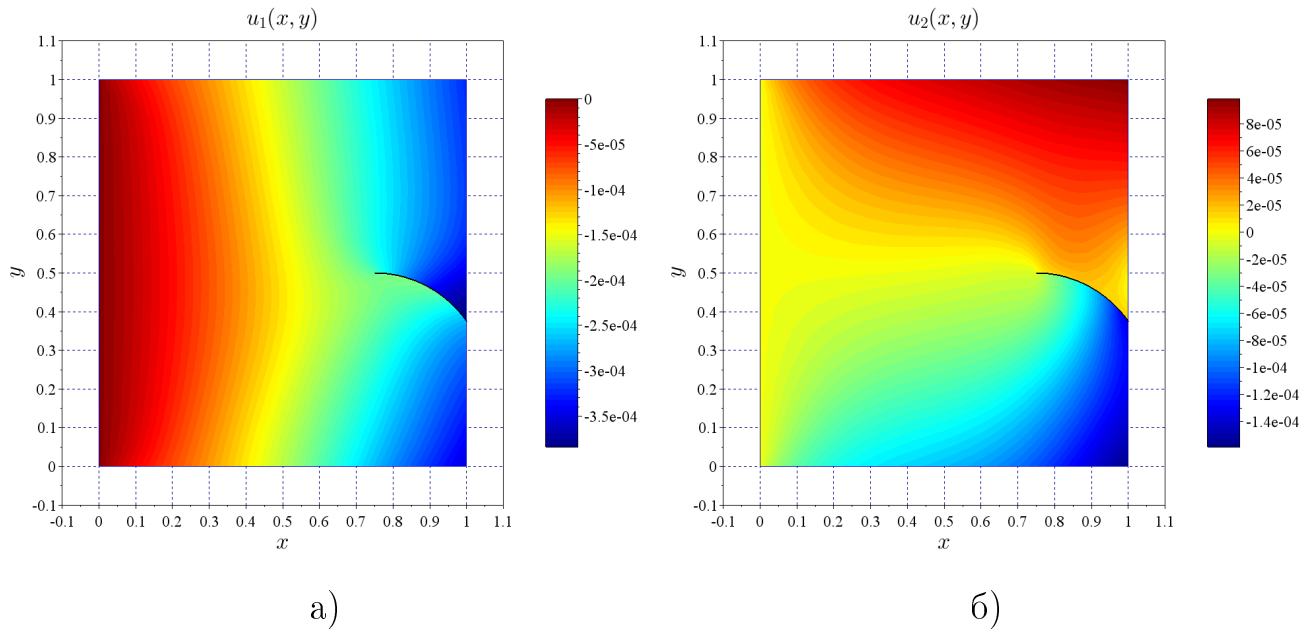


Рисунок 2.9 — Значение функций $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ при $g = 27$ МПа с трещиной γ_2

Численные расчёты показывают, что быстрая сходимость алгоритма (2.8)-(2.9) по двойственной переменной l обеспечивается малым числом шагов (ii). В примерах, приведённых выше, выполняется всего 5–8 итераций по двойственной переменной. Данное обстоятельство можно объяснить хорошими дифференциальными свойствами двойственного функционала $\underline{M}(l)$. Важным является выбор параметра r , определяющего шаг сдвига по двойственной переменной. В следующем пункте, на примере 3D упругой задачи с трещиной будет приведено сравнение предложенного модифицированного метода двойственности с его классическим аналогом, будет показана зависимость количества итераций (ii) алгоритма Удзавы от параметра r .

2.5 Решение задачи о равновесии 3D упругого тела с плоской трещиной

В данном пункте рассматривается 3D упругое тело с плоской трещиной. Как и в пунктах (2.1), (2.2) приводится краевая постановка задачи с нелинейными краевыми условиями, обеспечивающими взаимное непроникание берегов трещины друг в друга. Задача, рассматриваемая в данном пункте, не может

быть сведена к плоской модели, так как зона контакта берегов трещины может состоять из двух множеств. Также применение плоской модели ограничено влиянием границ области Ω .

2.5.1 Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с липшицевой границей Γ , а $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ – достаточно гладкая открытая поверхность без самопересечений (трещина). Геометрия области выбиралась в виде единичного куба $\{0 < x_i < 1, i = 1, 2, 3\}$ с плоской трещиной $\gamma = \{0.25 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, x_3 = 0.5\}$. Обозначим через $\Gamma_D = \{x_1 = 0, 0 < x_i < 1, i = 2, 3\}$ – участок границы Γ , где тело закреплено, а Γ_N^\pm часть границы Γ , где на тело действуют поверхностные силы.

На рисунке 2.10, участки Γ_N^\pm выделены цветом, а стрелками указано направление действующих сил. Пусть $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ – вектор единичной нормали к γ . В соответствии с направлением вектора \mathbf{v} обозначим верхний γ^+ и нижний γ^- берега трещины. Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$.

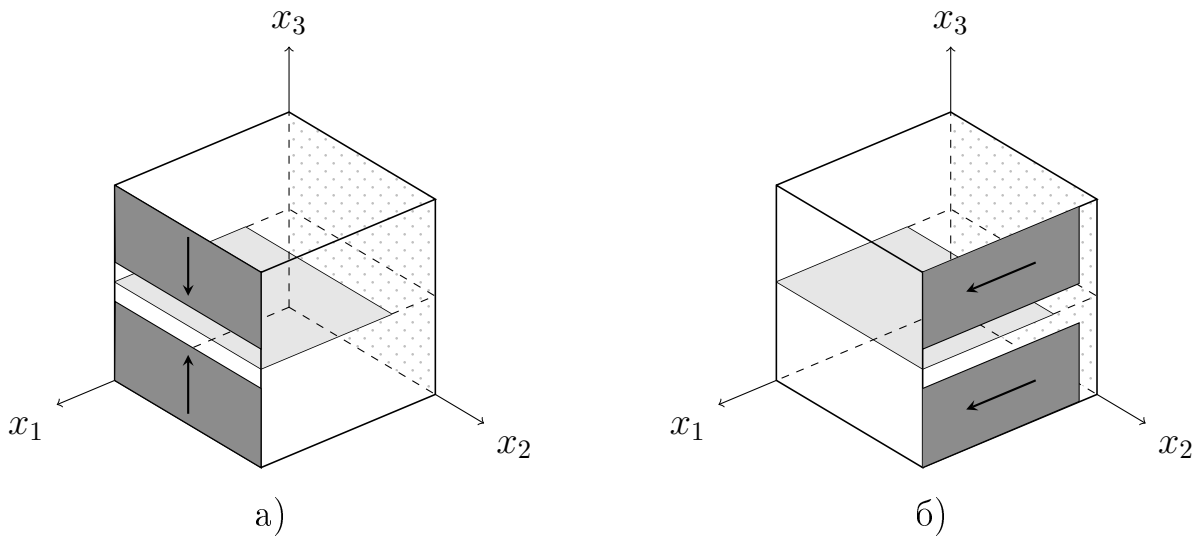


Рисунок 2.10 — Геометрия области Ω и нагрузка

Для вектора перемещений $u = (u_1, u_2, u_3)$, определим тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ и линейный тензор деформаций $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, 3$). Определим вектор-функции объёмных $f \in [L_2(\Omega_\gamma)]^3$ и поверхностных $p \in [L_2(\Gamma_N)]^3$ сил, действующих на тело.

Рассмотрим следующую краевую задачу о равновесии 3D упругого тела, занимающего в естественном состоянии область Ω_γ [13; 14]. Требуется найти вектор перемещений u , такой, что:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u) &= f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \\ u &= 0 \quad \text{на } \Gamma_D, \\ \sigma(u)n &= p \quad \text{на } \Gamma_N, \\ [u_\nu] &\geq 0, [\sigma_\nu(u)] = 0, \sigma_\nu(u)[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \\ \sigma_\nu(u) &\leq 0, \sigma_\tau(u) = 0 \quad \text{на } \gamma^\pm. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Здесь $n = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор единичной внешней нормали Γ , $[u_\nu] = u_\nu^+ - u_\nu^-$ – скачок функции $u_\nu = u_i \nu_i$ на γ ; u_ν^\pm следы функции u_ν на γ^\pm ; $\sigma_\nu(u) = \sigma_{ij}(u) \nu_i \nu_j$, $\sigma_\tau(u) = \sigma(u) \nu - \sigma_\nu(u) \nu$ – нормальная и тангенциальная компоненты напряжения на γ ; $[\sigma_\nu(u)] = \sigma_\nu^+(u) - \sigma_\nu^-(u)$.

Краевая задача (2.28) принадлежит к классу задач с неизвестной зоной слипания берегов трещины. Приведём вариационную постановку данной задачи. Для этого определим функциональное пространство

$$H_\Gamma^1(\Omega_\gamma) = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in [H^1(\Omega_\gamma)]^3 \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$$

и множество допустимых перемещений

$$K = \{v \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma) \mid [v_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma\}.$$

Рассмотрим функционал потенциальной энергии на пространстве $H_\Gamma^1(\Omega_\gamma)$

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_N} p_i v_i d\Gamma.$$

Тогда краевая задача (2.28) соответствует следующей вариационной задаче минимизации функционала J [14; 43]

$$\begin{cases} J(v) \rightarrow \min, \\ v \in K. \end{cases} \tag{2.29}$$

Таким образом, необходимо функцию $u \in K$ такую, что

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Известно, что решение задачи (2.29) существует и оно единственное [13; 14].

2.5.2 Классическая и модифицированная схемы двойственности

Для решения (1.6) определим классический функционал Лагранжа на пространстве $H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}) \times L_2(\gamma)$

$$L(v, l) = J(v) + \int_{\gamma} l(-[v_{\nu}]) d\Gamma.$$

Согласно определению 1 в пункте 1.3, если (v^*, l^*) – седловая точка функционала $L(v, l)$, тогда v^* решение задачи (2.29), а l^* решение соответствующей двойственной задачи

$$\begin{cases} \underline{L}(l) \rightarrow \sup, \\ l \in (L_2(\gamma))^+, \end{cases} \quad (2.30)$$

где

$$\underline{L}(l) = \inf_{v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})} L(v, l).$$

Так как $\text{meas } \Gamma_D > 0$, то функционал $L(v, l)$ является сильно выпуклым по переменной $v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})$ при фиксированном $l \in L_2(\gamma)$. Следовательно

$$\inf_{v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})} L(v, l) = \min_{v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})} L(v, l).$$

Также определим модифицированный функционал Лагранжа на пространстве $H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}) \times L_2(\gamma)$

$$M(v, l) = J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left([(l - r[v_{\nu}])^+]^2 - l^2 \right) d\Gamma,$$

$r > 0$ – произвольная положительная константа.

Можно показать, что множество седловых точек классического и модифицированного функционалов Лагранжа совпадают [43; 115]. Вторая компонента седловой точки l^* функционала Лагранжа M является решением соответствующей двойственной задачи

$$\begin{cases} \underline{M}(l) \rightarrow \sup, \\ l \in L_2(\gamma), \end{cases} \quad (2.31)$$

где

$$\underline{M}(l) = \inf_{v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})} M(v, l).$$

Для нахождения седловой точки классического функционала Лагранжа в работе используется алгоритм Удзавы [29; 57; 61; 65; 100].

$$\text{найти } u^k \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}) : L(u^k, l^k) \leq L(v, l^k) \quad \forall v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}), \quad (2.32)$$

$$l^{k+1} = P_{(L_2(\gamma))^+}(l^k - \rho \kappa[u_{\nu}^k]) = (l^k - \rho \kappa[u_{\nu}^k])^+, \quad (2.33)$$

где $P_{(L_2(\gamma))^+}$ – это оператор проектирования из $L_2(\gamma)$ в $(L_2(\gamma))^+$ по норме в $L_2(\gamma)$, $\rho > 0$, κ – оператор следа, действующий из $H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})$ в $L_2(\gamma)$, $(l^k - \rho \kappa[u_{\nu}^k])^+ = \max\{0, l^k - \rho \kappa[u_{\nu}^k]\}$.

Покажем дифференцируемость по Гато двойственного функционала $\underline{L}(l)$, а также

$$\nabla \underline{L}(l) = -\kappa[v_{\nu}(l)], \text{ где } v(l) = \arg \min_{v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})} L(v, l),$$

при этом

$$\|\nabla \underline{L}(l') - \nabla \underline{L}(l'')\|_{L_2(\gamma)} \leq \frac{1}{\alpha} \|l' - l''\|_{L_2(\gamma)} \quad \forall l', l'' \in L_2(\gamma),$$

α – константа сильной выпуклости $J(v)$. Для простоты далее мы опускаем оператор следа κ .

Легко видеть, что для $\forall v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})$

$$J(v(l)) - \int_{\gamma} l[v_{\nu}(l)] d\Gamma + \frac{\alpha}{2} \|v - v(l)\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})}^2 \leq J(v) - \int_{\gamma} l[v_{\nu}] d\Gamma \quad \forall v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}).$$

Обозначим через $\hat{v} = v(\hat{l}), \check{v} = v(\check{l})$. Тогда

$$\begin{aligned} J(\hat{v}) - \int_{\gamma} \hat{l}[\hat{v}_{\nu}] d\Gamma + \frac{\alpha}{2} \|\check{v} - \hat{v}\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})}^2 &\leq J(\check{v}) - \int_{\gamma} \hat{l}[\check{v}_{\nu}] d\Gamma, \\ J(\check{v}) - \int_{\gamma} \check{l}[\check{v}_{\nu}] d\Gamma + \frac{\alpha}{2} \|\check{v} - \hat{v}\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})}^2 &\leq J(\hat{v}) - \int_{\gamma} \check{l}[\hat{v}_{\nu}] d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Складывая неравенства в (2.34), получаем

$$\begin{aligned} \alpha \|\check{v} - \hat{v}\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma})}^2 &\leq \int_{\gamma} (\hat{l} - \check{l})([\check{v}_{\nu}] - [\hat{v}_{\nu}]) d\Gamma, \\ \alpha \|[\check{v}_{\nu}] - [\hat{v}_{\nu}]\|_{L_2(\gamma)}^2 &\leq \int_{\gamma} (\hat{l} - \check{l})([\check{v}_{\nu}] - [\hat{v}_{\nu}]) d\Gamma, \\ \|[\check{v}_{\nu}] - [\hat{v}_{\nu}]\|_{L_2(\gamma)}^2 &\leq \frac{1}{\alpha} \|\check{l} - \hat{l}\|_{L_2(\gamma)}^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Из вложения пространства $H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}) \subset L_2(\gamma)$ и неравенств (2.34) следует двустороннее неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \hat{l}([v_{\check{\nu}}] - [v_{\hat{\nu}}]) d\Gamma + \frac{\alpha}{2} \|[v_{\check{\nu}}] - [v_{\hat{\nu}}]\|_{L_2(\gamma)}^2 &\leq J(\check{v}) - J(\hat{v}) \leq \\ &\leq \int_{\gamma} \check{l}([v_{\check{\nu}}] - [v_{\hat{\nu}}]) d\Gamma - \frac{\alpha}{2} \|[v_{\check{\nu}}] - [v_{\hat{\nu}}]\|_{L_2(\gamma)}^2. \end{aligned}$$

Вместе с (2.35) это обеспечивает выполнение следующего предельного равенства

$$\lim_{\check{l} \rightarrow \hat{l}} J(\check{v}) = J(\hat{v}).$$

Отсюда следует, что вогнутый двойственный функционал $\underline{L}(l)$ является непрерывным в $L_2(\gamma)$. Более того, субдифференциал $\partial(-\underline{L}(l))$ выпуклого функционала $(-\underline{L}(l))$ не является пустым множеством для любого $l \in L_2(\gamma)$. Чтобы доказать дифференцируемость функционала $\underline{L}(l)$, достаточно показать, что множество $\partial(-\underline{L}(l))$ состоит всего из одного элемента. Этот элемент будет производной функционала $\underline{L}(l)$.

Пусть $l \in L_2(\gamma)$ – фиксированный элемент и $t \in \partial(-\underline{L}(l))$. Тогда для любого $m \in L_2(\gamma)$ справедливо следующее

$$\underline{L}(m) \leq \underline{L}(l) - \int_{\gamma} t(m - l) d\Gamma,$$

то есть

$$\begin{aligned} J(v(m)) - \int_{\gamma} m[v_{\check{\nu}}(m)] d\Gamma &\leq J(v(l)) - \int_{\gamma} l[v_{\check{\nu}}(l)] d\Gamma - \int_{\gamma} t(m - l) d\Gamma \leq \\ &\leq J(v(m)) - \int_{\gamma} l[v_{\check{\nu}}(m)] d\Gamma - \int_{\gamma} t(m - l) d\Gamma, \\ \int_{\gamma} [v_{\check{\nu}}(m)](l - m) d\Gamma + \int_{\gamma} t(m - l) d\Gamma &\leq 0, \\ \int_{\gamma} ([v_{\check{\nu}}(m)] - t)(l - m) d\Gamma &\leq 0. \end{aligned}$$

Выберем $m = l - \beta p$, $\beta > 0$, где $p \in L_2(\gamma)$ произвольная функция. Тогда

$$\int_{\gamma} ([v_{\nu}(l - \beta p)] - t)\beta p d\Gamma \leq 0 \quad \forall p \in L_2(\gamma),$$

$$\beta \int_{\gamma} ([v_{\nu}(l - \beta p)] - t)p d\Gamma \leq 0,$$

$$\int_{\gamma} ([v_{\nu}(l - \beta p)] - t)p d\Gamma \leq 0.$$

Переходя к пределу при $\beta \rightarrow 0$, получаем из последнего неравенства и (2.35), что $t = [v_{\nu}(l)]$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, на шаге (2.33) алгоритма Удзавы мы получаем метод проекции градиента. Стоит отметить, что алгоритм Удзавы с классическим функционалом Лагранжа сходится только по прямой переменной v , причём сходимость обеспечивается малым шагом сдвига по двойственной переменной l , а именно, если параметр сдвига выбирать согласно правилу

$$0 < \rho < \frac{2}{\|\kappa\|^2},$$

где $\|\kappa\|$ – норма оператора следа. В общем случае значение этой нормы определить достаточно трудно, ее величина зависит от формы границы расчётной области.

Используя подход, описанный выше для классического функционала Лагранжа, и слабую полунепрерывность снизу функционала чувствительности в $L_2(\gamma)$ [43], можно показать, что функционал $\underline{M}(l)$ также является дифференцируемым по Гато в $L_2(\gamma)$ и его производная $\nabla \underline{M}(l)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\frac{1}{r}$, то есть для любых $l', l'' \in L_2(\gamma)$ справедливо

$$\|\nabla \underline{M}(l') - \nabla \underline{M}(l'')\|_{L_2(\gamma)} \leq \frac{1}{r} \|l' - l''\|_{L_2(\gamma)} \quad \forall l', l'' \in L_2(\gamma).$$

и субдифференциал $\underline{M}(l)$ состоит из единственного элемента $\partial \underline{M}(l) = m(l)$

$$m(l) = \max\{-[u_{\nu}], -\frac{l}{r}\} \quad \forall l \in L_2(\gamma).$$

Алгоритм Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа будет выглядеть следующим образом

$$\text{найти } u^k \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}) : M(u^k, l^k) \leq M(v, l^k) \quad \forall v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_{\gamma}), \quad (2.36)$$

$$l^{k+1} = l^k + r m(l^k) = (l^k - r[u_{\nu}^k])^+. \quad (2.37)$$

То есть на шаге (2.37) мы получаем градиентный метод.

Таким образом, мы показали, что модифицированные функционалы Лагранжа позволяют более эффективно решать задачи условной минимизации типа (2.29) по сравнению с их классическими аналогами. Во-первых, они позволяют доказать теоретическую сходимость алгоритма Удзавы как по прямой, так и по двойственной переменной. А во-вторых, для нахождения второй компоненты седловой точки модифицированного функционала Лагранжа используется чисто градиентный метод, который имеет более высокую скорость сходимости, чем метод проекции градиента.

2.5.3 Численные эксперименты

Для численного решения задачи используем метод конечных элементов. Мы дискретизируем область Ω_γ с помощью триангуляции Делоне, со сгущением сетки вблизи трещины и применяем стандартные кусочно-линейные базисные функции. В результате область Ω_γ была разбита на 1749882 тетраэдров с количеством узлов $N = 310636$. Параметр триангуляции на трещине равен $h = 0.01$.

Параметры численного решения выбирались как в статье [116], где также рассматривается решение 3D задачи теории упругости с трещиной. Для удобства задаём объёмные силы $f = 0$, физические параметры $E = 73000$ МПа, $\mu = 0.34$. Полагаем, что тело закреплено на Γ_D , а на Γ_N^\pm на него действуют поверхностные силы. Оставшаяся часть границы Γ считается свободной от напряжения. Как показано на рисунке 2.10 в работе рассматривается два примера.

Для первого примера, изображённого на рисунке 2.10а, поверхностные силы задаются следующим образом

$$\begin{aligned} -\sigma_{13}(u) &= \mp g, & -\sigma_{11}(u) &= -\sigma_{12}(u) = 0 \text{ на } \Gamma_N^\pm, \\ \Gamma_N^+ &= \{x_1 = 1, 0 < x_2 < 1, 0.6 < x_3 < 1\}, \\ \Gamma_N^- &= \{x_1 = 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 0.4\}, \end{aligned}$$

где $g = 27$ МПа.

Для второго примера (рис. 2.10б) аналогично задаются

$$\begin{aligned} -\sigma_{12}(u) &= -g, \quad \sigma_{22}(u) = \sigma_{32}(u) = 0 \text{ on } \Gamma_N^\pm, \\ \Gamma_N^+ &= \{0.1 < x_1 < 1, x_2 = 1, 0.6 < x_3 < 1\}, \\ \Gamma_N^- &= \{0.1 < x_1 < 1, x_2 = 1, 0 < x_3 < 0.4\}. \end{aligned}$$

Как и для 2D задачи рассмотрим построение элементной матрицы жёсткости. Конечным элементом в нашем случае является тетраэдр с четырьмя узлами в вершинах (рисунок 2.11). Мы рассматриваем кусочно-линейные базисные функции, поэтому функции формы будут совпадать с тетраэдральными координатами $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, которые являются трёхмерным аналогом треугольных координат, рассмотренных ранее. Координаты ξ_i не являются независимыми, они принимают значение единицы в i -ом узле и нуля в оставшихся. Сумма четырёх координат равна единице:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 1.$$

Геометрически тетраэдральные координаты имеют тот же смысл, что и треугольные, только выражение $\xi_i = C, C \in [0,1]$ задаёт уравнение не прямой, а плоскости, параллельной грани тетраэдра, противоположной i -му узлу.

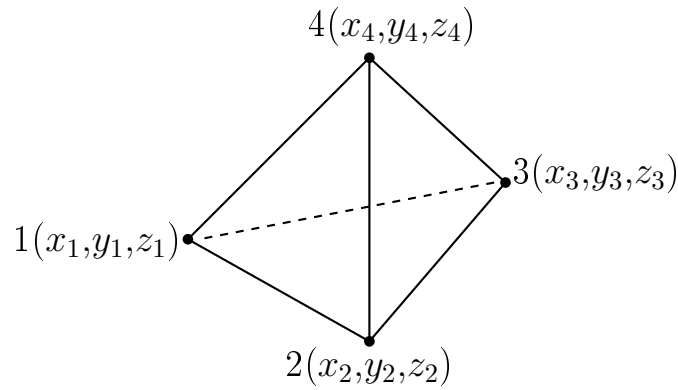


Рисунок 2.11 — Конечный элемент в форме тетраэдра с 4-мя узлами

Связь между декартовыми координатами $\{x, y, z\}$ ($x = x_1, y = x_2, y = x_3$) и тетраэдральными координатами $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$ задаётся следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Матрица 4×4 выше называется матрицей Якоби перехода к новым координатам. Обратная связь определяется как:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6\mathbb{V}} \begin{bmatrix} 6\mathbb{V}_1 & y_{42}z_{32} - y_{32}z_{42} & x_{32}z_{42} - x_{42}z_{32} & x_{42}y_{32} - x_{32}y_{42} \\ 6\mathbb{V}_2 & y_{31}z_{43} - y_{34}z_{13} & x_{43}z_{31} - x_{13}z_{34} & x_{31}y_{43} - x_{34}y_{13} \\ 6\mathbb{V}_3 & y_{24}z_{14} - y_{14}z_{24} & x_{14}z_{24} - x_{24}z_{14} & x_{24}y_{14} - x_{14}y_{24} \\ 6\mathbb{V}_4 & y_{13}z_{21} - y_{12}z_{31} & x_{21}z_{13} - x_{31}z_{12} & x_{13}y_{21} - x_{12}y_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Или в более компактном виде, переобозначив элементы матрицы через a_i, b_i, c_i :

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6\mathbb{V}} \begin{bmatrix} 6\mathbb{V}_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 6\mathbb{V}_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 6\mathbb{V}_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 6\mathbb{V}_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Здесь как и ранее $x_{jk} = x_j - x_k$, $y_{jk} = y_j - y_k$, $z_{jk} = z_j - z_k$, \mathbb{V} – объём тетраэдра. Пусть точка P внутри тетраэдра имеет координаты $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, тогда выражения $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3, \mathbb{V}_4$ обозначают объёмы тетраэдров с вершинами $234P, 341P, 412P$ и $123P$ соответственно.

Элемент имеет 12 степеней свободы, соответствующих компонентам вектора перемещений в узлах тетраэдра:

$$u^e = [u_{x_1} \ u_{y_1} \ u_{z_1} \ u_{x_2} \ u_{y_2} \ u_{z_2} \ u_{x_3} \ u_{y_3} \ u_{z_3} \ u_{x_4} \ u_{y_4} \ u_{z_4}]^T.$$

Матрицы \mathbf{E} и \mathbf{B} для линейного конечного элемента в форме тетраэдра примут следующий вид:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{6\mathbb{V}} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 \\ b_1 & a_1 & 0 & b_2 & a_2 & 0 & b_3 & a_3 & 0 & b_4 & a_4 & 0 \\ 0 & c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 & c_4 & b_4 \\ c_1 & 0 & a_1 & c_2 & 0 & a_2 & c_3 & 0 & a_3 & c_4 & 0 & a_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \begin{bmatrix} 1 - \mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 - \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \mu \end{bmatrix}.$$

Таким образом, элементная матрица жёсткости может быть вычислена с помощью формулы:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega^e = \mathbb{V} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}. \quad (2.41)$$

Если на тело действует только сила тяжести вектор объёмных сил вычисляется как:

$$\mathbf{F}^e = -\frac{1}{4} \rho \mathbf{g} \mathbb{V} [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \quad (2.42)$$

где ρ – плотность тела, \mathbf{g} – ускорение свободного падения. Из (2.42) следует, что суммарная сила тяжести $\rho \mathbf{g} \mathbb{V}$, действующая на конечный элемент, должна быть равномерно распределена между четырьмя угловыми узлами. Аналогичным образом можно получить вектор поверхностных сил, действующих по нормали на одну из граней тетраэдра. Ансамблирование глобальной матрицы жёсткости выполняется тем же способом, что и в двумерном случае, описанном ранее.

После дискретизации для решения задачи (2.29) мы используем обобщенный метод Ньютона, описанный в пункте 2.4. Вычисления проводились на NVIDIA Tesla P100 GPU с использованием библиотек cuBLAS, cuSPARSE. В численных примерах, рассмотренных для плоской задачи, размерность матрицы жёсткости была сравнительно небольшой, порядка 5000×5000 . Поэтому для её обращения использовалась библиотека cuBLAS. В трёхмерном случае мы получаем разреженную матрицу большой размерности $3N \times 3N$, $N = 310636$, обращение которой не эффективно. Поэтому на шаге (2.26), вместо обращения матрицы, мы решаем СЛАУ с помощью метода сопряжённых градиентов с предобуславливанием

$$\partial g(t^m) z^m = -g(t^m),$$

где $z^m = t^{m+1} - t^m$. Для расчёта предобуславливателя используется неполное разложение Холецкого (IC0) [117]. Условие останова для метода сопряжённых градиентов $\frac{\|r_k\|_2}{\|r_0\|_2} < 10^{-14}$, где $\|r_k\|_2$ – норма невязки.

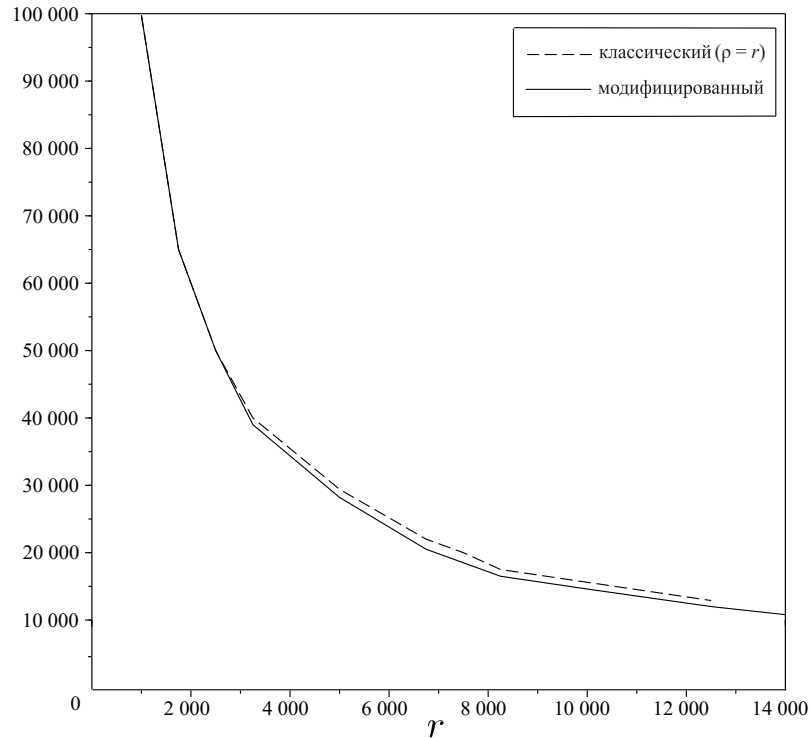


Рисунок 2.12 — Количество итераций по двойственной переменной в зависимости от параметра r .

На рисунке 2.12 отображена зависимость количества итераций (2.27) от параметра r для классического и модифицированного функционалов Лагранжа (Пример 1). Из графиков видно, что с увеличением параметра r , количество итераций по двойственной переменной уменьшается. Помимо этого, видно что алгоритм Удзавы с классическим функционалом Лагранжа перестаёт сходиться при $r > 13000$, в отличие от модифицированного аналога. Что подтверждает теоретические выводы, сделанные в пункте 2.5.2.

В таблице 3 представлены результаты численного решения задачи с использованием алгоритма Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа для больших значений параметра r (Пример 1). В ней показано среднее количество итераций (2.26) по прямой переменной и количество итераций по двойственной переменной (2.27). Видно, что обобщенный метод Ньютона сходится за небольшое число итераций и количество итераций по двойственной переменной существенно уменьшается, при увеличении параметра r .

Таблица 3 — Количество итераций по прямой и двойственной переменной.

r	Итер. по t	Итер. по α
10^6	3	223
10^7	4	31
10^8	4	9
10^9	4	5
10^{10}	5	3

Графики на рисунке 2.13 показывают значения компонент вектора перемещений u и двойственной переменной l для первого примера. Можно видеть, что взаимное проникание берегов трещины друг в друга отсутствует. Значение двойственной переменной больше нуля в точках, где берега трещины слипаются. Это указывает на наличие нормального напряжения в этих узлах.

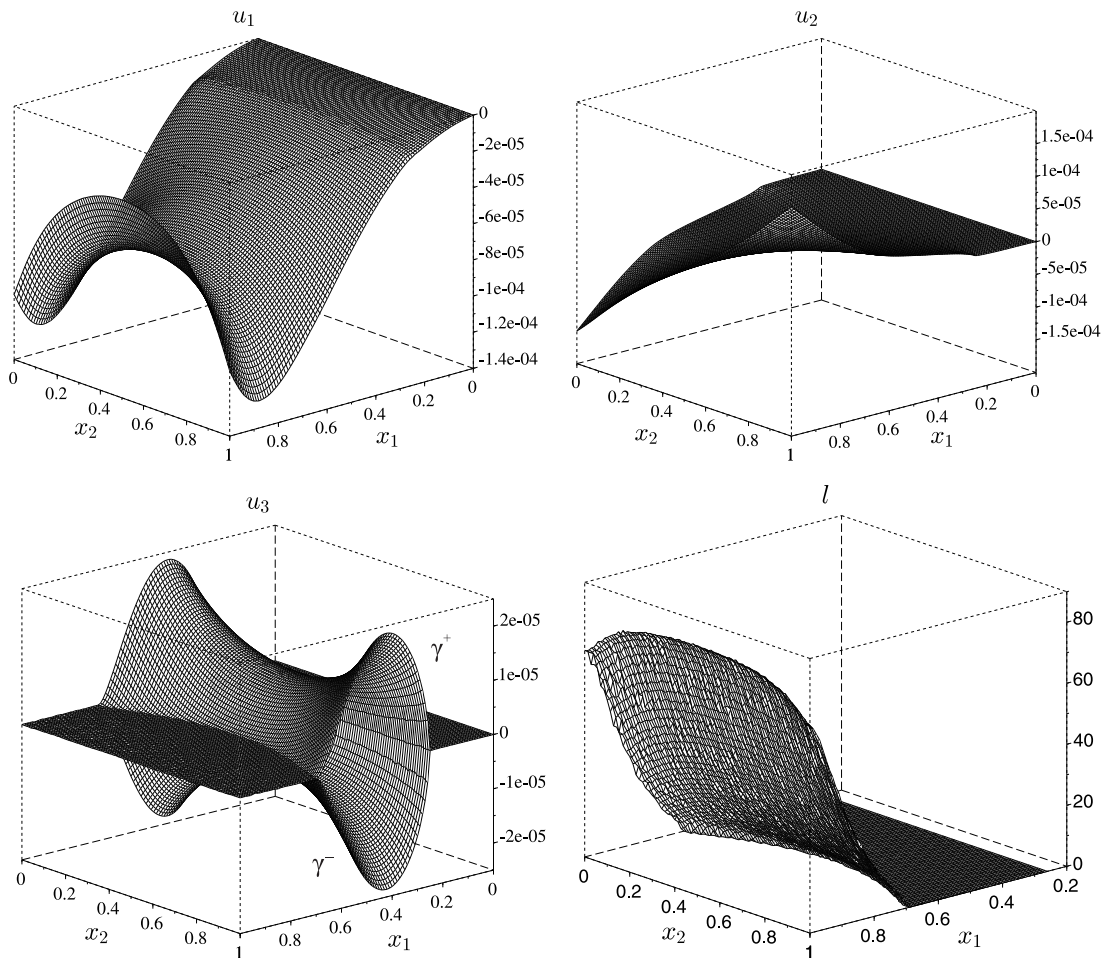


Рисунок 2.13 — Перемещения и значение двойственной переменной на трещине для первого примера

Аналогично, для второго примера, результаты численного решения представлены на рисунке 2.14. Как и в первом примере, взаимное проникание берегов трещины отсутствует. Область слипания разделилась на две части.

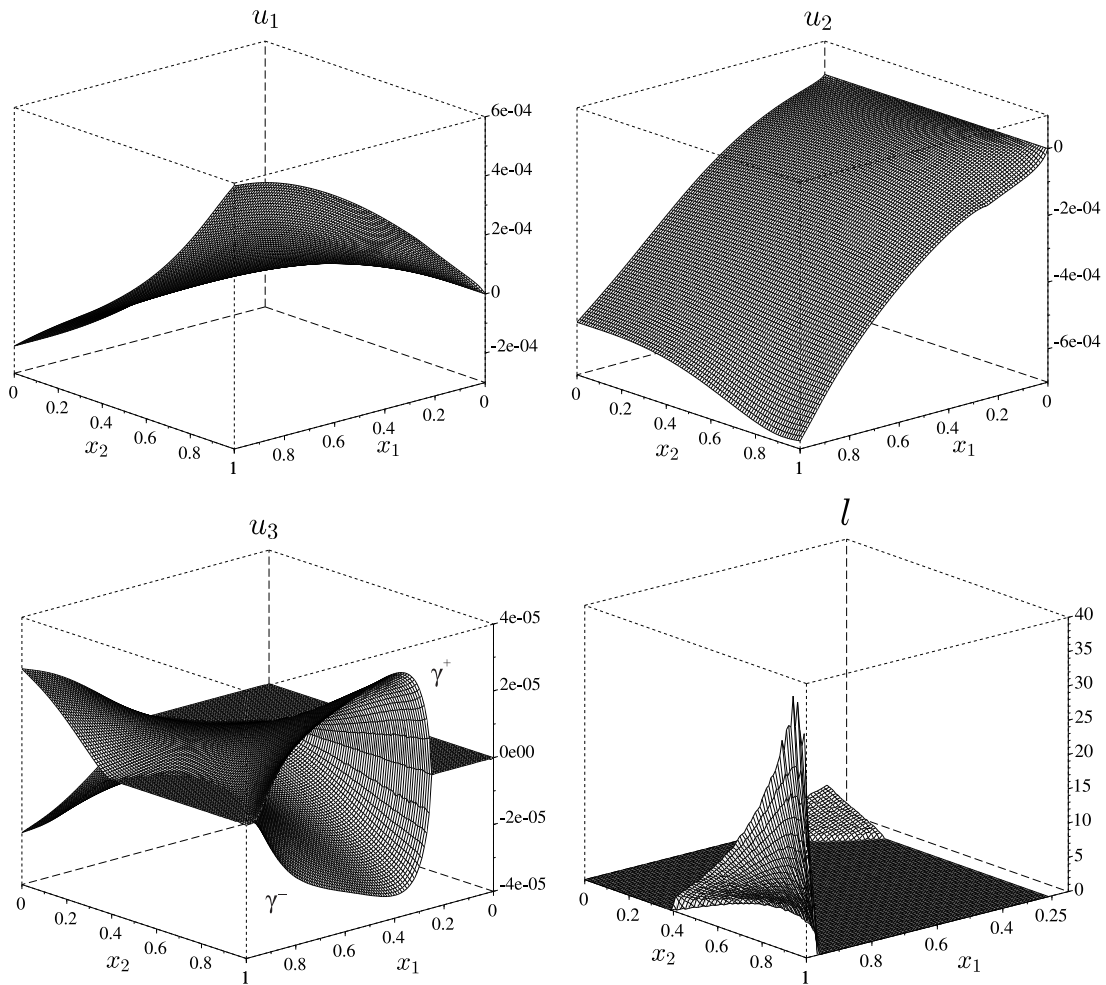


Рисунок 2.14 — Перемещения и значение двойственной переменной на трещине для второго примера

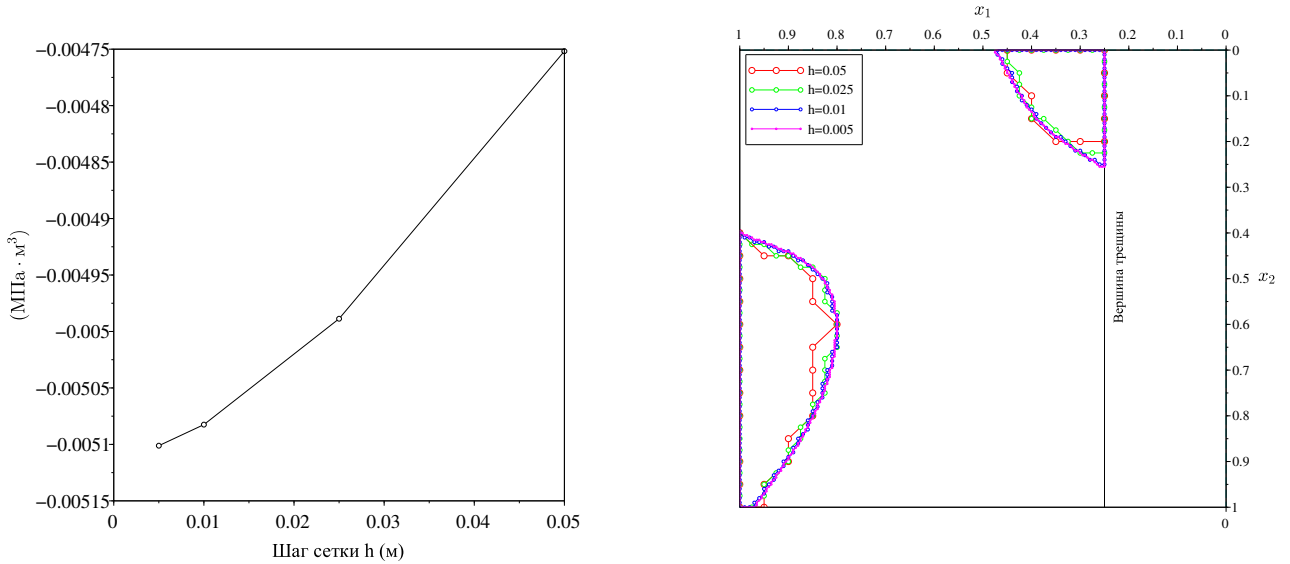
Далее приводится сравнение результатов численного решения задачи при разных значениях шага сетки h . Количество узлов триангуляции N в зависимости от h представлено в таблице 4. Расчёты проводились для второго примера со значением параметра $r = 10^8$.

Таблица 4 — Количество узлов для шага сетки h .

Шаг сетки h	0.05	0.025	0.01	0.005
Количество узлов N	2848	20935	310636	2442271

Численные решения, полученные для разных h , сравниваются относительно потенциальной энергии (рис. 2.15а) и зоны контакта берегов трещины

(рис. 2.15б). На графике 2.15а, можно наблюдать сходимость значений потенциальной энергии при уменьшении h . При этом сами значения функционала потенциальной энергии уменьшаются, что является естественным, так как при уменьшении шага сетки конечно-элементное пространство функций, на котором ищется решение, лучше аппроксимирует исходное гильбертово пространство. Рисунок 2.15б показывает, что полученные зоны контакта близки друг к другу.



а) Потенциальная энергия

б) Зона контакта

Рисунок 2.15 — Характеристики решения при уменьшении h

В таблице 5 приводятся количество итераций по двойственной переменной l , количество итераций обобщённого метода Ньютона на первом шаге алгоритма Удзавы ($k=0$) и среднее количество итераций по прямой переменной t . Можно видеть, что при уменьшении h количество итераций по l и t умеренно возрастает.

Таблица 5 — Количество итераций по прямой и двойственной переменной для шага сетки h .

Шаг сетки h	0.05	0.025	0.01	0.005
Количество итераций по l	5	6	8	11
Количество итераций по t ($k=0$)	9	10	11	12
Среднее количество итераций по t	3	3	3	3

Расчёты показывают, что наиболее затратным относительно количества итераций по прямой переменной, является первый шаг алгоритма Удзавы

($k=0$). Приведённые результаты иллюстрируют стабильное поведение модифицированного метода двойственности в зависимости от параметра триангуляции h .

Численные результаты хорошо коррелируются с расчётами, полученными в работе [116]. Таким образом, на примере 3D задачи теории упругости с трещиной было показано, что модифицированная схема двойственности обладает рядом преимуществ, как в теоретическом, так и практическом плане, по сравнению с классическим аналогом.

Глава 3. Решение контактной задачи теории упругости с отслоившимся жёстким включением

В связи с широким применением композиционных материалов в инженерной практике исследование краевых задач о равновесии упругих тел, содержащих жёсткие включения, являются важной актуальной проблемой. В результате эксплуатации композита включения могут отслаиваться от упругого тела, тем самым образуя трещины, берега которых не проникают друг в друга.

Метод решения заключается в том, что задачу о равновесии упругого тела, содержащего жёсткое включение, на границе которого расположена трещина, оказывается, можно рассматривать как предельную для семейства задач о равновесии упругих тел с трещиной, исследованных во 2-ой главе.

Как в предыдущей главе здесь приводится численный метод решения задачи, который основан на модифицированной схеме двойственности и алгоритме Удзавы. Приводятся результаты численного счета с помощью МКЭ.

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу о равновесии упругого тела, содержащего жёсткое включение, на границе которого расположена трещина. Предполагаем, что на берегах трещины заданы краевые условия взаимного непроникания берегов.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - ограниченная область с достаточно регулярной границей $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\omega \subset \Omega$ - подобласть с достаточно регулярной границей Σ такая, что $\bar{\omega} \cap \Gamma = \emptyset$ (рисунок 3.1). Предположим, что Σ состоит из двух частей γ и $\Sigma \setminus \gamma$, $\text{meas}(\Sigma \setminus \gamma) > 0$, где γ - гладкая линия, без самопересечений.

Обозначим через $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ единичный вектор внешней нормали к Σ . Подобласть ω будет соответствовать жёсткому включению, а линия γ - трещине, расположенной на поверхности этого включения. Область $\Omega \setminus \bar{\omega}$ соответствует упругой части тела.

Термин "жёсткое включение" означает, что перемещения точек подобласти ω являются элементами пространства $R(\omega)$ инфинитезимальных жёстких перемещений, которое определяется следующим образом

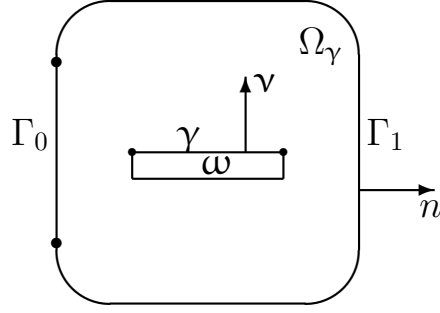


Рисунок 3.1 — Упругое тело с отслоившимся жёстким включением

$$R(\omega) = \{ \rho = (\rho_1, \rho_2) : \rho(x) = Bx + C, x \in \omega \} ,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, C = (c^1, c^2); b, c^1, c^2 - \text{произвольные постоянные.}$$

Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$.

Для вектора перемещений $v = (v_1, v_2)$ тензоры деформаций $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ и напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ связаны линейным законом Гука. Пусть $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, где Γ_0, Γ_1 - непустые открытые попарно непересекающиеся подмножества Γ . Кроме того, пусть заданы вектор функции $f = (f_1, f_2)$ и $p = (p_1, p_2)$ объёмных и поверхностных сил соответственно.

Краевая постановка задачи о равновесии упругого тела, содержащего жёсткое включение ω и трещину γ , формулируется следующим образом. В области Ω_γ требуется найти функцию $u = (u_1, u_2)$, $u = \rho_0$ на ω , $\rho_0 \in R(\omega)$ такую, что

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= f_i \text{ в } \Omega \setminus \bar{\omega} , \\ \sigma_{ij} &= c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ в } \Omega \setminus \bar{\omega} , \\ u &= 0 \text{ на } \Gamma_0 , \\ \sigma_{ij} n_j &= p_i \text{ на } \Gamma_1, i = 1, 2 , \\ (u - \rho_0) \nu &\geq 0 \text{ на } \gamma^+ , \\ \sigma_\nu(u) &\leq 0, \sigma_\tau(u) = 0 \text{ на } \gamma^+ , \\ \sigma_\nu \cdot (u - \rho_0) \nu &= 0 \text{ на } \gamma^+ , \\ - \int_{\Sigma} \sigma \nu \cdot \rho d\Gamma &= \int_{\omega} f \rho d\Omega \quad \forall \rho \in R(\omega) . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $n = (n_1, n_2)$ - вектор единичной внешней нормали к Γ , γ^+ - положительный берег трещины γ , $\sigma_\nu(u) = \sigma_{ij}(u)\nu_i\nu_j$, $\sigma_\tau(u) = \sigma(u) - \sigma_\nu \cdot \nu$, где $\sigma(u) = (\sigma_1(u), \sigma_2(u))$, $\sigma_i(u) = \sigma_{ij}(u)\nu_j$, $i = 1, 2$. Последнее интегральное равенство соответствует условию равновесия на жёстком включении.

Приведём вариационную постановку задачи (1.1). Введём пространство

$$H_{\Gamma_0}^{1,\omega} = \{v = (v_1, v_2) \in [H^1(\Omega_\gamma)]^2 : v = \rho \text{ на } \omega; \rho \in R(\omega); v = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

и определим множество допустимых перемещений

$$K_\omega = \left\{ v \in H_{\Gamma_0}^{1,\omega} : (v - \rho)\nu \geq 0 \text{ на } \gamma^+ \right\}.$$

Вариационная постановка задачи о равновесии упругого тела, содержащего жёсткое включение ω и трещину γ имеет вид [14]

$$\begin{cases} J(v) \rightarrow \min, \\ v \in K_\omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

в которой выпуклый функционал потенциальной энергии $J(v)$ выглядит следующим образом

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i v_i d\Gamma,$$

$$f \in [L_2(\Omega_\gamma)]^2, p \in [L_2(\Gamma_1)]^2.$$

При условии, что тензор модулей упругости $C = \{c_{ijkl}\}$ обладает свойством положительной определённости и $c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$, задача (3.2) имеет решение u , которое одновременно удовлетворяет вариационному неравенству

$$u \in K_\omega : \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v-u) d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f_i (v_i - u_i) d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i (v_i - u_i) d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K_\omega.$$

Нетрудно показать, что решение u единственное.

3.2 Метод решения

Предлагаемый метод решения основан на том, что задачу о равновесии упругого тела, содержащего жёсткое включение, на границе которого расположена трещина, оказывается, можно рассматривать как предельную для семейства задач о равновесии упругих тел с трещиной, сформулированных в области Ω_γ [14]. Для упругих пластин с тонким включением данный метод изучен в работах [118–120]. Это означает, что можно построить семейство задач с положительным параметром λ таких, что для любого фиксированного $\lambda > 0$ задача описывает равновесие упругого тела, занимающего область Ω_γ с трещиной γ . При этом, при $\lambda \rightarrow 0$ мы получим жёсткое включение ω , так что каждая точка $x \in \omega$ имеет перемещение $\rho_0(x)$, $\rho_0 \in R(\omega)$ [14, с. 81]. Дадим необходимое пояснение к сказанному.

Введем тензор $C^\lambda = \{c_{ijkl}^\lambda\}$, $i, j, k, l = 1, 2$,

$$c_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} c_{ijkl} & \text{в } \Omega \setminus \overline{\omega}, \\ \lambda^{-1} c_{ijkl} & \text{в } \omega \end{cases}$$

и рассмотрим следующее семейство задач с трещиной, подробно исследованных в Главе 2. В области Ω_γ найти функцию $u^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda)$, $i, j = 1, 2$ такую, что:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \sigma_{ij}^\lambda}{\partial x_j} &= f_i \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_{ij}^\lambda &= c_{ijkm}^\lambda \varepsilon_{km}(u^\lambda) \quad \text{в } \Omega_\gamma, \\ u^\lambda &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ \sigma_{ij}^\lambda n_j &= p_i \quad \text{на } \Gamma_1, \quad i = 1, 2, \\ [u^\lambda] \mathbf{v} &\geq 0, \quad [\sigma_{ij}^\lambda] = 0, \quad \sigma_{ij}^\lambda \cdot [u^\lambda] \mathbf{v} = 0, \quad \text{на } \gamma, \\ \sigma_{ij}^\lambda &\leq 0, \quad \sigma_{ij}^\lambda = 0 \quad \text{на } \gamma^\pm. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Вариационная постановка задачи (3.3) имеет вид

$$\begin{cases} J^\lambda(v) \rightarrow \min, \\ v \in K, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $J^\lambda(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}^\lambda(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i v_i d\Gamma$, K – множество допустимых перемещений.

Решение u^λ задачи (3.4) удовлетворяет вариационному неравенству

$$u^\lambda \in K : \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}^\lambda(u^\lambda) \varepsilon_{ij}(v - u^\lambda) d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f_i(v_i - u_i^\lambda) d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i(v_i - u_i^\lambda) d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

В [14] доказывається, что решения u^λ при $\lambda \rightarrow 0$ слабо сходятся в W к решению u задачи (3.4).

Теорема 9. *Имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} J^\lambda(u^\lambda) = J(u).$$

Доказательство. Отметим, что функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i v_i d\Gamma$$

является выпуклым и непрерывным в W функционалом. Имеем

$$J^\lambda(u^\lambda) = J(u^\lambda) + \frac{1}{2\lambda} \int_{\omega} \sigma_{ij}(u^\lambda) \varepsilon_{ij}(u^\lambda) d\Omega.$$

Так как $\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma_{ij}(u^\lambda) \varepsilon_{ij}(u^\lambda) d\Omega \geq 0$, то

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} J^\lambda(u^\lambda) \geq \liminf_{\lambda \rightarrow 0} J(u^\lambda) \geq J(u).$$

Последнее неравенство следует из слабой сходимости u^λ к u . С другой стороны для $\lambda > 0$ и любого $v \in K_\omega$ справедливо

$$J^\lambda(u^\lambda) \leq J^\lambda(v) = J(v).$$

Поэтому

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} J^\lambda(u^\lambda) \leq J^\lambda(u).$$

Следовательно

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} J^\lambda(u^\lambda) \leq J^\lambda(u) \leq \underline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} J^\lambda(u^\lambda),$$

то есть существует

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} J^\lambda(u^\lambda) = J(u).$$

□

Из теоремы 9 следует, что при $\lambda \rightarrow 0$ имеет место сходимость последовательности решений (3.4) $\{u^\lambda\}$ к решению задачи (3.3) u по функционалу задачи J . Для задачи (3.4) с фиксированным параметром λ применяется схема двойственности, исследованная в Главе 2.

3.3 Численное решение задачи

Результаты пункта 3.2 дают основание представить решение упругой задачи с жёстким включением как предел при $\lambda \rightarrow 0$ на области Ω_γ решений задач с трещиной вида (3.4).

Для задачи (3.4) с фиксированным λ составим двойственную задачу [109; 110]

$$\begin{cases} \underline{M}(l) - \sup, \\ l \in L_2(\gamma), \end{cases} \quad (3.5)$$

где

$$\underline{M}(l) = \inf_{v \in W} M(v, l) = \inf_{v \in W} \left\{ J^\lambda(v) + \frac{1}{2r} \int_\gamma \left\{ [(l - r[v_\nu])^+]^2 - l^2 \right\} d\Gamma \right\},$$

и $(l - r[v_\nu])^+ \equiv \max\{0, l - r[v_\nu]\}$, $r > 0 - \text{const}$.

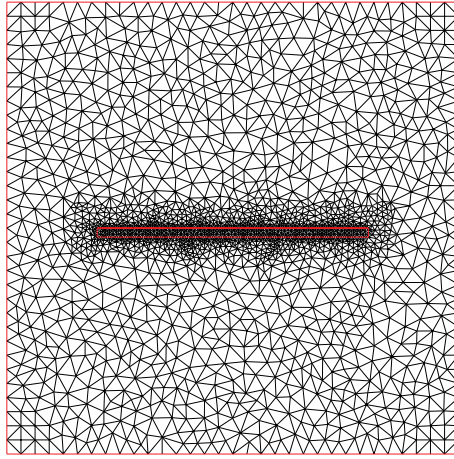
В предыдущей главе было доказано основное соотношение двойственности вида

$$\sup_{l \in L_2(\gamma)} \underline{M}(l) = \inf_{v \in K} J^\lambda(v).$$

Двойственная задача (3.5) решается с помощью градиентного метода Удзавы (2.8), (2.9).

Область Ω выбиралась в виде единичного квадрата с границей Γ , где включение занимает область $\omega = \{0.2 < x_1 < 0.8, 0.48 < x_2 < 0.5\}$ и трещина отслоения $\gamma = \{0.2 < x_1 < 0.8, x_2 = 0.5\}$. Для численного решения задачи (2.8) воспользуемся методом конечных элементов. На рисунке 3.2 представлено разбиение области Ω с помощью триангуляции Делоне. Область Ω была разбита на 4638 треугольников с 2384 узлами, с шагом сетки на включении ω равным $h = 0.005$.

Для решения задачи минимизации (3.4) с фиксированным параметром λ в конечно-элементном приближении применяется метод поординатного спуска и обобщённый метод Ньютона, описанный в пункте 2.4. Однако для задачи с жёстким включением метод поординатного спуска показал невысокую скорость сходимости. При уменьшении параметра λ растёт число обусловленности

Рисунок 3.2 — Триангуляция области Ω

матрицы жёсткости, что влечёт за собой большое количество итераций по прямой переменной, для $\lambda = \{0.1, 0.01\}$ требуется $\{219938, 1164917\}$ итераций соответственно и это количество продолжает существенно расти с уменьшением параметра λ . Вычисления проводились с точностью $\varepsilon_t = 10^{-14}$, $\varepsilon_\alpha = 10^{-8}$.

Приведем результаты численного решения поставленной задачи. Значения параметров брались следующими: $f = (f_1, f_2) = (0, 0)$, поверхностное усилие с правой $p_1|_{\Gamma_1} = g(1 - |1 - 2x_2|)$, $p_2|_{\Gamma_1} = 0$ МПа, верхней $p_1|_{\Gamma_1} = 0$ МПа, $p_2|_{\Gamma_1} = -5$ МПа и нижней $p_1|_{\Gamma_1} = 0$ МПа, $p_2|_{\Gamma_1} = 2.5$ МПа сторон, модуль упругости Юнга $E = 210000$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, константа $r = 10^{10}$, $g = 90$ МПа.

В таблице 6 представлены результаты численного решения двойственной задачи с использованием обобщённого метода Ньютона на шаге (2.8). Из неё видно, что метод Ньютона сходится за небольшое количество итераций, причём видно, что при уменьшении λ решение стабилизируется.

Таблица 6 — Результаты численного решения двойственной задачи при разных λ

λ	Итер. по t	Итер. по α	$\ t\ _2$	$\ t^{**} - t^*\ _\infty$
0.01	3	4	0.00428	-
0.001	3	4	0.00415	$1 \cdot 10^{-5}$
0.0001	4	4	0.00413	$2.2 \cdot 10^{-6}$
0.00001	8	4	0.00413	$1.3 \cdot 10^{-6}$
0.000001	16	4	0.00413	$2 \cdot 10^{-7}$

$\|t^{**} - t^*\|_\infty$ - разница между ближайшими решениями при разных значениях параметра λ по норме ∞

Графики на рисунке 3.3 представляют значения u_2^\pm на трещине при разных значениях $\lambda = \{0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001\}$ и перемещение включения ω при $u \times 1000$ для $\lambda = 0.00001$.

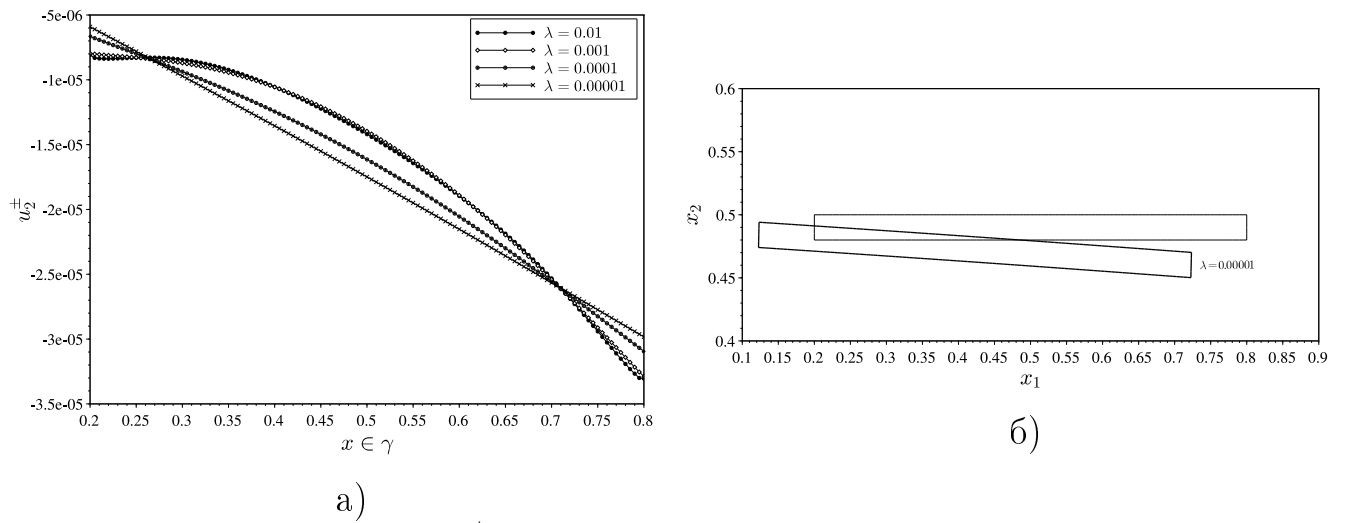


Рисунок 3.3 — Значения u_2^\pm на трещине и перемещение жёсткого включения

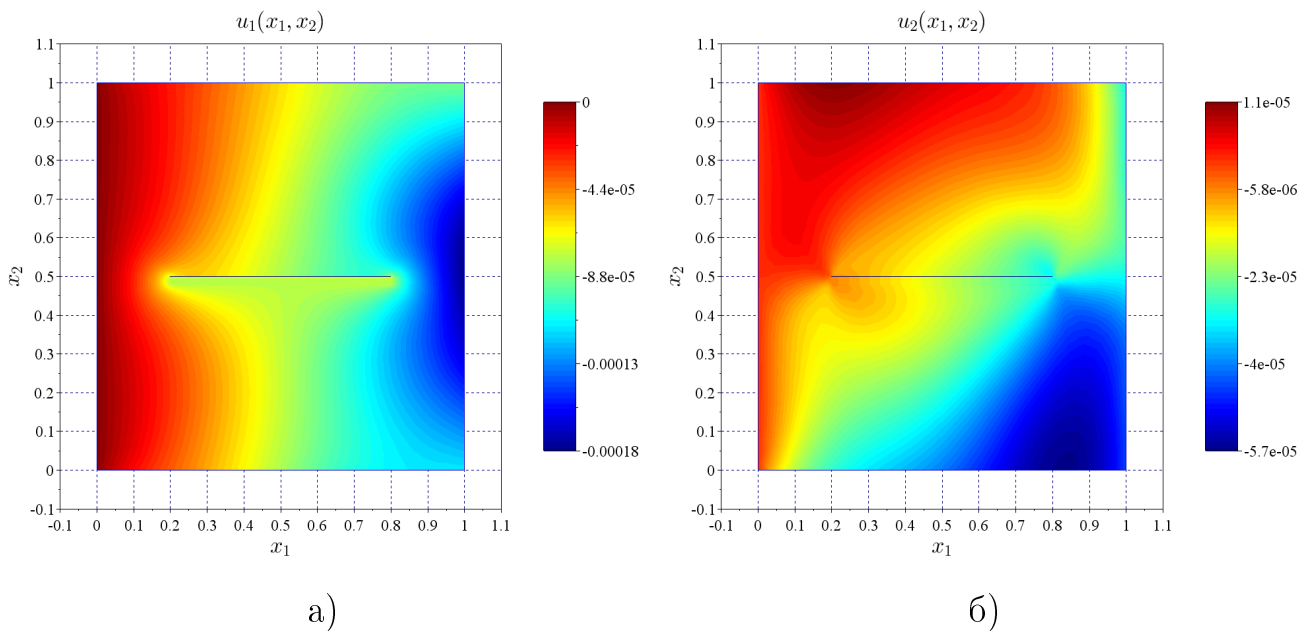


Рисунок 3.4 — Значение функций $u_1(x_1, x_2)$ и $u_2(x_1, x_2)$ для $\lambda = 0.00001$

На рисунке 3.3 видно, что с уменьшением параметра λ область ω ведёт себя как жёсткое включение. Также скачок на трещине везде равен нулю, т.е. происходит слипание берегов трещины. Численные результаты показали, что предложенный метод эффективен при решении задач теории упругости с жёстким включением. Отметим, что для решения двойственной задачи (3.5) потребовалось сделать небольшое число шагов по двойственной переменной.

Данное обстоятельство можно объяснить хорошими дифференциальными свойствами двойственного функционала $\underline{M}(l)$. На рисунке 3.4 цветом показаны значения функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ в области Ω .

Заключение

Диссертационная работа посвящена обоснованию и применению новых схем двойственности, основанных на модифицированных функционалах Лагранжа, для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики. Исследования были проведены с использованием методов выпуклого анализа и математического программирования, аппарата метода конечных элементов, вариационных принципов двойственности. Получены следующие новые результаты.

1. Для решения полукоэрцитивного квазивариационного неравенства Синьорини рассмотрен и исследован метод последовательных приближений. Построен и обоснован метод, основанный на комбинировании алгоритма Удзавы и итеративной прох-регуляризации модифицированного функционала Лагранжа, для решения полукоэрцитивных вспомогательных задач с заданным трением.
2. Построена и обоснована модифицированная схема двойственности для решения 2D и 3D задач теории упругости с трещиной. Доказано соотношение двойственности.
3. Для задачи с отслоившимся жёстким включением исследован и применён метод решения с параметром λ , стремящимся к нулю, позволяющий рассматривать данную задачу как предельную для семейства задач о равновесии упругих тел с трещиной.
4. Для рассмотренных задач разработаны алгоритмы на основе метода конечных элементов и программное обеспечение для численного решения. Проведены численные эксперименты, подтверждающие эффективность модифицированных методов двойственности.

Таким образом в работе было показано, что модифицированные методы двойственности являются эффективным инструментом для исследования и решения как полукоэрцитивных, так и коэрцитивных вариационных и квазивариационных неравенств механики.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на разработку эффективных методов двойственности, основанных на модифицированных функционалах Лагранжа, для решения трёхмерных задач теории упругости с жёсткими включениями, задач теории упругости с трением на трещине.

Автор благодарит и выражает большую признательность научному руководителю Намму Р. В. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор выражает благодарность ЦКП “Центр данных ДВО РАН” (<http://lits.ccfembras.ru/>), на вычислительных ресурсах которого были получены большинство результатов.

Список сокращений и условных обозначений

Ω	расчётная область
Γ	граница области
\vec{n}	единичный вектор внешней нормали к границе области
x_i	пространственные координаты в общем виде
x, y	координаты в Декартовой системе
div	оператор дивергенции
Δ	оператор Лапласа
∇	оператор Гамильтона
F	коэффициент трения
E	модуль упругости Юнга
μ	коэффициент Пуассона
ε_{ij}	компоненты тензора деформаций
σ_{ij}	компоненты тензора напряжений
\vec{v}	вектор перемещений
meas	мера множества
h_m	параметр разбиения области
F_{h_m}	триангуляция области с параметром h_m
N_{h_m}	количество узлов триангуляции
φ_i	базисные функции
f	объёмные силы, действующие в теле
p	поверхностные силы, действующие на границе области
v_v^\pm	значения вектора перемещений на берегах трещины
dom χ	эффективная область
МКЭ	метод конечных элементов
$H^l \Omega$	гильбертово пространство

Список литературы

1. *Fichera, G.* Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno / G. Fichera // Mem. Accad. Naz. Lincei. — 1964. — P. 91—140. — (8,7).
2. *Лионс, Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 587 с.
3. *Киндерлерер, Д.* Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья. — М. : Мир, 1983. — 256 с.
4. *Байокки, К.* Вариационные и квазивариационные неравенства: Приложения к задачам со свободной границей / К. Байокки, А. Капело. — 1988.
5. Решение вариационных неравенств в механике / И. Главачек [и др.]. — М. : Мир, 1986. — 270 с.
6. *Гловински, Р.* Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж. Л. Лионс, Р. Тремольер. — М. : Мир, 1979. — 576 с.
7. *Дюво, Г.* Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1980. — 383 с.
8. Numerical solution of variational inequalities / I. Glavachek [et al.]. — Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1988. — 322 p.
9. *Мосолов, П.* Механика жестко-пластических сред / П. Мосолов, В. Мясников. — М. : Наука, 1981. — 208 с.
10. *Бердичевский, В.* Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Бердичевский. — М. : Наука, 1983. — 448 с.
11. *Уральцева, Н. Н.* О регулярности решений вариационных неравенств / Н. Н. Уральцева // Успехи математических наук. — 1987. — Т. 42, № 6. — С. 151—174.
12. *Konnov, I. V.* Equilibrium Models and Variational Inequalities / I. V. Konnov. — Amsterdam : Elsevier B.V., 2007. — 248 с.
13. *Khudnev, A.* Analysis of crack in solids / A. Khudnev, V. Kovtunencko. — Southampton-Boston : WIT Press, 2000. — 386 с.

14. *Хлуднев, А.* Задачи теории упругости в негладких областях / А. Хлуднев. — М. : Физматлит, 2010. — 252 с.
15. *Рудой, Е. М.* Метод декомпозиции области для модельной задачи теории трещин с возможным контактом берегов / Е. М. Рудой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — Т. 55, № 2. — С. 305—316.
16. *Рудой, Е. М.* Численное решение задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жестким включением / Е. М. Рудой // Сиб. журн. индустр. математики. — 2016. — Т. 19, № 2. — С. 74—87.
17. *Вихтенко, Э. М.* Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением / Э. М. Вихтенко, Р. Намм // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — Т. 47, № 12. — С. 2023—2036.
18. *Вихтенко, Э. М.* Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа для решения полукоэрцитивного квазивариационного неравенства Синьорини / Э. М. Вихтенко, Р. Намм // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48, № 9. — С. 1536—1544.
19. *Вихтенко, Э. М.* Методы решения полукоэрцитивных вариационных неравенств механики на основе модифицированных функционалов Лагранжа / Э. М. Вихтенко, Г. Ву, Р. Намм // Дальневосточный математический журнал. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 6—17.
20. *Вихтенко, Э. М.* Функционалы чувствительности в контактных задачах теории упругости / Э. М. Вихтенко, Г. Ву, Р. Намм // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 7. — С. 1218—1228.
21. *Чеботарев, А. Ю.* Субдифференциальные краевые задачи магнитной гидродинамики / А. Ю. Чеботарев // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 12. — С. 1700—1709.
22. *Игнатьева, М. А.* Применение метода декомпозиции области и несогласованных сеток при решении некоторых вариационных неравенств / М. А. Игнатьева, А. Лапин // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2015. — Т. 157, № 2. — С. 68—78.

23. *Бадриев, И. Б.* О приближенных методах решения квазивариационных неравенств теории мягких сетчатых оболочек / И. Б. Бадриев, В. В. Бандеров, О. А. Задворнов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2008. — Т. 150, № 3. — С. 104—116.
24. *Бадриев, И. Б.* Итерационные методы решения вариационных неравенств теории мягких оболочек / И. Б. Бадриев, В. В. Бандеров // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2013. — Т. 155, № 2. — С. 18—32.
25. *Аннин, Б. Д.* Упруго-пластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. — М. : Наука, 1983. — 239 с.
26. *Аннин, Б. Д.* О численной реализации вариационного неравенства в задачах динамики упругопластических тел / Б. Д. Аннин, В. М. Садовский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1996. — Т. 36, № 9. — С. 1313—1324.
27. *Бадриев, И. Б.* Математическое моделирование задач фильтрации с многозначным законом в многослойных пластах / И. Б. Бадриев, Б. Я. Фанюк // Матем. моделирование. — 2014. — Т. 26, № 5. — С. 126—136.
28. *Лалин, А.* Об исследовании некоторых нелинейных задач теории фильтрации / А. Лалин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1979. — Т. 19, № 3. — С. 689—700.
29. *Экланд, И.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. — М. : Мир, 1979. — 399 с.
30. *Fortin, A.* On the imposition of friction boundary conditions for numerical simulation of Bingham fluid flows / A. Fortin // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1991. — Vol. 88, no. 1. — P. 97—109.
31. *Schmitt, H.* Numerical simulation of Bingham fluid flow using prox-regularization / H. Schmitt // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2000. — Vol. 106, no. 3. — P. 603—626.
32. *Галин, Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. — М. : Наука, 1980. — 303 с.
33. Scalable algorithms for contact problems / Z. Dostál [и др.]. — New York : Springer, 2016. — 340 с.
34. *Темам, Р.* Математические задачи теории пластичности / Р. Темам. — М. : Наука, 1991. — 288 с.

35. *Namm, R. V.* Introduction to the theory and solution method for variational inequalities / R. V. Namm, G. Woo. — Changwon : Changwon National University Press, 2002. — 117 p.
36. *Bensoussan, A.* Contrôle impulsionnel et inéquations quasi variationnelles d'évolution / A. Bensoussan, J. L. Lions // C.R. Acad. Sciences. — 1973. — Vol. 276. — P. 1333—1338.
37. *Bensoussan, A.* Contrôle impulsionnel et inéquations quasivariationnelles stationnaires / A. Bensoussan, M. Goursat, J. L. Lions // C.R. Acad. Sciences. — 1973. — Vol. 276. — P. 1279—1284.
38. *Laetsch, T. W.* A uniqueness theorem for elliptic quasi-variational inequalities / T. W. Laetsch // Journal of Functional Analysis. — 1975. — Vol. 18, no. 3. — P. 286—287.
39. *Kikuchi, N.* Contact problem in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods / N. Kikuchi, T. Oden. — Philadelphia : SIAM, 1988. — 495 p.
40. *Кравчук, А.* Вариационные и квазивариационные неравенства механики / А. Кравчук. — М. : МГАПИ, 1997. — 340 с.
41. *Антипин, А. С.* Итеративный метод второго порядка для решения квазивариационных неравенств / А. С. Антипин, Н. Мияйлович, М. Ячичевич // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, № 3. — С. 336—342.
42. *Намм, Р. В.* Метод последовательных приближений для решения квазивариационного неравенства Синьорини / Р. В. Намм, Г. И. Цой // Известия вузов. Математика. — 2017. — № 1. — С. 44—52.
43. *Намм, Р. В.* Модифицированная схема двойственности для решения упругой задачи с трещиной / Р. В. Намм, Г. И. Цой // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2017. — Т. 20, № 1. — С. 47—58.
44. *Намм, Р. В.* Решение контактной задачи теории упругости с жестким включением / Р. В. Намм, Г. И. Цой // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 4. — С. 165—172.
45. *Колмогоров, А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Физматлит, 2004. — 572 с.

46. *Лионс, Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М. : Мир, 1971. — 371 с.
47. *Михайлов, В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — М. : Наука, 1983. — 424 с.
48. *Михлин, С. Г.* Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. — М. : Высшая школа, 1977. — 431 с.
49. *Треногин, В. А.* Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М. : Наука, 1980. — 495 с.
50. *Гроссман, К.* Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации / К. Гроссман, А. Каплан. — Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1981. — 183 с.
51. *Нурминский, Е. А.* Численные методы выпуклой оптимизации / Е. А. Нурминский. — М. : Наука, 1991. — 167 с.
52. *Васильев, Ф.* Методы решения экстремальных задач / Ф. Васильев. — М. : Наука, 1981. — 400 с.
53. *Васильев, Ф.* Численные методы решения экстремальных задач / Ф. Васильев. — М. : Наука, 1980. — 518 с.
54. *Пшеничный, Б. Н.* Численные методы в экстремальных задачах / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. — М. : Наука, 1975. — 319 с.
55. *Мину, М.* Математическое программирование: теория и алгоритмы / М. Мину. — М. : Наука, 1990. — 485 с.
56. *Рокафеллар, Р. Т.* Выпуклый анализ / Р. Т. Рокафеллар. — М. : Мир, 1973. — 469 с.
57. *Поляк, Б. Т.* Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. — М. : Наука, 1983. — 384 с.
58. *Эрроу, К.* Исследования по линейному и нелинейному программированию / К. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. — М. : Иностранная литература, 1962. — 335 с.
59. *Hestenes, M. R.* Multiplier and gradient methods / M. R. Hestenes // Journal of optimization theory and applications. — 1969. — Vol. 4. — P. 303—320.

60. *Powell, M. J. D.* A method for nonlinear constraints in minimization problems / M. J. D. Powell // Optimization, Fletcher R., ed. — London: Academic Press. — 1969. — P. 283—298.
61. *Гольштейн, Е. Г.* Модифицированные функции Лагранжа / Е. Г. Гольштейн, Н. В. Третьяков. — М. : Наука, 1989. — 400 с.
62. *Антипин, А. С.* О методе выпуклого программирования, использующем симметрическую модификацию функции Лагранжа / А. С. Антипин // Экономика и математические методы. — 1976. — Т. 12, № 6. — С. 1164—1173.
63. *Антипин, А.* Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа / А. Антипин // Москва, Препринт ВНИИ системных исследований. — 1979. — С. 1—73.
64. *Антипин, А. С.* Равновесное программирование: проксимальные методы / А. С. Антипин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1997. — Т. 37, № 11. — С. 1327—1339.
65. *Bertsekas, D.* Constrained optimization and Lagrange multiplier methods / D. Bertsekas. — New York : Academic Press, 1982. — 412 p.
66. *Ижуткин, В. С.* Методы приведенных направлений на основе модифицированной функции Лагранжа для задачи нелинейного программирования / В. С. Ижуткин, М. В. Петропавловский // Изв. вузов. Матем. — 1995. — № 12. — С. 33—42.
67. *Голиков, А. И.* Модифицированная функция Лагранжа для задач линейного программирования / А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко // Изв. вузов. Матем. — 1997. — № 12. — С. 45—48.
68. *Поляк, Б. Т.* Об одном итерационном методе линейного программирования и его экономическая интерпретация / Б. Т. Поляк, Н. В. Третьяков // Экономика и математические методы. — 1972. — Т. 8, № 5. — С. 740—751.
69. *Rockafellar, R. T.* A dual approach to solving nonlinear programming problems by unconstrained optimization / R. T. Rockafellar // Mathematical programming. — 1973. — Vol. 5, no. 3. — P. 354—373.

70. *Rockafellar, R. T.* Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming / R. T. Rockafellar // Mathematics of Operations Research. — 1979. — Vol. 1, no. 2. — P. 97—116.
71. *Rockafellar, R. T.* The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming / R. T. Rockafellar // Mathematics of Operations Research. — 1973. — Vol. 12, no. 6. — P. 555—562.
72. *Попов, Л. Д.* Квадратичная аппроксимация штрафных функций при решении задач линейного программирования большой размерности / Л. Д. Попов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — Т. 47, № 2. — С. 206—221.
73. *Коннов, И. В.* Метод множителей Лагранжа для вариационных неравенств / И. В. Коннов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 9. — С. 1344—1357.
74. *Антипин, А. С.* Экстрапроксимальный метод решения равновесных и игровых задач / А. С. Антипин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2005. — Т. 45, № 11. — С. 1969—1990.
75. *Антипин, А. С.* Методы регуляризации для решения задачи равновесного программирования с неточными входными данными, основанные на расширении множества / А. С. Антипин, Ф. П. Васильев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2002. — Т. 42, № 8. — С. 1158—1165.
76. *Антипин, А. С.* Регуляризованный метод с прогнозом для решения вариационных неравенств с неточно заданным множеством / А. С. Антипин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2004. — Т. 44, № 5. — С. 796—804.
77. *Васильев, Ф. П.* Методы регуляризации для решения неустойчивых задач минимизации первого типа с неточно заданным множеством / Ф. П. Васильев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 2. — С. 217—224.
78. *Martinet, B.* Determination approuchee d'un point fixe d'une application pseudo-contraction / B. Martinet // C. R. Acad. Sci. — 1972. — Vol. 274, no. 2. — P. 163—165.

79. *Martinet, B.* Regularization d'inequations variationelles par approximations successives / B. Martinet // R.I.R.O. — 1970. — Vol. 4, no. 3. — P. 154—159.
80. Численные методы решения некорректных задач / А. Тихонов [и др.]. — М. : Наука, 1990. — 230 с.
81. *Rockafellar, R. T.* Moreau's proximal mappings and convexity in Hamilton-Jacobi theory / R. T. Rockafellar // Nonsmooth Mechanics and Analysis. — 2006. — Vol. 12. — P. 3—12.
82. *Гречка, Г. Ю.* Модифицированные процедуры итеративной прох-регуляризации / Г. Ю. Гречка // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1997. — Т. 37, № 8. — С. 914—924.
83. *Попов, Л. Д.* Применение модифицированного прох-метода для оптимальной линейной коррекции несобственных задач выпуклого программирования / Л. Д. Попов // Труды ИММ УрО РАН. — 1995. — № 3. — С. 261—266.
84. *Стукалов, А. С.* Экстрапроксимальный метод решения равновесных задач в гильбертовом пространстве / А. С. Стукалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 5. — С. 781—798.
85. *Gugat, M.* Prox-regularization methods for generalized fractional programming / M. Gugat // Journal of optimization theory and applications. — 1998. — Vol. 99, no. 3. — P. 691—722.
86. *Hare, W. L.* A proximal method for identifying active manifolds / W. L. Hare // Computational optimization and applications. — 2009. — Vol. 43, no. 2. — P. 295—306.
87. *Courant, R.* Variational methods for the solution of problem of equilibrium and vibrations / R. Courant // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — No. 49. — P. 1—23.
88. *Argyris, J. H.* Energy theorems and structural analysis / J. H. Argyris. — London : Butterworth Scientific Publications, 1960. — 85 p.
89. Stiffness and deflection analysis of complex structures / M. J. Turner [et al.] // J. Aero Sci. — 1956. — No. 23. — P. 805—823.

90. *Clough, R.* The finite-element method in plane stress analysis / R. Clough // Proceedings of the Second ASCE Conference on Electronic Computation. — Pittsburg, Pennsylvania, 2007.
91. *Зенкевич, О.* Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. — М. : Мир, 1986. — 318 с.
92. *Марчук, Г.* Введение в проекционно-сеточные методы / Г. Марчук, В. Агошков. — М. : Физматлит, 1981. — 416 с.
93. *Сьярле, Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. — М. : Мир, 1980. — 512 с.
94. *Колмогоров, А. Н.* Неравенства в механике и физике / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 543 с.
95. *Васидзу, К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. — М. : Мир, 1987. — 542 с.
96. *Цой, Г. И.* Свидетельство № 2018614876 от 19.04.2018 Российская Федерация. Численное решение контактной задачи теории упругости с трещиной с использованием модифицированной схемы двойственности: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Г. И. Цой, Э. М. Вихтенко. — заявитель и правообладатель ТОГУ. — 1 с.
97. *Цой, Г. И.* Свидетельство № 2018663520 от 30.10.2018 Российская Федерация. Программа для численного решения квазивариационного неравенства Синьорини: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Г. И. Цой. — заявитель и правообладатель ВЦ ДВО РАН. — 1 с.
98. *Namm, R.* Solution of the Contact Elasticity Problem Based on an Iterative Proximal Regularization Method for Modified Lagrangian Functional / R. Namm, G. Tsoy // CEUR Workshop Proceedings. — 2016. — Vol. 1623. — P. 242—252.
99. *Антипин, А.* Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании / А. Антипин. — М. : ВЦ РАН, 2002. — 132 с.
100. *Glowinski, R.* Numerical methods for nonlinear variational problems / R. Glowinski. — New York : Springer, 1984. — 493 p.

101. *Ву, Г.* Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа / Г. Ву, Р. Намм, С. Сачков // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 1. — С. 26—36.
102. Метод итеративной проксимальной регуляризации для поиска седловой точки в полукоэрцитивной задаче Синьорини / Г. Ву [и др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 11. — С. 2024—2031.
103. *Konnov, I.* A strongly convergent combined relaxation in Hilbert Spaces / I. Konnov, J. Gwinner // Numerical Functional Analysis and Optimisation. — 2014. — No. 35. — P. 1066—1077.
104. *Фикера, Г.* Теоремы существования в теории упругости / Г. Фикера. — М. : Мир, 1974. — 159 с.
105. *Кушнирук, Н. Н.* О конечно-элементном решении модельной задачи механики с трением на основе сглаживающего метода множителей Лагранжа / Н. Н. Кушнирук, Р. Намм // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 1. — С. 24—34.
106. *Морозов, Н.* Математические вопросы теории трещин / Н. Морозов. — М. : Наука, 1984. — 256 с.
107. *Namm, R. V.* A Modified Duality Method for Solving an Elasticity Problem with a Crack Extending to the Outer Boundary / R. V. Namm, G. I. Tsoy, E. M. Vikhtenko // Communications in Computer and Information Science. — 2019. — Vol. 974. — P. 35—48.
108. *Namm, R.* Modified Lagrange Functional for Solving Elastic Problem with a Crack in Continuum Mechanics / R. Namm, G. Tsoy, G. Woo // Communications of the Korean Mathematical Society. — 2019. — Vol. 34.
109. *Вихтенко, Э. М.* Функционалы чувствительности в вариационных неравенствах механики и их приложение к схемам двойственности / Э. М. Вихтенко, Н. Максимова, Р. Намм // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2014. — Т. 17, № 1. — С. 43—52.
110. *Вихтенко, Э. М.* О методе двойственности для решения модельной задачи с трещиной / Э. М. Вихтенко, Р. Намм // Труды ИММ УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 1. — С. 36—43.

111. *Куфнер, А.* Нелинейные дифференциальные уравнения / А. Куфнер, С. Фучик. — М. : Наука, 1988. — 304 с.
112. *Голиков, А. И.* Обобщенный метод Ньютона для задач линейной оптимизации с ограничениями-неравенствами / А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко // Тр. ИММ УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 2. — С. 98—108.
113. *Hintermuller, M.* The primal–dual active set method for a crack problem with non-penetration / M. Hintermuller, V. Kovtunenکو, K. Kunisch // IMA J. Appl. Math. — 2004. — Vol. 69, no. 1. — P. 1—26.
114. *Вторушин, Е. В.* Численное исследование модельной задачи деформирования упругопластического тела с трещиной при условии возможного контакта берегов / Е. В. Вторушин // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2006. — Т. 9, № 4. — С. 335—344.
115. *Вихтенко, Э. М.* Модифицированные функционалы Лагранжа для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики / Э. М. Вихтенко, Н. Максимова, Р. Намм // Автомат. и телемех. — 2012. — № 4. — С. 3—17.
116. *Hintermuller, M.* A Papkovitch–Neuber-based numerical approach to cracks with contact in 3D / M. Hintermuller, V. Kovtunenکو, K. Kunisch // IMA J. Appl. Math. — 2009. — Vol. 74, no. 3. — P. 325—343.
117. *Naumov, M.* Incomplete-LU and Cholesky preconditioned iterative methods using CUSPARSE and CUBLAS / M. Naumov // White Paper Tech. — London, 2011. — P. 1—16.
118. *Неустроева, Н. В.* Задача о равновесии упругой пластины, содержащей наклонную трещину на границе жёсткого включения / Н. В. Неустроева // Сиб. журн. индустр. математики. — 2015. — Т. 18, № 2. — С. 74—84.
119. *Фанкина, И. В.* Контактная задача для упругой пластины с тонким жестким включением / И. В. Фанкина // Сиб. журн. индустр. математики. — 2016. — Т. 19, № 3. — С. 90—98.
120. *Lazarev, N. P.* An equilibrium problem for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion / N. P. Lazarev // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys. — 2013. — Vol. 6, no. 1. — P. 53—62.

Список рисунков

1.1	Контакт между упругим телом и абсолютно твёрдой опорой	14
1.2	Вид базисной функции $\varphi_i(x,y)$	22
1.3	Последовательность триангуляций	29
1.4	Результаты вычислений №1	31
1.5	Значение функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$	31
1.6	Результаты вычислений №2	32
1.7	Значение функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$	33
2.1	Упругое тело с трещиной внутри.	35
2.2	Упругое тело с трещиной, выходящей на внешнюю границу.	37
2.3	Триангуляция Делоне области Ω	46
2.4	Треугольный элемент с вершинами 1, 2, 3 и координатами (x_1,y_1) , (x_2,y_2) , (x_3,y_3)	47
2.5	Треугольные координаты	48
2.6	Результаты численного решения с внутренней трещиной	53
2.7	Значение функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ при $g = 27$ МПа с трещиной γ_1	54
2.8	Результаты численного решения с трещиной γ_2	54
2.9	Значение функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ при $g = 27$ МПа с трещиной γ_2	55
2.10	Геометрия области Ω и нагрузка	56
2.11	Конечный элемент в форме тетраэдра с 4-мя узлами	63
2.12	Количество итераций по двойственной переменной в зависимости от параметра r	66
2.13	Перемещения и значение двойственной переменной на трещине для первого примера	67
2.14	Перемещения и значение двойственной переменной на трещине для второго примера	68
2.15	Характеристики решения при уменьшении h	69
3.1	Упругое тело с отслоившимся жёстким включением	72
3.2	Триангуляция области Ω	77
3.3	Значения u_2^\pm на трещине и перемещение жёсткого включения	78
3.4	Значение функций $u_1(x_1,x_2)$ и $u_2(x_1,x_2)$ для $\lambda = 0.00001$	79

Список таблиц

1	Количество итераций по прямой и двойственной переменной.	30
2	Результаты счета алгоритма Удзавы	53
3	Количество итераций по прямой и двойственной переменной.	67
4	Количество узлов для шага сетки h	68
5	Количество итераций по прямой и двойственной переменной для шага сетки h	69
6	Результаты численного решения двойственной задачи при разных λ	78

Приложение А

Программный код

В листинге А.1 представлен код программы на C++ для решения задачи с трещиной. Здесь представлена версия кода с использованием библиотеки cuBLAS для вычислений на GPU.

Листинг А.1 Листинг программного кода

```
/* Includes, system */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
5 #include <string.h>
#include <vector>
#include <iostream>
#define _USE_MATH_DEFINES // for C++
#include <math.h>
10 #include <algorithm>
#include "help_functions.h"
#include <Eigen/Dense>

/* Includes, cuda */
15 #include <cuda_runtime.h>
#include < cublas_v2.h>
#include <helper_cuda.h>

using namespace std;
20
bool AreSame(double a, double b, double eps)
{
    return fabs(a - b) < eps;
}
25
#define cudacall(call)
    do
    {
        cudaError_t err = (call);
30     if(cudaSuccess != err)
        {
```



```

    fprintf(stderr, "CUDA Error:\nFile = %s\nLine = %d\nReason
= %s\n", __FILE__, __LINE__, cudaGetErrorString(err));
    cudaDeviceReset();
    exit(EXIT_FAILURE);
35 }
}
while (0)

#define cublascall(call)
40 do
{
    cublasStatus_t status = (call);
    if(CUBLAS_STATUS_SUCCESS != status)
    {
45     fprintf(stderr, "CUBLAS Error:\nFile = %s\nLine = %d\nCode
= %d\n", __FILE__, __LINE__, status);
        cudaDeviceReset();
        exit(EXIT_FAILURE);
    }
50 }
while(0)

#define max(a,b) ((a > b) ? a : b)

55 bool converge(double *xk, double *xkp, int n, double eps) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (fabs(xk[i] - xkp[i]) >= eps)
            return false;
    }
60     return true;
}

void invert_device(double* src_d, double* dst_d, int n) {
    cublasHandle_t handle;
65     cublascall(cublasCreate_v2(&handle));
    int batchSize = 1;
    int lda = n;
    int *P, *INFO;

70     cudacall(cudaMalloc<int>(&P, n * batchSize * sizeof(int)));
    cudacall(cudaMalloc<int>(&INFO, batchSize * sizeof(int)));
    double *A[] = { src_d };

```

```

double** A_d;

75  cudacall(cudaMalloc<double*>(&A_d, sizeof(A)));
    cudacall(cudaMemcpy(A_d, A, sizeof(A), cudaMemcpyHostToDevice));
    cublascall(cublasDgetrfBatched(handle, n, A_d, lda, P, INFO,
        batchSize));
    int INFOh = 0;
    cudacall(cudaMemcpy(&INFOh, INFO, sizeof(int),
        cudaMemcpyDeviceToHost));

80  if(INFOh == n) {
        fprintf(stderr, "Factorization Failed: Matrix is singular\n"
            );
        cudaDeviceReset();
        exit(EXIT_FAILURE);
85  }

    double* C[] = { dst_d };
    double** C_d;
    cudacall(cudaMalloc<double*>(&C_d, sizeof(C)));
90  cudacall(cudaMemcpy(C_d, C, sizeof(C), cudaMemcpyHostToDevice));
    cublascall(cublasDgetriBatched(handle, n, (const double**)A_d,
        lda, P, C_d, lda, INFO, batchSize));
    cudacall(cudaMemcpy(&INFOh, INFO, sizeof(int),
        cudaMemcpyDeviceToHost));

    if(INFOh != 0) {
95  fprintf(stderr, "Inversion Failed: Matrix is singular\n");
        cudaDeviceReset();
        exit(EXIT_FAILURE);
    }

100  cudaFree(P), cudaFree(INFO), cublasDestroy_v2(handle);
}

void invert(double* src, double* dst, int n) {

105  double* src_d, *dst_d;
    cudacall(cudaMalloc<double>(&src_d, n * n * sizeof(double)));
    cudacall(cudaMemcpy(src_d, src, n * n * sizeof(double),
        cudaMemcpyHostToDevice));
    cudacall(cudaMalloc<double>(&dst_d, n * n * sizeof(double)));

```

```

110   invert_device(src_d, dst_d, n);

       cudacall(cudaMemcpy(dst, dst_d, n * n * sizeof(double),
       cudaMemcpyDeviceToHost));
       cudaFree(src_d), cudaFree(dst_d);
   }
115
double converge_norm(double *xk, double *xkp, int n) {

       double norm = 0;
       for (int i = 0; i < n; i++) {
120         norm += (xk[i] - xkp[i])*(xk[i] - xkp[i]);
       }
       return sqrt(norm);
   }

125 double converge_norm_inf(double *xk, double *xkp, int n) {

       double norm = 0;
       for (int i = 0; i < n; i++) {
           norm = (fabs(xk[i] - xkp[i]) > norm) ? fabs(xk[i] - xkp[i])
           : norm;
130       }
       return norm;
   }

135 /* Main */
int main(int argc, char **argv)
{

       double r = 10000000000.0;
140       double x_eps = 0.000000000001;
       double l_eps = 0.00000001;
       double tgv = pow(10.0, 30.0);
       ofstream my_out("log.txt");

145       //all points of triangulation
       std::vector<pair <double, double> > vAllPoints;
       ifstream input_points("points.txt");
       int vAllPoints_size = 0;
       input_points >> vAllPoints_size;
150

```

```

for (unsigned int i = 0; i < vAllPoints_size; i++) {
    int index;
    double x, y;
    input_points >> index >> x >> y;
155   pair <double, double> p;
        p.first = x;
        p.second = y;
        vAllPoints.push_back(p);
    }
160   input_points.close();
    int matr_size = vAllPoints.size() * 2;
    int n = vAllPoints.size();

    //crack points (low and up edges)
165   ifstream edge_input("up_edge.txt");
    std::vector<int> vUpEdgePoints, vLowEdgePoints;
    int nodes_on_crack;
    int index = 0;
    double x, y;
170   edge_input >> nodes_on_crack;
    for (int i = 0; i < nodes_on_crack; i++) {
        edge_input >> index >> x >> y;
        vUpEdgePoints.push_back(index);
    }
175   edge_input.close();
    edge_input.open("low_edge.txt");
    edge_input >> nodes_on_crack;
    for (int i = 0; i < nodes_on_crack; i++) {
        edge_input >> index >> x >> y;
180     vLowEdgePoints.push_back(index);
    }
    edge_input.close();

    // normals 1,2
185   int Nc = nodes_on_crack;
    std::vector<pair <double, double> > normals;
    for (int i = 0; i < nodes_on_crack ; i++) {
        pair <double, double> nu;
        nu.first = 0.0;
190     nu.second = 1.0;
        normals.push_back(nu);
    }

```

```

double h_on_crack = (0.8 - 0.2) / (nodes_on_crack + 1);
195 cout << "h_on_crack" << h_on_crack << endl;

//read right part
std::vector<double> rp;
ifstream input_rp("rp.txt");
200 for (int i = 0; i < matr_size; i++) {
    double val;
    input_rp >> val;
    rp.push_back(val);
}
205 input_rp.close();

// read stiffness matrix
Eigen::SparseMatrix<double, Eigen::RowMajor> mat = Eigen::
    SparseMatrix<double, Eigen::RowMajor>(matr_size, matr_size);
mat.reserve(Eigen::VectorXi::Constant(matr_size, 30));
210 loadMarket(mat, "matr.txt");

// set dirichlet boundary condition on Gamma_0
for (unsigned int i = 0; i < matr_size; i++) {
    if (AreSame(vAllPoints.at(i%n).first, 0.0, 0.00000001)) {
215     mat.coeffRef(i,i) = tgv;
    }
}

int N = mat.rows();
220 double* def_my_matr = new double[N*N];
std::fill_n(def_my_matr, N*N, 0.0);
for (int i = 0; i < matr_size; i++) {
    for (Eigen::SparseMatrix<double, Eigen::RowMajor>::
        InnerIterator it(mat, i); it; ++it) {
        int j = it.index();
225     def_my_matr[i*N + j] = it.value();
    }
}

/* Initialize CUBLAS */
230 printf("Initialize CUBLAS..\n");
my_out << "Initialize CUBLAS..\n";
cublasStatus_t status;
cublasHandle_t handle;
double* d_def_my_matr;

```

```

235 status = cublasCreate(&handle);

if (status != CUBLAS_STATUS_SUCCESS) {
    fprintf(stderr, "!!!! CUBLAS initialization error\n");
    exit(EXIT_FAILURE);
240 }

if (cudaMalloc((void **)&d_def_my_matr, N * N * sizeof(
    d_def_my_matr[0])) != cudaSuccess) {
    fprintf(stderr, "!!!! device memory allocation error (
    allocate d_def_my_matr)\n");
    exit(EXIT_FAILURE);
245 }

status = cublasSetVector(N * N, sizeof(def_my_matr[0]),
    def_my_matr, 1, d_def_my_matr, 1);

if (status != CUBLAS_STATUS_SUCCESS) {
250     fprintf(stderr, "!!!! device access error (write def_my_matr
    )\n");
    exit(EXIT_FAILURE);
}

cout << N << " " << matr_size;
255 // Generalized newton method variables
double *l0 = new double[nodes_on_crack];
double *l1 = new double[nodes_on_crack];
double *x0 = new double[matr_size];
double *x1 = new double[matr_size];
260 double *p = new double[matr_size];
int iterx = 0;
int iter_count = 0;
float timerValue;
cudaEvent_t start, stop;
265 cudaEventCreate(&start);
cudaEventCreate(&stop);
cudaEventRecord(start, 0);

for (int i = 0; i < nodes_on_crack; i++)
270     l1[i] = 0.0;

// Uzawa algorithm
do {

```

```

my_out << "Iteration by dual variable " << iter_count << endl
;
275 my_out << "l0: ";
for (int i = 0; i < nodes_on_crack; i++) {
    l0[i] = l1[i];
    my_out << l0[i] << " ";
}
280 my_out << endl;

// starting x
for (int i = 0; i < matr_size; i++) {
    x1[i] = 0.0;
285 x0[i] = 0.0;
    p[i] = 0.0;
}

iterx = 0;

290
/* gnewton method */
printf("Start iterations..\n");
do {
    iterx++;
295 my_out << "Iteration " << iterx << endl;
    // copy x1 to x0
    for (int i = 0; i < matr_size; i++)
        x0[i] = x1[i];

300 // diff of ()^+ matrix with diagonal elements
double* my_matr = new double[N*N];
std::fill_n(my_matr, N*N, 0.0);
double* F = new double[matr_size];
std::fill_n(F, matr_size, 0.0);

305
// convert matrix to 1D array
for (int i = 0; i < matr_size; i++) {
    for (Eigen::SparseMatrix<double, Eigen::RowMajor>::
InnerIterator it(mat, i); it; ++it) {
310 int j = it.index();
        my_matr[i*N + j] = it.value();
    }
    F[i] = -rp[i];
}

```

```

315     for (int i = 0; i < vUpEdgePoints.size(); i++) {
        if ( ( l0[i] - r * (x0[vUpEdgePoints[i]] - x0[
vLowEdgePoints[i]])*normals[i].first - r * (x0[vUpEdgePoints[
i]+n] - x0[vLowEdgePoints[i]+n])*normals[i].second ) > 0 ) {
            // i^+
            my_matr[vUpEdgePoints[i]*N + vUpEdgePoints[i]] +=
h_on_crack * r * pow(normals[i].first,2);
            my_matr[vUpEdgePoints[i]*N + vLowEdgePoints[i]] += -
h_on_crack * r * pow(normals[i].first,2);
320            my_matr[vUpEdgePoints[i]*N + (vUpEdgePoints[i]+n)] +=
h_on_crack * r * normals[i].first * normals[i].second;
            my_matr[vUpEdgePoints[i]*N + (vLowEdgePoints[i]+n)] +=
- h_on_crack * r * normals[i].first * normals[i].second;
            // i^-
            my_matr[vLowEdgePoints[i]*N + vLowEdgePoints[i]] +=
h_on_crack * r * pow(normals[i].first,2);
            my_matr[vLowEdgePoints[i]*N + vUpEdgePoints[i]] += -
h_on_crack * r * pow(normals[i].first,2);
325            my_matr[vLowEdgePoints[i]*N + (vLowEdgePoints[i]+n)]
+= h_on_crack * r * normals[i].first * normals[i].second;
            my_matr[vLowEdgePoints[i]*N + (vUpEdgePoints[i]+n)] +=
- h_on_crack * r * normals[i].first * normals[i].second;
            // (i^+) + n
            my_matr[(vUpEdgePoints[i] + n)*N + vUpEdgePoints[i]]
+= h_on_crack * r * normals[i].first * normals[i].second;
            my_matr[(vUpEdgePoints[i] + n)*N + vLowEdgePoints[i]]
+= - h_on_crack * r * normals[i].first * normals[i].second;
330            my_matr[(vUpEdgePoints[i] + n)*N + (vUpEdgePoints[i]+n
)] += h_on_crack * r * pow(normals[i].second,2);
            my_matr[(vUpEdgePoints[i] + n)*N + (vLowEdgePoints[i]+
n)] += - h_on_crack * r * pow(normals[i].second,2);
            // (i^-) + n
            my_matr[(vLowEdgePoints[i]+n)*N + vLowEdgePoints[i]]
+= h_on_crack * r * normals[i].first * normals[i].second;
            my_matr[(vLowEdgePoints[i]+n)*N + vUpEdgePoints[i]] +=
- h_on_crack * r * normals[i].first * normals[i].second;
335            my_matr[(vLowEdgePoints[i]+n)*N + (vLowEdgePoints[i]+n
)] += h_on_crack * r * pow(normals[i].second,2);
            my_matr[(vLowEdgePoints[i]+n)*N + (vUpEdgePoints[i]+n
)] += - h_on_crack * r * pow(normals[i].second,2);
            // right_part additional

```



```

        double pos = l0[i] - r * (x0[vUpEdgePoints[i]] - x0[
vLowEdgePoints[i]])*normals[i].first - r * (x0[vUpEdgePoints[
i]+n] - x0[vLowEdgePoints[i]+n])*normals[i].second;
        F[vUpEdgePoints[i]] += - h_on_crack * normals[i].first
* pos;
340        F[vLowEdgePoints[i]] += h_on_crack * normals[i].first
* pos;
        F[vUpEdgePoints[i]+n] += - h_on_crack * normals[i].
second * pos;
        F[vLowEdgePoints[i]+n] += h_on_crack * normals[i].
second * pos;
    }
}
345

fprintf(stdout, "Inputed:\n\n");
my_out << "Inputed:\n";

/* Invert matrix */
350 invert(my_matr,my_matr,N);

fprintf(stdout, "Inversed:\n\n");
my_out << "Inversed:\n";

355 double alpha = 1.0;
double beta = 0.0;
double* d_my_matr;

/* Allocate device memory for the matrices */
360 if (cudaMalloc((void **)&d_my_matr, N * N * sizeof(
d_my_matr[0])) != cudaSuccess) {
    fprintf(stderr, "!!!! device memory allocation error (
allocate d_my_matr)\n");
    exit(EXIT_FAILURE);
}

365 // Initialize the device matrices with the host matrices
status = cublasSetVector(N * N, sizeof(my_matr[0]),
my_matr, 1, d_my_matr, 1);

if (status != CUBLAS_STATUS_SUCCESS) {
    fprintf(stderr, "!!!! device access error (write my_matr
)\n");
370    exit(EXIT_FAILURE);
}

```

```
    }

    double* d_x0;
    double* d_p;
375    double* d_step;
    if (cudaMalloc((void **)&d_x0, N * sizeof(d_x0[0])) !=
        cudaSuccess) {
        fprintf(stderr, "!!!! device memory allocation error (
        allocate d_my_matr)\n");
        exit(EXIT_FAILURE);
    }
380
    if (cudaMalloc((void **)&d_p, N * sizeof(d_p[0])) !=
        cudaSuccess) {
        fprintf(stderr, "!!!! device memory allocation error (
        allocate d_my_matr)\n");
        exit(EXIT_FAILURE);
    }
385
    if (cudaMalloc((void **)&d_step, N * sizeof(d_step[0])) !=
        cudaSuccess) {
        fprintf(stderr, "!!!! device memory allocation error (
        allocate d_my_matr)\n");
        exit(EXIT_FAILURE);
    }
390
    status = cublasSetVector(N , sizeof(d_x0[0]), x0, 1, d_x0,
    1);

    if (status != CUBLAS_STATUS_SUCCESS) {
        fprintf(stderr, "!!!! device access error (write my_matr
        )\n");
395        exit(EXIT_FAILURE);
    }

    status = cublasSetVector(N , sizeof(d_p[0]), F, 1, d_p, 1)
    ;

400    if (status != CUBLAS_STATUS_SUCCESS) {
        fprintf(stderr, "!!!! device access error (write my_matr
        )\n");
        exit(EXIT_FAILURE);
    }
}
```

```

405     /* Performs operation using cublas */
        beta = 1.0;
        status = cublasDgemv(handle, CUBLAS_OP_T, N, N, &alpha,
d_def_my_matr, N, d_x0, 1, &beta, d_p, 1);

        /* Performs operation using cublas */
410     beta = 0.0;
        status = cublasDgemv(handle, CUBLAS_OP_T, N, N, &alpha,
d_my_matr, N, d_p, 1, &beta, d_step, 1);

        /* Read the result back */
        status = cublasGetVector(N, sizeof(d_step[0]), d_step, 1,
p, 1);
415

        for (int i=0; i < matr_size; i++) {
            x1[i] = x0[i] - p[i];
            my_out << x1[i] << " ";
        }
420     my_out << endl;
        my_out << "||x1-x0|| = " << converge_norm_inf(x0,x1,
matr_size) << endl;
        cudaFree(d_my_matr); cudaFree(d_x0); cudaFree(d_p);
        cudaFree(d_step);
        delete[] my_matr;
        delete[] F;
425

    } while (!converge(x0, x1, matr_size, x_eps));

    for (int i = 0; i < nodes_on_crack; i++) {
        double gap = (x1[vUpEdgePoints[i]+n] - x1[vLowEdgePoints[i]
430     ]+n])*normals[i].second;
        gap = (fabs(gap) < 0.1 * x_eps) ? 0.0 : gap;
        my_out << gap << " ";
        l1[i] = l0[i] - r * gap;
        if (l1[i] < 0.0)
            l1[i] = 0.0;
435     }
        iter_count++;
        my_out << endl;
        my_out << "||l1-l0|| = " << converge_norm(l0,l1,
nodes_on_crack) << endl;

```

```

440 } while (!converge(l0, l1, nodes_on_crack, l_eps));

    cudaEventRecord(stop, 0);
    cudaEventSynchronize(stop);
    cudaEventElapsedTime(&timerValue, start, stop);
445 my_out << "\n GPU calculation time: " << timerValue << endl;
    my_out.close();

    ofstream output("u_solve.txt");
    for (int i = 0; i < n; i++) {
450     output << " " << x1[i] << " " << x1[n + i]
        << ";" << endl;
    }
    output.close();

455 //crack points
    ifstream on_crack_output("nodes_on_crack.txt");
    std::vector<int> vCrackPoints;
    int vCrackPoints_size = 0;
    on_crack_output >> vCrackPoints_size;
460 for (int i = 0; i < vCrackPoints_size; i++) {
        int index;
        double x, y;
        on_crack_output >> index >> x >> y;
        vCrackPoints.push_back(index);
465 }
    vCrackPoints.erase(vCrackPoints.end() - 1);
    int left_crack_tip = vCrackPoints.at(0);
    int right_crack_tip = vCrackPoints.at(nodes_on_crack + 1);
    ofstream output_crack_u("u_crack.txt");
470 output_crack_u << x1[left_crack_tip + n] << " " << x1[
    left_crack_tip + n] << " 0.0;" << endl;
    for (int i = 0; i < vUpEdgePoints.size(); i++) {
        output_crack_u << x1[vUpEdgePoints[i]+n] << " " << x1[
        vLowEdgePoints[i]+n] << " " << l1[i] << ";" << endl;
    }
    output_crack_u << x1[right_crack_tip + n] << " " << x1[
    right_crack_tip + n] << " 0.0;" << endl;
475 output_crack_u.close();
    cudaFree(d_def_my_matr); cublasDestroy_v2(handle);
    delete[] l0, l1, x1, x0, p;
}

```