

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт автоматизации и процессов управления
Дальневосточного отделения Российской академии наук

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Морской государственный университет имени адмирала Г.И. Невельского

На правах рукописи

Попова Елена Олеговна

**Неизотермические прямолинейные течения материалов с упругими,
пластическими и вязкими свойствами**

1.1.8 – механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
чл.-корр. РАН, профессор РАН
Ковтанюк Лариса Валентиновна

Владивосток – 2025

Содержание

Введение.....	3
Глава 1 Основные соотношения модели больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае	15
1.1 Кинематика больших деформаций.....	15
1.2 Основные определяющие законы.....	18
1.3 Конкретизация определяющих соотношений.....	23
Глава 2 Производство тепла за счет деформаций ползучести и пристеночного вязкопластического течения в материале пробки в круглой трубе под действием переменного перепада давления	31
2.1 Постановка задачи и деформирование до вязкопластического течения ..	31
2.2 Вязкопластическое течение материала при возрастающем и постоянном перепаде давления.....	36
2.3 Течение при убывающем перепаде давления. Разгрузка среды и остывание	42
Глава 3 Прямолинейное движение пробки в круглой трубе под действием переменного перепада давления с учетом разогрева материала за счет пристеночного трения и необратимого деформирования	49
3.1 Деформирование материала до начала вязкопластического течения	49
3.2 Вязкопластическое течение при возрастающем и постоянном перепаде давления	51
3.3 Течение при убывающем перепаде давления. Разгрузка среды и остывание	52
Глава 4 Необратимое деформирование и разогрев упруговязкопластического материала в круглой трубе при наличии слоя смазки	62
4.1 Постановка задачи и обратимое деформирование	62
4.2 Вязкопластическое течение в смазке и основном материале	67
4.3 Торможение течения при убывающем перепаде давления, разгрузка и остывание	74
Заключение	79
Список литературы	82

Введение

Термомеханическая обработка металлов и сплавов играет важную роль в различных отраслях промышленности благодаря своей способности улучшать свойства материалов и обеспечивать создание высококачественной продукции. Методы термомеханической обработки, к которым относятся нагрев, охлаждение и механическая деформация, являются важными инструментами в производстве металлических изделий с определенными характеристиками и качествами. Термомеханическая обработка способствует повышению прочности, устойчивости к износу, ударной вязкости и других механических параметров металлов, что делает их более долговечными и дает возможность использовать в условиях повышенной нагрузки или трения. Исследование поведения конструкционных материалов в условиях механической и тепловой нагрузки было и остается актуальной научной задачей [14, 15, 77, 98, 152], интерес к которой в наши дни только возрастает [106, 109, 113-115, 119, 122, 123, 127, 129, 131, 135, 139-141, 149, 151, 153, 156-160].

Требование высокой геометрической точности готовых изделий в современной промышленности приводит к необходимости определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций в условиях термомеханических воздействий с одновременным учетом упругих, пластических и вязких свойств деформируемых материалов. Такими свойствами обладают все реальные материалы, однако иногда для упрощения модельных соотношений одно или два из этих свойств не учитывают и решение задач проводят в рамках классических теорий механики деформирования: упругости [74, 84], пластичности [27, 38, 46, 48], ползучести [3, 47, 92, 95], вязкоупругости [54, 127, 131], вязкопластичности [79, 81, 86]. Используя различные сочетания свойств упругости, пластичности и вязкости деформируемых материалов, добиваются соответствия теоретических результатов экспериментальным данным и, таким образом, возможности

прогнозирования результатов технологических операций обработки материалов давлением с помощью предварительных расчетов. Не является исключением и случай неизотермического деформирования, когда задачи решаются с использованием теорий термоупругости [113, 115, 119, 123, 135], термовязкоупругости [45, 109, 149], термоупругопластичности [151, 153, 156, 160], термоупруговязкопластичности [106, 114-115, 122, 127, 129, 135, 139-140, 151, 153, 156, 158, 160] и др.

Существует множество эффектов, определяемых взаимовлиянием обратимого и необратимого деформирования материалов, когда невозможно пренебречь ни одним из рассматриваемых свойств [19, 92]. Так, способность материалов необратимо деформироваться лежит в основе множества промышленных технологий обработки материалов давлением (осадка, прокатка, штамповка, волочение или прессование) [2, 13, 37, 65, 67, 75, 78, 87-88, 91, 100, 104]. Термомеханическая обработка сочетает в себе термообработку и пластическую деформацию. С другой стороны, многие элементы конструкций работают под действием циклически изменяющихся нагрузок, вызывающих упругопластическое деформирование. Вследствие этого в элементах конструкций возникают тепловые деформации, которые могут существенно изменять свойства материала и, как следствие, характер деформирования. Разогрев поверхности обрабатываемого материала за счет трения вызывает и пристеночное скольжение [14]. При этом развивающееся в пристеночных областях вязкопластическое течение также не является изотермическим. В процессе термомеханической обработки материалов значительное влияние может оказывать ползучесть [3, 47, 92, 95]. Хотя время деформирования является небольшим, из-за больших напряжений деформации ползучести могут достичь значительных размеров и превзойти не только упругие, но и пластические деформации. Поэтому учет ползучести при расчете подобных процессов также является исключительно важным. В ряде технологических операций обработки металлов давлением (прокатка, волочение, штамповка) расчеты проводят с использованием идеального

жесткопластического анализа [39-44], когда обратимыми (упругими) деформациями из-за их малости в сравнении с необратимыми (пластическими) пренебрегают. Такой подход позволяет рассчитывать значительное формоизменение материалов, но не учитывает упругий отклик при разгрузке и снятии оснастки [13, 19], т.е. не позволяет указать итоговое (остаточное) распределение напряжений в готовом изделии и его итоговую геометрию [84, 106, 151, 153, 160] с целью добиться высокой геометрической точности готовых изделий [2, 87]. Теория малых упругопластических процессов (деформационная теория пластичности) приводит часто к вполне удовлетворительным для практики результатам [101], но ограничена предположением о малости деформаций. Имеются многочисленные попытки обобщения таких подходов на случай больших деформаций [77, 89, 90]. Далее на способах расчетов больших деформаций деформируемых материалов в условиях их термомеханической обработки остановимся более подробно.

Основной проблемой при разработке математической модели больших обратимых и необратимых деформаций является определение таких составляющих полных деформаций. Разделение экспериментально измеряемых полных деформаций в теле на обратимую и необратимую составляющие необходимо в теориях пластичности и ползучести, учитывающих конечность деформаций. Поскольку отдельно составляющие полных деформаций не могут быть измерены в экспериментах, то их определение требует принятия некоторых гипотез и предположений, но при этом необходимо соблюдать геометрическую корректность предлагаемого разделения, что оказывается не простой задачей. Впервые геометрически непротиворечивая кинематика упругопластических деформаций была построена [128] на основе мультипликативного разделения полных деформаций на обратимую (упругую) и необратимую (пластическую) составляющие. Основной гипотезой, предложенной в [128], кинематики является предположение об однозначном соответствии каждому текущему состоянию упругопластического тела единственному состоянию полной

разгрузки, при котором в теле полностью отсутствуют обратимые деформации. Подразумевает такое состояние предельное состояние, в котором каждый бесконечно малый элемент объема тела освобожден от нагрузок всех видов. Очевидно, что в реальности такое состояние не достижимо, при этом открытым остается вопрос о единственности данного состояния полной разгрузки при изменениях в пути разгрузки в пространстве напряжений.

Второй кинематической проблемой при разработке модели больших деформаций является проблема определения скоростей изменения необратимых деформаций. Для их определения предлагается выбрать некоторую из многочисленного числа существующих объективных производных по времени от тензора необратимых деформаций [71]. Несмотря на это, на геометрически корректном мультипликативном подходе предложено достаточно много моделей [1, 4, 50-51, 80, 105, 133].

Начиная с 1969 года, математических моделей и подходов, описывающих поведение деформируемых материалов при больших деформациях, включая неизотермическое деформирование, было предложено немало [28, 32, 56, 64, 70, 85, 96, 102-103, 106, 109, 113-115, 119-120, 122-123, 127, 129, 131, 135, 138-144, 148-149, 151-160]. В работе [82] было отмечено, что согласно законам неравновесной термодинамики, считая обратимую и необратимую составляющие полных деформаций термодинамическими параметрами состояния упругопластического тела, следует определить для них соответствующие дифференциальные уравнения их изменения (переноса). В этих уравнениях должны быть заданы и источники данных переменных состояния, и потоковые слагаемые, отражающие их взаимодействие в процессе деформирования. Соответствующая схема формирования уравнений переноса была намечена в [82]. Возможная конкретизация таких дифференциальных уравнений в простейшем случае была предложена в [18] и позднее подробно описана в [19]. Построенная таким образом математическая модель больших упругопластических и упруговязкопластических деформаций является геометрически и термодинамически корректной и не содержит в себе

проблемы «выбора» объективной производной по времени от тензора необратимых деформаций. Такая производная оказывается единственно возможной при формулировании уравнения изменения (переноса) тензора необратимых деформаций.

Как и в случае больших изотермических деформаций, общепризнанной теории связанных больших термомеханических деформаций не существует. В построении моделей термомеханического поведения материалов используются те же подходы, что и в случае изотермического деформирования. Так, чаще всего краевые термомеханические задачи решаются в рамках классической модели малых упругопластических деформаций Прандтля – Рейса. Однако в последнее время появилось немало публикаций, где для описания поведения материалов при термомеханических воздействиях используются большие деформации [106, 109, 113-115, 119, 122-123, 127, 129, 131, 135, 139-141, 149, 151, 153, 155-160]. Для описания термоупругопластических процессов при конечных деформациях используются как аддитивное разложение градиента деформации и тензора скорости деформации на термоупругую и вязкопластическую части [108, 132, 155], так и мультипликативное [106, 121, 124, 145]. Используются и феноменологические [69, 127], и физические теории [130]. Предпринимаются попытки обобщения разложения Прандтля – Рейса на случай больших деформаций, высоких давлений и температур [121], наложения малых деформаций на конечные [97].

В диссертации далее будем использовать математическую модель больших деформаций [18, 19, 28], в которой обратимая и необратимая составляющие полных деформаций определяются дифференциальными уравнениями их изменения (переноса). Неизотермический вариант такой модели, подробно описанный в первой главе, записан в [23, 56]. С использованием данного подхода были получены решения краевых задач соответствующей теории больших упруговязкопластических деформаций, в том числе численно-аналитические [19-21, 23, 26, 31, 57-59] и

неизотермические для прямолинейных [22-25] и вискозиметрических течений [5, 7-8]. Отметим, что на основе модели, также геометрически непротиворечивой, но основанной на мультипликативном разделении полных деформаций на составляющие, получить подобные решения практически не удалось.

Построение приближенных численных решений, создание численных методов для изучения производства больших деформаций в упругопластических средах так же остается до настоящего времени фундаментальной задачей современной механики деформирования. Современные пакеты прикладных программ основываются, чаще всего, на предложении Р. Хилла [118] проводить расчеты в скоростях деформирования, принимая аддитивное разложение скоростей деформаций на упругую и пластическую составляющие: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$ [146]. Такой же подход переносится на случай больших деформаций [150]. При этом скорость пластических деформаций определяется с помощью ассоциированного закона пластического течения, а скорость упругих деформаций – с помощью модели гипоупругости [125], которая предполагает использование какой-либо объективной производной тензора напряжений Коши-Эйлера. Такой подход, основанный на гипоупруговязкопластических определяющих уравнениях при расчетах больших деформаций, является не только неоднозначным вследствие произвола в выборе объективной производной [111], но и физически и термодинамически некорректным [106], однако его универсальность и простота реализации сделали его применение повсеместным в конечноэлементных пакетах для моделирования процессов обработки металлов давлением [136], в том числе и для неизотермических случаев. К тому же указанные недостатки практически не сказываются на результатах, когда упругие деформации являются малыми [111]. Недостижимость разгруженной конфигурации и ее возможная неединственность [136] существенно затрудняют постановку краевых задач, основанную на мультипликативном подходе. Но он также используется в численных расчетах

конечных упругопластических деформаций и упругого отклика [116].

Как уже упоминалось, большие необратимые деформации в материалах могут накапливаться не только в быстрых по времени процессах пластического течения, но и в медленных процессах ползучести [16, 66, 72-73, 76, 83, 93]. При этом значительное формоизменение материалов именно за счет их деформирования в режиме ползучести часто оказывается необходимым технологическим требованием. Ряд конструкционных материалов теряют свой прочностной ресурс при их интенсивном и высокоскоростном деформировании за счет неконтролируемых структурных изменений при пластическом течении. Для таких материалов (высокопрочные алюминиевые сплавы) формоизменение за счет медленного процесса ползучести при пониженном относительно предела текучести уровне нагружающих усилий является [29, 33-34, 36, 67-68, 88, 94] единственно приемлемым.

При построении теории ползучести необходимо задать скорости деформаций ползучести в зависимости от напряжений в теле. Наиболее часто в расчетах применяется двухпараметрический степенной закон Нортона [134], хотя таких зависимостей предложено достаточно много. Построение универсальных зависимостей затруднительно из-за различного деформационного отклика разных материалов на одинаковое воздействие. При этом этот отклик сильно изменяется с изменением температуры, от которой становятся зависимыми и постоянные в соответствующих законах ползучести [107].

Еще одной фундаментальной проблемой является возникновение и развитие локальных областей пластического течения в технологических задачах формоизменения материалов за счет медленного процесса ползучести. В операциях формовки [2, 87,] или обтяжки [55] за счет ползучести такие области чаще всего возникают в местах контакта оснастки и формируемых элементов, которые выступают в качестве концентраторов напряжений. Наличие таких областей существенно влияет на уровень и распределение

напряжений в формуемом конструкционном элементе и, следовательно, вносит существенные изменения в процесс формовки (или обтяжки) в целом. Следовательно, при математическом моделировании операций высокоточной формовки [2, 17] необходимо учитывать наряду с упругими и вязкими (ползучесть) свойствами материалов и их пластические свойства. Заметим, что задачи формовки тонких панелей [2, 17, 88], могут все же рассматриваться с использованием модели малых деформаций, учитывающей большие перемещения и повороты. При обтяжке [55] или формовке элементов усиления конструкций планера летательных аппаратов необходимо пользоваться математической моделью больших деформаций, одновременно учитывающей и медленный процесс ползучести, и более быстрый процесс пластического течения. Учет появления и развития пластических областей в условиях общего деформирования за счет процесса ползучести приводит к проблеме обеспечения непрерывности необратимых деформаций на упругопластических границах, поскольку на продвигающейся границе пластической области уже присутствуют необратимые деформации ползучести, а далее они же в форме пластических должны расти уже в условиях пластического течения. Общепринятых ответов на подобные вопросы не существует, причем не только в случае, когда необратимые деформации ползучести оказываются большими [147, 117].

В [6, 12] предлагается две разные составляющие одного процесса необратимого деформирования считать последовательными. С момента начала процесса деформирования накапливаемые необратимые деформации являются деформациями ползучести. Затем, при достижении напряжениями поверхности текучести в пространстве напряжений, необратимые деформации производятся за счет процесса пластического течения. При уменьшении напряжений, когда напряженное состояние перестает достигать поверхности нагружения, накопленные пластические деформации дальше изменяются как деформации ползучести. В теории малых деформаций на данное обстоятельство часто не обращают внимания, суммируя составляющие

необратимых деформаций. Если деформации большие, то такие последовательности в накоплении необратимых деформаций оказываются единственно приемлемыми. Для них справедливо одно и то же дифференциальное уравнение переноса, в котором для источника выбираются различные законы: закон ползучести при напряжениях, не достигающих поверхности нагружения, или ассоциированный с данной поверхностью закон пластического течения при напряженных состояниях, удовлетворяющих условиям пластичности. Таким образом, упругопластическая граница оказывается поверхностью, где меняется механизм производства необратимых деформаций с ползучести на пластичность и наоборот при разгрузке. Накопленные необратимые деформации ползучести в активном процессе становятся начальными для их последующего роста в условиях пластического течения. При уменьшении напряжений, когда напряженное состояние перестает достигать поверхности нагружения, накопленные пластические деформации дальше изменяются как деформации ползучести. В работах [10-11, 30, 60, 110, 112, 126] с использованием данного подхода получены некоторые решения задач теории больших деформаций о прямолинейных движениях [60], о вискозиметрическом деформировании материала [9-11, 110], задач со сферической симметрией [30]. Получены первые решения для случая неизотермического деформирования [112, 126].

Целью настоящей работы является постановка и решение новых связанных краевых задач теории больших деформаций о прямолинейных течениях упругопластических материалов с учетом их сложных реологических и теплофизических свойств, с последующей разгрузкой и остыванием, вычислением сформированных таким способом остаточных напряжений; разработка алгоритмов и программ расчетов для рассматриваемых случаев.

Для достижения поставленной цели предполагается решение следующих **задач**:

1. Постановка и решение связанной краевой задачи о неизотермическом

деформировании материала, образующего пробку конечной длины в недеформируемой круглой трубе в условиях жесткого сцепления с поверхностью трубы под действием переменного перепада давления, заданного на торцевых поверхностях пробки. Исследование процессов ползучести, вязкопластического течения и разогрева материала за счет необратимого деформирования при возрастающем и постоянном перепаде давления, торможения течения и разгрузки среды при убывающем давлении, а также остывания материала после полного снятия механической нагрузки.

2. Постановка и решение связанной краевой задачи о неизоэтермическом деформировании материала пробки под действием переменного перепада давления с учетом проскальзывания в окрестности жесткой стенки трубы.
3. Постановка и решение неизоэтермической краевой задачи о деформировании материала в жесткой круглой трубе при наличии слоя смазки. Исследование обратимого деформирования, возникновения и развития вязкопластического течения в слое смазки и распространении течения в основной материал с учетом их разогрева за счет трения о стенку трубы и необратимого (вязкопластического) деформирования. Изучение торможения течения и разгрузки основного материала и смазки при убывающем давлении, а также их остывания после полного снятия механической нагрузки.
4. Разработка алгоритмов и программ расчетов напряжённо-деформированных состояний материалов в указанных случаях.

Научная новизна результатов, полученных в диссертации, обусловлена постановками и решениями новых неизоэтермических краевых задач теории больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами с предложенными методами их решения.

Достоверность полученных результатов базируется на использовании классических подходов неравновесной термодинамики и механики сплошных сред. Используемая математическая модель больших

упруговязкопластических деформаций может считаться достаточно апробированной; из нее в частном случае при переходе к малым деформациям следуют соотношения классической модели типа Прандтля – Рейса. При решении конкретных краевых задач дополнительные гипотезы не использовались, применяемые численно-аналитические процедуры являются общепризнанными.

Апробация работы

Основные результаты диссертации были представлены на следующих научных конференциях:

- Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, 2023, 2024 гг.;
- III научная конференция с международным участием «Вычислительные технологии и прикладная математика», Комсомольск-наАмуре, 2024 г.;
- «Механика деформируемого твердого тела в проектировании материалов и конструкций», Пермь, 2024 г.;
- Научная конференция с международным участием «Вычислительные технологии и прикладная математика», Владивосток, 2025 г.;
- Двадцать четвертая Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2025), Алушта, 2025 г.

Диссертация в целом докладывалась на объединённом научном семинаре отдела механики сплошных сред в ИАПУ ДВО РАН (г. Владивосток).

По теме диссертации опубликовано 6 печатных работ, 3 из которых изданы в ведущих рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК (в том числе 1 статья в издании, входящем в международную систему цитирования Web of Science), 3 в сборниках трудов и материалах конференций регионального, всероссийского и международного уровня.

Личный вклад автора. Все основные результаты, составившие диссертацию, получены автором лично. В работах, написанных в соавторстве,

автор участвовала в постановке задач, разработке алгоритмов решения и выполняла все необходимые вычисления.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы (160 наименований). Общий объем работы – 98 страниц, в том числе 40 рисунков, включенных в текст.

1.1 Кинематика больших деформаций

Полагаем, что деформации среды могут быть и обратимыми, и необратимыми. При построении кинематики деформируемой среды будем считать, что положение ее произвольной точки в текущий момент времени t задается радиус-вектором $\mathbf{x}$, координатами которого являются пространственные координаты Эйлера. Закон движения среды в прямоугольной декартовой системе координат зададим, используя способ Эйлера:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{a}$ – радиус-вектор точки среды в свободном состоянии. Для векторов перемещений $\mathbf{u}$ и скорости $\mathbf{v}$ справедливы соотношения

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (1.2)$$

Для тензора дисторсии $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}}$ запишем уравнения изменения (переноса)

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (1.3)$$

Метрический тензор $\mathbf{G}$ и тензор дисторсии $\mathbf{A}$ представим в виде

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{m}^T) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}), \quad \mathbf{A} = \mathbf{Y} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}), \quad (1.4)$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор. Из соотношений (1.4) следует выражение для тензора $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{Y}) \quad (1.5)$$

Согласно (1.5) тензор $\mathbf{p}$ является симметричным тензором. Однако тензор $\mathbf{m}$ в (1.4) в общем случае не является симметричным. Используя зависимости (1.3) и (1.4) для тензоров $\mathbf{m}$ и $\mathbf{p}$ запишем уравнения их

изменения

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{m}}{dt} &= \mathbf{V} - \mathbf{b} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{b}^T) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{b} = -\mathbf{Y}^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{Y}}{dt}.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Для симметрии тензора $\mathbf{m}$ необходимо выполнения условия, которое следует из первого уравнения (1.6)

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}) - (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{b}^T = (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}). \quad (1.7)$$

Из полученного уравнения (1.7) определяется тензор $\mathbf{b}$, при котором тензор $\mathbf{m}$ будет симметричным. Решением уравнения (1.7) является тензор [52]

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} + (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{t}. \quad (1.8)$$

Здесь $\mathbf{t}$ – произвольный симметричный тензор, $\mathbf{r}$ – кососимметричный тензор ($\mathbf{r} = -\mathbf{r}^T$), имеющий вид [52]

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \boldsymbol{\omega} + A_1^{-1} \left[A_2^2 (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + A_2 (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m} \right], \\ A_1 &= 8 - 8L_1 + 3L_1^2 - L_2 - \frac{1}{3}L_1^3 + \frac{1}{3}L_3, \quad A_2 = 2 - L_1, \\ L_1 &= \text{tr } \mathbf{m}, \quad L_2 = \text{tr } \mathbf{m}^2, \quad L_3 = \text{tr } \mathbf{m}^3.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Используя соотношения (1.9), перепишем уравнения (1.6) изменения тензоров $\mathbf{m}$ и $\mathbf{p}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{m}}{dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{t} - \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} - \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} - \mathbf{t}) + (\mathbf{r} + \mathbf{t}) \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \mathbf{t} - \frac{1}{2}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}) + (\mathbf{r} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{t}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{p}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\mathbf{V} + \mathbf{V}^T), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{V} - \mathbf{V}^T), \quad \mathbf{V} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Учитывая, что $\mathbf{t}$ – произвольный симметричный тензор, примем его в зависимостях (1.10) равным нулю. Тогда уравнения изменения (1.10) тензоров $\mathbf{m}$ и $\mathbf{p}$ принимают форму

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{m}}{dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{V}), \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Второе уравнение (1.10) в случае $\mathbf{t} \equiv \mathbf{0}$ можно записать в виде

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{p} = 0.\tag{1.12}$$

Если $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ (среда не деформируется), то тензор $\mathbf{r}$ совпадает с тензором вихря скорости $\boldsymbol{\omega}$. В этом случае объективная производная (1.12) совпадает с производной Яумана, то есть компоненты тензора $\mathbf{p}$ изменяются как при жестком (без деформирования) движении среды. Тензор вращений $\mathbf{r}$ в (1.9) отличается от тензора $\boldsymbol{\omega}$ наличием нелинейной составляющей $z(\mathbf{m}, \boldsymbol{\varepsilon})$: $\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} + z(\mathbf{m}, \boldsymbol{\varepsilon})$. Таким образом, в случае $\mathbf{t} \equiv \mathbf{0}$ при неизменном тензоре $\mathbf{p}$ его компоненты изменяются в соответствии со вторым соотношением (1.11). Это позволяет отождествить тензор $\mathbf{p}$ с тензором необратимых деформаций, а случай, когда $\mathbf{t} \equiv \mathbf{0}$, считать процессом обратимого деформирования. При этом необратимые деформации в среде могут присутствовать, но изменяться в соответствии с (1.11), то есть так, как если бы среда двигалась как жесткое целое, не изменяя тензор необратимых деформаций. Обратимое деформирование таким образом оказывается полностью кинематически определенным, поскольку оно продолжается в течение такого промежутка времени, когда неизвестный до сих пор тензор остается нулевым ($\mathbf{t} \equiv \mathbf{0}$). В случае, когда необратимые деформации в среде накапливаются, произвольный симметричный тензор $\mathbf{t}$ должен быть определен из других условий.

Принимая в качестве тензора деформаций тензор Альманси $\mathbf{d}$, получим что через введенные зависимостями (1.4) тензоры $\mathbf{m}$ и $\mathbf{p}$ он вычисляется соотношением

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{G}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{U}^T - \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U}) = \\ &= \mathbf{m} + \mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{m}^2 - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m}.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Называя в (1.13) $\mathbf{p}$ тензором необратимых деформаций, тензором обратимых деформаций следовало бы считать $\mathbf{c} = \mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{m}^2$, однако, для удобства записи уравнений изменения (1.10) и последующих соотношений будем называть тензором обратимых деформаций линейную часть тензора $\mathbf{c}$ – тензор $\mathbf{m}$. Полагая тепловое расширение материала обратимым, для тензора $\mathbf{m}$ запишем выражение

$$\mathbf{m} = \mathbf{e} + a(T - T_0)\mathbf{I}. \quad (1.14)$$

В (1.14) $\mathbf{e}$ – линейная часть тензора упругих деформаций, a – коэффициент линейного расширения, T – текущая температура, T_0 – температура тела в свободном состоянии.

1.2 Основные определяющие законы

Закон сохранения энергии запишем в форме

$$\rho \frac{de}{dt} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \quad (1.15)$$

Здесь ρ – плотность деформируемой среды, e – массовая плотность распределения внутренней энергии, $\mathbf{q}$ – вектор теплового потока, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Эйлера – Коши. Термодинамическими параметрами состояния полагаем температуру T , обратимые (термоупругие) деформации $\mathbf{m}$ и необратимые деформации $\mathbf{p}$. В качестве термодинамического потенциала выберем свободную энергию Ψ с плотностью распределения $\psi = e - Ts$, где s – плотность распределения энтропии. Для закона сохранения энергии в таком случае следует выражение

$$\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} + T \frac{ds}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \quad (1.16)$$

Сначала рассмотрим случай $\mathbf{t} \equiv \mathbf{0}$, когда необратимые деформации в среде не накапливаются, то есть в случай обратимого деформирования. Воспользовавшись уравнениями изменения обратимых и необратимых деформаций (1.11), получим из (1.16) зависимость

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \right) + \\ & + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + \rho T \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Исключая тензор $\boldsymbol{\omega}$ из (1.17) с помощью формулы (1.9), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \left[-\boldsymbol{\sigma} + \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} + A_1^{-1} A_2^2 \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^2 - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \mathbf{m}^2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \right) + \frac{1}{2} A_1^{-1} A_2 \left(\mathbf{m}^2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^3 - \mathbf{m}^3 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^2 \right) + A_1^{-1} \left(\mathbf{m}^2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^3 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \mathbf{m}^3 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} \right) \right] \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \rho \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p} \right) \cdot \mathbf{r} + \rho T \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Поскольку процессы, описываемые тензорами $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{r}$, независимы, из (1.18) следуют три равенства

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\sigma} = \rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}) + A_1^{-1} \left(A_2^2 \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^2 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + A_2 \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^2 - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^3 \right) + \mathbf{m}^2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^3 \right) \right], \\ & \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \rho T \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Для симметрии тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ в первом равенстве (1.19) необходимо выполнение условия

$$\begin{aligned}
& \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} + A_1^{-1} A_2^2 \left(\mathbf{m}^2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^2 \right) + \\
& + A_1^{-1} A_2 \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m}^3 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^3 \right) + \\
& + A_1^{-1} \left(\mathbf{m}^3 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^3 \right) = 0.
\end{aligned}$$

Выполняется такое условие только тогда, когда тензор $\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}}$ является симметричным. Из второго уравнения (1.19) в таком случае следует и симметрия тензора $\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}}$, а тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ в (1.19) записывается в форме, аналогичной формуле Мурнагана в нелинейной теории упругости [74]

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}). \quad (1.20)$$

Третье равенство в (1.19) является уравнением баланса энтропии в условиях обратимого деформирования. В областях, где необратимые деформации отсутствуют ($\mathbf{p} \equiv 0$), формула Мурнагана принимает следующий вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{d}), \quad \mathbf{d} = \mathbf{m} - \frac{1}{2} \mathbf{m}^2. \quad (1.21)$$

Следовательно, напряжения через деформации вычисляются либо соотношениями (1.21) при отсутствии необратимых деформаций, либо зависимостью (1.20), когда необратимые деформации в среде присутствуют.

Теперь рассмотрим случай $\mathbf{t} \neq 0$, когда необратимые деформации в среде накапливаются. В таком случае вместо равенств (1.11) в закон сохранения энергии необходимо подставить производные (1.10), что приводит к зависимости

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} - \mathbf{t} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{m} - \\ & - \mathbf{m} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}) + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left(\mathbf{t} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{t} - \frac{1}{2} \mathbf{t} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{p} - \right. \\ & \left. - \mathbf{p} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \right) + \rho T \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Исключая из (1.22) слагаемые, являющиеся следствием бездиссипативного деформирования с помощью зависимостей (1.19), получим

$$\begin{aligned} & \rho T \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{t} = D, \\ & \mathbf{N} = \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} - 2\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} + \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{m} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} + 2\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Первое соотношение (1.23) является уравнением баланса энтропии с источником, которое можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} = -\operatorname{div} (T^{-1} \mathbf{q} + \rho s \mathbf{v}) - T^{-2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + T^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{t}. \quad (1.24)$$

Первое слагаемое в правой части (1.24) представляет собой полный поток энтропии, а два остальных определяют производство энтропии. Согласно уравнению (1.24) производство энтропии связано с двумя неравновесными процессами, первым из которых является неравновесный процесс теплопроводности (предпоследнее слагаемое правой части (1.24)), вторым – неравновесный процесс необратимого деформирования (последнее слагаемое правой части (1.24)). Такой источник энтропии в (1.23), отвечающий за вклад необратимого деформирования в производство энтропии, должен быть неотрицательным $D \geq 0$.

В теории идеальной пластичности источник энтропии D (диссипативная функция) определяется зависимостью $D = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p$, в которой $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ – тензор скоростей пластических деформаций [27, 39]. Необратимое деформирование может происходить как за счет пластического течения, либо за счет вязкого сопротивления деформированию, так и в процессах

ползучести, что также связано с учетом вязких свойств среды. Производство энтропии для таких случаев необратимого деформирования можно записать соотношением, аналогичным случаю идеальной пластичности

$$D = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad (1.25)$$

В областях, где пластическое течение не происходит, а необратимое деформирование связано только с проявлением ее вязких свойств, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^v$, где $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ – тензор скоростей деформаций ползучести. В областях пластического (вязкопластического) течения $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^p$. Отметим, что в случае вязкопластического течения необходимо дополнительно добавить слагаемые в пластический потенциал (поверхность нагружения).

Сравнение производства энтропии D в соотношениях (1.23) и (1.25) позволяет записать выражение, связывающее тензор $\mathbf{t}$ с тензором скоростей необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma}$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{t}. \quad (1.26)$$

В отличие от симметричного тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, тензор $\mathbf{N}$ – произвольный. Соотношение, связывающее тензор $\mathbf{N}$ с тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ в общем случае приведено в [19]. Будем далее полагать, что термодинамический потенциал деформирования зависит только от обратимых деформаций. Такое упрощающее предположение позволяет считать, что свободная энергия определяется лишь консервативным механизмом деформирования, а диссипативный механизм полностью отвечает за производство энтропии, т.е. считаем, что Ψ не зависит от необратимых деформаций. При использовании такой гипотезы тензоры $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{N}$ связаны соотношениями

$$\mathbf{N} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{m} + \mathbf{m}^2) = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}). \quad (1.27)$$

Из (1.26) и (1.27) получим зависимость, связывающую до сих пор неизвестный тензор $\mathbf{t}$ с тензором скоростей необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{t}.$$

Тензор $\mathbf{b}$, определенный зависимостью (1.8), с учетом последнего соотношения принимает вид: $\mathbf{b} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\gamma}$, а из второго уравнения (1.6) соответственно следует зависимость, единственным образом связывающая тензор необратимых деформаций с тензором скоростей необратимых деформаций

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{p} = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}. \quad (1.28)$$

Соотношение (1.28) представляет собой объективную производную по времени, которая для произвольного тензора $\mathbf{n}$ имеет вид

$$\frac{D\mathbf{n}}{Dt} = \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{n}.$$

Именно данная производная означает геометрическую корректность модели, обеспечивая неизменность тензора необратимых деформаций в случаях, когда их источник $\boldsymbol{\gamma}$ равен нулю.

1.3 Конкретизация определяющих соотношений

Выбор определяющих законов связан с конкретизацией консервативного (термоупругого) и диссипативного механизмов деформирования (необратимое деформирование и необратимый процесс теплопроводности). Консервативный механизм связан с заданием функции термодинамического потенциала $\Psi(\mathbf{m}, T)$ (свободная энергия) в зависимости от обратимых (термоупругих) деформаций. Диссипативный механизм, связанный с накоплением необратимых деформаций, определяется пластическими и реологическими свойствами среды, для его конкретизации следует определить скорости роста необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma}$ в зависимости от напряжений в среде. Полагая, что тепло поступает в деформируемую среду и через ее границу и создается внутри за счет необратимого деформирования, для конкретизации диссипативного механизма, определяющего необратимый процесс теплопроводности, необходимо задать какой-либо закон теплопроводности. Тогда из уравнения

баланса энтропии получим уравнение теплопроводности, описывающее распределение температуры в деформируемом твердом теле.

Принимая гипотезу о независимости свободной энергии от необратимых деформаций, считаем, что консервативная часть процесса деформирования задается упругим потенциалом $W(\mathbf{m}, T) = \rho_0 \psi(\mathbf{m}, T)$, ρ_0 – плотность материала в свободном состоянии ($\mathbf{d} = \mathbf{0}$, $T = \text{const}$). Далее материал полагаем механически несжимаемым ($\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = 0$), но изменение его объема может происходить за счет линейного расширения (сжатия). Формула Мурнагана при отсутствии в среде необратимых деформаций (1.21) в таком случае принимает вид

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \frac{1}{1+3\beta\theta} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{d}), \quad (1.29)$$

$$\beta = aT_0, \quad \theta = (T - T_0)T_0^{-1}.$$

Здесь P – добавочное гидростатическое давление. В случае, если деформируемая среда является изотропной, термодинамический потенциал зависит только от инвариантов тензора деформаций и температуры T : $W = W(J_1, J_2, J_3, T)$. Примем функцию W в форме ее разложения в ряд по инвариантам тензора деформаций. Согласно условию механической несжимаемости

$$1 - 2J_1 + 2J_1^2 - 2J_2 - \frac{4}{3}J_1^3 + 4J_1J_2 - \frac{8}{3}J_3 = (1 + 3\beta\theta)^{-2}, \quad (1.30)$$

$$J_1 = \text{tr} \mathbf{d}, \quad J_2 = \text{tr} \mathbf{d}^2, \quad J_3 = \text{tr} \mathbf{d}^3.$$

независимыми будут инварианты J_1 , J_2 и относительная температура θ . В этом случае напряжения могут присутствовать и в недеформированной среде, поэтому в разложение функции $W(J_1, J_2, \theta)$ в ряд Тейлора могут входить и линейные слагаемые. Для рассматриваемого далее антиплоского движения несжимаемой среды ($u_1 = u_2 = 0$ и $u_3 = u(x^1, x^2, t)$), для упругого потенциала в области обратимого деформирования будем использовать зависимость

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + a_2 J_1^2 + (a_2 - \mu) J_1 J_2 - \zeta_1 J_1^3 + \nu \theta J_1 + \nu_1 \theta^2 - \kappa_1 J_1 \theta^2 - \kappa_2 J_1^2 \theta - \kappa_3 J_2 \theta - \nu_2 \theta^3. \quad (1.31)$$

Тогда для напряжений в областях обратимого деформирования, ограничиваясь слагаемыми до второго порядка по деформациям и температуре, получим соотношение

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & (-P - 2\mu + 2(a_2 - (\kappa_2 + 3a_2\beta)\theta)J_1 + (\nu + 6\mu\beta)\theta - \\ & - (\kappa_1 + 3\beta\nu + 18\mu\beta^2)\theta^2 + (a_2 - \mu)J_2 - 3\zeta_1 J_1^2)\mathbf{I} + \\ & + 2(\mu - (a_2 + \mu)J_1 - (\nu + \kappa_3 + 3\mu\beta)\theta)\mathbf{d} + 4\mu\mathbf{d}^2. \end{aligned} \quad (1.32)$$

В случае присутствия в среде необратимых деформаций формула (1.20) переписывается в виде, аналогичном (1.29)

$$\boldsymbol{\sigma} = -P_1\mathbf{I} + \frac{1}{1 + 3\beta\theta} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}), \quad (1.33)$$

в которой добавочное гидростатическое давление обозначено P_1 . Вместо инвариантов тензора полных деформаций Альманси J_1, J_2 будем использовать инварианты I_1, I_2 тензора обратимых деформаций $\mathbf{m}$

$$\begin{aligned} W = & -2\mu I_1 - \mu I_2 + a_2 I_1^2 + (a_2 - \mu) I_1 I_2 - \zeta_1 I_1^3 + \nu \theta I_1 + \\ & + \nu_1 \theta^2 - \kappa_1 I_1 \theta^2 - \kappa_2 I_1^2 \theta - \kappa_3 I_2 \theta - \nu_2 \theta^3, \\ I_1 = & \text{tr } \mathbf{c}, \quad I_2 = \text{tr } \mathbf{c}^2. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Для напряжений в данном случае получаем:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & (-P_1 - 2\mu + 2(a_2 - (\kappa_2 + 3a_2\beta)\theta)I_1 + (a_2 - \mu)I_2 - 3\zeta_1 I_1^2 + \\ & + (\nu + 6\mu\beta)\theta - (\kappa_1 + 3\beta\nu + 18\mu\beta^2)\theta^2)\mathbf{I} + \\ & + 2(\mu - (a_2 + \mu)I_1 - (\nu + \kappa_3 + 3\mu\beta)\theta)\mathbf{m} + (3\mu + (5\mu - 3a_2)I_1 + \\ & + (\nu + \kappa_3 + 3\mu\beta)\theta)\mathbf{m}^2 - \mu(4\mathbf{m}^3 - \mathbf{m}^4). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Выбор инвариантов тензора обратимых деформаций в виде (1.34) и присутствие слагаемых до четвертого порядка обеспечивает предельный переход от зависимости (1.35) к (1.32) при стремлении необратимых деформаций к нулю.

Уравнение теплопроводности получим из уравнения баланса энтропии

(1.19). Учитывая равенства $s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial T}$ и используя разложение (1.31),

для областей обратимого деформирования уравнение (1.19) переписывается в форме

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0} (1 + \theta) \left((2\kappa_1 \theta - \nu + 2\kappa_2 J_1) \frac{dJ_1}{dt} + (2\nu_1 + 2\kappa_1 J_1 - 6\nu_2 \theta) \frac{d\theta}{dt} + \right. \\ \left. + \kappa_3 \frac{dJ_2}{dt} \right) = \operatorname{div} \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Воспользовавшись соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{d}}{dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{d}, \\ \frac{dJ_1}{dt} &= \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - 2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{d}, \quad \frac{dJ_2}{dt} = 2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{d} - 4\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{d}^2, \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \frac{1}{1 + 3\beta\theta} \approx 1 - 3\beta\theta + 9\beta^2\theta^2, \end{aligned}$$

учитывая условие несжимаемости ($\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = 0$), и принимая для вектора теплового потока закон теплопроводности Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad (1.37)$$

где λ - коэффициент теплопроводности, из (1.36) получим уравнение

$$\begin{aligned} (1 + \beta_1 \theta + \beta_2 J_1) \frac{d\theta}{dt} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{d} = q \Delta \theta, \\ \beta_1 = \frac{\nu_1(1 - 3\beta) - 3\nu_2}{\nu_1}, \quad \beta_2 = -\frac{\kappa_1}{\nu_1}, \quad \beta_3 = -\frac{\nu + \kappa_3}{\nu_1}, \quad q = -\frac{\lambda}{2\nu_1}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

где q - коэффициент температуропроводности. Для записи уравнения теплопроводности в областях разгрузки инварианты J_1 , J_2 необходимо заменить инвариантами тензора обратимых деформаций I_1 , I_2 . Для производных $\frac{dI_1}{dt}$ и $\frac{dI_2}{dt}$ получаем

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= \frac{d \operatorname{tr} \mathbf{m}}{dt} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{m}}{dt} \cdot \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \cdot \frac{d\mathbf{m}}{dt} \right) = \frac{d \operatorname{tr} \mathbf{m}}{dt} - \frac{d\mathbf{m}}{dt} \cdot \cdot \mathbf{m}, \\ \frac{dI_2}{dt} &= 2 \frac{d\mathbf{m}}{dt} \cdot \cdot \mathbf{m} - 3 \frac{d\mathbf{m}}{dt} \cdot \cdot \mathbf{m}^2 + \frac{d\mathbf{m}}{dt} \cdot \cdot \mathbf{m}^3.\end{aligned}\quad (1.39)$$

При подстановке первой зависимости (1.11) в (1.39) следуют соотношения

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - 2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{m}, \\ \frac{dI_2}{dt} &= 2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{m} - 5\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{m} + 4\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{m}^3.\end{aligned}\quad (1.40)$$

С учетом (1.40) уравнение теплопроводности для областей разгрузки принимает форму

$$\begin{aligned}\left(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \left(\operatorname{tr} \mathbf{m} - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{m}^2 \right) \right) \frac{d\theta}{dt} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{m} - \\ - \frac{1}{2} \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{m}^2 = q \Delta \theta.\end{aligned}\quad (1.41)$$

В областях необратимого деформирования производная $\frac{d\mathbf{m}}{dt}$ определяется первой зависимостью (1.10), из (1.39) в этом случае найдем

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \operatorname{tr} \mathbf{b} - 2(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}) \cdot \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}) \cdot \cdot \mathbf{m}, \\ \frac{dI_2}{dt} &= 2(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}) \cdot \cdot \mathbf{m} - 5\mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}) \cdot \cdot \mathbf{m} + \\ &+ 4\mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}) \cdot \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}) \cdot \cdot \mathbf{m}^3.\end{aligned}\quad (1.42)$$

Принимая положение о независимости свободной энергии от необратимых деформаций, тензор $\mathbf{b}$ в соотношениях (1.42) следует заменить его симметричной частью $\boldsymbol{\gamma}$. Тогда уравнение теплопроводности для областей необратимого деформирования с учетом условия необратимой несжимаемости $\operatorname{tr} \boldsymbol{\gamma} = 0$ переписется в форме

$$\begin{aligned}\left(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \left(\operatorname{tr} \mathbf{m} - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{m}^2 \right) \right) \frac{d\theta}{dt} + \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \cdot \mathbf{m} - \\ - \frac{1}{2} \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \cdot \mathbf{m}^2 = q \Delta \theta - \frac{1}{2\nu_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\gamma}.\end{aligned}\quad (1.43)$$

Вязкие свойства материалов могут проявляться как на стадии деформирования, предшествующей пластическому течению, так и в процессе течения, замедляя его. Пластические свойства проявляются при достижении напряженным состоянием в некоторой области деформируемого тела поверхности нагружения. Большие необратимые деформации в материалах могут накапливаться не только в быстрых по времени процессах пластического течения, но и в медленных процессах ползучести при напряжениях, не достигших предела текучести.

Далее будем считать, что необратимые деформации $\mathbf{p}$ могут быть и деформациями ползучести, и пластическими деформациями и необратимые деформации накапливаются в материале непосредственно с начала процесса деформирования. Таким образом, в уравнениях переноса необратимые деформации $\mathbf{p}$ не разделяются на свои составляющие. Их различие связано с разными механизмами накопления. В областях, где напряженное состояние еще не достигло поверхности текучести или, где пластическое течение происходило, но прекратилось $\gamma = \epsilon^v$, т.е. на данных стадиях процесса деформирования необратимые деформации производятся в форме деформаций ползучести. В области пластического течения $\gamma = \epsilon^p$, то есть источник необратимых деформаций совпадает с тензором скоростей пластических деформаций. В условиях накопления в материале деформаций ползучести выберем классический степенной закон Нортона [138]

$$\gamma = \epsilon^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma}, \quad V(\Sigma) = B \Sigma^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j|. \quad (1.44)$$

В соотношениях (1.44) V – потенциал ползучести, σ_i – главные напряжения, B, n – параметры ползучести материала.

Выход напряженного состояния на поверхность нагружения приводит к появлению области пластического течения, на границе которой определяющий закон ползучести должен быть заменен на определяющий закон, основанный на законе пластического течения. На такой граничной

поверхности напряжения и деформации непрерывны, Такой подход в случае учета вязких свойств среды при пластическом течении требует и совпадения скоростей необратимых деформаций при изменении механизма деформирования с вязкого на пластический.

Тогда скорости пластических деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^{v_0} = \phi \frac{\partial f(\sigma, k)}{\partial \sigma}, \quad f(\sigma, k) = 0, \quad \phi > 0. \quad (1.45)$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}$ – тензор скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения. Накопленные к началу пластического течения деформации ползучести и их скорости $\boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}$ являются начальными значениями для накапливающихся далее пластических деформаций.

В качестве поверхности нагружения принимаем условие пластичности Треска с учетом вязкого сопротивления пластическому течению [46]:

$$f(\sigma_i, y_k, k) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2k - 2\eta \max |y_k|. \quad (1.46)$$

В (1.46) y_k – главные значения тензора $\mathbf{y}$, k – предел текучести, η – вязкость.

При температурном воздействии на материал от нее зависят и параметры материала. Для параметров ползучести B и n принимаем зависимости в форме [107]

$$B = \frac{c_1}{\sigma_0^{n-1}} \exp\left(-\frac{Q}{R_u T_0 (1 + \theta)}\right), \quad n = b_1 + \frac{b_2}{T_0 (1 + \theta)}. \quad (1.47)$$

В (1.47) c_1 , σ_0 , b_1 и b_2 – постоянные материала, Q – энергия активации, R_u – универсальная газовая постоянная. Для предела текучести и коэффициента вязкости пластического течения будем использовать соотношения [137]

$$k = k_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_m^2}\right), \quad \eta = \eta_0 \exp(-\nu T_0 \theta), \quad \theta_m = (T_m - T_0) T_0^{-1}. \quad (1.48)$$

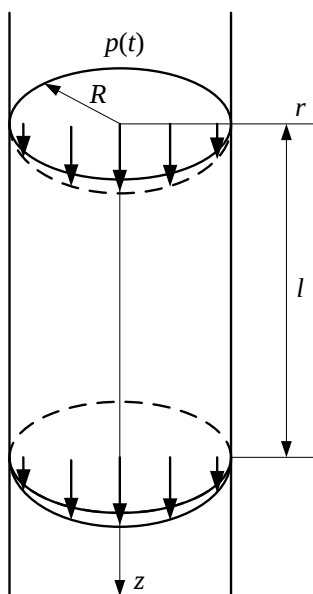
В (1.48) T_m – температура плавления деформируемого материала, k_0 , η_0 – предел текучести и вязкость материала при комнатной температуре.

Подчеркнем, что выбранные для конкретизации определяющих соотношений зависимости (1.37), (1.44), (1.46) – (1.48) являются простейшими из возможных и вместо них могут использоваться другие аналогичные или более сложные законы. В случае, когда тепловое расширение в материале отсутствует, или им можно пренебречь, в зависимостях (1.29), (1.30), (1.32), (1.33), (1.35), (1.38), (1.41), (1.43) коэффициент β равен нулю.

Глава 2 Производство тепла за счет деформаций ползучести и пристеночного вязкопластического течения в материале пробки в круглой трубе под действием переменного перепада давления

Здесь представим решение неизоотермической краевой задачи о необратимом деформировании материала, образующего пробку конечной длины в круглой недеформируемой трубе. Несжимаемый упруговязкопластический материал находится в условиях жесткого сцепления со стенками трубы и подвергается действию изменяющегося со временем перепада давления, заданного на торцевых поверхностях пробки. Необратимое деформирование материала пробки связано и с ползучестью, и с вязкопластическим течением и вызывает его разогрев. Рассматривается случай, когда тепло создается внутри только за счет необратимого деформирования, то есть приток тепла в среду через ее границу отсутствует.

2.1 Постановка задачи и деформирование до вязкопластического течения



Полагаем, что в круглой трубе радиуса R с недеформируемыми стенками находится пробка длины l из несжимаемого упруговязкопластического материала (рисунок 2.1). На боковой поверхности пробки выполняются условия жесткого сцепления со стенками трубы, а верхняя поперечная граничная поверхность пробки нагружается переменным давлением. В цилиндрической системе координат r, φ, z задача решается в классе функций $\theta = \theta(r, t)$, $u = u_z(r, t)$, $v = v_z(r, t)$, $P = P(r, z, t)$, где u и v – отличные от нуля компоненты векторов перемещений и скорости.

Рис. 2.1. Геометрия задачи

Краевые условия на граничных поверхностях пробки $z = u(r, t)$ и $z = l + u(r, t)$ имеют вид

$$\sigma_{zz}(0, u(0, t), t) = -p(t), \quad \sigma_{zz}(0, l + u(0, t), t) = 0, \quad (2.1)$$

где $r = 0$ – координата максимального перемещения граничных точек пробки, $p(t)$ – заданное давление. Согласно второму условию (2.1) принимается, что сопротивление продавливанию на свободном конце пробки при $r = 0$ отсутствует, хотя его можно задать и не равной нулю постоянной величиной. Условия сцепления на боковой поверхности пробки записываются в форме

$$u|_{r=R} = 0, \quad v|_{r=R} = 0. \quad (2.2)$$

Функция $p(t)$, задающая перепад давления, возрастает со временем с нулевого значения, и, пока напряженное состояние не достигло поверхности нагружения, необратимые деформации накапливаются в материале в результате медленного процесса ползучести. Необратимое деформирование приводит к разогреву материала, для его изменяющейся температуры принимаем условия:

$$\theta(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (2.3)$$

Отличные от нуля компоненты тензора деформаций Альманси определяются из зависимости (1.13), согласно которой получим

$$d_{rr} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2, \quad d_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (2.4)$$

Подстановка зависимостей (2.4) в условие несжимаемости материала (1.30) показывает, что в рассматриваемом случае антиплоского движения среды условие (1.30) выполняется в случае равенства нулю коэффициента β . Таким образом тепловое расширение в материале отсутствует.

Компоненты тензора напряжений при необратимом деформировании материала получим, следуя зависимости (1.35)

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi} &= -(P_1 + 2\mu) + 2(a_2 - \kappa_2\theta)(m_{rr} + m_{zz}) - 2(\mu - \kappa_2\theta)m_{rz}^2 + \nu\theta - \kappa_1\theta^2 = -p_1, \\ \sigma_{rz} &= 2(\mu - l_1\theta)m_{rz}, \quad \sigma_{rr} = -p_1 + 2(\mu - l_1\theta)m_{rr} + (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2, \\ \sigma_{zz} &= -p_1 + 2(\mu - l_1\theta)m_{zz} + (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2, \quad l_1 = \nu + \kappa_3.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Данные соотношения записаны с точностью до слагаемых первого порядка малости по компонентам обратимых деформаций m_{rr} и m_{zz} и второго – по компоненте m_{rz} [112, 126], что качественно не влияет на решение поставленной задачи, но позволяет записать все следующие соотношения в обобщимой форме.

Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат для рассматриваемого класса функций принимают форму

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \quad (2.6)$$

Из второго уравнения равновесия (2.6) следует линейная зависимость для функции p_1 от z и выражение для компоненты σ_{rz} :

$$p_1 = c(t)z + p_0(r, t), \quad \sigma_{rz} = \frac{c(t)r}{2} + \frac{c_1(t)}{r}. \quad (2.7)$$

Функцию интегрирования $c_1(t)$ полагаем равной нулю, чтобы напряжение σ_{rz} имело конечное значение при $r = 0$, $c(t)$ найдем из граничных условий (2.1). Тогда компонента σ_{rz} тензора напряжений принимает окончательный вид

$$\sigma_{rz} = -\frac{pr}{2l}, \quad p = p(t). \quad (2.8)$$

Потенциал ползучести (1.44) для рассматриваемого случая переписывается в следующей форме $V(\sigma_{ij}) = B((\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{rz}\sigma_{zz})^{\frac{n}{2}}$. Ограничимся в нем слагаемыми до порядка n по напряжениям, тогда для скоростей деформаций

ползучести из (1.44), (2.5) и (2.8) найдем

$$\varepsilon_{rz}^v = -Bn \left(\frac{pr}{l} \right)^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^v = -\varepsilon_{zz}^v = \frac{\varepsilon_{rz}^v}{2} \frac{m_{rr} - m_{zz}}{m_{rz}}. \quad (2.9)$$

Уравнение теплопроводности (1.43) при учете соотношений (2.5), (2.8) и (2.9) примет форму

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 p r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^2} \frac{dp}{dt} = q \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{Bn}{2\nu_1} \left(\frac{pr}{l} \right)^n. \quad (2.10)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (2.10) при условии зависимости параметров ползучести материала от температуры (1.47) и начальном и граничных условиях для температуры (2.3) решается численно.

Компоненты тензоров скоростей деформаций, вращений и скоростей необратимых деформаций получим из соотношений (1.13), (1.9) и (1.28):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rz} &= \frac{dd_{rz}}{dt} = \frac{\partial d_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial r} = \varepsilon_{rz}^e + \gamma_{rz} = \frac{\partial m_{rz}}{\partial t} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial t}, \\ r_{rz} &= -r_{zr} = 2\varepsilon_{rz}, \quad \gamma_{rr} = \frac{dp_{rr}}{dt} + 2p_{rz}(r_{zr} + \gamma_{rz}), \\ \gamma_{zz} &= \frac{dp_{zz}}{dt} + 2p_{rz}(r_{rz} + \gamma_{rz}), \quad \gamma_{rr} = -\gamma_{zz} = \frac{\gamma_{rz}}{2} \frac{m_{rr} - m_{zz}}{m_{rz}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Скорости необратимых деформаций в (2.11) равны скоростям деформаций ползучести: $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^v$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^v$.

Из соотношений (2.5), (2.8), (2.9) и (2.11) найдем компоненты тензоров обратимых и необратимых деформаций m_{rz} и p_{rz} :

$$m_{rz} = -\frac{pr}{4l(\mu - l_1 \theta)}, \quad p_{rz} = -\int_0^t Bn \left(\frac{pr}{l} \right)^{n-1} dt. \quad (2.12)$$

Для градиента перемещений точек материала пробки из (2.11) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2(m_{rz} + p_{rz}). \quad (2.13)$$

Перемещения деформируемой среды найдем, интегрируя уравнения (2.13) с учетом граничного условия (2.2).

Диагональные компоненты обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} определим из системы уравнений, следующей из (1.23):

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_{zz}}{\partial t} &= \gamma_{rz} \left(m_{rz} - \frac{p_{zz}}{m_{rz}} \right) - 2p_{rz}r_{rz}, & p_{rr} &= -p_{zz} - 2p_{rz}^2, \\ m_{zz} &= -p_{zz} + \frac{m_{rz}^2}{2} + 2m_{rz}p_{rz}, & m_{rr} &= -m_{zz} - m_{rz}^2.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Компоненты тензора напряжений через найденные распределения температуры, перемещений и компоненты обратимых деформаций определим, интегрируя первое уравнение равновесия (2.6) с учетом краевых условий (2.1) и соотношений (2.5)

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \frac{p}{l}(z-l-u(0,t)) - \int_0^r \frac{2(\mu-l_1\theta)m_{rr} + (3\mu+l_1\theta)m_{rz}^2}{r} dr + 2(\mu-l_1\theta)(m_{zz}-m_{rr}) - \\ &- 2(\mu-l_1\theta)(m_{zz}(0,t)-m_{rr}(0,t)), & \sigma_{rr} &= \sigma_{zz} + 2(\mu-l_1\theta)(m_{rr}-m_{zz}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p_1 = \sigma_{zz} - 2(\mu-l_1\theta)m_{zz} - (3\mu+l_1\theta)m_{rz}^2.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Полученное решение неизотермической краевой задачи при возрастающем перепаде давления остается справедливым до момента времени t_1 , в который на боковой границе пробки $r=R$ впервые выполнится условие пластичности (1.46), которое в рассматриваемом случае принимает форму

$$|\sigma_{rz}|_{r=R} = k(t_1). \quad (2.16)$$

Предел текучести в (2.16) зависит от температуры (первая формула (1.48)). Из уравнения $p(t_1)R = 2lk(t_1)$ находится момент начала течения t_1 .

На рисунке 2.2 показано распределение температуры в материале пробки в момент начала вязкопластического течения t_1 . График зависимости компоненты тензора необратимых деформаций p_{rz} от радиуса в этот же момент времени представлен на рисунке 2.3. Распределение перемещений точек материала пробки в момент начала течения изображено на рисунке 2.4.

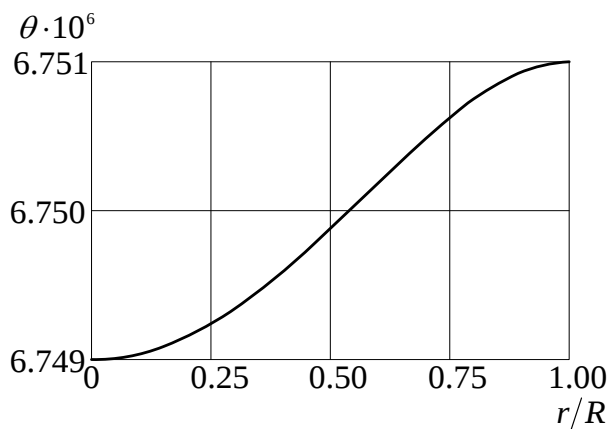


Рис. 2.2. Распределение температуры в момент начала пластического течения

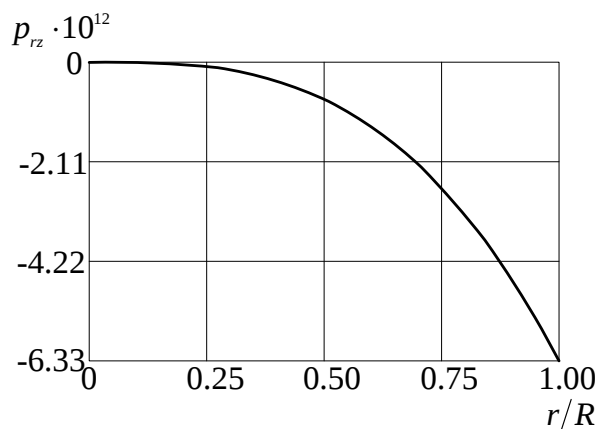


Рис. 2.3. Распределение компоненты p_{rz} в момент начала пластического течения

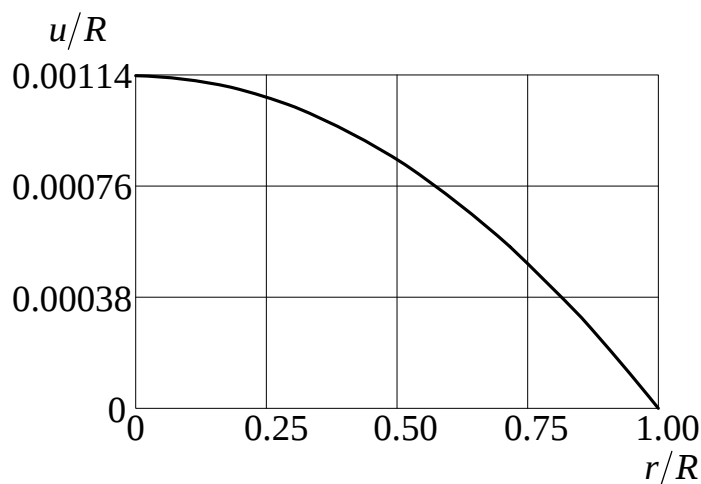


Рис. 2.4. Перемещения точек материала в момент начала пластического течения

2.2 Вязкопластическое течение материала при возрастающем и постоянном перепаде давления

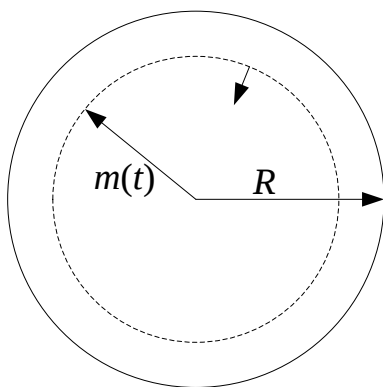


Рис. 2.5. Расположение областей

Начиная с момента времени t_1 от боковой поверхности пробки $r = R$ в материале развивается область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$. Движущаяся граница $r = m(t)$ отделяет расширяющуюся область течения от сужающейся области $0 \leq r \leq m(t)$, в которой материал продолжает накапливать необратимые деформации ползучести (рисунок 2.5). Зависимости (2.5) для

компонент тензора напряжений выполняются и в вязкоупругой области

$0 \leq r \leq m(t)$, и в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$, следовательно в обеих областях остается справедливым соотношение (2.8) для компоненты тензора напряжений σ_{rz} .

В вязкоупругой области $0 \leq r \leq m(t)$ для скоростей деформаций ползучести выполняются соотношения (2.9), уравнение теплопроводности имеет вид (2.10).

Из ассоциированного закона пластического течения (1.45) следует, что условие пластичности (1.46) в рассматриваемом случае ($\sigma_{rz} < 0$, $\varepsilon_{rz}^p < 0$) записывается в форме

$$\sigma_{rz} = -k + \eta(\varepsilon_{rz}^p - \varepsilon_{rz}^{v_0}) \quad (2.17)$$

Из (2.17), учитывая (2.8), определим компоненту тензора скоростей пластических деформаций ε_{rz}^p

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}. \quad (2.18)$$

Компонента тензора скоростей деформаций ползучести $\varepsilon_{rz}^{v_0}$ в точке в момент достижения ее упругопластической границей в текущий момент времени t вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{rz}^{v_0} = -Bn \left(\frac{pm}{l} \right)^{n-1}. \quad (2.19)$$

Из условия непрерывности скоростей необратимых деформаций на границе $r = m(t)$, разделяющей область вязкопластического течения и область с накапливаемыми деформациями ползучести, следует уравнение, согласно которому определяется положение границы $r = m(t)$ в каждый момент времени

$$\frac{pm}{2l} = k_0 \left(1 - \frac{\theta(m, t)}{\theta_m} \right)^2. \quad (2.20)$$

Уравнение теплопроводности (1.43) в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ с учетом зависимостей (2.5) и (2.18) принимает вид

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^3}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 p r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^2} \frac{dp}{dt} = q \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{pr}{2l\nu_1} \left(\frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{\nu_0} \right). \quad (2.21)$$

Уравнения теплопроводности (2.10) и (2.21), а также уравнения (2.19) и (2.20) составляют систему уравнений относительно неизвестных функций: θ в областях $0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$, $m(t)$ и $\varepsilon_{rz}^{\nu_0}$. Для решения этой системы используются граничные условия для температуры (2.3), начальные условия $m(t_2) = R$ и $\varepsilon_{rz}^{\nu_0}(R) = -B(t_2)n(t_2)(p(t_2)R/l)^{n(t_2)-1}$, условия непрерывности функции θ и ее производной и на границе $r = m(t)$ и условия непрерывности температуры в момент начала вязкопластического течения t_1 . Данная система уравнений решена с использованием разработанного на основе конечно-разностного метода алгоритма.

В вязкоупругой области на пространственно-временную зону $0 \leq r \leq m(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, где t_2 – некоторый фиксированный момент времени, наносится конечно-разностная сетка

$$\omega_{h_1 h} = \{r_i^j = ih_1^j, \quad i = \overline{0, N_1}; \quad t^j = jh + t_1, \quad j = \overline{1, N}\} \quad (2.22)$$

с пространственным шагом $h_1^j = m^j / N_1$ и шагом по времени $h = (t_2 - t_1) / N$.

Здесь m^j – это значение упругопластической границы на временном шаге j . В области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ берется следующая конечно-разностная сетка:

$$\omega_{h_2 h} = \{r_i^j = ih_2^j + m^j, \quad i = \overline{0, N_2}; \quad t^j = jh + t_1, \quad j = \overline{1, N}\} \quad (2.23)$$

с пространственным шагом $h_2^j = (R - m^j) / N_2$ и тем же временным шагом h .

На сетках (2.22) и (2.23) вводятся сеточные функции $\theta 1_i^j$, $\theta 2_i^j$ и ε^j , значения которых известны и обозначают температуру в областях вязкоупругого и вязкопластического деформирования соответственно и компоненту $\varepsilon_{rz}^{\nu_0}$ на временном шаге j . Для нахождения значений этих

функций θ_1^{j+1} , θ_2^{j+1} и ε^{j+1} на шаге $j+1$ в уравнениях (2.10) и (2.21) заменим дифференциальные операторы отношением конечных разностей и получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta_1^{j+1} + \frac{\beta_3 l_1 p^2(t^{j+1})(r_i^{j+1})^2}{8l^2(\mu - l_1 \theta_1^{j+1})^3} \right) \frac{\theta_1^{j+1} - \theta(r_i^{j+1}, t^j)}{h} + \frac{\beta_3 p(t^{j+1})(r_i^{j+1})^2}{8l^2(\mu - l_1 \theta_1^{j+1})^2} \frac{dp}{dt} \Big|_{t=t^{j+1}} = \\ & = q \left(\frac{\theta_{1_{i+1}}^{j+1} - 2\theta_{1_i}^{j+1} + \theta_{1_{i-1}}^{j+1}}{(h_1^{j+1})^2} + \frac{1}{r_i^{j+1}} \frac{\theta_{1_{i+1}}^{j+1} - \theta_{1_i}^{j+1}}{h_1^{j+1}} \right) - \\ & \quad - \frac{B(\theta_1^{j+1})n(\theta_1^{j+1}) \left(\frac{p(t^{j+1})r_i^{j+1}}{l} \right)^{n(\theta_1^{j+1})}}{2\nu_1} + \\ & \quad + O\left((h_1^{j+1})^2 + h\right), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N - 1}; \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta_2^{j+1} + \frac{\beta_3 l_1 p^2(t^{j+1})(r_i^{j+1})^2}{8l^2(\mu - l_1 \theta_2^{j+1})^3} \right) \frac{\theta_2^{j+1} - \theta(r_i^{j+1}, t^j)}{h} + \\ & + \frac{\beta_3 p(t^{j+1})(r_i^{j+1})^2}{8l^2(\mu - l_1 \theta_2^{j+1})^2} \frac{dp}{dt} \Big|_{t=t^{j+1}} = q \left(\frac{\theta_{2_{i+1}}^{j+1} - 2\theta_{2_i}^{j+1} + \theta_{2_{i-1}}^{j+1}}{(h_2^{j+1})^2} + \frac{1}{r_i^{j+1}} \frac{\theta_{2_{i+1}}^{j+1} - \theta_{2_i}^{j+1}}{h_2^{j+1}} \right) + \\ & + \frac{p(t^{j+1})r_i^{j+1}}{2l\nu_1} \left(\frac{1}{\eta(\theta_2^{j+1})} \left(k(\theta_2^{j+1}) - \frac{p(t^{j+1})r_i^{j+1}}{2l} \right) + \varepsilon^0 + \frac{(\varepsilon^{j+1} - \varepsilon^0)(m^0 - r_i^{j+1})}{m^0 - m^{j+1}} \right) \\ & + O\left((h_2^{j+1})^2 + h\right), \quad i = \overline{1, N_2 - 1}, \quad j = \overline{1, N - 1}; \end{aligned} \quad (2.25)$$

В уравнениях (2.24) и (2.25) $\theta(r_i^{j+1}, t^j)$ – значение функции температуры θ в момент времени t^j , но в пространственных точках r_i^{j+1} . Данная функция получена путем интерполяции известных значений температуры на временном шаге j .

К уравнениям (2.24) и (2.25) добавим краевые и начальные условия в форме

$$\begin{aligned} & \theta_{1_1}^{j+1} = \theta_{1_0}^{j+1}, \quad \theta_{2_{N_2}}^{j+1} = \theta_{2_{N_2-1}}^{j+1}, \quad \theta_{1_{N_1}}^{j+1} = \theta_{2_0}^{j+1}, \quad \theta_{1_i}^0 = \theta(r_i^0, t_1), \\ & \theta_{2_i}^0 = \theta(r_i^0, t_1), \quad \frac{\theta_{1_{N_1}}^{j+1} - \theta_{1_{N_1-1}}^{j+1}}{h_1^{j+1}} = \frac{\theta_{2_1}^{j+1} - \theta_{2_0}^{j+1}}{h_2^{j+1}} + O(h_1^{j+1} + h_2^{j+1}), \\ & m^0 = R, \quad \varepsilon^0 = -B(\theta_{1_{N_1}}^0)n(\theta_{1_{N_1}}^0) \left(\frac{p(t_1)R}{l} \right)^{n(\theta_{1_{N_1}}^0)-1}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Соотношения (2.19) и (2.20) примут вид

$$\varepsilon^{j+1} = -B(\theta 2_0^{j+1}) n(\theta 2_0^{j+1}) \left(\frac{p(t^{j+1}) m^{j+1}}{l} \right)^{n(\theta 2_0^{j+1})-1}, \quad (2.27)$$

$$\frac{p(t^{j+1}) m^{j+1}}{2l} = k_0 \left(1 - \frac{\theta 1_{N_1}^{j+1}}{\theta_m} \right)^2. \quad (2.28)$$

Система (2.24)- (2.28) далее решается в пакете Mathematica. Таким образом, получаем распределение температуры и значение упругопластической границы на каждом $(j+1)$ -м шаге по времени. Построенная конечно-разностная схема является абсолютно устойчивой [99], и шаг h выбирается только из соображений точности. Кроме того, сходимость данной конечно-разностной схемы проверялась прогонами модели на сужающихся сетках.

Проведенные расчеты иллюстрируются на рисунках 2.6 и 2.7, на которых представлены график упругопластической границы в зависимости от времени и распределение температуры в слое материала в момент времени t_2 .

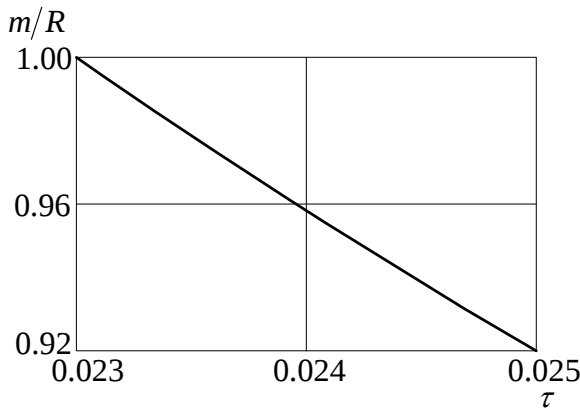


Рис. 2.6. График упругопластической границы в промежутке от t_1 до t_2

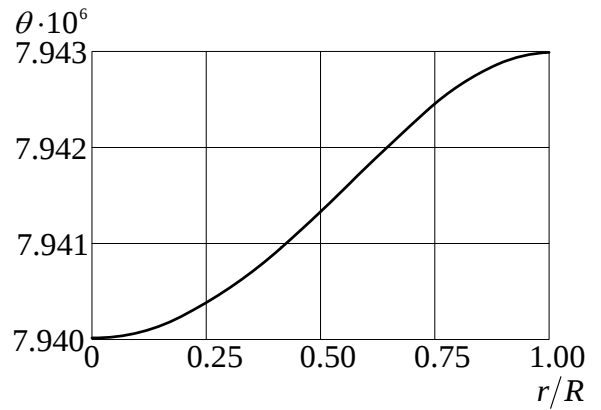


Рис. 2.7. График температуры в момент времени t_2

Кинематические соотношения (2.11) выполняются и в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ при $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^p$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^p$, и в вязкоупругой области $0 \leq r \leq m(t)$ при $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^v$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^v$.

Для компоненты тензора обратимых деформаций m_{rz} справедлива первая формула (2.12) в областях $0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$. Компонента тензора необратимых деформаций p_{rz} в области $0 \leq r \leq m(t)$ вычисляется по второй формуле (2.12), а в области течения $m(t) \leq r \leq R$ является решением дифференциального уравнения, следующего из (2.11) и (2.18):

$$\frac{\partial p_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}. \quad (2.29)$$

При решении уравнения (2.29) используется условие непрерывности компоненты необратимых деформаций p_{rz} в момент времени t_1 . Перемещения точек материала находятся интегрированием уравнения (2.13) с использованием условия непрерывности перемещений на границе $r = m(t)$ и граничного условия (2.2). Компоненты обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} вычисляются из системы уравнений (2.14) при $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ в области $0 \leq r \leq m(t)$ и $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$ в области $m(t) \leq r \leq R$. Напряжения в области $0 \leq r \leq m(t)$ находятся из зависимостей (2.15). Эти же соотношения справедливы и для напряжений в области течения $m(t) \leq r \leq R$, что следует из условия непрерывности напряжений на границе $r = m(t)$.

Далее полагаем, что с некоторого момента времени $t_2 > t_1$ перепад давления на граничных поверхностях пробки становится постоянным, равным $p(t_2)$. Такое изменение в условии нагружения приводит к тому, что граница, разделяющая области вязкоупругого деформирования и вязкопластического течения, сохраняет свое положение, то есть размеры данных областей остаются прежними, но необратимые деформации в них продолжают накапливаться. Все соотношения данного раздела продолжают выполняться и в данном случае. Только в уравнениях теплопроводности (2.10) и (2.21) нужно учитывать, что $dp/dt = 0$. Для решения уравнений (2.10), (2.19)-(2.21) в случае

постоянного перепада давления использовалась неявная конечно-разностная схема, подобная схеме (2.22)-(2.28).

2.3 Течение при убывающем перепаде давления. Разгрузка среды и остывание

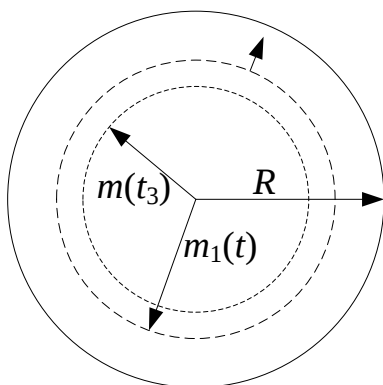


Рис. 2.8. Расположение областей

С некоторого момента времени $t_3 > t_2$ начнем уменьшать давление $p(t)$. С этого момента времени от неподвижной поверхности $r = m(t_3)$ к границе пробки $r = R$ движется новая граница $r = m_1(t)$ (рисунок 2.8), которая разделяет уменьшающуюся область вязкопластического течения $m_1(t) \leq r \leq R$ и область $m(t_3) \leq r \leq m_1(t)$ с

накопленными необратимыми пластическими деформациями. В слоях $m(t_3) \leq r \leq m_1(t)$ и $0 \leq r \leq m(t_3)$ необратимые деформации теперь накапливаются в результате процесса ползучести, поэтому их можно рассматривать как одну область $0 \leq r \leq m_1(t)$.

Рисунок 2.9 показывает график температуры в зависимости от радиуса в момент времени t_3 .

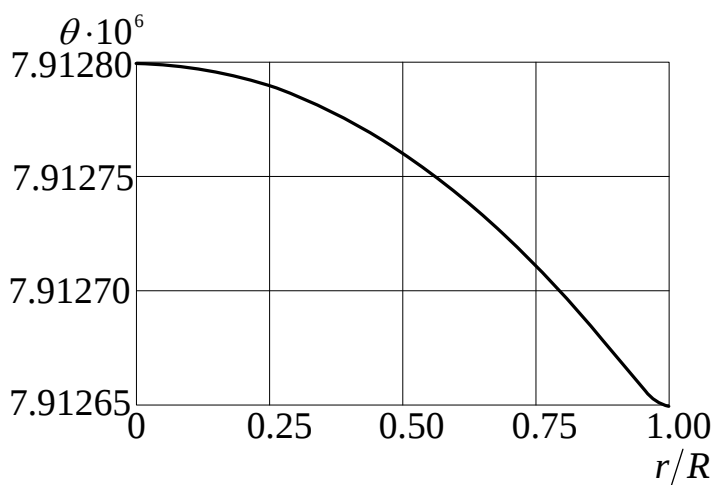


Рис. 2.9. Распределение температуры в момент времени t_3

Компоненты тензора напряжений во всех областях деформирования удовлетворяют соотношениям (2.5). Из уравнений равновесия (2.6) с учетом условия непрерывности напряжений, получим, что для компоненты σ_{rz} остается справедливой зависимость (2.8) во всех областях. В области $0 \leq r \leq m_1(t)$ скорости деформаций ползучести имеют вид (2.9). Компонента скорости необратимых деформаций ε_{rz}^p в области вязкопластического течения $m_1(t) \leq r \leq R$ вычисляется по формуле (2.18). Уравнение теплопроводности имеет вид (2.10) в вязкоупругой области $0 \leq r \leq m_1(t)$ и (2.21) в области течения $m_1(t) \leq r \leq R$.

На рисунках 2.10 и 2.11 показаны распределения необратимых деформаций p_{rz} и перемещений в моменты времени t_2 сплошной линией и t_3 пунктирной линией.

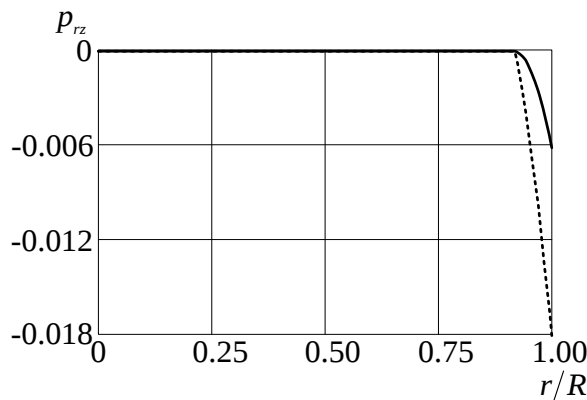


Рис. 2.10. Распределение необратимых деформаций p_{rz}

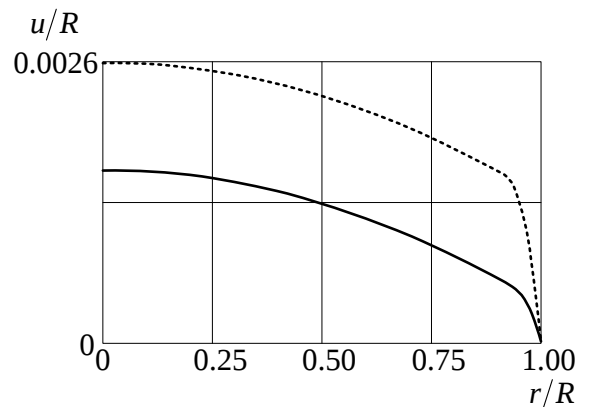


Рис. 2.11. Распределение перемещений

Распределения компонент тензора напряжений в моменты времени t_2 и t_3 изображены на рисунках 2.12 и 2.13 соответственно.

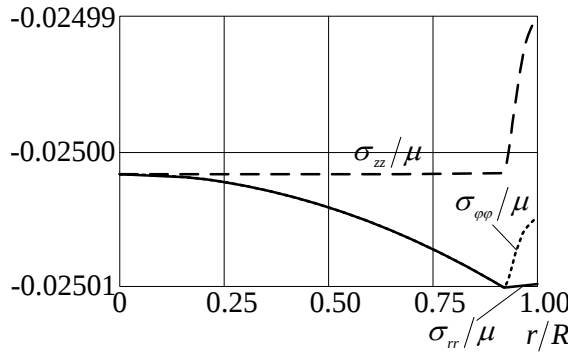


Рис. 2.12. Распределение напряжений в момент времени t_2

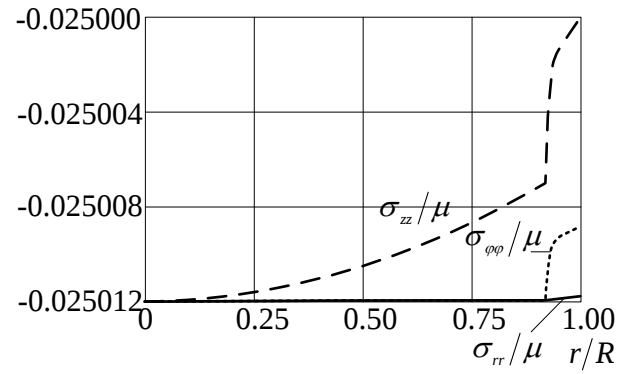


Рис. 2.13. Распределение напряжений в момент времени t_3

Из условия непрерывности скоростей необратимых деформаций на границе $r = m_1(t)$ следует уравнение для определения ее положения

$$\frac{1}{\eta} \left(k_0 \left(1 - \frac{\theta(m_1, t)}{\theta_m} \right)^2 - \frac{p m_1}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}(m_1) = -Bn \left(\frac{p m_1}{l} \right)^{n-1}. \quad (2.30)$$

В уравнении (2.30) $\varepsilon_{rz}^{v_0}(r)$ является известной функцией, вычисленной на предыдущих этапах задачи.

Система уравнений (2.10), (2.21) и (2.30) относительно неизвестных функций $m_1(t)$ и θ в областях $0 \leq r \leq m_1(t)$ и $m_1(t) \leq r \leq R$ также решена численно с помощью разработанного алгоритма, подобного схеме (2.22)-(2.28). При ее решении использовались граничные условия (2.3), начальное условие $m_1(t_3) = m(t_3)$, условия непрерывности функции θ и ее производной $\partial\theta/\partial r$ на границе $r = m_1(t)$ и непрерывность температуры θ в момент времени t_3 .

График упругопластической границы m_1/R представлен на рисунке 2.14. В обеих областях деформирования компонента m_{rz} удовлетворяет первой зависимости (2.12). В вязкоупругой области $0 \leq r \leq m_1(t)$ компонента p_{rz} вычисляется по второй формуле (2.12), а в области течения $m_1(t) \leq r \leq R$ находится интегрированием уравнения (2.29). Интегрируя уравнение (2.13) в обеих областях с учетом граничного условия жесткого сцепления и условия

непрерывности перемещений на границе $r = m_1(t)$, найдем перемещения точек деформируемого материала.

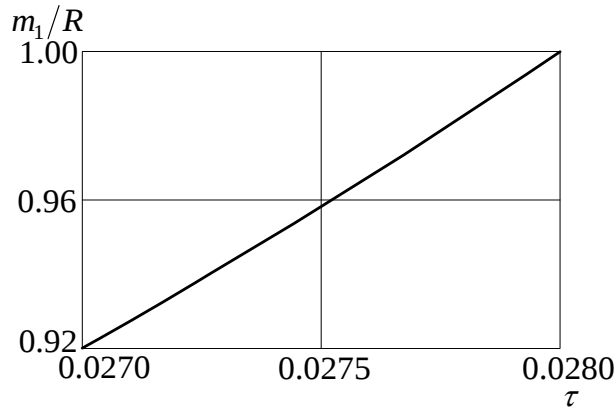


Рис. 2.14. График упругопластической границы в промежутке от t_3 до t_4

Компоненты тензора обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} в обеих областях определяются из системы уравнений (2.14) при $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ в области $0 \leq r \leq m_1(t)$ и $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$ в области $m_1(t) \leq r \leq R$. Компоненты тензора напряжений вычисляются из соотношений (2.15) при условии их непрерывности на границе $r = m_1(t)$.

В расчетный момент времени $t_4 > t_3$ поверхность $r = m_1(t)$ достигает границы пробки $r = R$. С этого момента времени вязкопластическое течение в материале прекращается, а накопление необратимых деформаций теперь происходит только за счет ползучести. Во всем слое уравнение теплопроводности принимает форму (2.10), для компонент m_{rz} и p_{rz} справедливы уравнения (2.12), перемещения вычисляются из дифференциального уравнения (2.13). Остальные обратимые и необратимые деформации вычисляются из системы уравнений (2.14), в которой $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$. Для напряжений остаются справедливыми зависимости (2.15).

В момент времени t_5 , вычисляемый из уравнения $p(t_5) = 0$, перепад давления становится равным нулю. Также становятся равными нулю

компонента обратимых деформаций m_{rz} и компонента напряжений σ_{rz} , а остальные компоненты тензора напряжений перестают зависеть от координаты z . С момента времени t_5 уравнение теплопроводности принимает форму

$$(1 + \beta_1 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = q \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (2.31)$$

Чтобы задать остывание материала пробки, вместо граничных условий (2.3) принимаем условия

$$\left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} + h \theta \right) \bigg|_{r=R} = 0, \quad (2.32)$$

в которых h – коэффициент теплоотдачи материала.

Уравнение (2.31) с граничными условиями (2.32) и начальным условием непрерывности температуры в момент времени t_5 решается численно. С течением времени материал полностью остывает.

Результаты численных расчетов представлены на графиках для линейной функции $p(t)$:

$$p(t) = \begin{cases} \alpha_1 t, & 0 \leq t < t_2, \\ \alpha_1 t_2, & t_2 \leq t < t_3, \\ \alpha_1 t_2 - \alpha_2 (t - t_3), & t_3 \leq t < t_5, \end{cases} \quad t_5 = \alpha_1 \alpha_2^{-1} t_2 + t_3$$

с использованием безразмерных переменных r/R и $\tau = \alpha_1 t / \mu$ и значений безразмерных постоянных: $\beta_1 = -2.772$, $\beta_3 = -10$, $k_0 \mu^{-1} = 2.298 \cdot 10^{-3}$, $\theta_m = 2.074$, $l_1 \mu^{-1} = 0.452$, $lR^{-1} = 5$, $\nu_1 \mu^{-1} = 80$, $q \mu \alpha_1^{-1} R^{-2} = 2.638 \cdot 10^4$, $\alpha_1 \eta_0 \mu^{-2} = 3.257 \cdot 10^{-5}$, $b_1 = 2.518$, $b_2 T_0^{-1} = 1.482$, $c_1 \mu \alpha_1^{-1} = 4.887 \cdot 10^4$, $\sigma_0 \mu^{-1} = 7.199 \cdot 10^{-6}$, $QR_u^{-1} T_0^{-1} = 52.37$, $\nu T_0 = 1.212$, $\alpha_2 \alpha_1^{-1} = 2$, $hR \delta^{-1} = 0.01$.

Распределения температуры в материале в моменты времени t_4 и t_5 приведены на рисунках 2.15 и 2.16. Компоненты тензора необратимых деформаций в момент времени t_5 представлены на рисунках 2.17 и 2.18.

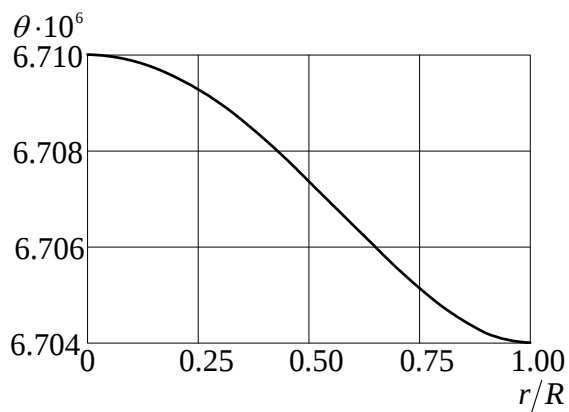


Рис. 2.15. Распределение температуры в момент времени t_4

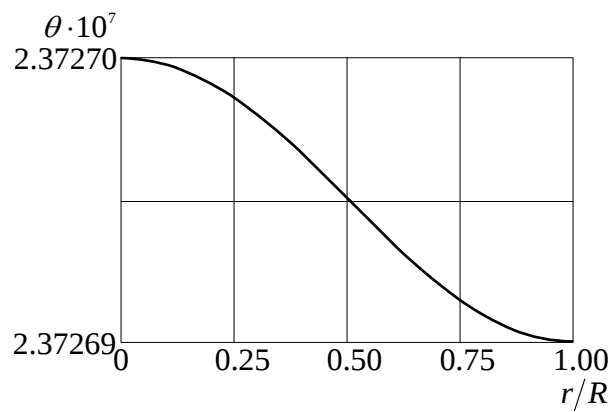


Рис. 2.16. Распределение температуры в момент времени t_5

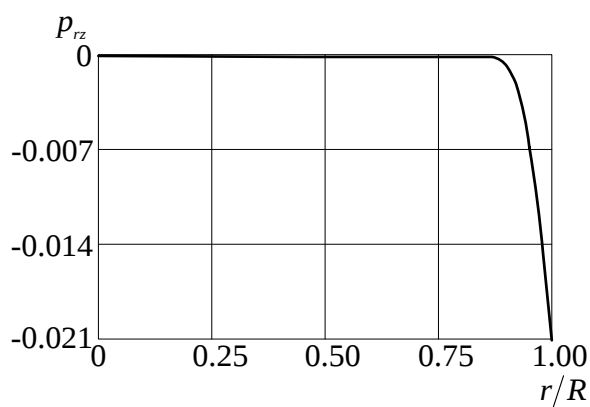


Рис. 2.17. Распределение компоненты p_{rz} в момент времени t_5

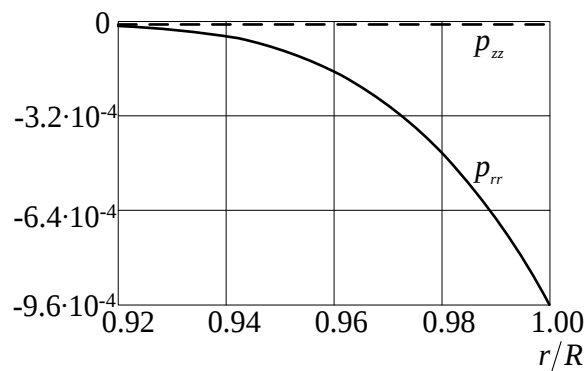


Рис. 2.18. Распределение компонент p_{rr} и p_{zz} в момент времени t_5

Графики перемещений точек материала и остаточных напряжений в конечный момент времени изображены на рисунках 2.19 и 2.20.

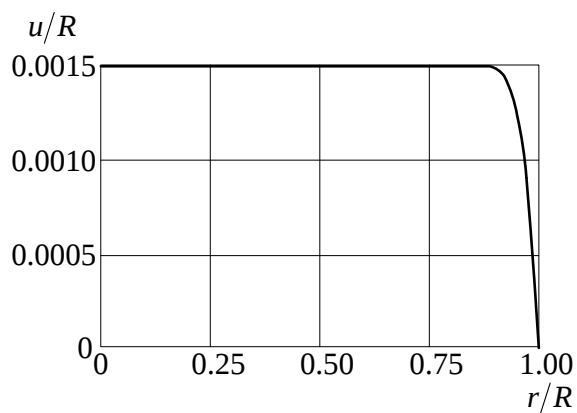


Рис. 2.19. Перемещения точек материала пробки в конечный момент времени

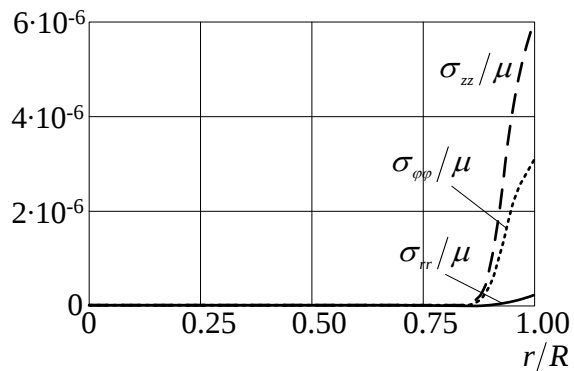


Рис. 2.20. Остаточные напряжения

В данной главе получено решение связанной краевой задачи теории больших упругопластических деформаций о неизотермическом деформировании пробки конечной длины в круглой недеформируемой трубе под действием перепада давления, сначала возрастающего с течением времени, затем постоянного и далее убывающего до нуля. Необратимые деформации в материале накапливаются в результате процессов ползучести и вязкопластического течения. Разогрев материала происходит только за счет процессов необратимого деформирования, так как материал пробки имеет жесткое сцепление со стенками трубы, то есть отсутствует трение материала о границу, и нет дополнительного притока тепла извне. При таких условиях в квазистатическом приближении, учитывая, что исследован один цикл «нагружение-разгрузка», нагрев материала ожидаемо оказывается незначительным, однако даже такое изменение температуры сказывается на всех характеристиках напряженно-деформированного состояния рассматриваемого материала. Также интересным оказывается эффект снижения температуры в процессе торможения вязкопластического течения при уменьшении нагружающего давления, хотя необратимые пластические деформации и деформации ползучести при этом продолжают накапливаться.

Глава 3 Прямолинейное движение пробки в круглой трубе под действием переменного перепада давления с учетом разогрева материала за счет пристеночного трения и необратимого деформирования

Во второй главе получено решение связанной краевой задачи теории больших упругопластических деформаций о неізотермическом деформировании пробки конечной длины в круглой недеформируемой трубе под действием переменного перепада давления в случае, когда разогрев материала происходит только за счет процессов необратимого деформирования в условиях жесткого сцепления со стенками трубы. Здесь рассмотрим аналогичную по постановке задачу, но предполагая, что в окрестности поверхности трубы возможно проскальзывание материала. Таким образом, изменение температуры в деформируемом материале происходит и за счет процессов необратимого деформирования, и за счет трения материала о граничную шероховатую поверхность трубы.

3.1 Деформирование материала до начала вязкопластического течения

Постановка задачи представлена в п. 2.1. Также полагаем, что в недеформируемой цилиндрической трубе радиуса R расположен слой материала конечной длины l . Перепад давления $p(t)$ на торцевых граничных поверхностях слоя $z = u(r, t)$ и $z = l + u(r, t)$ задается краевыми условиями (2.1). При увеличении со временем перепада давления до некоторого значения материал удерживается в состоянии прилипания (граничные условия (2.2)) к стенке трубы за счет сухого трения

$$\left| \sigma_{rz} \right|_{r=R} < s_0, \quad (3.1)$$

где s_0 – задаваемая постоянная сухого трения.

Первоначально, пока пластическое течение в материале отсутствует, необратимые деформации накапливаются в материале в результате медленного процесса ползучести. Необратимое деформирование материала вызывает его разогрев, задаваемый граничными условиями (2.3). Решение такой неизотермической задачи, пока выполнено условие (3.1), полностью совпадает с решением, приведенным в п. 2.1. Уравнение теплопроводности имеет вид (2.10), перемещения и компоненты обратимых и необратимых деформаций вычисляются из зависимостей (2.12) – (2.14), напряжения находятся по формулам (2.8) и (2.15).

При дальнейшем увеличении перепада давления в момент времени t_1 , вычисляемый из уравнения $p(t_1) = 2ls_0R^{-1}$, неравенство (3.1) обратится в равенство, и пробка начнет проскальзывать вдоль стенки трубы. Поэтому условие прилипания (2.2) заменим на граничное условие

$$(\sigma_{rz} + s_0 + \xi v)_{r=R} = 0, \quad (3.2)$$

где ξ – постоянная вязкого трения. С момента времени t_1 материал начинает нагреваться из-за трения о жесткую стенку трубы, что приводит к необходимости изменения краевых условий для температуры. В этом случае заменим первое условие (2.3) условием непрерывности температуры в момент времени t_1 , а третье условие (2.3) – граничным условием

$$\theta(R, t) = \gamma_1 u(R, t), \quad (3.3)$$

в котором γ_1 – задаваемая постоянная теплопроизводства за счет трения. Дополнительно полагаем, что температура θ не достигает температуры плавления в процессе деформирования.

Расчет температуры и параметров напряженно-деформированного состояния с момента времени t_1 осуществляется по тем же самым формулам, что и в случае выполнения условий прилипания (2.2). Единственным отличием является то, что при интегрировании уравнения (2.13) для перемещения используется следующее из (2.8) и (3.2) граничное условие

$$u(R, t) = \frac{R}{2\xi l} \int_{t_1}^t p dt - \frac{s_0(t - t_1)}{\xi}. \quad (3.4)$$

Полученное решение неизотермической задачи при возрастающем перепаде давления остается справедливым до момента времени t_2 , в который на боковой границе пробки $r = R$ впервые выполнится условие пластического течения (1.46) в следующем виде

$$|\sigma_{rz}|_{r=R} = k(t_2). \quad (3.5)$$

Согласно формулам (2.5) и (3.5) момент начала вязкопластического течения вычисляется из уравнения $p(t_2)R = 2lk(t_2)$.

3.2 Вязкопластическое течение при возрастающем и постоянном перепаде давления

С момента времени t_2 в материале развивается область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$. Движущаяся граница $r = m(t)$ отделяет область течения от области $0 \leq r \leq m(t)$, в которой материал продолжает деформироваться вязкоупруго (рисунок 2.5).

Решение этой задачи аналогично решению, приведенному в п. 2.2. В обеих областях для компонент напряжений выполняются зависимости (2.5), следовательно в них остается справедливым соотношение (2.8) для компоненты тензора напряжений σ_{rz} .

Компоненты скоростей деформаций ползучести в области $0 \leq r \leq m(t)$ имеют вид (2.9), а уравнение теплопроводности в этой области – (2.10). В области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ выполняются соотношения (2.17)-(2.20), уравнение теплопроводности принимает форму (2.21)

Уравнения (2.10), (2.19)-(2.21) образуют систему уравнений относительно неизвестных функций: θ в областях $0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$, $m(t)$ и $\varepsilon_{rz}^{v_0}$. К этой системе добавим второе граничное условие (2.3), граничное условие (3.3) и начальные условия $m(t_2) = R$,

$\varepsilon_{rz}^{v_0}(R) = -B(t_2)n(t_2)(p(t_2)R/l)^{n(t_2)-1}$. Также примем непрерывность искомой функции θ и ее производной $\partial\theta/\partial r$ на границе $r = m(t)$ и непрерывность температуры в момент начала вязкопластического течения t_2 . Для решения этой системы уравнений использовался алгоритм на основе конечно-разностного метода, подобный (2.22)-(2.28).

Для компонент скоростей деформаций, обратимых и необратимых деформаций, перемещений и напряжений справедливы уравнения (2.11)-(2.15) и (2.29).

Полученная система уравнений справедлива в промежутке времени от t_2 до $t_3 > t_2$, где t_3 – момент времени, в который перепад давления далее полагаем постоянным, равным $p(t_3)$. Напряженно-деформированное состояние в таком случае также удовлетворяет соотношениям данного раздела при $dp/dt = 0$ в уравнениях теплопроводности (2.10) и (2.21).

3.3 Течение при убывающем перепаде давления. Разгрузка среды и остывание

С некоторого момента времени $t_4 > t_3$ перепад давления на граничных поверхностях пробки начнем уменьшать. Вначале такое уменьшение к качественным изменениям деформационного процесса не приводит. Все

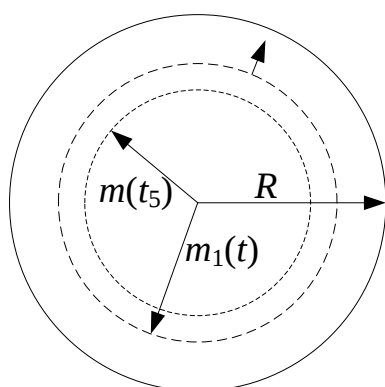


Рис. 3.1. Расположение областей

соотношения предыдущего раздела продолжают выполняться. В области $0 \leq r \leq m(t)$ материал деформируется вязкоупруго, а в области $m(t) \leq r \leq R$ продолжается вязкопластическое течение. Однако, скорость движения границы $r = m(t)$, разделяющей эти две области, постепенно снижается, пока некоторый расчетный момент времени t_5 не станет равной нулю.

С момента времени t_5 от неподвижной границы $r = m(t_5)$ отделяется новая граница $r = m_1(t)$, движущаяся в обратную сторону к боковой границе пробки $r = R$ (рисунок 3.1). Граница $r = m_1(t)$ разделяет уменьшающуюся область вязкопластического течения $m_1(t) \leq r \leq R$ и область $m(t_5) \leq r \leq m_1(t)$ с накопленными необратимыми пластическими деформациями. В этой области необратимые деформации теперь накапливаются в результате ползучести, как и в области $0 \leq r \leq m(t_5)$. Эти две области можно рассматривать как одну область $0 \leq r \leq m_1(t)$.

Система уравнений (2.10), (2.21) и (2.30) относительно неизвестных функций θ в областях $0 \leq r \leq m_1(t)$ и $m_1(t) \leq r \leq R$, $m_1(t)$, как и ранее, решена численно при помощи алгоритма, основанного на конечно-разностном методе. Для решения использовались второе граничное условие (2.3), граничное условие (3.3) и начальное условие $m_1(t_5) = m(t_5)$. Также как и ранее принималась непрерывность искомой функция θ и ее производной $\partial\theta/\partial r$ на границе $r = m_1(t)$ и непрерывность температуры в момент времени t_5 .

При дальнейшем уменьшении перепада давления в момент времени t_6 , который вычисляется из уравнения $p(t_6) = 2ls_0R^{-1}$, на боковой граничной поверхности $r = R$ неравенство (3.1) обращается в равенство: $|\sigma_{rz}|_{r=R} = s_0$. Поэтому, начиная с момента времени t_6 , условие проскальзывания (3.2) далее не выполняется, то есть, материал вновь удерживается в состоянии прилипания в окрестности жесткой стенки трубы $r = R$ за счет сухого трения, и его нагревание за счет трения на границе $r = R$ прекращается. Поэтому граничное условие для температуры (3.3) заменим на второе условие (2.32). Все остальные описанные выше зависимости продолжают выполняться и в этом случае.

Далее в расчетный момент времени t_7 граница $r = m_1(t)$ совпадает с боковой поверхностью пробки $r = R$. С этого момента времени

вязкопластическое течение в материале прекращается, а накопление необратимых деформаций теперь происходит в процессе ползучести. Уравнение теплопроводности во всем слое имеет вид (2.10), для компоненты m_{rz} и градиента перемещений справедливы зависимости (2.12), (2.13). Компонента необратимых деформаций p_{rz} находится интегрированием второго уравнения (2.12) по времени с учетом непрерывности в момент времени t_7 . Остальные необратимые деформации вычисляются из системы уравнений (2.14), в которой $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$. Для напряжений справедливы зависимости (2.15).

Расчеты проводились в безразмерных переменных $x = r/R$ и $\tau = \alpha_1 t / \mu$, а функция $p(t)$, задающая перепад давления на концах пробки, была выбрана следующим образом:

$$p(t) = \begin{cases} \alpha_1 t, & 0 \leq t < t_3, \\ \alpha_1 t_3, & t_3 \leq t < t_4, \\ \alpha_1 t_3 - \alpha_2 (t - t_4), & t_4 \leq t < t_8, \quad t_8 = \alpha_1 \alpha_2^{-1} t_3 + t_4. \end{cases}$$

Значения безразмерных постоянных приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1.

Постоянная	Значение	Постоянная	Значение	Постоянная	Значение
β_1	0.098	lR^{-1}	5	$\sigma_0 \mu^{-1}$	$7.199 \cdot 10^{-6}$
β_3	-4.5	$q \mu \alpha_1^{-1} R^{-2}$	$2.638 \cdot 10^4$	$QR_u^{-1} T_0^{-1}$	52.37
$k_0 \mu^{-1}$	$2.298 \cdot 10^{-3}$	$\nu_1 \mu^{-1}$	0.1	$\gamma_1 R$	400
$s_0 \mu^{-1}$	$5 \cdot 10^{-4}$	b_1	2.518	$\alpha_1 \xi R \mu^{-2}$	$2.605 \cdot 10^{-4}$
θ_m	2.074	$b_2 T_0^{-1}$	1.482	$\alpha_1 \eta_0 \mu^{-2}$	$3.257 \cdot 10^{-6}$
$l_1 \mu^{-1}$	0.452	$c_1 \mu \alpha_1^{-1}$	$4.887 \cdot 10^4$	νT_0	1.212
$\alpha_2 \alpha_1^{-1}$	2	$hR \delta^{-1}$	0.01		

На рисунке 3.2 представлены графики изменения границ области вязкопластического течения в зависимости от безразмерного времени τ :

$\tilde{m} = m/R$ в интервале от $\tau_2 = 0.0083$ до $\tau_5 = 0.0098$ и $\tilde{m} = m_1/R$ в интервале от τ_5 до $\tau_7 = 0.0105$. Из графика видно, что в интервале от $\tau_3 = 0.0084$ до $\tau_4 = 0.0085$, соответствующем постоянному перепаду давления, происходит небольшое замедление движения границы области течения.

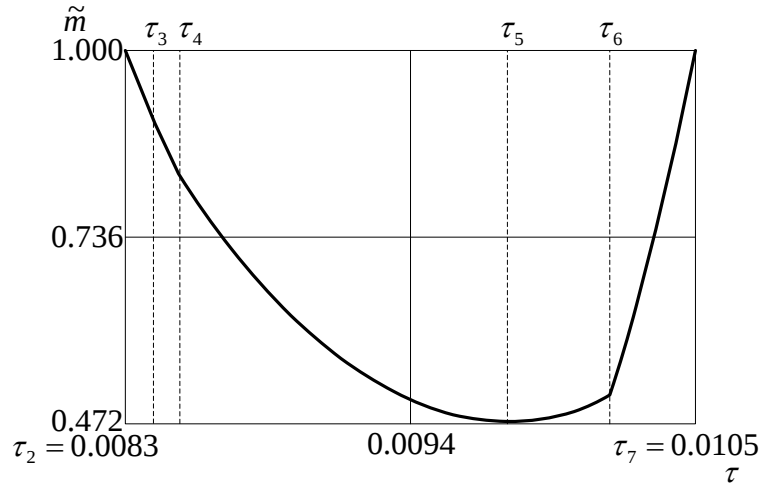


Рис. 3.2. График границы области вязкопластического течения в зависимости от времени

Более значительное замедление движения этой границы происходит при уменьшающемся перепаде давления с момента времени τ_4 , и завершается ее остановкой в момент времени τ_5 . С этого момента времени от границы $m(\tau_5)/R$ в обратном направлении движется граница $m_1(\tau)/R$. В интервале от τ_5 до $\tau_6 = 0.0102$ скорость ее продвижения небольшая. Но в момент времени τ_6 на границе пробки $r = R$ выполняется условие прилипания. С этого момента времени скорость продвижения границы области течения значительно возрастает и в момент времени τ_7 граница $m_1(\tau)/R$ достигает границы $r = R$ и течение в материале прекращается.

В момент времени t_8 , вычисляемый из уравнения $p(t_8) = 0$, перепад давления становится равным нулю. Также становятся равными нулю компонента обратимых деформаций m_{rz} и компонента напряжений σ_{rz} , а остальные компоненты тензора напряжений перестают зависеть от

координаты z . С момента времени t_8 уравнение теплопроводности примет форму (2.31). Это уравнение при втором граничном условии (2.3), граничном условии (3.6) и начальном условии непрерывности температуры в момент времени t_8 решается численно. С течением времени материал полностью остынет.

Рисунок 3.3 иллюстрирует графики зависимости безразмерной температуры θ от радиуса, построенные в разные моменты времени.

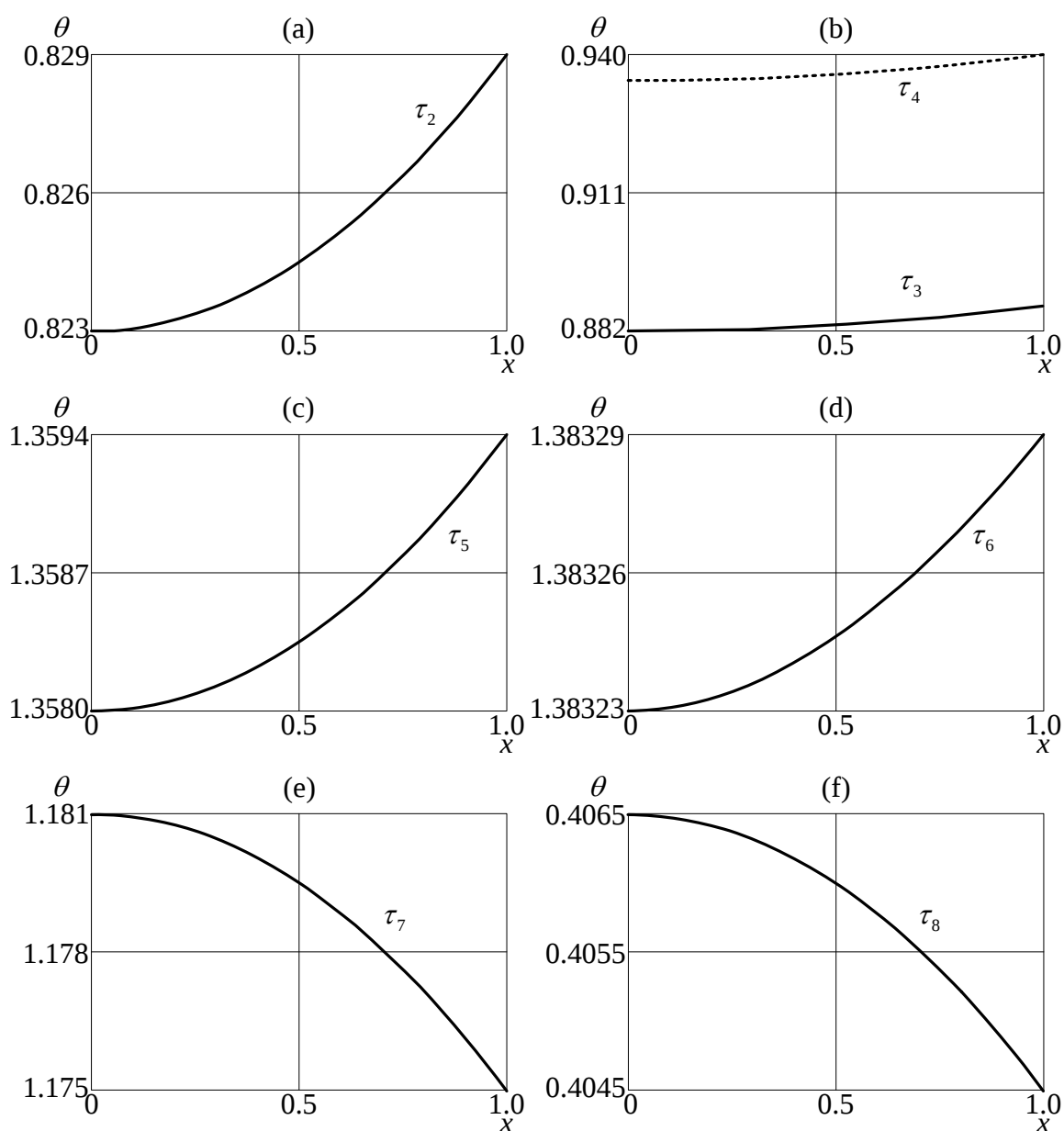


Рис. 3.3. Распределение температуры в материале пробки в разные моменты времени

Рисунок 3.3 (а) соответствует моменту времени τ_2 , в который в материале пробки начинается процесс вязкопластического течения. На рисунке 3.3 (b) сплошной и пунктирной линиями изображены графики температуры в моменты τ_3 и τ_4 соответственно. Рисунки 3.3 (c) и (d) представляют графики температуры в моменты времени τ_5 и τ_6 . Из них видно, что к моменту времени τ_6 температура в материале практически выравнивается. На рисунках 3.3 (e) и (f) изображены распределения температуры в моменты времени τ_7 и $\tau_8 = 0.0127$. На данных графиках наблюдается понижение температуры в материале, так как материал перестал тереться о граничную стенку трубы и также происходит процесс охлаждения материала в результате конвективного теплообмена между материалом и окружающей средой.

На рисунке 3.4 изображены графики перемещений $\tilde{u} = u/R$ в зависимости от координаты x в разные моменты времени.

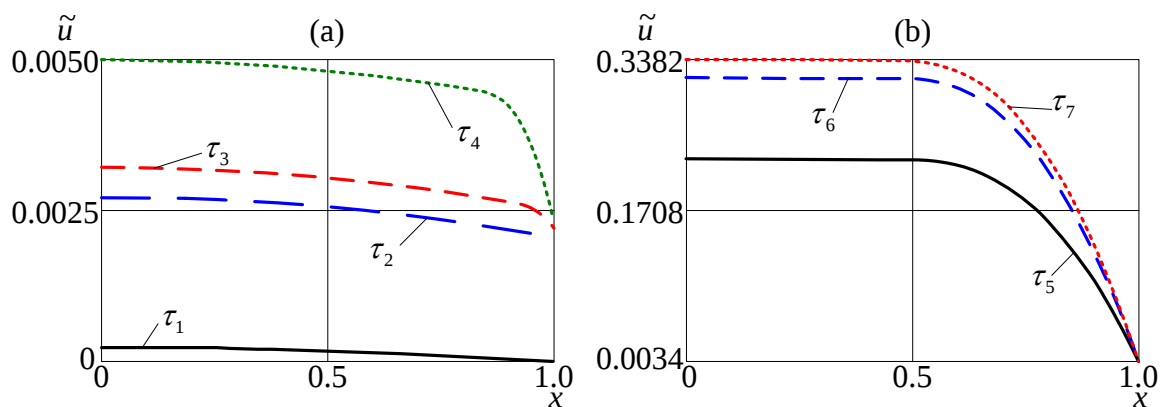


Рис. 3.4. Распределение перемещений в разные моменты времени

Рисунок 3.4 (а) соответствует моментам $\tau_1 = 0.005$, τ_2 , τ_3 и τ_4 , а рисунок 3.4 (b) – моментам τ_5 , τ_6 и τ_7 . Рисунок 3.5 (а) иллюстрирует график безразмерных скоростей точек материала $\tilde{v} = \mu\nu\alpha_1^{-1}R^{-1}$ при $r = 0$ в интервале по времени от τ_2 до τ_7 , а рисунок 3.5 (b) представляет график скоростей точек материала при $r = R$ в том же интервале по времени.

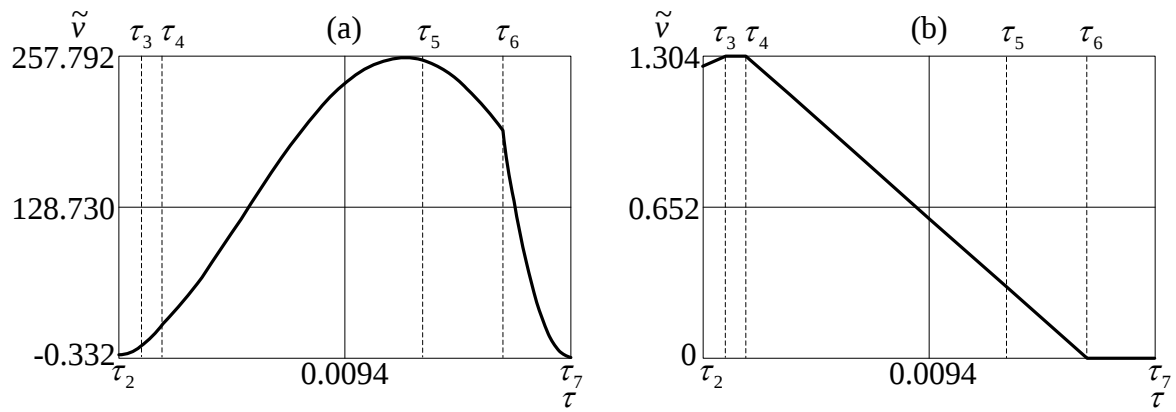


Рис. 3.5. Графики скоростей точек среды в зависимости от времени при $r = 0$ (a) и $r = R$ (b)

На рисунках 3.6-3.8 показано изменение компонент m_{rz} , m_{rr} и m_{zz} тензора обратимых деформаций в материале пробки с течением времени.

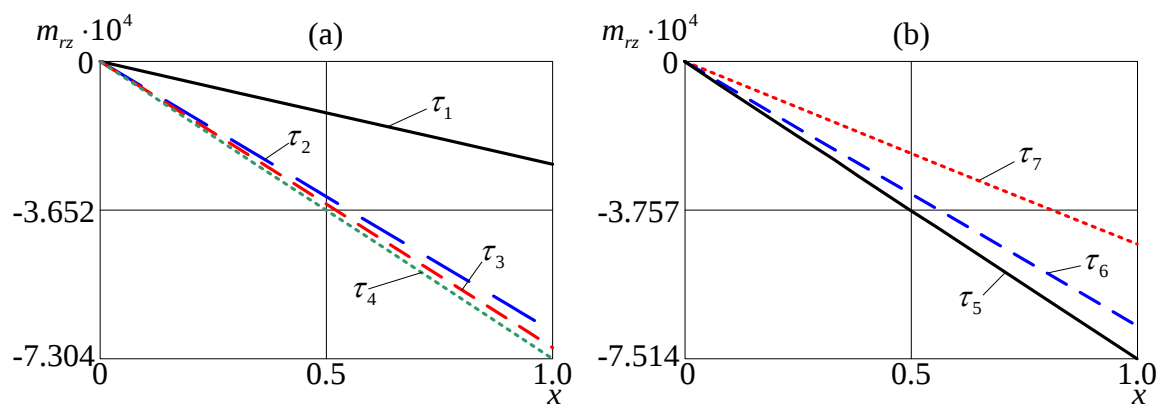


Рис. 3.6. Распределение компоненты обратимых деформаций m_{rz} в разные моменты времени

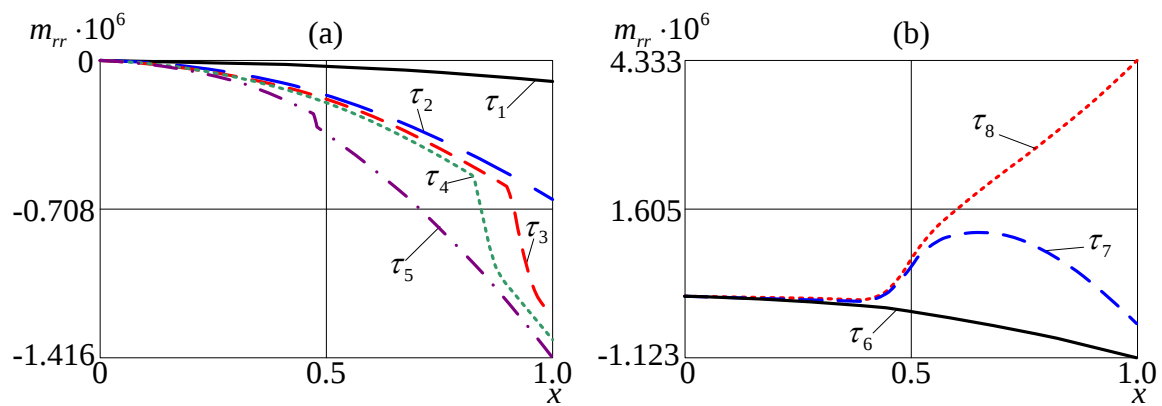


Рис. 3.7. Распределение компоненты обратимых деформаций m_{rr} в разные моменты времени

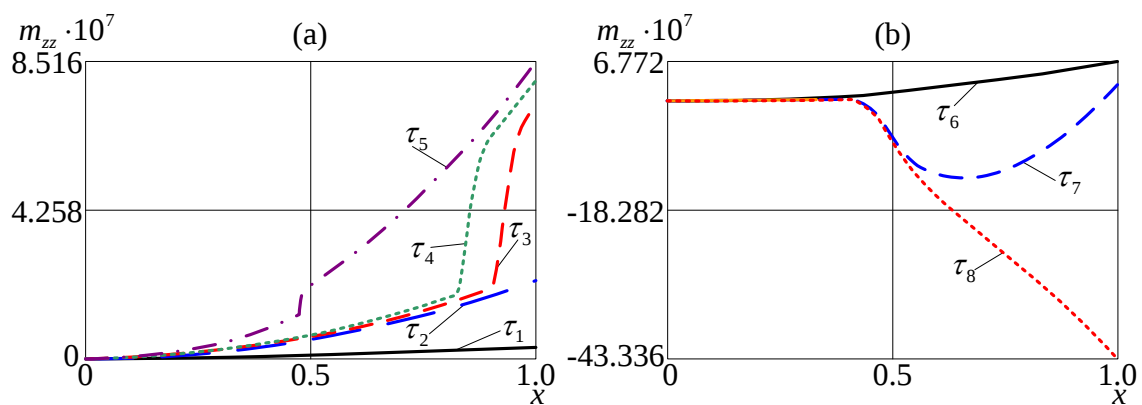


Рис. 3.8. Распределение компоненты обратимых деформаций m_{zz} в разные моменты времени

Рисунки 3.9 и 3.10 иллюстрируют изменение компонент p_{rz} , p_{rr} и p_{zz} тензора необратимых деформаций с течением времени.

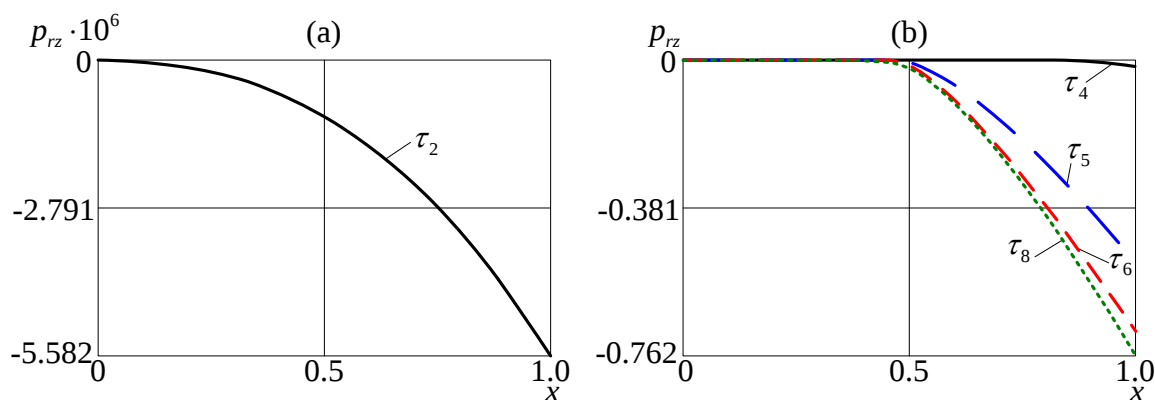


Рис. 3.9. Распределение компоненты необратимых деформаций p_{rz} в разные моменты времени

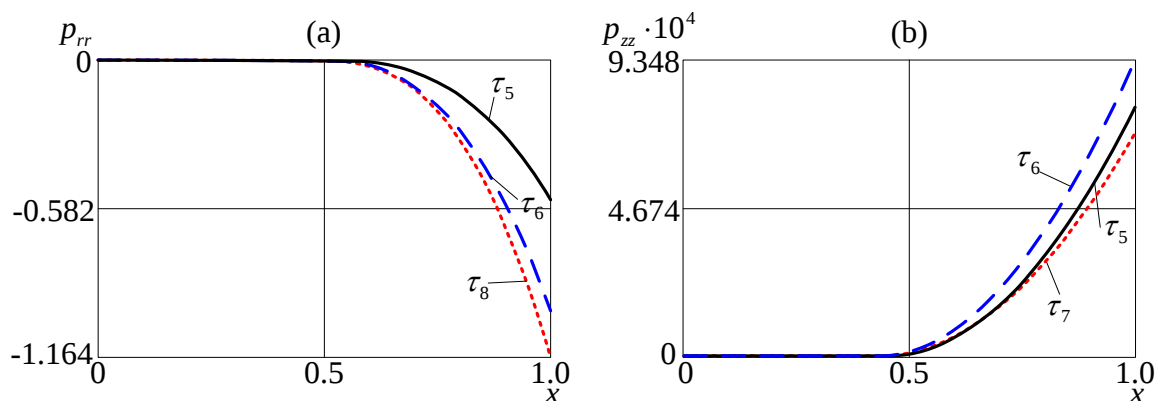


Рис. 3.10. Распределение компонент необратимых деформаций p_{rr} и p_{zz} в разные моменты времени

На рисунке 3.11 приведены распределения остаточных напряжений $\tilde{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr} / \mu$, $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} / \mu$ и $\tilde{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz} / \mu$ в материале пробки.

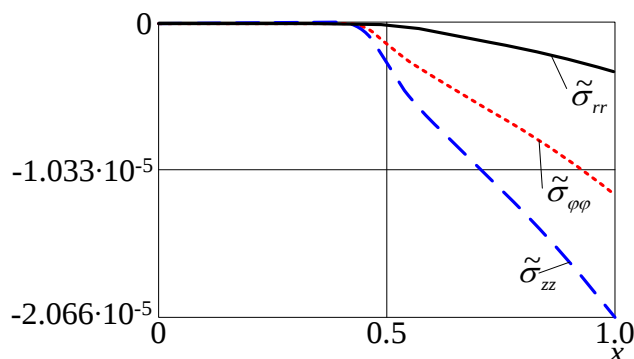


Рис. 3.11. Остаточные напряжения

Здесь рассмотрены процессы ползучести и вязкопластического течения материала, образующего пробку конечной длины, с учетом его обратимого деформирования и теплопередачи в нем вне области течения. Учитывается теплотворная способность деформирования и разогрев материала в условиях его проскальзывания по граничной поверхности трубы.

Из сравнения задач, рассмотренных во второй и третьей главах, следует, что необратимое деформирование само по себе в случае квазистатического процесса вызывает незначительный разогрев материала (рисунки 2.2, 2.7, 2.9, 2.15 и 2.16). Учет нагревания материала вследствие трения о жесткую границу приводит к значительному росту температуры во всем деформируемом слое материала (рисунок 3.3). Такая разница в распределениях температуры приводит к изменению в поведении упругопластических границ, что видно из рисунков 2.6, 2.14 и 3.2. При учете проскальзывания материала пластическое течение начинается раньше, и упругопластическая граница продвигается дальше. На стадии течения, соответствующей постоянному перепаду давления, в случае прилипания упругопластическая граница не изменяет своего положения, в то время как в случае проскальзывания упругопластическая граница продолжает расти. В случае убывающего перепада давления пластическая область уменьшается при условиях прилипания. В случае с проскальзыванием пластическая область сначала

продолжает расти, затем уже по истечении некоторого времени тоже начинает сужаться. Также учет проскальзывания приводит к значительно большим перемещениям и необратимым деформациям (рисунки 2.17, 2.19, 3.4 и 3.9). В результате при завершении процессов деформирования получаются разные распределения остаточных напряжений (рисунки 2.20 и 3.11). В случае прилипания остаточные напряжения положительные, а в случае проскальзывания остаточные напряжения отрицательные и по абсолютной величине почти на порядок больше.

Глава 4 Необратимое деформирование и разогрев упруговязкопластического материала в круглой трубе при наличии слоя смазки

Здесь приведем решение неизотермической краевой задачи о деформировании материала в жесткой круглой трубе при наличии слоя смазки. Деформирование и продвижение материала и смазки происходит вследствие приложения переменного давления. Сначала на границе трубы со смазкой выполняются условия прилипания, затем при увеличении нагрузки смазочный материал начинает проскальзывать, и трение о трубу вызывает его разогрев. Разогрев смазки и основного материала происходит за счет трения материала смазки о трубу и за счет процесса накопления ими пластических деформаций.

4.1 Постановка задачи и обратимое деформирование

В процессе эксплуатации любого оборудования его износ неизбежен, и исключить его полностью нельзя, можно только учесть и постараться каким-либо образом замедлить и снизить [52]. Эксплуатационный износ, возникающий за счет трения деталей при контакте двух поверхностей и их взаимном воздействии друг на друга, можно снизить применением различных смазок и специальных покрытий [49]. Нанесению защитных покрытий — в том числе многослойных, гибридных, композиционных и наноструктурированных в последние годы уделяют особое внимание в машиностроении, поскольку такой способ демонстрирует свою очевидную эффективность в вопросах упрочнения деталей машин и увеличения суммарного ресурса [35, 53].

Поверхностные слои соприкасающихся материалов при обработке давлением изменяются в основном под действием значительных деформаций, развивающихся в тонком поверхностном слое, приводящих к его нагреву [14]. Особую роль при этом играет тепловой эффект трения при деформации с применением технологических смазок, хотя наличие смазки не гарантирует

полное отсутствие нагрева материала и его деформирования. Такие эффекты также существенно влияют на износостойкость деталей и их длительную прочность, поэтому их изучение направлено на возможность прогнозирования износостойкости деталей и предложение способов повышения усталостной прочности конструкций.

Здесь рассмотрим краевую задачу о деформировании материала в жесткой круглой трубе при наличии слоя смазки. Основной материал и слой смазки полагаем несжимаемыми упруговязкопластическими материалами, характеризующимися разными параметрами.

Полагаем, что упруговязкопластический материал и слой смазки находятся в круглой жесткой трубе, граничная поверхность которой в цилиндрической системе координат r, φ, z задана уравнением $r = R$. Основной материал занимает область $0 \leq r \leq r_1$ и его термомеханические свойства будем задавать параметрами с индексом 1. Параметры слоя смазки $r_1 \leq r \leq R$ обозначим индексом 2. Считаем, что на поверхности соприкосновения основного материала и материала смазки $r = r_1$ перемещения непрерывны. Деформирование материала и смазки в трубе происходит под действием возрастающего со временем перепада давления.

Также считаем, что пока остается верным неравенство (3.1) на границе $r = R$ выполняются условия (2.2) жесткого сцепления материала смазки со стенками трубы: $u|_{r=R} = 0, v|_{r=R} = 0$. Постоянную сухого трения s_0 полагаем меньше предела текучести при комнатной температуре $s_0 < k_{02}$. Компоненты полных деформаций определяются зависимостями (2.4).

Считаем, что материал до приложения механической нагрузки в виде перепада давления находился в свободном состоянии и сначала деформирование является обратимым, следовательно, необходимо найти решение упругой изотермической задачи. Полагая обратимые деформации достаточно малыми и учитывая только слагаемые до второго порядка по $\partial u / \partial r$

включительно [22-25], из зависимостей (1.31) и (1.32) при $a = 0$ для компонент тензора напряжений получим

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} &= -(P_{1i} + 2\mu_i) - \frac{1}{2}(b_i + \mu_i)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 = -p_{1i}, \\ \sigma_{zz} &= -p_{1i} + \mu_i\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2, \quad \sigma_{rz} = \mu_i \frac{\partial u}{\partial r}.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Здесь и далее $i = 1, 2$ – соответственно для основного материала и для смазки.

В рамках квазистатического подхода интегрируя уравнения равновесия (2.6) с учетом соотношений (4.1), получаем, что для компоненты σ_{rz} напряжения и давления p_1 справедливы зависимости (2.7). Функцию интегрирования $c_1(t)$ в (2.7), как и ранее, полагаем равной нулю, чтобы напряжение σ_{rz} имело конечное значение при $r = 0$. Функция p_1 не зависит от переменной r , поэтому она является одинаковой для основного материала и для смазки. Следовательно, можно опустить у нее индекс i . Функцию $p_0(t)$ будем считать известной функцией контрольного давления в сечении трубы $z = 0$.

Для возрастающего перепада давления примем следующее условие

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = -p(t), \quad p(t) = \alpha_1 t, \quad \alpha_1 > 0. \quad (4.2)$$

Для указанных условий нагружения с учетом условий прилипания при $r = R$ и условия непрерывности перемещений и скорости на границе $r = r_1$, разделяющей основной материал и слой смазки, получим решение задачи

в области $0 \leq r \leq r_1$ для основного материала:

$$\begin{aligned}u &= \frac{p(r_1^2 - r^2)}{4\mu_1} + \frac{p(R^2 - r_1^2)}{4\mu_2}, \quad v = \left(\frac{r_1^2 - r^2}{4\mu_1} + \frac{R^2 - r_1^2}{4\mu_2} \right) \frac{dp}{dt}, \\ \sigma_{rz} &= -\frac{pr}{2}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p_1, \quad \sigma_{zz} = -p_1 + \frac{p^2 r^2}{4\mu_1}, \quad p_1 = -pz + p_0, \\ e_{rz} &= -\frac{pr}{4\mu_1}, \quad e_{rr} = -\frac{3}{2}e_{rz}^2, \quad e_{zz} = \frac{1}{2}e_{rz}^2,\end{aligned}\quad (4.3)$$

в слое смазки $r_1 \leq r \leq R$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{p(R^2 - r^2)}{4\mu_2}, \quad v = \frac{R^2 - r^2}{4\mu_2} \frac{dp}{dt}, \quad e_{rz} = -\frac{pr}{4\mu_2}, \\ \sigma_{rz} &= -\frac{pr}{2}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p_1, \quad \sigma_{zz} = -p_1 + \frac{p^2 r^2}{4\mu_2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Полученное решение задачи (4.3) и (4.4) при возрастающем перепаде давления остается справедливым до момента времени $t_1 = 2\alpha_1^{-1}R^{-1}s_0$, в который неравенство (3.1) перестанет выполняться. С этого момента времени начинается проскальзывание материала смазки на границе $r = R$, и неравенство (2.1) заменяем условием проскальзывания

$$(|\sigma_{rz}| - s_0 - \xi v)|_{r=R} = 0. \quad (4.5)$$

С момента времени t_1 материал смазки начинает нагреваться из-за трения о жесткую стенку трубы. Для формирующегося поля температур, аналогично условиям (2.3) и (3.3) принимаем условия

$$\begin{aligned} \theta(r, t_1) &= 0, \quad \theta(r, t)|_{r=R} = \gamma_1 u(r, t)|_{r=R}, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \\ [\theta]_{r=r_1} &= 0, \quad [q]_{r=r_1} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь $q = q_z(r, t) = -\lambda_i T_0 \partial \theta / \partial r$ – отличные от нуля компонента вектора теплового потока материала и смазки, где λ_i – их коэффициенты теплопроводности, квадратными скобками обозначен скачок функции. Таким образом, четвертое и пятое условия (4.6) означают непрерывность температуры и теплового потока на границе раздела двух сред. Полагаем также, что температура не достигает температуры плавления в процессе деформирования. Компоненты напряжений с момента времени t_1 вычисляются из тех же зависимостей (1.31), (1.32) при $a = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} &= -(P_{1i} + 2\mu_i) - \frac{1}{2}(b_i + \mu_i) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \nu_{1i} \theta - \nu_{3i} \theta^2 = -p_1, \\ \sigma_{rz} &= (\mu_i - l_i \theta) \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \sigma_{zz} = -p_1 + \mu_i \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2, \quad l_i = \nu_{1i} + \nu_{5i}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из уравнений равновесия (2.6), соотношений (4.7) и (1.13), а также условия (4.2) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{rz} &= -\frac{pr}{2}, & p_1 &= -pz + p_0, & m_{rr} &= -\frac{3}{2}m_{rz}^2, \\ m_{zz} &= \frac{1}{2}m_{rz}^2, & m_{rz} &= -\frac{pr}{4(\mu_i - l_i\theta)}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Следствием второй зависимости (4.7) и первого соотношения (4.8) является уравнение для градиента перемещений

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{pr}{2(\mu_i - l_i\theta)}. \quad (4.9)$$

Уравнения теплопроводности (1.38) для основного материала и для материала смазки с учетом (2.4) и (4.7) примут форму

$$\left(1 + \beta_{1i}\theta + \frac{\beta_{3i}l_i p^2 r^2}{8(\mu_i - l_i\theta)^3}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_{3i}pr^2}{8(\mu_i - l_i\theta)^2} \frac{dp}{dt} = g_i \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (4.10)$$

Из первой зависимости (4.8) и условия (4.5) следует граничное условие для перемещений и для скоростей точек материала

$$u(R, t) = 0.25\xi^{-1}\alpha_1 R(t^2 - t_1^2) - \xi^{-1}s_0(t - t_1), \quad v(R, t) = 0.5\xi^{-1}\alpha_1 Rt - \xi^{-1}s_0. \quad (4.11)$$

Уравнения (4.10) с учетом условий (4.6) решаются вместе с применением конечно-разностного метода. Интегрируя уравнение (4.9) в области $r_1 \leq r \leq R$ с учетом граничного условия (4.11), получим перемещения и скорости точек материала смазки

$$\begin{aligned}u &= \frac{p}{2} \int_r^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2\theta} + \frac{\alpha_1 R(t^2 - t_1^2)}{4\xi} - \frac{s_0(t - t_1)}{\xi}, \\ v &= \frac{1}{2} \frac{dp}{dt} \int_r^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2\theta} + \frac{l_2 p}{2} \int_r^R \frac{r \frac{\partial \theta}{\partial r} dr}{(\mu_2 - l_2\theta)^2} + \frac{\alpha_1 Rt}{2\xi} - \frac{s_0}{\xi}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

В области основного материала $0 \leq r \leq r_1$ перемещения и скорости также находятся из уравнения (4.9), но уже с учетом их непрерывности на границе соприкосновения со смазкой $r = r_1$:

$$u = \frac{p}{2} \left(\int_r^{r_1} \frac{rdr}{\mu_1 - l_1 \theta} + \int_{r_1}^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2 \theta} \right) + \frac{\alpha_1 R(t^2 - t_1^2)}{4\xi} - \frac{s_0(t - t_1)}{\xi},$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{dp}{dt} \left(\int_r^{r_1} \frac{rdr}{\mu_1 - l_1 \theta} + \int_{r_1}^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2 \theta} \right) + \frac{l_1 p}{2} \int_r^{r_1} \frac{r \frac{\partial \theta}{\partial r} dr}{(\mu_1 - l_1 \theta)^2} + \frac{l_2 p}{2} \int_{r_1}^R \frac{r \frac{\partial \theta}{\partial r} dr}{(\mu_2 - l_2 \theta)^2} + \frac{\alpha_1 R t}{2\xi} - \frac{s_0}{\xi}. \quad (4.13)$$

Полученное решение краевой задачи будет верным при возрастающем градиенте давления до некоторого момента времени $t_2 > t_1$, в который на границе $r = R$ в материале смазки выполнится условие пластичности (1.46) в следующем виде

$$\sigma_{rz}|_{r=R} = -k(t_2). \quad (4.14)$$

Из первой зависимости (4.8), условия (4.14) и соотношения для предела текучести (1.48) получим уравнение для вычисления момента начала вязкопластического течения t_2

$$\alpha_1 t_2 R = 2k_{02} \left(1 - \frac{\theta(R, t_2)}{\theta_{m2}} \right)^2.$$

4.2 Вязкопластическое течение в смазке и основном материале

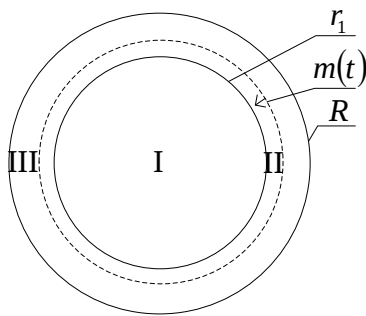


Рис. 4.1. Расположение областей

С момента времени t_2 в смазке развивается область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ (III), в областях $r_1 \leq r \leq m(t)$ (II) и $0 \leq r \leq r_1$ (I) смазка и основной материал деформируются обратимо (рисунок 4.1). Движущаяся упругопластическая граница $r = m(t)$ разделяет области II и III. В упругих областях I и II напряжения и деформации задаются зависимостями (4.3) и (4.4). В области течения III из (1.35) для напряжений имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -(P_{2i} + 2\mu_i) + 2(b_i + \mu_i)m_{rr} + 2b_im_{zz} + \mu_im_{rz}^2 + \nu_{1i}\theta - \\
-\nu_{3i}\theta^2 &= -p_1 + 2(\mu_i - l_i\theta)m_{rr} + (3\mu_i + l_i\theta)m_{rz}^2, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -p_1, \\
\sigma_{zz} &= -p_1 + 2(\mu_i - l_i\theta)m_{zz} + (3\mu_i + l_i\theta)m_{rz}^2, \quad \sigma_{rz} = 2(\mu_i - l_i\theta)m_{rz}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

В соотношениях (4.15) $i = 2$. Из уравнений равновесия следует, что в области течения выполняются первые две зависимости (4.8).

Из ассоциированного закона пластического течения (1.45) и условия пластичности (1.46) для компоненты σ_{rz} следует выражение

$$\sigma_{rz} = -k + \eta \varepsilon_{rz}^p. \tag{4.16}$$

С учетом первой зависимости (4.8) из (4.16) получим компоненту тензора скоростей пластических деформаций ε_{rz}^p

$$\varepsilon_{rz}^p = \eta^{-1} (k - 0.5pr). \tag{4.17}$$

Из условия непрерывности σ_{rz} на упругопластической границе $r = m(t)$ следует равенство нулю компоненты тензора скоростей пластических деформаций ε_{rz}^p на этой границе. Тогда из (4.17) получим уравнение для определения положения границы $r = m(t)$

$$p(t)m(t) = 2k_{02} \left(1 - \frac{\theta(m(t), t)}{\theta_{m2}} \right)^2. \tag{4.18}$$

В области течения III уравнение теплопроводности (1.43) с учетом (4.15)-(4.17) примет форму

$$\begin{aligned}
\left(1 + \beta_{1i}\theta + \frac{\beta_{3i}l_ip^2r^2}{8(\mu_i - l_i\theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_{3i}pr^2}{8(\mu_i - l_i\theta)^2} \frac{dp}{dt} &= g_i \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \\
&+ \frac{pr}{2\nu_{2i}\eta} \left(k - \frac{pr}{2} \right).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Здесь $i = 2$. В упругих областях I и II остаются верными уравнения (4.10). Для решения системы уравнений (4.10), (4.18) и (4.19) относительно неизвестных функций $\theta(r, t)$ и $m(t)$ при последних четырех условиях (4.6) используется конечно-разностная схема. Дополнительно полагаем непрерывность

температуры в момент начала пластического течения t_2 , а также непрерывность температуры и теплового потока на упругопластической границе $r = m(t)$.

Кинематика течения в рассматриваемом случае согласно зависимостям (1.13), (1.9) и (1.28) задается соотношениями

$$\begin{aligned} d_{rz} &= m_{rz} + p_{rz}, \quad \frac{dd_{rz}}{dt} = \frac{\partial d_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial r}, \quad r_{rz} = -r_{zr} = 2\varepsilon_{rz}, \\ \varepsilon_{rr}^p &= \frac{dp_{rr}}{dt} + 2p_{rz}(r_{zr} + \varepsilon_{rz}^p), \quad \varepsilon_{zz}^p = \frac{dp_{zz}}{dt} + 2p_{rz}(r_{rz} + \varepsilon_{rz}^p), \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial r} = \varepsilon_{rz}^e + \varepsilon_{rz}^p = \frac{\partial m_{rz}}{\partial t} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial t}, \quad \varepsilon_{rr}^p = -\varepsilon_{zz}^p = \frac{\varepsilon_{rz}^p}{2} \frac{m_{rr} - m_{zz}}{m_{rz}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Для компоненты m_{rz} в области течения III выполняется пятая зависимость (4.8). Интегрируя скорость пластических деформаций ε_{rz}^p по времени, найдем компоненту тензора пластических деформаций p_{rz}

$$p_{rz} = \int_{t_2}^t \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2} \right) dt. \quad (4.21)$$

Градиент перемещений в областях I и II имеет вид (4.9), а в области III определяется зависимостью (2.13). Интегрированием уравнения (2.13) в области III при условии (4.11), найдем перемещения и скорости точек материала смазки

$$\begin{aligned} u &= \frac{p}{2} \int_r^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2 \theta} - 2 \int_r^R p_{rz} dr + \frac{\alpha_1 R(t^2 - t_1^2)}{4\xi} - \frac{s_0(t - t_1)}{\xi}, \\ v &= \frac{1}{2} \frac{dp}{dt} \int_r^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2 \theta} + \frac{l_2 p}{2} \int_r^R \frac{r \frac{\partial \theta}{\partial r} dr}{(\mu_2 - l_2 \theta)^2} - 2 \int_r^R \varepsilon_{rz}^p dr + \frac{\alpha_1 R t}{2\xi} - \frac{s_0}{\xi}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

В упругой области II перемещения и скорости находятся из уравнения (4.9) с учетом их непрерывности на упругопластической границе $r = m(t)$:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{p}{2} \int_r^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2 \theta} - 2 \int_m^R p_{rz} dr + \frac{\alpha_1 R(t^2 - t_1^2)}{4\xi} - \frac{s_0(t - t_1)}{\xi}, \\
v &= \frac{1}{2} \frac{dp}{dt} \int_r^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2 \theta} + \frac{l_2 p}{2} \int_r^R \frac{r \frac{\partial \theta}{\partial r} dr}{(\mu_2 - l_2 \theta)^2} - 2 \int_m^R \varepsilon_{rz}^p dr + \frac{\alpha_1 R t}{2\xi} - \frac{s_0}{\xi}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Перемещения и скорости в основном материале, занимающем область I, также находятся из уравнения (4.9) при условии их непрерывности на границе $r = r_1$, разделяющей два материала:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{p}{2} \left(\int_r^{r_1} \frac{rdr}{\mu_1 - l_1 \theta} + \int_{r_1}^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2 \theta} \right) - 2 \int_m^R p_{rz} dr + \frac{\alpha_1 R(t^2 - t_1^2)}{4\xi} - \frac{s_0(t - t_1)}{\xi}, \\
v &= \frac{1}{2} \frac{dp}{dt} \left(\int_r^{r_1} \frac{rdr}{\mu_1 - l_1 \theta} + \int_{r_1}^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2 \theta} \right) + \frac{l_1 p}{2} \int_r^{r_1} \frac{r \dot{\theta} dr}{(\mu_1 - l_1 \theta)^2} - 2 \int_m^R \varepsilon_{rz}^p dr + \\
&\quad + \frac{l_2 p}{2} \int_{r_1}^R \frac{r \dot{\theta} dr}{(\mu_2 - l_2 \theta)^2} + \frac{\alpha_1 R t}{2\xi} - \frac{s_0}{\xi}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Из системы уравнений (2.14) при $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^p$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^p$ найдем диагональные компоненты тензоров обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} в области течения III.

При дальнейшем увеличении перепада давления и росте области течения в некоторый момент времени $t_3 > t_2$ упругопластическая граница $r = m(t)$ сравняется с границей раздела материала и смазки $r = r_1$. С этого момента времени остается две области: упругая область I, в которой расположен основной материал и область течения III. То есть вязкопластическое течение теперь продолжается во всей области со смазкой. В этом случае для областей I и III выполняются все зависимости, описанные в данном пункте.

Далее при увеличении нагрузки в момент времени $t_4 > t_3$, при нагружающем давлении $p^* = -\alpha t_4 z + p_0$ выполнится условие пластичности (1.46) на границе основного материала $r = r_1$ в виде $\sigma_{rz}|_{r=r_1} = -k(t_4)$. Момент времени t_4 вычисляется из уравнения

$$\alpha_1 t_4 R = 2k_{01} \left(1 - \frac{\theta(R, t_4)}{\theta_{m1}} \right)^2.$$

Начиная с момента времени t_4 развивается область $m_1(t) \leq r \leq r_1$ (IV), в которой происходит вязкопластическое течение основного материала. Новая упругопластическая граница $r = m_1(t)$ отделяет эту область от области $0 \leq r \leq m_1(t)$ (I), в которой основной материал продолжает деформироваться

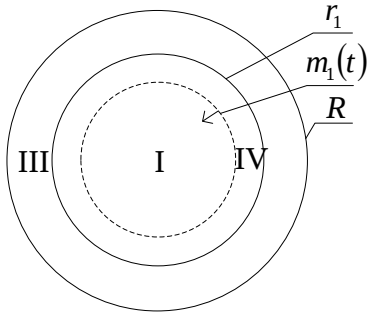


Рис. 4.2. Расположение областей

обратимо. Также остается область течения материала смазки $r_1 \leq r \leq R$ (III) (рисунок 4.2).

Для напряжений в упругой области I выполняются зависимости (4.7) и (4.8). В областях течения напряжения удовлетворяют соотношениям (4.15) при $i = 1$ для области IV и $i = 2$ для области III. Также в областях течения остаются

справедливыми первые две зависимости (4.8).

В области III компонента тензора скоростей пластических деформаций ε_{rz}^p удовлетворяет равенству (4.17). В области течения IV из ассоциированного закона пластического течения (1.45) и условия пластичности (1.46) следует выполнение зависимостей (4.16) и (4.17). Условие непрерывности компоненты тензора напряжений σ_{rz} приводит к уравнению для определения положения упругопластической границы $r = m_1(t)$

$$p(t)m_1(t) = 2k_{01} \left(1 - \frac{\theta(m_1(t), t)}{\theta_{m1}} \right)^2. \quad (4.25)$$

В упругой области I уравнение теплопроводности имеет вид (4.10), а в областях течения – (4.19) при $i = 1$ для области IV и $i = 2$ для области III. Система уравнений (4.10), (4.19) и (4.25) относительно неизвестных функций $\theta(r, t)$ и $m_1(t)$ при последних четырех условиях (4.6) решается численно при помощи конечно-разностного метода. Здесь также предполагается непрерывность температуры в момент начала пластического течения в

основном материале t_4 и непрерывность температуры и теплового потока на упругопластической границе $r = m_1(t)$.

Компонента тензора пластических деформаций p_{rz} в области III вычисляется по формуле (4.21), а в области IV для нее после интегрирования (4.17) следует уравнение

$$p_{rz} = \int_{t_4}^t \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2} \right) dt. \quad (4.26)$$

Градиент перемещений в области I имеет вид (4.9), а в областях III и IV – (2.13). Интегрируя уравнение (2.13) при учете (4.11), установим, что для перемещений и скоростей точек области течения III остаются верными зависимости (4.22). Интегрируя это же уравнение в области течения IV найдем перемещения и скорости в этой области, учитывая их непрерывность на границе $r = r_1$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{p}{2} \left(\int_r^{r_1} \frac{rdr}{\mu_1 - l_1 \theta} + \int_{r_1}^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2 \theta} \right) - 2 \int_{r_1}^R p_{rz}^{III} dr - 2 \int_r^{r_1} p_{rz}^{IV} dr + \frac{\alpha_1 R(t^2 - t_1^2)}{4\xi} - \frac{s_0(t - t_1)}{\xi}, \\ v &= \frac{1}{2} \frac{dp}{dt} \left(\int_r^{r_1} \frac{rdr}{\mu_1 - l_1 \theta} + \int_{r_1}^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2 \theta} \right) + \frac{l_1 p}{2} \int_r^{r_1} \frac{r \dot{\theta} dr}{(\mu_1 - l_1 \theta)^2} - 2 \int_{r_1}^R \varepsilon_{rz}^{pIII} dr - 2 \int_r^{r_1} \varepsilon_{rz}^{pIV} dr + \\ &\quad + \frac{l_2 p}{2} \int_{r_1}^R \frac{r \dot{\theta} dr}{(\mu_2 - l_2 \theta)^2} + \frac{\alpha_1 R t}{2\xi} - \frac{s_0}{\xi}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Для нахождения скоростей и перемещений в области I проинтегрируем уравнение (4.9) при условии их непрерывности на упругопластической границе $r = m_1(t)$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{p}{2} \left(\int_r^{r_1} \frac{rdr}{\mu_1 - l_1 \theta} + \int_{r_1}^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2 \theta} \right) - 2 \int_{r_1}^R p_{rz}^{III} dr - 2 \int_{m_1}^{r_1} p_{rz}^{IV} dr + \frac{\alpha_1 R(t^2 - t_1^2)}{4\xi} - \\ &\quad - \frac{s_0(t - t_1)}{\xi}, \quad v = \frac{1}{2} \frac{dp}{dt} \left(\int_r^{r_1} \frac{rdr}{\mu_1 - l_1 \theta} + \int_{r_1}^R \frac{rdr}{\mu_2 - l_2 \theta} \right) + \frac{l_1 p}{2} \int_r^{r_1} \frac{r \dot{\theta} dr}{(\mu_1 - l_1 \theta)^2} - \\ &\quad - 2 \int_{r_1}^R \varepsilon_{rz}^{pIII} dr - 2 \int_{m_1}^{r_1} \varepsilon_{rz}^{pIV} dr + \frac{l_2 p}{2} \int_{r_1}^R \frac{r \dot{\theta} dr}{(\mu_2 - l_2 \theta)^2} + \frac{\alpha_1 R t}{2\xi} - \frac{s_0}{\xi}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Для нахождения компонент тензоров обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} в областях III и IV используется система уравнений (2.14).

Пусть в момент времени $t_5 > t_4$ перепад давления становится постоянным: $p(t) = \alpha_1 t_5$. Такое изменение функции $p(t)$ не приводит к существенным изменениям в деформационном процессе. Течение продолжается в областях III и IV, в области I материал продолжает деформироваться обратимо. Снижается лишь скорость продвижения упругопластической границы $r = m_1(t)$ по основному материалу. Все соотношения данного пункта остаются верными при $dp/dt = 0$.

Расчеты проводились в безразмерных переменных r/R и $\tau = \alpha_1 t R / \mu_1$ при следующих значениях безразмерных постоянных: $r_1 R^{-1} = 0.9$, $\beta_{11} = 0.098$, $\beta_{12} = 0.01$, $\beta_{31} = -3.5$, $\beta_{32} = -1.5$, $\mu_1 \mu_2^{-1} = 103.507$, $k_{01} \mu_1^{-1} = 2.298 \cdot 10^{-3}$, $k_{02} \mu_1^{-1} = 4.816 \cdot 10^{-4}$, $\theta_{m1} = 2.179$, $\theta_{m2} = 1.047$, $l_{11} \mu_1^{-1} = 0.252$, $l_{12} \mu_1^{-1} = 10^{-5}$, $q_1 \mu_1 \alpha_1^{-1} R^{-3} = 6.292 \cdot 10^9$, $q_2 \mu_1 \alpha_1^{-1} R^{-3} = 9.268 \cdot 10^6$, $\nu_{21} \mu_1^{-1} = 0.1$, $\nu_{22} \mu_1^{-1} = 8 \cdot 10^{-6}$, $s_0 \mu_1^{-1} = 1.633 \cdot 10^{-8}$, $\alpha_1 \eta_{01} \mu_1^{-2} = 6.826 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_1 \eta_{02} \mu_1^{-2} = 5.461 \cdot 10^{-2}$, $\alpha_1 \xi R^2 \mu_1^{-2} = 2.73 \cdot 10^{-5}$, $\nu_1 T_0 = 12.121$, $\nu_2 T_0 = 12.121$, $\gamma_1 R = 9.8$, $\lambda_2 \lambda_1^{-1} = 1.229 \cdot 10^{-3}$.

На рисунке 4.3 представлены графики изменения упругопластических границ m/R в промежутке времени от $\tau_2 = 8.482 \cdot 10^{-4}$ до $\tau_3 = 9.206 \cdot 10^{-4}$, m_1/R в промежутке от $\tau_4 = 2.622 \cdot 10^{-3}$ до $\tau_5 = 2.670 \cdot 10^{-3}$ и m_1/R в промежутке от τ_5 до $\tau_6 = 2.740 \cdot 10^{-3}$.

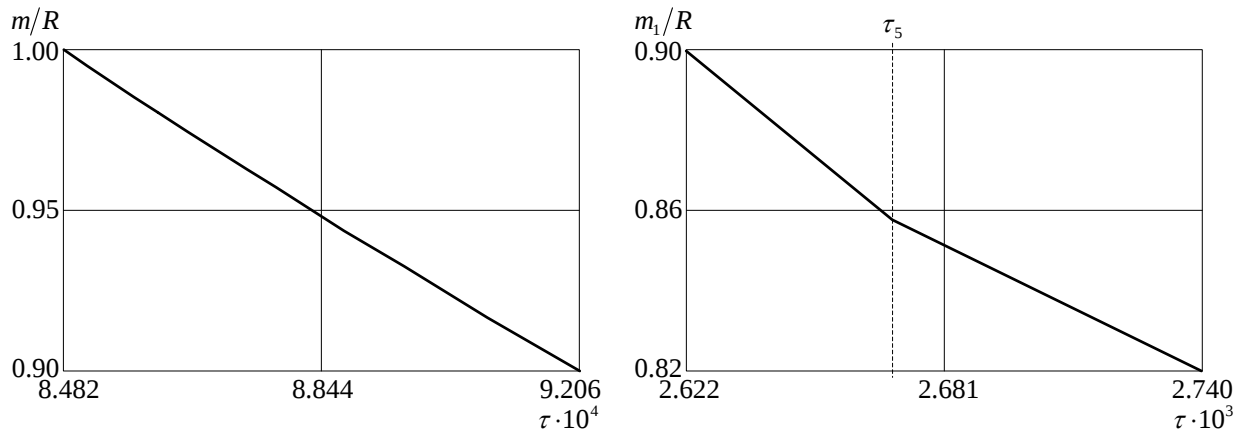


Рис. 4.3. Графики упругопластических границ

4.3 Торможение течения при убывающем перепаде давления, разгрузка и остывание

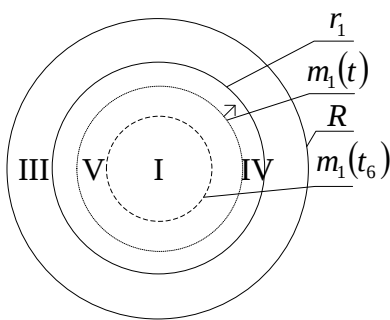


Рис. 4.4. Расположение областей

С момента времени $t_6 > t_5$ перепад давления начнет убывать при $p(t) = \alpha_1 t_5 - \alpha_2 (t - t_6)$. Примем $\alpha_2 / \alpha_1 = 2$. Такое отношение параметров в функции $p(t)$ приводит к изменению деформационного процесса. С момента времени t_6 упругопластическая граница $r = m_1(t)$ движется в обратную сторону. Возникает новая область $m_1(t_6) \leq r \leq m_1(t)$ (V), в которой происходит разгрузка. В областях III и IV продолжается вязкопластическое течение, в области I материал по-прежнему деформируется обратимо (рисунок 4.4). Для границы $r = m_1(t)$ продолжает выполняться уравнение (4.25) с новой функцией $p(t)$.

В областях I и V уравнение теплопроводности имеет вид (4.10), а в областях течения – (4.19) при $i = 1$ для области IV и $i = 2$ для области III. Система уравнений (4.10), (4.19) и (4.25) относительно неизвестных функций $\theta(r, t)$ и $m_1(t)$ при последних четырех условиях (4.6) также решается численно при помощи конечно-разностного метода. Дополнительно предполагается

непрерывность температуры в момент времени t_6 и непрерывность температуры и теплового потока на границах $r = m_1(t)$ и $r = m_1(t_6)$.

Градиент перемещений в области I имеет вид (4.9), а в областях III, IV и V – (2.13). Компонента тензора пластических деформаций p_{rz} в областях III и IV вычисляется по формулам (4.21) и (4.26), а в области V находится из дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial p_{rz}}{\partial t} = 0. \quad (4.29)$$

Интегрируя уравнения (2.13) и (4.9) при граничном условии (4.11) и условии непрерывности перемещений на границах $r = r_1$, $r = m_1(t)$ и $r = m_1(t_6)$, найдем перемещения точек основного материала и смазки.

В момент времени $t_7 > t_6$ упругопластическая граница $r = m_1(t)$ доходит до границы $r = r_1$. С этого момента времени течение продолжается только в смазке (область III), в области I происходит упругое деформирование, а в области V – разгрузка.

Далее в момент времени $t_8 > t_7$ в смазке появляется новая упругопластическая граница $r = m_2(t)$, движущаяся

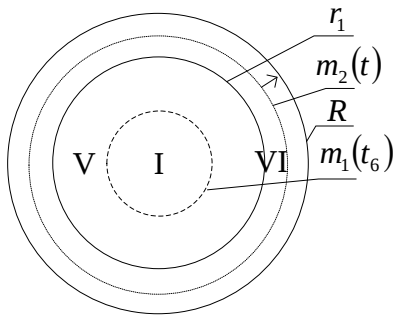


Рис. 4.5. Расположение областей

от границы $r = r_1$ к границе $r = R$. С этого момента времени помимо области V появляется новая область разгрузки $r_1 \leq r \leq m_2(t)$ (VI), в области $m_2(t) \leq r \leq R$ (III) продолжается течение, а в области I – обратимое деформирование (рисунок 4.5).

В момент времени $t_9 > t_8$ упругопластическая граница $r = m_2(t)$ доходит до границы $r = R$ и пластическое течение в смазке прекращается. Теперь деформируемые материалы разделены на три области – I, V и VI.

На рисунке 4.6 построены графики изменения упругопластических границ m_1/R в промежутке времени от τ_6 до $\tau_7 = 30.698 \cdot 10^{-4}$ и m_2/R в промежутке от $\tau_8 = 40.735 \cdot 10^{-4}$ до $\tau_9 = 40.737 \cdot 10^{-4}$.

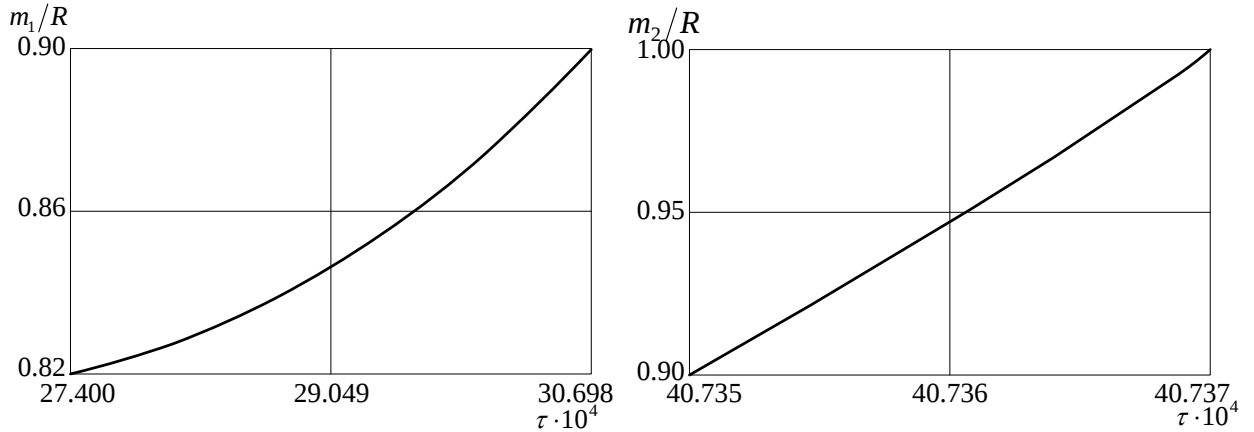


Рис. 4.6. Графики упругопластических границ

При последующем снижении нагрузки в момент времени $t_{10} > t_9$, для которого выполняется зависимость $p(t_{10}) = 2R^{-1}s_0$, на границе смазки с трубой $r = R$ выполнится равенство $|\sigma_{rz}|_{r=R} = s_0$. С этого момента времени условие (4.5) перестанет выполняться. То есть, материал смазки вновь удерживается в состоянии прилипания в окрестности жесткой стенки трубы $r = R$ за счет сухого трения. С этого момента времени смазка перестает нагреваться на границе $r = R$ без трения. Поэтому второе граничное условие для температуры (4.6) заменим условием (3.6).

В момент времени $t_{11} = \alpha_1 t_5 / \alpha_2 + t_6$ перепад давления становится равным нулю. Также становятся равными нулю компонента обратимых деформаций m_{rz} и компонента напряжений σ_{rz} . С этого момента времени уравнение теплопроводности принимает вид

$$(1 + \beta_{1i}\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = g_i \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (4.31)$$

при $i = 1$ для областей I и V и при $i = 2$ для области VI. С течением времени материал полностью остывает.

Распределения температуры в основном материале и смазке в моменты времени τ_3 , τ_4 , τ_6 и τ_7 представлены на рисунке 4.7, а, b, с и d соответственно.

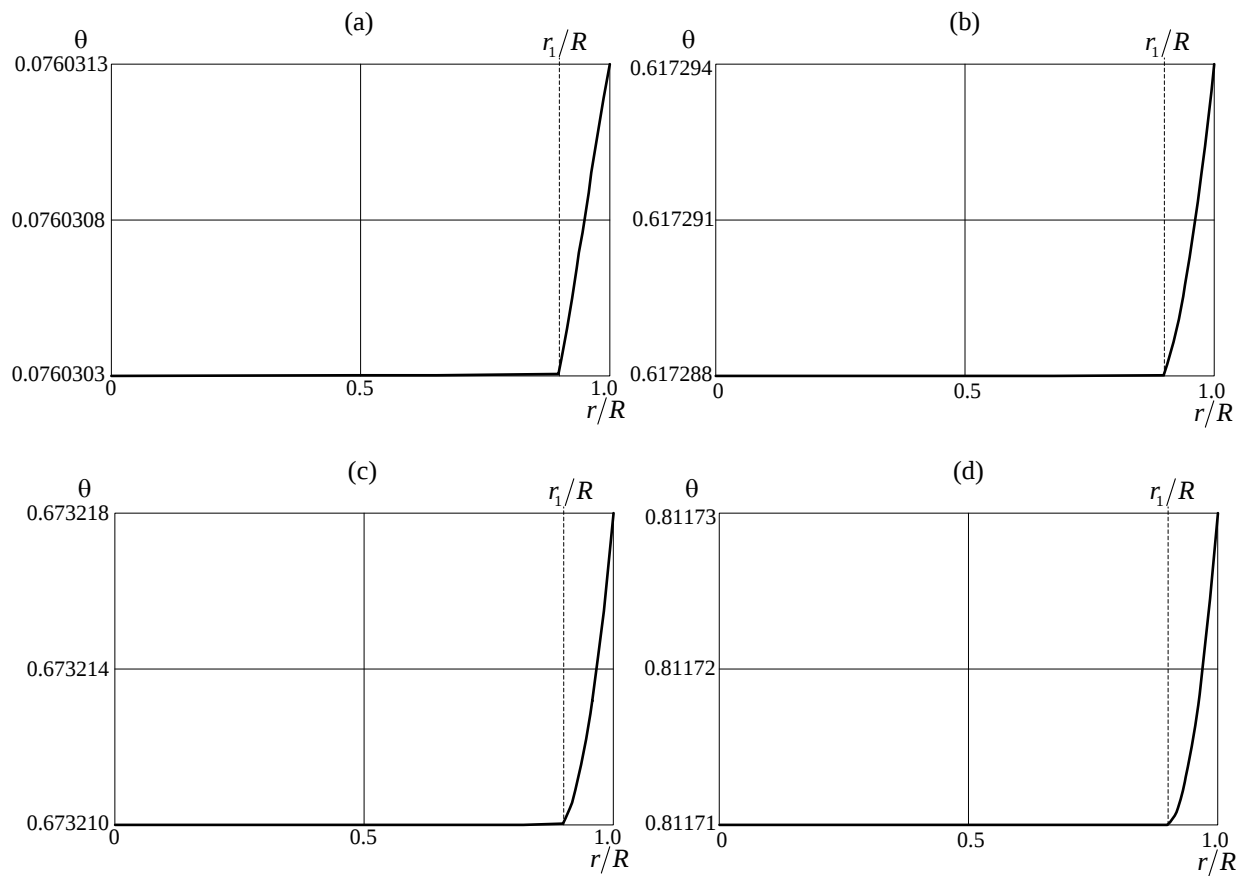


Рис. 4.7. Распределение температуры в материале и смазке в разные моменты времени

На рисунке 4.8 представлен график перемещений точек основного материала и смазки в конечный момент времени, когда произошла полная разгрузка и материалы полностью остыли. Распределение остаточных необратимых деформаций p_{rz} в материале и смазке изображено на рисунке 4.9.

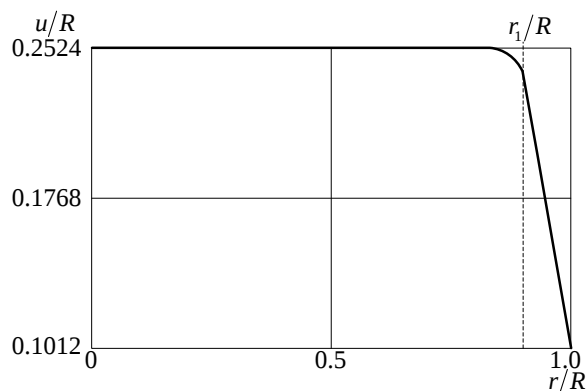


Рис. 4.8. Распределение перемещений точек материала и смазки в конечный момент времени

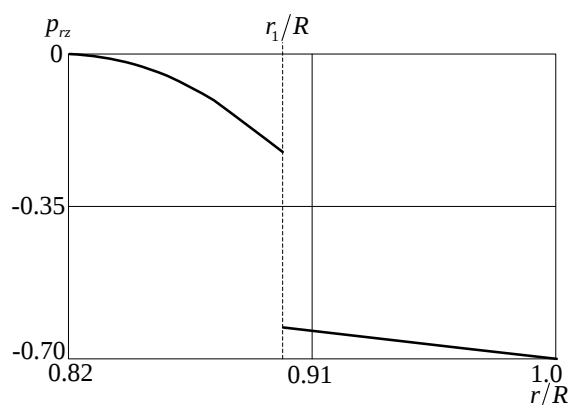


Рис. 4.9. Компонента p_{rz} в конечный момент времени

В представленной работе получено решение неизоотермической краевой задачи о продавливании материала со слоем смазки через жесткую круглую трубу под действием изменяющегося со временем перепада давления. Накопление больших необратимых деформаций происходит вследствие процесса вязкопластического течения, которое сначала охватывает область, занимаемую смазкой, затем через некоторое время переходит и в основной материал. Материал в процессе деформирования нагревается из-за трения смазки о шероховатую стенку трубы, а также вследствие накопления необратимых деформаций. Рассчитаны все параметры напряженно-деформированного состояния, в том числе значение нагружающего давления, при котором течение не выходит за слой смазки, вычислены распределения температур в материале и смазке, найдены законы продвижения упругопластических границ в смазке и основном материале. Основные параметры приведены на графиках.

Заключение

Основные результаты работы

В первой главе приведены соотношения неізотермической модели больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами. Необратимые деформации в материале могут накапливаться в результате процессов ползучести и пластического течения. Вязкие свойства материалов учитываются как на стадии пластического течения (вязкопластичность), так и на стадии, ему предшествующей и при разгрузке (ползучесть). Параметры ползучести, предел текучести и коэффициент динамической вязкости материала зависят от температуры.

Во второй главе получено решение связанной краевой задачи теории больших упругопластических деформаций о неізотермическом деформировании пробки конечной длины в круглой недеформируемой трубе под действием перепада давления, сначала возрастающего с течением времени, затем постоянного и далее убывающего до нуля. Необратимые деформации в материале накапливаются в результате процессов ползучести и вязкопластического течения. Разогрев материала происходит только за счет процессов необратимого деформирования, так как материал пробки имеет жесткое сцепление со стенками трубы, то есть отсутствует трение материала о границу, и нет дополнительного притока тепла извне. Изучены процессы ползучести и вязкопластического течения при возрастающем и постоянном перепаде давления, торможение течения и разгрузка среды при убывающем давлении, а также остывание материала после полного снятия механической нагрузки.

В третьей главе получено решение неізотермической связанной краевой задачи теории больших упругопластических деформаций о продавливании пробки конечной длины по круглой недеформируемой трубе под действием изменяющегося перепада давления с учетом трения материала о граничную шероховатую поверхность трубы, которое вызывает его разогрев.

Также изменение температуры материала происходит за счет процессов необратимого деформирования. Необратимые деформации накапливаются в материале пробки с начала процесса деформирования и могут быть как деформациями ползучести, так и пластическими деформациями. Рассмотрены процесс ползучести материала при возрастающем перепаде давления, возникновение и развитие вязкопластического течения при возрастающем, постоянном и уменьшающемся перепаде давления, торможение течения при дальнейшем уменьшении выдавливающего усилия, разгрузка и остывание материала после полного снятия нагружающего усилия. Рассчитаны температура и параметры напряженно-деформированного состояния на каждом этапе нагружения, установлены закономерности продвижения упругопластических границ по деформируемому материалу, определены остаточные деформации и напряжения.

В четвертой главе получено решение неизотермической краевой задачи о деформировании материала в жесткой круглой трубе при наличии слоя смазки. Деформирование и продвижение материала и смазки происходит вследствие приложения переменного перепада давления. Трение о трубу вызывает разогрев материала смазки и основного материала. Разогрев материалов также происходит в процессе накопления ими пластических деформаций. Основным материал и смазка обладают упругими, вязкими и пластическими свойствами, а также имеют разные значения упругих модулей, предела текучести и коэффициента вязкости. Рассмотрены обратимое деформирование, возникновение и развитие вязкопластического течения в слое смазки и распространение течения в основной материал. Рассчитаны температура и параметры напряженно-деформированного состояния на каждом этапе нагружения, определены остаточные деформации и напряжения.

Во всех перечисленных задачах для решения полученных систем дифференциальных уравнений в частных производных на основе классического конечно-разностного метода были разработаны численные схемы для неравномерных сеток с неизвестными движущимися

упругопластическими границами. Данные схемы позволяют получить распределения необратимых деформаций в областях вязкоупругого деформирования, в областях течения и разгрузки, а также положение неизвестных упругопластических границ на каждом шаге по времени. Сходимость схем проверялась прогонами модели на сужающихся сетках.

Список литературы

1. Аннин Б.Д., Коробейников С.Н. Допустимые формы упругих законов деформирования в определяющих соотношениях упругопластичности // СибЖИМ. 1998. Т. 1, № 1. С. 21-34.
2. Аннин Б.Д., Олейников А.И., Бормотин К.С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 155-165.
3. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука. 1983. 336 с.
4. Арутюнян Н.Х., Радаев Ю.Н. Упругопластическое кручение цилиндрического стержня при конечных деформациях // ПММ. 1989. Т. 53, № 6. С. 1014-1022.
5. Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие деформации и разогрев упруговязкопластического материала в цилиндрическом вискозиметре // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 3. С. 97-109. doi [10.31857/S0572329922030035](https://doi.org/10.31857/S0572329922030035)
6. Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // ДАН. 2016. Т. 470, № 3. С. 275-278.
7. Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. К расчетам больших неизотермических деформаций упруговязкопластических материалов // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 5. С. 638-653.
8. Бегун А.С., Ковтанюк Л.В. Вискозиметрическое течение упруговязкопластического материала при его нагреве вследствие пристенного трения // ПМТФ. 2021. № 5. С. 89 – 99. DOI: 10.15372/PMTF20210509
9. Бегун А.С., Ковтанюк Л.В., Лемза А.О. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования // Известия РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 103-112.

10. Бегун А.С., Ковтанюк Л.В., Лемза А.О. Моделирование процесса производства больших вискозиметрических деформаций вязкоупругого материала при его одностороннем проскальзывании // Ученые записки КнаГТУ. № IV – 1 (36). 2018. «Науки о природе и технике», с. 64 -74.
11. Бегун А.С., Ковтанюк Л.В., Лемза А.О. Creep and Stress Relaxation in the Case of Loading and Unloading of a Cylindrical Layer with Allowance for the Development and Deceleration of a Viscoplastic Flow // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2019. Vol. 60.No. 4.pp. 748–757. DOI: 10.1134/S0021894419040205.
12. Белых С.В., Бормотин К.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Прокудин А.Н. О больших изотермических деформациях материала с упругими, вязкими и пластическими свойствами // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: механика предельного состояния. 2014. Т. 22, № 4. С. 144-156.
13. Белых С.В., Станкевич А.В., Кривенок А.А., Перевалов А.А. Контроль геометрии и доработка программ для ЧПУ в целях повышения точности изготовления длинномерных деталей из профилей // Авиационная промышленность. 2009. № 2. С. 47-50.
14. Бернштейн М.Л., Займовский В. А, Капуткина Л. М. Термомеханическая обработка стали. М.: Металлургия, 1983.
15. Бобрук Е.В., Семенова И.П., Валиев Р.З. Современные методы деформационно-термической обработки: от традиционных материалов до наноструктурных. Учебное пособие. — Уфа: Уфимский государственный авиационный технический университет, 2015. — 112 с.
16. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир. 1986. 360 с.
17. Бормотин К.С. Интерактивный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53, № 12. С. 145-153.

18. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199-201.
19. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука. 2013. 312 с.
20. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Об одном аналитическом решении в теории больших упруговязкопластических деформаций // Известия РАН. МТТ. 2007. № 4. С. 72-77.
21. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мазелис А.Л. Продавливание упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями // ПММ. 2006. Т. 70, № 3. С. 481-489.
22. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Движение упруговязкопластической среды в круглой трубе при ее нагреве за счет пристеночного трения // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 2. С. 265-275.
23. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Деформирование и разогрев упруговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счет изменяющегося перепада давления // Известия РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 6-18.
24. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления // Доклады Академии наук. 2015. Т. 464, № 3. С. 284 – 287.
25. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Развитие и торможение вязкопластического течения в слое в условиях его нагрева за счет трения о шероховатую плоскость // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 4. С. 101 – 111.
26. Буренин А.А., Устинова А.С. Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика и разгрузки // В сб.: Успехи механики сплошных сред. К 70-летию В.А. Левина. Владивосток: Дальнаука. 2009. С. 91-102.

27. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука. 1998. 528 с.
28. Быковцев Г.И., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // ДАН. 1990. Т. 11, № 1. С. 59-62.
29. Вдовин С.И. Пружинение заготовок при изгибе с одновременным растяжением. М.: Машиностроение. 1988. 160 с.
30. Галимзянова К.Н., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. О различиях в учёте вязкости при расчётах больших упруговязкопластических деформаций в полом шаре // Ученые записки КнаГТУ. № II - 1(34). 2018. «Науки о природе и технике», с. 35 – 41.
31. Герасименко Е.А., Ковтанюк Л.В., Буренин А.А. Одномерное взаимодействие цилиндрической волны разгрузки с упругопластической границей // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 2. С. 149-159.
32. Голованов А.И., Султанов Л.У. Численные исследования больших упругопластических деформаций трехмерных тел деформаций // Прикладная механика. Киев. 2005. Т. 41, № 6. С. 36-43.
33. Горев Б.В., Раевская Г.А., Соснин О.В. К вопросу использования ползучести в технологии формирования изделий // Сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: ИГ СО АН СССР 1977. Т. 38, вып. 30. С. 141-145.
34. Горелов В.И. Исследование влияния высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов // ПМТФ. 1984. № 5. С. 157-158.
35. Григорьев С.Н., Верещака А.А., Волосова М.А. Современные многослойно-композиционные наноструктурированные покрытия для твердосплавного и керамического режущего инструмента. М.: МГТУ «СТАНКИН», 2020. 164 с.
36. Горелов В.И., Зорихин В.Н. Технология упрочнения контейнеров для прессования металлов // Технология двигателестроения. 1984. № 11-12. С. 40-43.
37. Дель Г.Д. Технологическая механика. М.: Машиностроение. 1978. 174 с.

38. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука. 1978. 352 с.
39. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. – М.: Наука. – 1966. – 232 с.
40. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука. – 1971. – 232 с.
41. Ильюшин А.А. О постулате пластичности // Прикл. математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 3. – С. 503–507.
42. Ильюшин А.А. Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН УССР. – 1961. – С. 3– 29.
43. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Изд-во АН СССР. – 1963. – 272 с.
44. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.; Л.: ГИТТЛ. – 1948. – 376 с.
45. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основа математической теории термовязкоупругости. М.: Наука. 1970. 280 с.
46. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит. 2001. 704 с.
47. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз. 1960. 455 с.
48. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1979. 208 с.
49. Когаев В.П., Дроздов Ю.М. Прочность и износостойкость деталей машин. - Г.: Металлургия, 1972. - 192 с.
50. Кондауров В.И. Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 1. С. 128-133.
51. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2000. 262 с.
52. Крагелский И.В. Трение и износ. - Г.: Машиностроение, 1968. - 480с.
53. Криони Н.К., Мигранов М.Ш., Шехтман С.Р. Наноструктурированные вакуумные ионно-плазменные покрытия. М.: Инновационное машиностроение, 2017. 367 с.
54. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир. 1974. 338 с.

55. Крупский Р.Ф., Кривенок А.А., Станкевич А.В., Феоктистов С.И., Белых С.В. Формообразование профильных заготовок с помощью листового обтяжного пресса // Ученые записки КНАГТУ. 2013. № 2. С. 9-15.
56. Ковтанюк Л.В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // ДВМЖ. Владивосток: Дальнаука. 2004. Т. 5, № 1. С. 107-117.
57. Ковтанюк Л.В. О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // ДАН. 2005. Т. 400, № 6. С. 764-767.
58. Ковтанюк Л.В. О конечном продвижении упруговязкопластической пробки по цилиндрической трубе // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, серия: механика предельного состояния. 2006. № 1. С. 68-75.
59. Ковтанюк Л.В., Мурашкин Е.В., Роговой А.А. О динамике микропоры в несжимаемой вязкоупругопластической среде в условиях активного нагружения и последующей разгрузке // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6, № 2. С. 176-186.
60. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Об изменяющихся механизмах производства больших необратимых деформаций в условиях прямолинейного движения в цилиндрическом слое // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2020. № 2. С. 10-21. DOI: 10.31857/S0572329920020099.
61. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. О теплотворной способности необратимого деформирования материала пробки в круглой трубе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1 (59). С. 88-100. DOI: 10.37972/c hg ru .2 02 4. 59 .1 .0 07
62. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. Производство тепла за счет деформаций ползучести и пристеночного вязкопластического течения в материале пробки в круглой трубе под действием переменного перепада давления // Известия РАН. Механика твердого тела. 2024. № 5. С. 84-101.

63. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. Деформирование и разогрев за счёт приповерхностного трения материала пробки в круглой трубе при её движении под действием изменяющегося перепада давления // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2024. № 7 (79). С. 68-76.
64. Ковтанюк Л.В., Шитиков А.В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестник ДВО РАН. 2006. № 4. С. 87-93.
65. Колмогоров В.Л. Механика обработки металлов давлением. М.: Машиностроение. 1986. 688 с.
66. Копыский Б.Д. Применение явления ползучести при обработке давлением // Вестник машиностроения. 1997. № 9. С. 76-78.
67. Крупский Р.Ф., Кривенок А.А. Перспективная технология изготовления деталей силового набора летательных аппаратов с использованием эффекта ползучести материала // В сб. Перспективные технологии самолетостроения в России и мире. Новосибирск: Изд-во СибНИА. 2011. С. 82-85.
68. Крупский Р.Ф., Кривенок А.А. Использование эффекта ползучести материала в технологии изготовления элементов шпангоутов // Материалы III-го всероссийского конкурса молодых ученых: Итоги диссертационных исследований. Том 1. М.: Наука. 2011. С. 56-63.
69. Куликов Р. Г. Численное исследование термомеханического поведения кристаллизующейся полимерной среды с учетом больших деформаций / Р. Г. Куликов, Т. Г. Куликова, О. Ю. Сметанников // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2018. – № 1. – С. 18-28.
70. Левин В. А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах/ В. А. Левин. – М. :Наука, 1999. – 223 с.
71. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Науковадумка. 1987. 232 с.
72. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: Изд-во МГУ. 2007. 264 с.

73. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит. 2016. 489 с.
74. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.
75. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение. 1975. 278 с.
76. Малинин Н.А. Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение. 1986. 216 с.
77. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханические модели необратимого конечного деформирования анизотропных тел // Проблемы прочности. 2002. № 6. С. 5-13.
78. Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука. 1981. 344 с.
79. Мосолов П.П., Мясников В.П. Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических сред. М.: Изд-во МГУ. 1971. 163 с.
80. Мулюков В.В., Трусов П.В. Постановка задачи геометрически нелинейной теории пластичности в терминах отсчетной конфигурации // Известия РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 71-78.
81. Мясников В.П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды // ПМТФ. 1961. № 2. С. 79-86.
82. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестник ДВО РАН Владивосток: Дальнаука. 1996. № 4. С. 8-13.
83. Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: Изд-во НГАСУ. 1997. 278 с.
84. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
85. Новокшанов Р.С., Роговой А.А. О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Известия РАН. МТТ. 2002. № 4. С. 77-95.
86. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластических сред. М.: Изд-во МГУ. 1970. 415 с.

87. Олейников А.И., Коробейников С.Н., Бормотин К.С. Влияние липа конечно-элементного представления при моделировании панелей из упругопластического материала // Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т. 1, № 2. С. 63-73.
88. Олейников А.И., Пекарш А.И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей. М.: Эком. 2009. 109 с.
89. Поздеев Н.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В. Остаточные напряжения: теория и приложения. М.: Наука. 1982. 112 с.
90. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука. 1986. 232 с.
91. Попов Е.А. Основы теории листовой штамповки. М.: Машиностроение. 1977. 278 с.
92. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1979. 744 с.
93. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука. 1966. 752 с.
94. Радченко В.П., Саушкин М.Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. М.: Машиностроение. 2005. 226 с.
95. Ржаницин А.Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат. 1968. 416 с.
96. Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 138-149.
97. Роговой, А. А. Термоупругопластические процессы с конечными деформациями / А. А. Роговой // Вычислительная механика сплошных сред. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 373-383.
98. Рудской А.И. Научные основы управления структурой и свойствами сталей в процессах термомеханической обработки. Монография. — М: РАН, 2019. — 276 с.
99. Самарский А.А. Теория разностных схем. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. –1989. – 616 с.
100. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школы. 1969. 608 с.

101. Станкевич А.В., Феоктистов С.И., Белых С.В., Кривенок А.А., Перевалов А.А. Аппроксимация геометрии контура дугами при контроле точности изготовления деталей летательных аппаратов // Ученые записки КНАГТУ. 2010. № 1. С. 11-19.
102. Султанов А.У. Исследование конечных упругопластических деформаций. Кинематика среды и определяющие соотношения // Ученые записки КГУ. Серия физ.-мат. науки. 2015. Т. 157, кн. 4. – С. 158-165.
103. Трусов П.В., Швейкин А.И., Янц А.Ю. О разложении движения, независимых от выбора системы отсчета производных и определяющих соотношениях при больших градиентах перемещений: взгляд с позиций многоуровневого моделирования // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19. № 2. С. 47-65.
104. Феоктистов С.И. Автоматизация проектирования технологических процессов и оснастки заготовительно-штамповочного производства авиационной промышленности. Владивосток: Дальнаука. 184 с.
105. Чернышов А.Д. Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Известия РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 120-128.
106. Abatour, M., Ammar, K., Forest, S. *et al.* A generic formulation of anisotropic thermo-elastoviscoplasticity at finite deformations for finite element codes. *Comput Mech* (2024). <https://doi.org/10.1007/s00466-024-02543-8>
107. Alain I. The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence / I. Alain // Journal of Materials Science. – 1998. – V. 33. – P. 3201–3206.
108. Andrade-Campos, A. Numerical analysis of large deformation processes at elevated temperatures / A. Andrade-Campos, L. F. Menezes, F. Teixeira-Dias // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2006. – Vol. 195. – P. 3947-3959.

109. Arman Bakhtiyari, Mahdi Baniasadi, Mostafa Baghani, Development of a large strain formulation for multiple shape-memory-effect of polymers under bending, International Journal of Mechanical Sciences, Volume 204, 2021, 106560, ISSN 0020-7403, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106560>.
110. Begun A.S, Burenin A.A, Kovtanyuk L.V., Lemza A.O. On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // Arch. Appl. Mech. 2020. V 90. P. 829–845. doi: 10.1007/s00419-019-01641-x
111. Bruhns, O.T., Meyers, A., Xiao, H. Elastoplasticity beyond small deformations. Acta Mech. 182(1-2), 31-111 (2006).<https://doi.org/10.1007/s00707-005-0282-7>
112. Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L Thermomechanical loading of an elastoviscoplastic heavy layer held by an inclined plane // Continuum Mechanics and Thermodynamics. Volume 35, issue 4, July 2023. Pages 1325-1341. <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01131-6>
113. Byeonghyeon Goh, H. Alicia Kim, Hayoung Chung, Investigation of thermoelastic compliances considering finite strain, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 410, 2023, 116011, ISSN 0045-7825, <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116011>.
114. Chao Ling, Esteban P. Busso, Zian Wang, Jun Wei, Dongfeng Li, A finite deformation formulation for amorphous glassy polymers under moderate and impact strain rates: Application to adhesive films, International Journal of Solids and Structures, Volume 296, 2024, 112822, ISSN 0020-7683, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2024.112822>.
115. Chunwei Xu. Analytical modeling of thermomechanical stresses in short hyperelastic tubes under axial and torsional loading Published 14 January 2025 • © 2025 IOP Publishing Ltd. All rights, including for text and data mining, AI training, and similar technologies, are reserved. [Physica Scripta, Volume 100, Number 2](#) Citation Chunwei Xu 2025 *Phys. Scr.* **100** 025219 DOI 10.1088/1402-4896/ada402

116. Firat, M., Kaftanoglu, B., Eser, O. Sheet metal forming analyses with an emphasis on the springback deformation. *J. Mater. Process. Technol.* 196(1-3), 135-148 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2007.05.029>
117. Freed A.D., Walker K.P. Viscoplasticity with and plasticity bounds // *Int. J. of Plasticity*. 1993. V. 9, N 2. P. 213-242.
118. Hill, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids* 6(3), 236-249 (1958). [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(58\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(58)90029-2)
119. Hyun Chul Yoon, Karthik K. Vasudeva, S.M. Mallikarjunaiah, Finite element model for a coupled thermo-mechanical system in nonlinear strain-limiting thermoelastic body, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 108, 2022, 106262, ISSN 1007-5704,
120. Ibrahimbegovic A., ChorfiLotfi. Covariant principal axis formulation of associated coupled thermoplasticity at finite strains its numerical implementation // *Int. J. Sol. and Struct.* 2002. V. 39, № 2. P. 499-528.
121. Idesman A. V. Finite element procedure for solving contact thermoelastoplastic problems at large strains, normal and high pressures / A. V. Idesman, V. I. Levitas // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1995. – Vol. 126. – P. 39-66.
122. Jianping Gu, Changchun Wang, Hao Zeng, Hao Duan, Mengqi Wan and Huiyu Sun. A thermo-mechanical constitutive model for triple-shape and two-way shape memory polymers // *Smart Materials and Structures*. V. 33. N. 6. 2024. P. 065034. DOI 10.1088/1361-665X/ad4cc2
123. Jijun Luo, Shengbin Wu, Suxia Hou, Zohre Moradi, Mohammad Habibi, Mohamed Amine Khadimallah, Thermally nonlinear thermoelasticity of a one-dimensional finite domain based on the finite strain concept, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Volume 96, 2022, 104726, ISSN 0997-7538, <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104726>.

124. Johlitz M. Dissipative heating of elastomers : a new modelling approach based on finite and coupled thermomechanics / M. Johlitz, B. Dippel, A. Lion // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. – 2016. – Vol. 28, Iss. 4. – P. 1111-1125.
125. Khan A.S., Huang S. *Continuum theory of plasticity*. John Wiley & Sons, New York. 1995.
126. Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L. Mathematical Modelling of the Production Process of Irreversible Strains Under the Heating and Cooling of a Flat Heavy Layer on an Inclined Surface // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, Vol. 42, No. 8, pp. 1998–2005. DOI: 10.1134/S1995080221080163
127. Kunzemann M, Doppelbauer LK, Preuer R, Pechstein A. Thermodynamically consistent modeling of viscoelastic solids under finite strain. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2024;0(0). doi:[10.1177/1045389X241283074](https://doi.org/10.1177/1045389X241283074)
128. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // *Trans ASME: J. Appl. Mech.* 1969. T. 36, № 1. P. 1-6.
129. Liang, Z., Li, J., Chen, K. *et al.* Multiple relaxation mechanism-based thermo-mechanical constitutive model describing cyclic shape memory effect of shape memory polyurethane. *Acta Mech. Sin.* **40**, 423347 (2024). <https://doi.org/10.1007/s10409-023-23347-x>
130. Lion, A. Constitutive modelling in finite thermoviscoplasticity : a physical approach based on nonlinear rheological elements / A. Lion // *International Journal of Plasticity*. – 2000. – Vol. 16, Iss. 5. – P. 469-494.
131. Mehdi Alimoradzadeh, Francesco Tornabene, Sattar Mohammadi Esfarjani, Rossana Dimitri, Finite strain-based theory for the superharmonic and subharmonic resonance of beams resting on a nonlinear viscoelastic foundation in thermal conditions, and subjected to a moving mass loading, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 148, 2023, 104271, ISSN 0020-7462, <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104271>.

132. Miehe, C. Coupled thermoviscoplasticity of glassy polymers in the logarithmic strain space based on the free volume theory / C. Miehe, J. M. Diez, S. Göktepe, L.-M. Schänzel // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – Vol. 48. – P. 1799-1817.
133. Naghdi P.M. A critical review of the state of finite plasticity // J. Appl. Phys. 1990. V. 41. P. 315-394.
134. Norton P. The creep of steel at high temperature. N.-Y.: Mc Graw-Hill. 1929. 110 c.
135. Paul Bouteiller, Complete finite-strain isotropic thermo-elasticity, European Journal of Mechanics - A/Solids, Volume 100, 2023, 105017, ISSN 0997-7538, <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105017>.
136. Pietryga, M.P., Reese, S., Vladimirov, I.N.: Anisotropic finite elastoplasticity with nonlinear kinematic and isotropic hardening and application to sheet metal forming. Int. J. Plasticity 26(5), 659-687 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2009.09.008>
137. Pla F. Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio / F. Pla, A. M. Mancho, H. Herrero // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2009. – V. 238. – I. 5. – P. 572–580.
138. Ponthot J.P. Unified stress update algorithms for numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes // Int. J. of Plasticity. 2002. V. 18. – P. 91-126.
139. Reuvers, MC., Kulkarni, S., Boes, B. *et al.* A thermo-mechanically coupled constitutive model for semi-crystalline polymers at finite strains: Mechanical and thermal characterization of polyamide 6 blends. *Continuum Mech. Thermodyn.* **36**, 657–698 (2024). <https://doi.org/10.1007/s00161-024-01288-2>
140. Schmidt, A., Gierden, C., Waimann, J., Svendsen, B. and Reese, S. (2023), Two-scale FE-FFT-based thermo-mechanically coupled modeling of elasto-viscoplastic polycrystalline materials at finite strains. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 22: e202200172. <https://doi.org/10.1002/pamm.202200172>

141. S. Felder, N. Kopic-Osmanovic, H. Holthausen, T. Brepols, S. Reese, Thermo-mechanically coupled gradient-extended damage-plasticity modeling of metallic materials at finite strains, *International Journal of Plasticity*, Volume 148, 2022, 103142, ISSN 0749-6419, <https://doi.org/10.1016/j.iplas.2021.103142>.
142. Shutov A.V., Ihlemann J. // Analysis of some basic approacher to finite strain elasto-plasticity in view of reference change // *Int. J. of Plasticity*. 2014. V. 63. P. 183-197.
143. Shutov A.V., Larichkin A. Yu., Shutov V.A. Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient // *ZAMM*. 2017. V. 97, № 9. P. 1083-1099.
144. Shutov A.V., Panhans S., Kreibig. R. A. phenomenological model of finite strain viscoplasticity with distortional hardening // *ZAMM*. 2011. V. 91, № 8. – P. 653-680.
145. Simo, J. C. Associative coupled thermoplasticity at finite strains : formulation, numerical analysis and implementation / J. C. Simo, C. Miehe // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1992. Vol. 98, Iss. 1. – P. 41-104.
146. Simo, J.C., Pister, K.S.: Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 46(2), 201-215 (1984). [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(84\)90062-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(84)90062-8)
147. Stickforth J. O stress relaxation, creep and plastic flow // *Int. J. of Plasticity*. 1986. V. 2, N 4. P. 347-357.
148. Sultanov L.U. Analysis of finite elasto-plastic strains: integration algorithm and numerical examples // *Lobachevskii J. of Math.* 2018. V. 39, № 9. P. 1396-1401.
149. Surana, K. and Mathi, S. (2025) Finite Deformation, Finite Strain Nonlinear Micropolar NCCT for Thermoviscoelastic Solids with Rheology. *Applied Mathematics*, **16**, 143-168. doi: [10.4236/am.2025.161006](https://doi.org/10.4236/am.2025.161006).
150. Truesdell, C.: Hypo-elasticity. *J. Rational. Mech. Anal.* 4, 83-133 (1955)

151. Vaghefi, R. Analysis of thermo-elastoplastic bending behavior of FG skew sandwich plates on elastic foundation using an enhanced meshless radial basis reproducing kernel particle approach. *Arch Appl Mech* **94**, 3195–3227 (2024). <https://doi.org/10.1007/s00419-024-02666-7>
152. Verlinden B., Driver J., Samajdar I. Doherty R.D. Thermo-Mechanical Processing of Metallic Materials. Amsterdam: Elsevier, 2007. - 528 p.
153. Weisło B., Mucha M., Pamin J. Internal heat sources in large strain thermo-elasto-plasticity – theory and finite element simulations // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. V. 62(2). 2024. Pp. 293-306. DOI: <https://doi.org/10.15632/jtam-pl/185614>
154. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. Elastoplasticity beyond small deformation // *Acta Mech*. 2006. V. 182, № 1. P. 31-111.
155. Xiao, H. Thermodynamic laws and consistent Eulerian formulation of finite elastoplasticity with thermal effects / H. Xiao, O. T. Bruhns, A. Meyers // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2007. – Vol. 55. – P. 338-365.
156. Xin Yao, Handong Shao, Dongyun Wang, Xiaofeng Wei, A general thermo-elastoplastic constitutive theory for thermal-sensitive materials with temperature-dependent properties, *Applied Mathematical Modelling*, Volume 132, 2024, Pages 319-341, ISSN 0307-904X, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.04.038>.
157. Yarali, E., Noroozi, R., Moallemi, A., Taheri, A., & Baghani, M. (2020). Developing an analytical solution for a thermally tunable soft actuator under finite bending. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 50(5), 1793–1807. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1763182>
158. Yang Liu, An Li, Peichen Wu, Penglin Li, Jian-Hua Yin, and Jun-Jie Zheng. 2025. Fully coupled finite strain consolidation analysis for soft clay treated by prefabricated horizontal drain with vacuum and heat preloading. *Canadian Geotechnical Journal*. 62: 1-19. <https://doi.org/10.1139/cgj-2024-0222>

159. Yang Wang, Jinhui Yang, Zohre Moradi, Maryam Safa, Mohamed Amine Khadimallah, Nonlinear dynamic analysis of thermally deformed beams subjected to uniform loading resting on nonlinear viscoelastic foundation, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Volume 95, 2022, 104638, ISSN 0997-7538, <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104638>.
160. Yongbin Wang, Huadong Yong, Youhe Zhou, Study of thermo-elasto-plastic behaviors of twisted multi-filamentary superconducting strands and structures using incremental Mori-Tanaka method, *Cryogenics*, Volume 138, 2024, 103804, ISSN 0011-2275, <https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2024.103804>.