

На правах рукописи



Дац Евгений Павлович

**Неустановившиеся температурные напряжения в  
условиях зависимости предела текучести от  
температуры**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Комсомольск-на-Амуре – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования "Владивостокский государственный университет экономики и сервиса".

Научный руководитель: член-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор,  
директор ФГБУН Институт машиноведения  
и металлургии ДВО РАН  
**Буренин Анатолий Александрович**  
(г. Комсомольск-на-Амуре)

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., профессор,  
заведующий кафедрой программного обеспе-  
чения и администрирования информаци-  
онных систем ФГБОУ ВО "Воронежский  
государственный университет"  
**Артемов Михаил Анатольевич**  
(г. Воронеж)

к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной ма-  
тематики  
ФГБОУ ВО "Комсомольский-на-Амуре го-  
сударственный технический университет"  
**Лошманов Антон Юрьевич**  
(г. Комсомольск-на-Амуре)

Ведущая организация: ФГБУН Институт проблем механики им. А.  
Ю. Ишлинского РАН (г. Москва)

Защита состоится 12 мая 2017 г. в 13:00 ч. на заседании диссертационного сове-  
та Д 212.092.07, созданного на базе ФГБОУ ВО "Комсомольский-на-Амуре го-  
сударственный технический университет по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-  
Амуре, просп. Ленина, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО "Комсомоль-  
ский-на-Амуре государственный технический университет"  
и на сайте <http://www.knastu.ru>

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
к. ф.-м. н., доцент



Григорьева А. Л.

## Общая характеристика работы

### **Актуальность темы исследования.**

Температурные напряжения сопровождают большинство технологических операций обработки металлов давлением и изготовления изделий из них. В ряду таких операций следует выделить такие, где температурные напряжения задают существо процесса (сварка, высокотемпературная штамповка, сборка посадкой и др.). Насущная потребность инженерной практики по расчету подобных операций с необходимостью требует разработки соответствующих математических моделей и методов расчета в рамках этих моделей, которые способны были бы прогнозировать результаты таких операций. Поэтому в прошлом столетии сформировалось научное направление, называемое термопластичностью. Одним из основных разделов данного направления в механике оказалась теория температурных напряжений. Были выполнены блестящие работы как в основании теории, так и в ее развитии, предложены приемы интегрирования систем уравнений в частных производных для целого ряда модельных задач как в случае связанной теории, так и несвязанной (теории температурных напряжений). Дальнейшее развитие теории сдерживалось вычислительными возможностями математического аппарата. Такие возможности были предоставлены к концу столетия развитием вычислительной техники и методов вычислений. Именно с 90-х годов прошлого столетия интерес к решению задач термопластичности получил новый импульс, связанный с постоянной потребностью производственной практики в совершенствовании технологий и новыми вычислительными возможностями. И все же в тех случаях, когда процесс определяется существенными изменениями в температуре, разработанных комплексов программ, основанных на подходах метода конечных элементов и метода конечных разностей оказалось не достаточно как раз из-за существенной нестационарности тепловых полей. Тем более, что деформирование в условиях изменяющихся термомеханических воздействий несет в себе такие качественные особенности, связанные с возникновением и исчезновением областей пластического течения, движением упругопластических границ, которые в квазистационарных случаях не наблюдаются. Более того, при повышенных температурах предел текучести материала существенно снижается и потому данное обстоятельство необходимо учитывать. Следовательно, задача оценить качественные особенности эволюции температурных напряжений и формируемое таким способом поле остаточных напряжений оказывается актуальной задачей. Этой задаче посвящается настоящая работа.

**Степень разработанности темы исследования.** Как уже отмечалось, развитие теории термопластичности и теории температурных напряжений в частности диктуется настоятельными запросами технологической практики. Но в тоже время развитие данной теории задается логикой развития фундаментальной механики деформирования. Поэтому это направление механики всегда оставалось в центре внимания исследователей. Свои работы теории термопластичности посвятили выдающиеся механики прошлого столетия: А. А. Ильюшин, Ю. Н. Ра-

ботнов, Ю. Н. Шевченко, А. А. И. А. Биргер, Р. Хилл, В. Прагер, Д. Бленд, Г. Паркус и многие другие. Возможности используемого ими математического аппарата заставили остановиться только на решении простейших одномерных задач. И только открывшиеся в последнее время вычислительные возможности позволили исследовать ряд новых практических задач. В частности в числе таких задач оказались и задачи посадки цилиндрических деталей в условиях плоского напряженного состояния. Главным образом, методом расчетов оказались программные реализации, основанные на методе конечных элементов. При отказе от гипотезы плоского напряженного состояния, разработанный подход встречает трудности, связанные с необходимостью отслеживания моментов зарождения областей пластического течения и положения упругопластических границ и границ, разделяющих области пластического течения. Последние существенно зависят от выбора условия пластичности и характера зависимости предела текучести от температуры. До настоящего времени времени здесь больше вопросов, чем ответов. Отмеченное позволяет сформулировать цель и определить задачи предпринятого исследования.

#### **Цель и задачи диссертационной работы:**

Цель предприняемого диссертационного исследования заключается в развитии теории температурных напряжений в упругопластических телах путем постановки и решения ряда новых модельных задач теории и в обеспечении на такой основе расчетного прогнозирования изменений температурных напряжений в зависимости от особенностей эволюции областей пластического течения в условиях меняющихся термомеханических воздействий. Для обозначенной цели необходимо решить следующие задачи:

- осуществить постановки ряда краевых задач теории температурных напряжений с учетом зависимости предела текучести от температуры: о нестационарном нагреве сплошного и полого шара, о локальном нагреве бесконечной и ограниченной круглой пластины, о сборке конструкции "кольцо в кольце" способом горячей посадки, о неравномерном нагреве полого цилиндра, о сборке двухслойной трубы способом горячей посадки, об остывании прямоугольной в плане пластины;
- указать краевые условия на продвигающихся упругопластических границах как нагружающих, так и разгружающих; на продвигающихся границах в области пластического течения, разделяющих эту область на части, в которых течение подчинено разным системам уравнений в зависимости от принадлежности напряженных состояний различным участкам кусочно-линейных поверхностей нагружения;
- разработать алгоритм расчетов неустановившихся температурных напряжений, способный отслеживать места и моменты времени возникновения границ, меняющих характер деформирования в областях тел и конструк-

ций, позволяющий прогнозировать распределения остаточных напряжений;

- провести сравнение результатов расчетов, проведенных с использованием разных условий текучести (Условие Треска-Сан-Венана, Условие Ишлинского-Ивлева, Условие Губера-Мизеса);

**Научная новизна.** Научная новизна работы заключается в следующем:

- впервые получены решения, включая точные, ряда краевых задач теории температурных напряжений в упругопластических телах с учетом существенной зависимости предела текучести от температуры;
- указаны особенности формирования решений ряда модельных краевых задач, связанные с эволюцией обратимого деформирования и пластического течения в условиях неустановившихся температурных полей; при использовании кусочно-линейных условий пластичности продемонстрирована возможность разделения областей течения на части, в которых течение подчинено разным системам уравнений в зависимости от принадлежности напряжений различным граням или ребрам условий пластичности;
- в решениях некоторых задач теории температурных напряжений в упругопластических телах обнаружен эффект возникновения повторного пластического течения, обусловленный существенной зависимостью предела текучести от температуры;
- предложены алгоритмы расчетов полей температурных напряжений в упругопластических телах и сборках из них при нестационарных температурных воздействиях, предоставляющие возможность учесть появление, развитие и затухание различных областей пластического течения, включая прогнозирование итогового распределения остаточных напряжений.
- показано, что в некоторых случаях классические решения, полученные при постоянном пределе текучести, не могут быть обобщены на случай зависимости предела текучести от температуры.

**Теоретическая и практическая значимость.** Ряд результатов диссертации носит фундаментальный характер и служит развитию теории температурных напряжений в упругопластических телах в части качественных выводов об эволюции областей пластического течения. Они могут предсказать ряд постановочных аспектов задач теории в других геометрически более сложных случаях.

Результаты работы могут непосредственно использоваться в расчетном прогнозировании ряда технологических операций, одна из них, сборка конструкции способом горячей посадки, обсуждается в работе, другие (сварка, высокотемпературная штамповка порошковых материалов, локальная закалка конструкций и др.) моделироваться с использованием полученных результатов.

**Положения, выносимые на защиту:** На защиту выносятся :

- новые решения, включая точные, ряда краевых задач теории температурных напряжений в упругопластических телах;
- разработанные алгоритмы расчетов, позволяющие отслеживать возникновение, развитие и исчезновение областей пластического течения, появляющиеся при выполнении разных условий пластичности;
- результаты сравнения решений, различающихся выбором кусочно-линейных условий пластичности и (в отдельных случаях) их сравнение с решением, полученных в условиях выполнения гладкого условия пластичности Мизеса;
- сопоставление результатов некоторых из полученных решений с результатами решений тех же задач при постоянном пределе текучести;
- рекомендации, полученные в процессе решениям выбранного набора модельных краевых задач, к методике расчетного прогнозирования технологических операций, существо которых задается выраженной нестационарностью в тепловых процессах.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность результатов диссертации базируется на использовании классической математической модели упругопластического деформирования типа Прандтля-Рейса и корректном использовании соответствующего математического аппарата. Программы расчетов по предлагаемым алгоритмам основаны на выверенных процедурах вычисления и не содержат в себе недостаточно оттестированные модули. Неоднократные сравнения с известными решениями, полученными в условиях постоянства предела текучести и стационарности температурных полей, позволяют не сомневаться в правильности результатов расчетов.

Полученные в процессе работы над диссертацией результаты прошли апробацию на региональных, всероссийских и международных конференциях: Всероссийская конференция «Школа по фундаментальным основам моделирования обработки материалов» (Комсомольск-на-Амуре, 2010); Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова (Владивосток, 2010, 2012); Международная конференция, посвященная 100-летию Л. А. Галина (Москва, 2012); IX Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2013); Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным системам (Алушта, 2013); Международная конференция, приуроченная к 75-летию академика В.А. Левина «Успехи механики сплошных сред» (Владивосток, 2014); XIV Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015); IUTAM Symposium on Growing

solids (2015, Москва); World Congress on Engineering (2015, 2016, Лондон); IX Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (2016, Воронеж).

Кроме того, результаты работы докладывались на семинарах отдела механики деформируемого твердого тела Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 28 печатных работах, из них 9 статей в рецензируемых журналах из перечня ВАК [1–9], 18 публикаций в сборниках трудов конференций [10–21, 21–27], 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [28].

**Личный вклад автора.** Все основные результаты, составившие диссертацию, получены автором лично. Соавторы научных публикаций А.А. Буренин и Е.В. Мурашкин участвовали в постановке задач и обсуждении результатов, а все вычисления проведены автором. Соавтором публикаций А.В. Ткачевой были проведены соответствующие расчеты в задачах, поставленных автором в условиях совместного обсуждения выбираемой методики расчетов и оценки их результатов. Большинство подобных результатов расчетов не включалось в основной текст диссертации.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа включает в себя введение, 4 главы основного текста, заключение и список литературы из 101 наименования. Работа изложена на 150 страницах, содержит 48 рисунков.

## Содержание работы

**Во Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, рассмотрена степень разработанности темы исследования, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**В первой главе** содержатся основные модельные соотношения теории термоупругопластичности. В качестве модели деформирования изотропного материала рассматривается модель типа Прандтля-Рейса, предполагается, что возникающие за счет температурного поля деформации  $d_{ij}$  являются малыми и для них справедливо аддитивное разложение на термоупругие (обратимые)  $e_{ij}$  и пластические (необратимые)  $p_{ij}$  составляющие

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = e_{ij} + p_{ij}. \quad (1)$$

$u_i$  - компоненты вектора перемещений. Здесь и далее индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей пространственной координате. Зависимости между термоупругими деформациями и напряжениями задана

законом Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk} - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0))\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (2)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронеккера,  $\lambda$ ,  $\mu$  – параметры Ламе материала,  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения,  $T$  – текущая температура в точке среды,  $T_0$  – начальная температура среды.

Будем полагать, что материал деформируется в условиях медленного изменения внешних температурных условий. Скорости деформаций, возникающие при деформировании материала считаются малыми, что позволяет пренебречь функцией источника в уравнении теплопроводности и записать его в форме:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa T_{,ii} \quad (3)$$

где  $\kappa$  – коэффициент температуропроводности. Решение уравнения (3) с необходимыми начальными и граничными условиями позволяет определять поле температур независимо от напряженно-деформированного состояния материала. Таким образом решение задачи находится в рамках теории температурных напряжений.

Пренебрегая инерционными эффектами в процессе интенсивного теплового воздействия, и, полагая отсутствие массовых сил, для компонентов тензора напряжений будем иметь систему уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (4)$$

Соотношения (1), (2), (3), (4) позволяют определять термоупругое состояние материала. Очевидно, в условиях высоких температурных градиентов в совокупности с ограничениями на свободное тепловое расширение, в упругопластическом материале способны накапливаться необратимые деформации, учет которых необходим для прогнозирования формирующихся остаточных напряжений.

Для определения соотношений, позволяющих учесть процессы необратимого деформирования, воспользуемся принципом максимума Мизеса, согласно которому из всех возможных процессов пластического деформирования осуществляется тот, в котором мощность диссипации механической энергии максимальна. В таком случае поверхность нагружения (определенная комбинация значений  $\sigma_{ij}$ ) оказывается пластическим потенциалом и следует ассоциированный закон пластического течения

$$dp_{ij} = d\xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad d\xi > 0, \quad (5)$$

где  $dp_{ij}$  – приращение пластической деформации.

В (5) учитывается, что поверхность  $f(\sigma_{ij})$  является неизменной в пространстве напряжений, т.е. не зависит от истории деформирования и скорости деформирования. Данные условия задают пластическое течение, которое называется

идеальным пластическим течением. Если поверхность нагружения имеет особую линию, образуемую пересечением поверхностей (ребро)

$$\begin{cases} f_1(\sigma_{ij}) = 0, \\ f_2(\sigma_{ij}) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

то ассоциированный закон пластического течения следует записать в форме

$$dp_{ij} = d\xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + \xi_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7)$$

В простейшем случае в качестве поверхности нагружения можно принять одно из следующих условий пластичности: условие максимального касательного напряжения (призма Треска):

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k(T); \quad (8)$$

условие максимального приведенного напряжения (призма Ивлева–Ишлинского):

$$\max |\sigma_i - \sigma| = \frac{4}{3}k(T); \quad (9)$$

условие максимального октаэдрического напряжения (цилиндр Мизеса):

$$\tau_{ij}\tau_{ji} = \frac{8}{3}k^2(T). \quad (10)$$

В условиях (8), (8), (8)  $\sigma_i$  – главные напряжения,  $\sigma = (1/3)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ ,  $\tau_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk}\delta_{ij}$ ,  $k(T)$  – предел текучести материала, значение которого может существенно зависеть от уровня температуры.

Если в качестве поверхности нагружения выбрать условие пластичности Мизеса (10), то для напряжений получим зависимости:

$$\sigma_{ij} = (Lu_{k,k} - m(T - T_0))\delta_{ij} + M(u_{i,j} + u_{j,i} - 2p'_{ij}), \quad (11)$$

где  $L(d\xi) = \lambda + \frac{4\mu^2 d\xi}{(1 + 6\mu d\xi)}$ ,  $M(d\xi) = \frac{\mu}{(1 + 6\mu d\xi)}$ ,  $m = \alpha(3\lambda + 2\mu)$ ,  $p'_{ij}$  – остаточные пластические деформации.

Подставив (11) в уравнения равновесия (4), запишем систему из трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & (L + M)u_{k,ki} + u_{k,k}L_{,i} - mT_{,i} + \\ & + M(u_{i,kk} - 2p'_{ik,k}) + M_{,k}(u_{i,k} + u_{k,i} - 2p'_{ik}) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Добавив к уравнениям (12) условие пластичности (10), получим замкнутую систему для определения неизвестных величин  $u_i$ ,  $d\xi$ .

**Во второй главе диссертации** рассмотрены задачи расчета напряженно-деформированного состояния упругопластического материала в условиях сферической симметрии.

**В п.2.1** решена задача расчета остаточных напряжений, формирующихся в сплошном упругопластическом шаре радиуса  $R$  при быстро увеличивающейся температуре на его поверхности по закону

$$\frac{T(R, t) - T_0}{T_m - T_0} = (1 - \exp(-xt)), \quad (13)$$

где  $T_m$  – максимальная температура нагрева,  $x$  – коэффициент, задающий скорость нагрева.

Пластическое течение материала шара начинается в момент выполнения условия пластичности  $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k(r, t)$  на его поверхности. Для предела текучести принята линейная зависимость от теплового расширения  $k(r, t) = k_0(1 - \beta\Delta(r, t))$ ,  $k_0$  – предел текучести при начальной температуре.  $\beta$  – параметр материала, задающий степень падения предела текучести при увеличении температуры.

Пластическое течение отделено от области обратимого деформирования движущейся упругопластической границей  $a(t)$ , положение которой определяется из условия равенства нулю пластических деформаций. В случае свободного теплового расширения материала, величина температурных напряжений оказывается наибольшей при максимальном температурном градиенте. При постепенном выравнивании температурного поля напряжения падают и возникает область разгрузки материала, граница которой  $b(t)$  определяется из условия равенства на нулю скоростей пластических деформаций. Остаточные пластические деформации  $p'_{ij}$ , формирующиеся в процессе разгрузки материала, являются огибающими (рис. 1) семейства пластических деформаций  $p_{ij}$ , построенных для различных значениях временного параметра:

В процессе выравнивания температуры на поверхности шара возможен процесс повторного пластического течения, появления которого связано с выполнением условия пластичности  $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -2k(r, t)$ . На рис. 2, 3 изображены остаточные напряжения и радиальное перемещение при равномерном остывании шара до начальной температуры. Из рис. 3 следует, что процессы необратимого деформирования не влияют на размер сплошного шара при остывании до первоначальной температуры.

**В п.2.2** рассматриваются особенности расчета представленной в п.2.1 задачи при условии, что теперь шар является полым, свободным от внешних ограничений на тепловое расширение, с внутренним и внешним радиусами  $R_1$  и  $R_2$ . Остаточная деформация теперь не может быть определена как огибающая семейства пластических из-за присутствия в соотношениях для пластических деформаций неизвестных функций времени.

В каждый момент времени  $t > t_u$  требуется вычислять положения упругопластических границ  $a(t)$ ,  $b(t)$  и строить функцию остаточной деформации  $p'_{rr}$ .

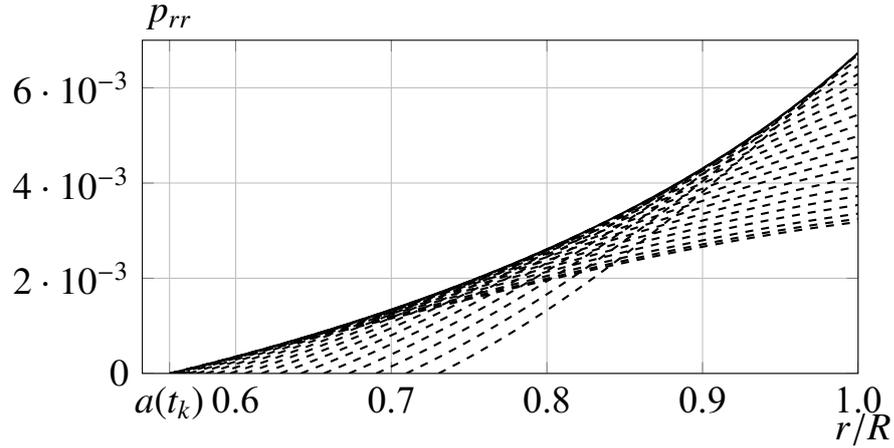


Рис. 1: Пластическая деформация  $p_{rr}$  в различные моменты времени. Огибающая – необратимая деформация, сформированная при разгрузке;  $t_k$  – момент исчезновения области пластического течения,  $a(t_k) = b(t_k)$

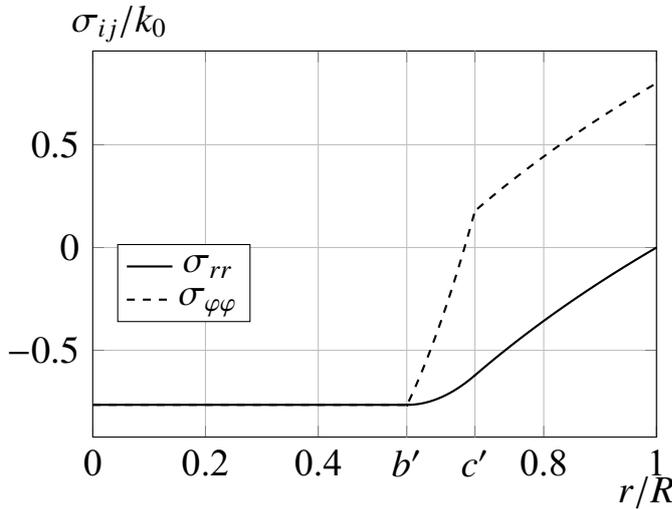


Рис. 2: Остаточные напряжения.

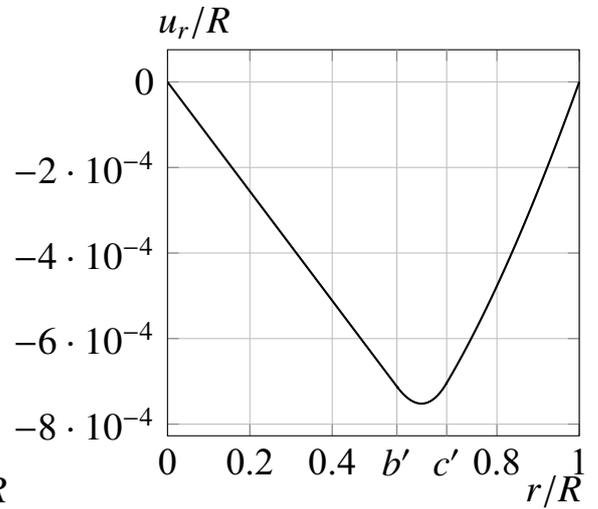


Рис. 3: Остаточное перемещение.

Для этого необходимо на каждом временном шаге решать систему уравнений:

$$\begin{cases} p_{rr}(a, t) = 0, \\ p'_{rr}(b) = p_{rr}(b, t), \\ \dot{p}_{rr}(b, t) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

В первых двух уравнениях присутствуют интегралы от функции  $p'_{rr}(r)$ . Их аппроксимация по методу трапеций позволяет получить численные решения, на основе которых строятся распределения остаточных деформаций и законы движения границ пластического течения. В процессе выравнивания температурного поля также обнаружена возможность появления повторного пластического течения с границей  $c(t)$ . На рис. 4, 5 изображены остаточные напряжения и перемещения. Отметим, что полый шар при остывании до начальной температуры

имеет меньшие размеры.

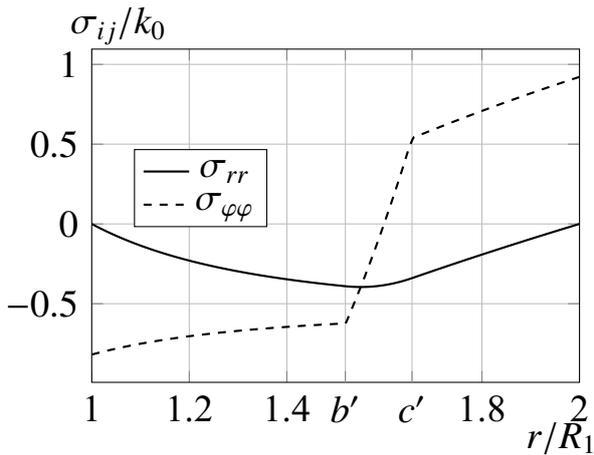


Рис. 4: Остаточные напряжения.

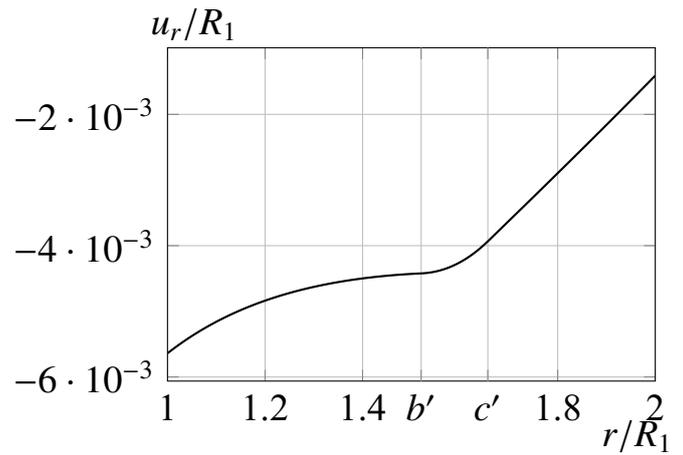


Рис. 5: Остаточное перемещение.

**В третьей главе** решен ряд задач теории температурных напряжений в условиях плоского напряженного состояния.

**В п.3.1** решена задача расчета остаточных напряжений и перемещений в сплошной круглой упруго-пластической пластине радиуса  $R$  при стационарном и нестационарном тепловом воздействии в центре. Область теплового воздействия имеет радиус  $R_T \ll R$ , внутри которого температурное поле изменяется по закону (13). При постоянном пределе текучести решение задачи для всех трех условий пластичности имеет одинаковый вид. Особенностью постановки задачи является отсутствие возможности решить ее в рамках условия пластичности Треска в случае, если предел текучести зависит от температуры. При этом результаты, полученные при помощи точного решения в рамках условия пластичности Ишлинского-Ивлева совпадают с численным решением в рамках условия Мизеса. В центральной области пластины  $0 < r < R_T$  в некоторый момент времени  $t = t_p$  начинает выполняться условие пластичности  $\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = -4k(T)$ . При  $t > t_p$  от границы нагрева  $R_T$  отделяется упругопластическая граница  $a(t)$ , движущаяся в направлении свободного края пластины  $R$ .

В процессе распространения температурного поля в центральной части пластины появляется область разгрузки с границей  $b(t)$ . Для определения границ пластического течения и формирующейся остаточной деформации  $p'_{rr}$  решается система уравнений (14). Остывание пластины задается в виде равномерного уменьшения температурного поля до начального значения. (за счет теплоотдачи на торцевых поверхностях). На рис. 6, 7 изображены поля остаточных напряжений и перемещений. Отметим, что размер пластины после остывании оказывается меньше первоначального размера, а в центре пластины формируются остаточные напряжения, уровень которых может приводить к появлению повторного пластического течения при последующем равномерном нагреве.

**В п.3.2** рассматривается решение задачи о нагреве бесконечной сплошной пластины по заданному круглому контуру  $R$ . Температурное воздействие на радиусе

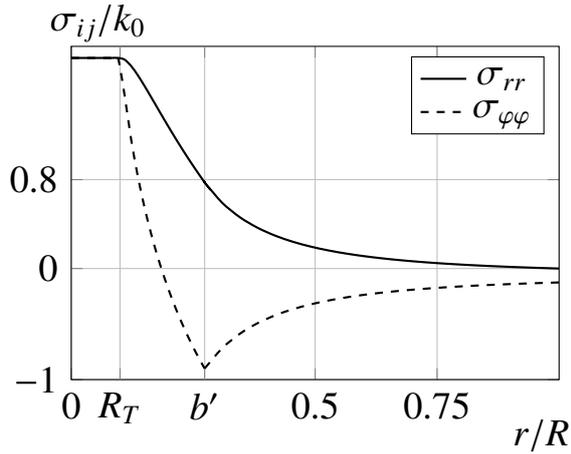


Рис. 6: Остаточные напряжения,  $R_T/R = 0.1$ .

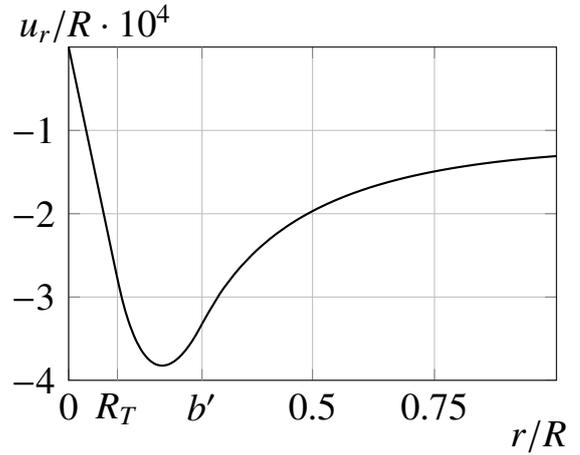


Рис. 7: Остаточное перемещение.

нагрева задано зависимостью (13). В процессе изменения температурного поля в зоне нагрева формируется область необратимого деформирования  $a(t) < r < b(t)$ , в которой условие пластичности Треска имеет форму  $\sigma_{\varphi\varphi} = -2k$ . Условие пластичности Ишлинского-Ивлева принимает вид  $\sigma_{rr} - 2\sigma_{\varphi\varphi} = 4k(r, t)$ . Использование каждого из кусочно-линейных условий пластичности позволяет проинтегрировать уравнение равновесия и получить точные решения для напряжений, перемещений и деформаций в области пластического течения. Остаточные напряжения в материале пластины (соответствующие остаточным деформациям, вычисленным в рамках условия пластичности Треска) представлены на рис. 8.

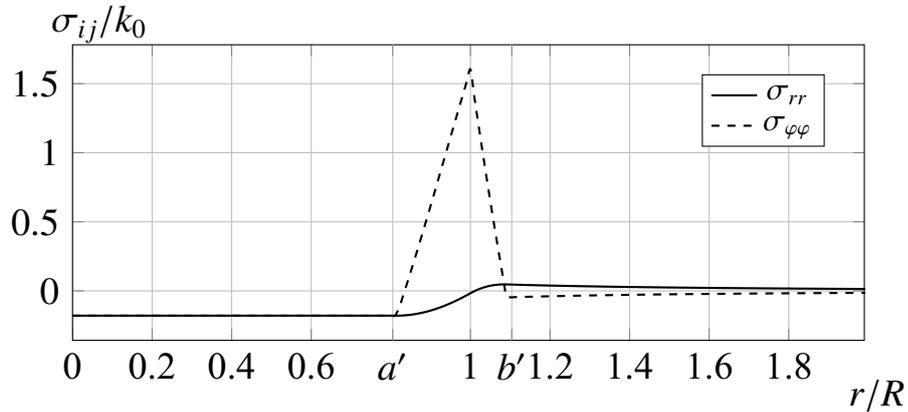


Рис. 8: Остаточные напряжения в бесконечной пластине.

**В п.3.3** рассмотрено решение задачи о горячей посадке упругопластических колец, выполненных из одинакового материала. Внутреннее кольцо с начальной низкой температурой  $T_1$ , с внутренним и внешним радиусами  $R_0$  и  $R_1$  вставляется во внешнее разогретое кольцо с начальной температурой  $T_2$ , с внутренним и внешним радиусами  $R_1, R_2$ . В результате соприкосновения контактных поверхностей  $R_1$  происходит выравнивания температурного поля между кольцами и образуется соединение с натягом. Формирующиеся при этом температурные напряжения способны приводить к процессам необратимого деформирования в окрестности внутренних поверхностей. Во внутреннем кольце образуется область пластического течения, в которой выполняется условие Треска  $\sigma_{\varphi\varphi} = -2k$ . Во внешнем кольце образуется область пластического течения, в которой условие Треска имеет вид  $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = 2k$ . Следует отметить, что распределения напряжений, соответствующие установившейся температуре колец совпадают с остаточными напряжениями при равномерного остывании. На рис. 9 представлены поля остаточных напряжений в материале сборки.

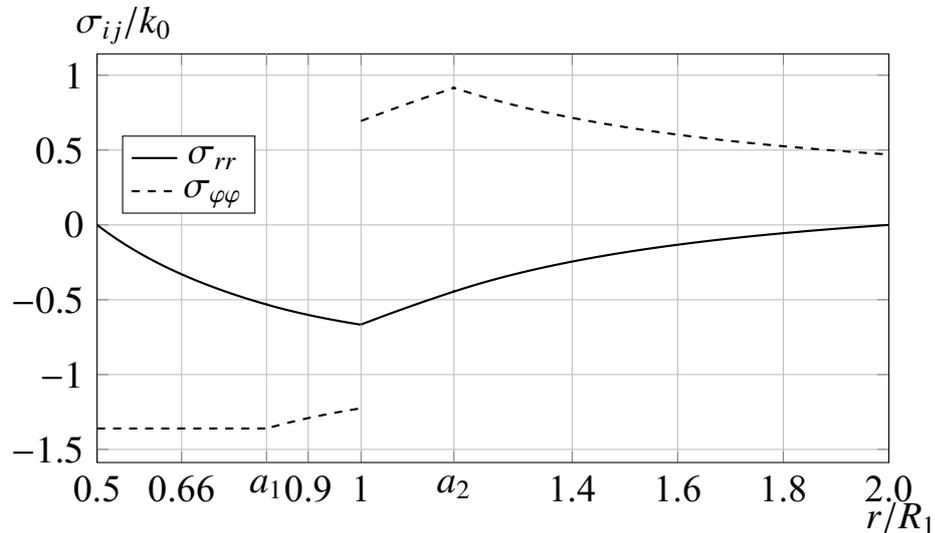


Рис. 9: Распределение остаточных напряжений в материале сборки.  $R_0/R_1 = 0.5$ ,  $R_2/R_1 = 2$ .

**В п.3.4** Рассчитаны остаточные напряжения и перемещения в прямоугольной пластине, верхний и нижний край которой зафиксированы, а боковые края в свободном состоянии. При нагреве материала пластины в некоторый момент времени в угловых точках возникают области необратимого деформирования, распространяющиеся в направлении центра. Для расчетов используется условие пластичности Мизеса с учетом линейной зависимости предела текучести от температуры. При остывании в материале пластины формируются остаточные напряжения, представленные на рис. 10.

**В четвертой главе диссертации** рассмотрен ряд краевых задач о расчете температурных напряжений, формирующихся в упругопластических цилиндрических телах в условиях плоского деформированного состояния. **В п. 4.1** решена

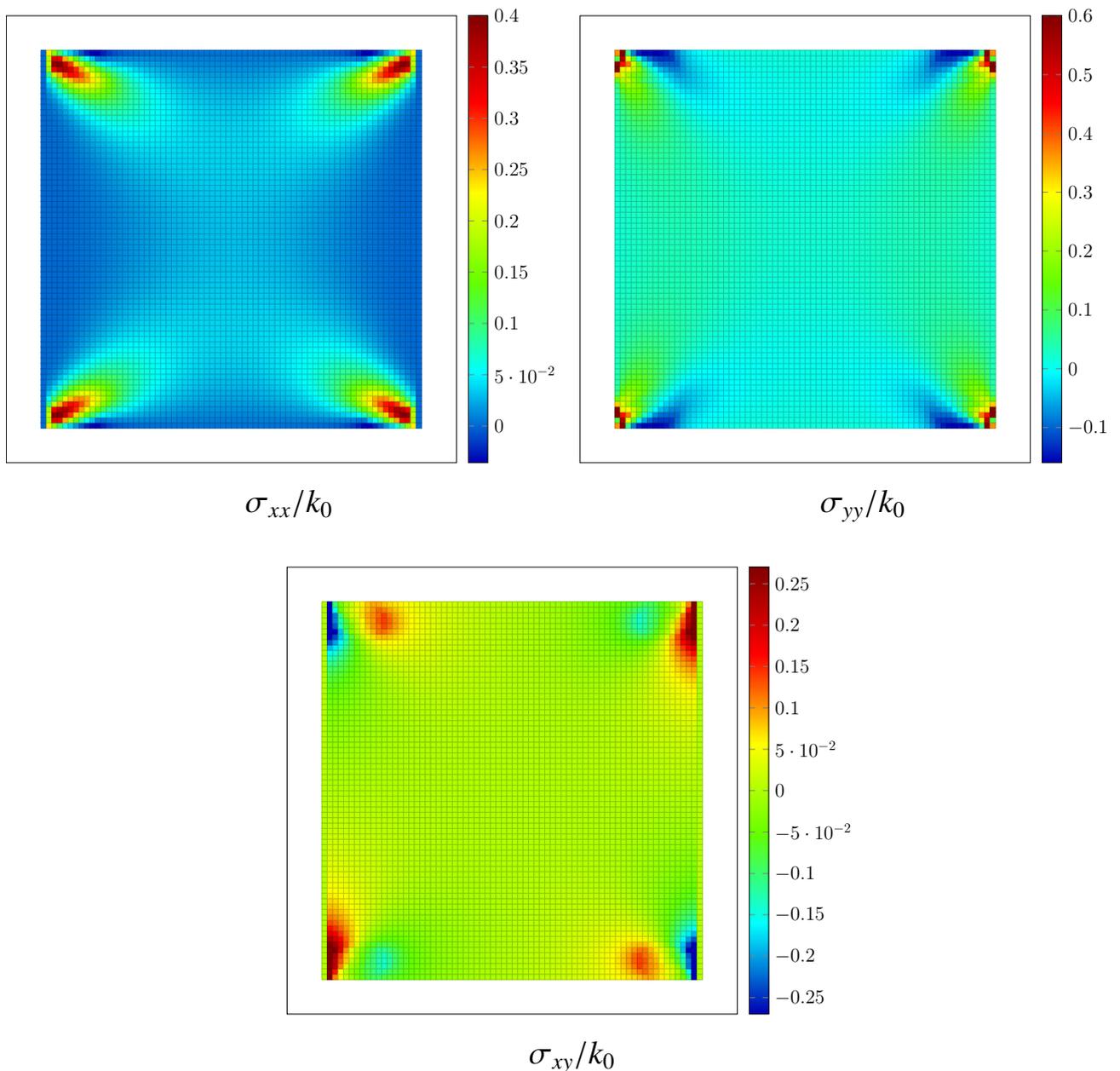


Рис. 10: Остаточные напряжения в пластине.

задача о неравномерном нагреве полого цилиндра со свободно расширяющимися боковыми поверхностями  $R_1$  и  $R_2$  при учете зависимости предела текучести от температуры. При нагреве внутренней поверхности цилиндра формируются 2 области пластического течения, в каждой из которых напряжения соответствуют различным формам условия пластичности Треска. В области  $R_1 < r < b(t)$  напряжения удовлетворяют ребру призмы Треска  $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 2k$ ,  $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k$ . В области  $b(t) < r < a(t)$  напряжения удовлетворяют грани призмы Треска  $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 2k$ . Процесс необратимого деформирования начинается с формирования области течения на внутренней поверхности  $R_1$ , напряжения в которой соответствуют грани призмы Треска. Затем, по мере увеличения температурного поля, данная область смещается в направлении внешнего радиуса цилиндра, а материал на внутренней поверхности переходит в состояние полной пластично-

сти (ребро призмы Треска).

**В п. 4.2** рассмотрено решение данной задачи в рамках условия пластичности Ишлинского-Ивлева. Сначала на внутренней поверхности  $R_1$  формируется область пластического течения  $R_1 < r < a(t)$ , напряжения в которой удовлетворяют грани призмы Ишлинского-Ивлева  $2\sigma_{rr} - \sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi} = 4k$ . Затем, в некоторый момент времени на упругопластической границе  $a(t)$  появляются две области необратимого деформирования: область  $a(t) < r < b(t)$ , напряженное состояние которой соответствует ребру призмы Ишлинского-Ивлева  $2\sigma_{rr} - \sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi} = 4k$ ,  $\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} - 2\sigma_{zz} = 4k$ ; область  $b(t) < r < c(t)$ , напряжения в которой удовлетворяют грани призмы Ишлинского-Ивлева  $\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} - 2\sigma_{zz} = 4k$ . При этом граница  $a(t)$  начинает движение в обратном направлении внутренней поверхности, а границы  $b(t)$ ,  $c(t)$  движутся в направлении внешней поверхности.

**В п.4.3** рассмотрено численное решение данной задачи в рамках условия пластичности Мизеса, имеющего вид

$$f = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi} - 4k^2 = 0. \quad (15)$$

На рис. 11 представлены результаты расчета напряжений в материале полого цилиндра в рамках каждого из рассмотренных условий пластичности при одинаковом температурном распределении.

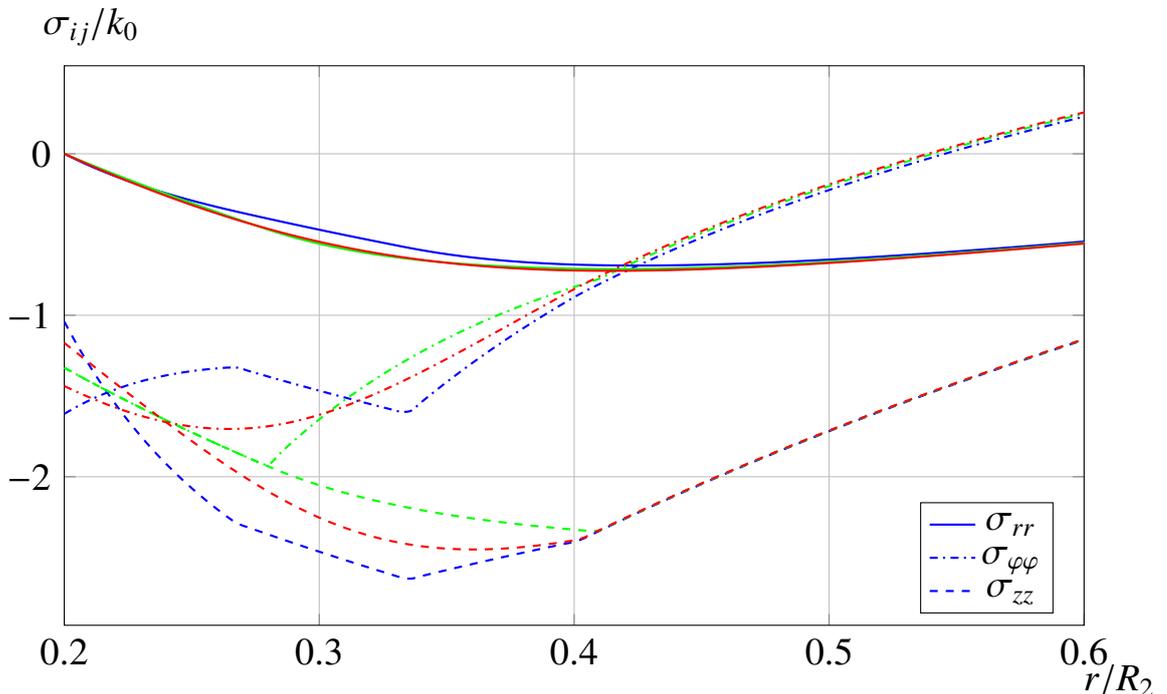


Рис. 11: Сравнение напряжений, полученных для условий пластичности Мизеса (красн.), Ишлинского-Ивлева (син.), Треска (зел.),  $R_1/R_2 = 0.2$

Если построить функции напряжений, значения которой являются средними между значениями функций напряжений, найденных при использовании кусочно-линейных условий Треска и Ишлинского-Ивлева ( $\sigma_{ij} = 0.5(\sigma_{ij}^T + \sigma_{ij}^I)$ ), то

получим некоторые аналитические зависимости, которые, очевидно, удовлетворяют уравнению равновесия, непрерывности перемещений, напряжений и граничным условиям, а, следовательно, могут рассматриваться в качестве альтернативного решения поставленной задачи. На рис. 12 представлено сравнение такого решения (синим цветом) с решением, полученным для условия Мизеса.

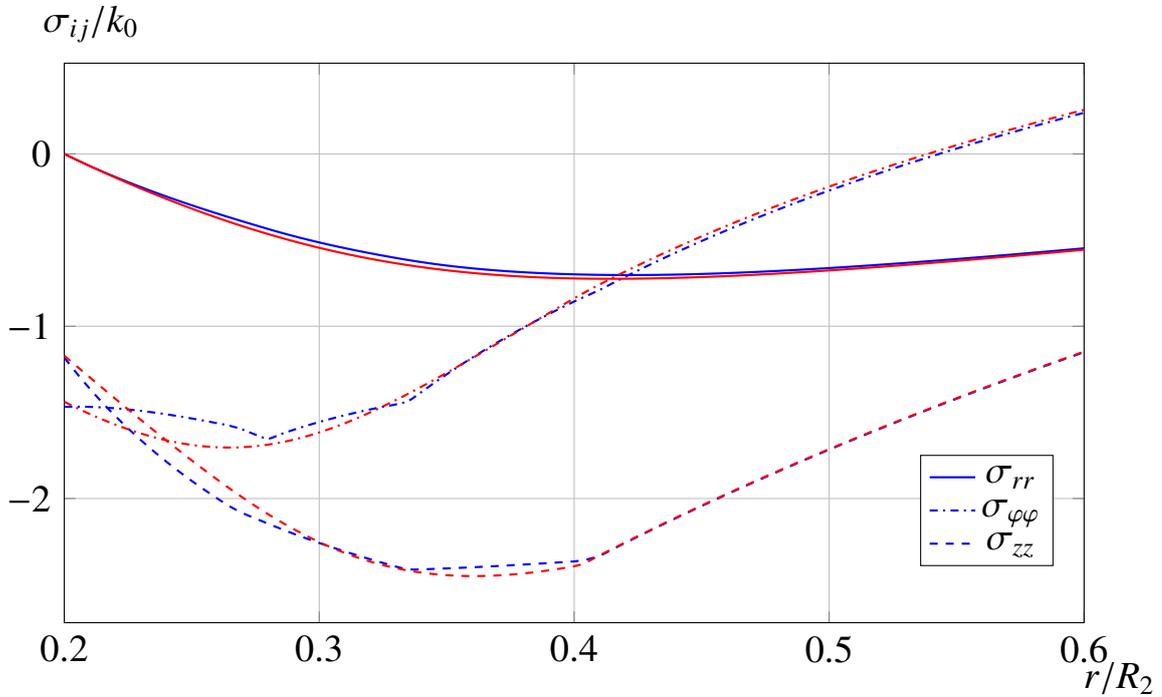


Рис. 12: Сравнение напряжений, заданных как среднее значение между решениями в рамках условий пластичности Ишлинского-Ивлева и Треска, и напряжений, полученных в рамках условия пластичности Мизеса (красн.).

**В п.4.4** решена задача расчета остаточных напряжений, формирующихся в результате горячей посадки цилиндрических деталей.

Постановка задачи совпадает с рассмотренной ранее для горячей посадки колец в п.3.4. Принципиальным отличием в решении задачи является необходимость учитывать возможность повторного пластического течения при остывании материала сборки. Процесс выравнивания температурного поля при теплопередаче между контактными поверхностями приводит к образованию соединения с натягом. После посадки от внутренней поверхности внешнего цилиндра отделяется упругопластическая граница области необратимого деформирования  $a_2(t)$ , в которой напряжения удовлетворяют условию пластичности Треска  $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = -2k$ . На внутренней поверхности внутреннего цилиндра образуется область пластического течения, которая, в зависимости от размеров деталей и уровня начального температурного градиента, может состоять из двух подобластей, в каждой из которых напряжения удовлетворяют разным формам условия Треска: в области  $R_1 < r < b_1(t)$ :  $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 2k$ ,  $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k$ ; в области  $b_1(t) < r < a_1(t)$ :  $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 2k$ .

Процесс остывания материала сборки задан при помощи медленного уменьшения температуры до начального значения температуры внутреннего цилиндра. Предполагается, что теплообмен между боковыми поверхностями и окружающей средой происходит гораздо медленнее теплопередачи между контактными поверхностями цилиндров. Уровень возможного температурного градиента в окрестности боковых поверхностей при теплообмене, предполагается незначительным и не влияет на возможность появления процессов необратимого деформирования. Поэтому процесс остывания может быть задан как равномерное уменьшение уровня установившейся температуры в материале цилиндров. Следует учесть важную особенность, возникающую в процессе остывания материала сборки. В рамках плоского деформированного состояния цилиндры имеют нулевые начальные перемещения и неподвижные торцевые поверхности: при теплопередаче материал внутреннего цилиндра испытывает сжатие, а материал внешнего – растяжение вдоль оси  $z$ . Следовательно, при остывании до начальной температуры во внутреннем цилиндре сжатие сменяется растяжением и материал переходит в состояние разгрузки. Во внешнем цилиндре продолжается процесс растяжения цилиндра, что приводит к появлению области повторно-пластического течения вблизи контактной поверхности. В данной области  $R_1 < r < b_2$  напряжения удовлетворяют условию Треска в форме  $\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 2k$ . Процесс необратимого деформирования при повторном течении во внешнем цилиндре продолжается вплоть до полного остывания материала сборки до начальной температуры. На рис. 13 показаны поля остаточных напряжений в материале цилиндров при остывании.

Последовательность возникновения и развития областей необратимого деформирования может различаться в зависимости от размеров цилиндров, их материала и начального температурного градиента. Установлено, что наибольшее влияние на уровень итогового контактного напряжения оказывает процесс необратимого деформирования внешнего цилиндра, при котором выполняется условие пластичности  $\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 2k$ . Учет зависимости предела текучести от температуры позволяет прогнозировать более низкие значения контактного напряжения в отличие от расчетов, в которых не учитываются пластические свойства материала, либо в том случае, если предел текучести не зависит от температуры (начальная разница температур в рассматриваемых случаях одинакова).

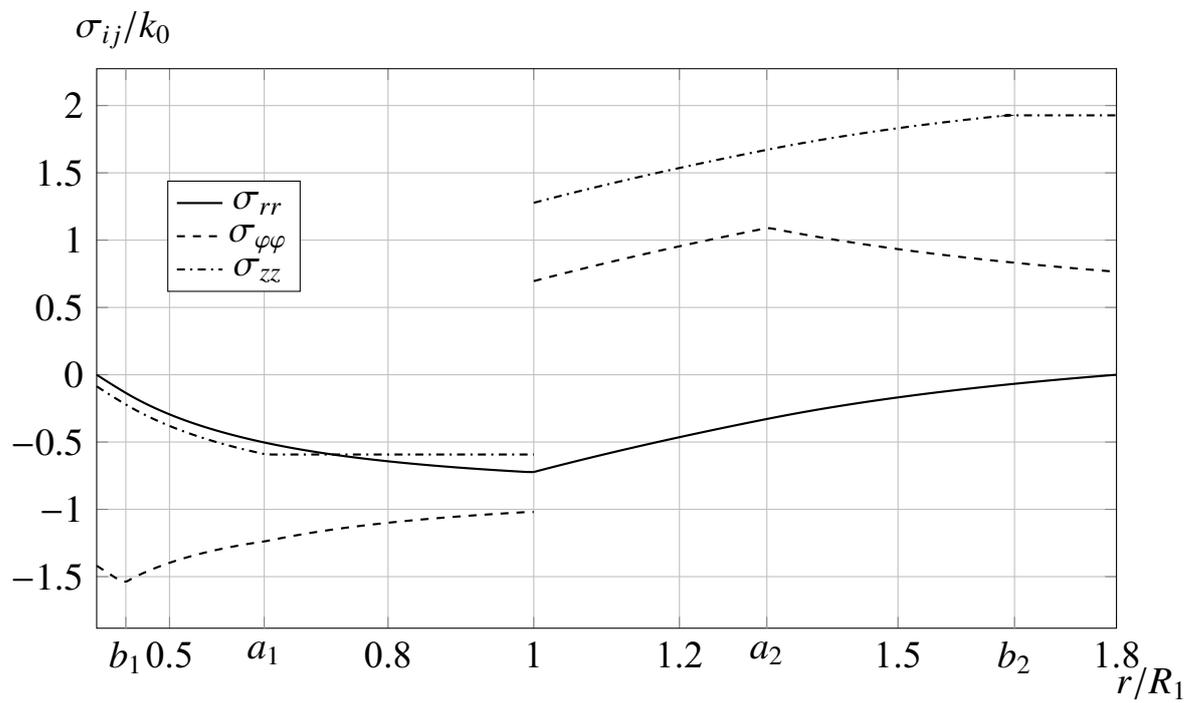


Рис. 13: Распределение температурных напряжений в материале сборки при остывании:  $R_0/R_1 = 0.4$ ,  $R_2/R_1 = 1.8$ .

**В Заключении** приводятся основные результаты диссертационной работы:

- впервые получены решения, включая точные, ряда краевых задач теории температурных напряжений в упругопластических телах с учетом существенной зависимости предела текучести от температуры;
- указаны особенности формирования решений ряда модельных краевых задач, связанные с эволюцией обратимого деформирования и пластического течения в условиях нестационарных температурных градиентов;
- в решениях некоторых задач теории температурных напряжений в упругопластических телах обнаружен эффект возникновения повторного пластического течения, обусловленный существенной зависимостью предела текучести от температуры и, как следствие, высоким уровнем необратимых деформаций;
- предложены алгоритмы расчетов полей температурных напряжений в упругопластических телах позволяющие учитывать появление, развитие и исчезновение областей пластического течения, включая прогнозирование итогового распределения остаточных напряжений.

## **Публикации по теме диссертации**

1. Дац, Е. П. Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учете пластических течений / Е. П. Дац, А. В. Ткачева // Прикладная механика и техническая физика. — 2016. — Т. 57, № 3. — С. 208–216.
2. Буренин, А. А. К моделированию технологии горячей посадки / А. А. Буренин, Е. П. Дац, А. В. Ткачева // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2014. — Т. 17, № 3. — С. 40–47.
3. Буренин, А. А. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия / А. А. Буренин, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2014. — № 2. — С. 124–131.
4. Дац, Е. П. Вычисление необратимых деформаций в полом упругопластическом шаре в условиях нестационарного температурного воздействия / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, Р. Велмуруган // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2015. — № 3. — С. 168–175.

5. Горшков, С. А. Расчет плоского поля температурных напряжений в условиях пластического течения и разгрузки / С. А. Горшков, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2015. — № 3. — С. 169–175.
6. Дац, Е. П. Сборка конструкции кольцо в кольце способом горячей посадки / Е. П. Дац, А. В. Ткачева, Р. В. Шпорт // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2014. — № 4. — С. 225–235.
7. Пластическое течение и разгрузка полого цилиндра в процессе «нагрева-охлаждения» / А. А. Буренин, Е. П. Дац, С.Н. Мокрин, Е. В. Мурашкин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2013. — № 2. — С. 22–28.
8. Дац, Е. П. Кусочно-линейные пластические потенциалы в задачах теории температурных напряжений о сборке горячей посадкой / Е. П. Дац, М. Р. Петров, А. В. Ткачева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2015. — № 4. — С. 250–264.
9. Дац, Е. П. Расчет накопленной остаточной деформации в процессе «нагрева-охлаждения» упругопластического шара / Е. П. Дац, С. Н. Мокрин, Е. В. Мурашкин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2012. — № 4. — С. 250–264.
10. Дац, Е. П. Нестационарное поле плоских температурных напряжений в условиях локального нагрева / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Сборник тезисов докладов XXXIV Дальневосточной математической школы-семинара имени академика Е. В. Золотова. — Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2008. — С. 197–198.
11. Дац, Е. П. Возможность пластического течения в присутствии нестационарного поля температур / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Сборник тезисов докладов XXXV Дальневосточной математической школы-семинара имени академика Е. В. Золотова. — Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2010. — С. 512–517.
12. Дац, Е. П. О повторном нагреве сплошного упругопластического шара / Е. П. Дац, С. Н. Мокрин // Сборник тезисов докладов XXXVI Дальневосточной математической школы-семинара имени академика Е. В. Золотова. — Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2012. — С. 106–109.

13. Дац, Е. П. Формирование полей остаточных напряжений в условиях нестационарного нагрева / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Материалы Всероссийской конференции «Школа по фундаментальным основам моделирования обработки материалов» и научно-технической конференции «Математическое, вычислительное и информационное обеспечение технологических процессов и систем». — Комсомольск-на-Амуре: КнаГТУ, 2010. — С. 44–45.
14. Бурени, А. А. Формирование поля остаточных напряжений в упругопластических телах за счет локального теплового воздействия / А. А. Бурени, Е. П. Дац, С. Н. Мокрин // Международная конференция «Современные проблемы механики», посвященная 100-летию А. А. Галина. Тезисы докладов. — Москва: ИПМех РАН, 2012. — С. 20.
15. Дац, Е. П. Возникновение и развитие зон необратимого деформирования в процессе нагрева и охлаждения / Е. П. Дац // Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении. Сборник статей. №4. — Комсомольск-на-Амуре: ИМиМ ДВО РАН, 2013. — С. 16–26.
16. Дац, Е. П. Расчет остаточных напряжений полого цилиндра из термоупругопластического материала / Е. П. Дац, С. Н. Мокрин, Е. В. Мурашкин // Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам. — Алушта: МАИ, 2013. — С. 18–22.
17. Дац, Е. П. Упругопластическое состояние полого цилиндра при его неравномерном нагреве / Е. П. Дац, С. Н. Мокрин, Е. В. Мурашкин // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды IX Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. — Самара: СамГТУ, 2013. — С. 98–100.
18. Дац, Е. П. Формирование полей остаточных напряжений полого цилиндра из термоупругопластического материала / Е. П. Дац, С. Н. Мокрин, Е. В. Мурашкин // XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. — Пермь: ИМСС УрО РАН, 2013. — С. 18–22.
19. Горшков, С. Н. Расчет напряженно-деформированного состояния тонкой прямоугольной пластины в условиях нестационарного теплового воздействия / С. Н. Горшков, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Успехи механики сплошных сред. Международная конференция, приуроченная к 75-летию академика В.А. Левина. — Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2014. — С. 152–155.
20. Дац, Е. П. Математическая модель процесса горячей посадки цилиндрических деталей / Е. П. Дац, А. В. Ткачева // Материалы VIII Всероссийской

конференции по механике деформируемого твёрдого тела. — Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. — С. 198–200.

21. Дац, Е. П. Численное исследование температурных напряжений, вызванных процессом горячей посадки цилиндрических деталей / Е. П. Дац, А. В. Ткачева // Успехи механики сплошных сред. Международная конференция, приуроченная к 75-летию академика В.А. Левина. — Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2014. — С. 481–484.
22. Дац, Е. П. Исследование необратимых деформаций в материале биметаллической трубы, полученной в результате горячей посадки / Е. П. Дац, А. В. Ткачева // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам. — Алушта: МАИ, 2015. — С. 251–253.
23. Дац, Е. П. Исследование остаточных напряжений в материале цилиндрических соединений, полученных в результате горячей посадки / Е. П. Дац, А. В. Ткачева // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. — С. 1140–1142.
24. Dats, E. Generating residual stresses of a quill cylinder made of thermo-plastic material / E. Dats, S. Mokrin, E. Murashkin // Advanced Problems in Mechanics: book of abstracts of International Summer School-Conference. — Saint-Petersburg: Polytechnical University Publishing House, 2013. — P. 43.
25. Dats, E. Calculation of the residual stresses of hollow cylinder under unsteady thermal action / E. Dats, S. Mokrin, E. Murashkin // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. — 2015. — Vol. 2218. — P. 1043–1046.
26. Dats, E. On unsteady heat effect in center of the elastic-plastic disk / E. Dats, E. Murashkin // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. — 2016. — Vol. 2223. — P. 69–72.
27. Dats, E. Calculation of the residual stress field of the thin circular plate under unsteady thermal action / E. Dats, S. Mokrin, E. Murashkin // Key Engineering Materials. — 2016. — Vol. 685. — P. 37–41.
28. Дац, Е. П. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. «математическое моделирование температурных и деформационных процессов, сопровождающих технологию горячей посадки в сборке металлоконструкций» / Е. П. Дац, А. В. Ткачева. — №2015617259; Заявл. 18.05.2015; Зарегистр. 03.07.2015.

*Научное издание*

Дац Евгений Павлович

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Неустановившиеся температурные напряжения в условиях зависимости  
предела текучести от температуры