

Институт машиноведения и металлургии
Дальневосточного отделения Российской академии наук
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Хабаровского Федерального исследовательского центра
Дальневосточного отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Прокудин Александр Николаевич

**ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ
НАЛИЧИИ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ**

1.1.8. — Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН
Буренин Анатолий Александрович

Комсомольск-на-Амуре — 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1. Упругопластическая задача для идеального материала	12
1.1. Введение	12
1.2. Упругопластический анализ вращающегося цилиндра с жестким включением при условии Треска	17
1.2.1 Стадия нагрузки	17
1.2.2 Стадия разгрузки и повторное пластическое течение ----	29
1.2.3 Примеры расчетов	38
1.3. Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра при условии Ишлинского-Ивлева (условии максимальных приведенных напряжений)	49
1.3.1 Постановка задачи	49
1.3.2 Упругопластическое решение	51
1.3.3 Примеры расчетов	57
1.4. Упругопластический анализ вращающегося цилиндра с жестким включением при условии Ишлинского-Ивлева (условии максимальных приведенных напряжений)	65
1.4.1 Стадия нагрузки	65
1.4.2 Стадия разгрузки	71
1.4.3 Примеры решения	76
1.5. Выводы	79
2. Упругопластическая задача для упрочняющегося материала -	81
2.1. Введение	81
2.2. Упругопластические деформации в сплошном и полом вращающемся цилиндре из линейно-упрочняемого материала при общем кусочно-линейном условии пластичности	88
2.2.1 Постановка задачи	88
2.2.2 Общая стратегия решения	94
2.2.3 Произвольная грань общего условия пластичности	97
2.2.4 Произвольное ребро общего условия пластичности	100
2.2.5 Решение для идеального материала	105
2.2.6 Вычисление констант интегрирования, границ между областями и переходных скоростей вращения	106
2.2.7 Сплошной вращающийся цилиндр с закрепленными и свободными торцами	111

2.2.8	Полый цилиндр с закрепленными и свободными торцами	122
2.3.	Упругопластическое деформирование вращающегося цилиндра с жестким включением при наличии температурного градиента	135
2.3.1	Определяющие уравнения	135
2.3.2	Упругое равновесие и зарождение пластического течения	136
2.3.3	Упругопластическое деформирование	141
2.3.4	Пример решения	152
2.4.	Ротационное автофретирование полых цилиндров из нелинейно-упрочняющегося материала	155
2.4.1	Постановка задачи	155
2.4.2	Упругопластическое решение	157
2.4.3	Остаточные напряжения	162
2.4.4	Границы применимости решения	163
2.4.5	Пример решения	167
2.5.	Влияние переменного модуля Юнга на остаточные напряжения, вызванные ротационным автофретированием полого цилиндра с закрепленными торцами	171
2.5.1	Постановка задачи	171
2.5.2	Построение решения	175
2.5.3	Пример решения	177
2.6.	Выводы	182
3.	Ползучесть и вязкопластическое течение	185
3.1.	Введение	185
3.2.	Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра	187
3.2.1	Постановка задачи	187
3.2.2	Вязкопластическое решение	192
3.2.3	Численная схема	198
3.2.4	Результаты расчетов	199
3.3.	Ползучесть и вязкопластическое течение во вращающемся диске переменной толщины	204
3.3.1	Постановка задачи	204
3.3.2	Деформирование до начала пластического течения.	207
3.3.3	Вязкопластическое течение	214
3.3.4	Учет вязкого сопротивления пластическому течению. Случаи упруговязкопластического и вязкоупруго-вязкопластического материалов.	219

3.4. Выводы -----	222
4. Оптимальное проектирование вращающихся цилиндров и дисков -----	224
4.1. Введение -----	224
4.2. Расчет профиля равнопрочного вращающегося диска переменной толщины с учетом анизотропии и разной прочности при растяжении и сжатии -----	226
4.2.1 Постановка задачи -----	226
4.2.2 Построение аналитического решения -----	231
4.2.3 Специальное решение -----	238
4.2.4 Примеры решения -----	238
4.3. Проектирование равнопрочных вращающихся цилиндров из неоднородного материала -----	241
4.3.1 Постановка задачи -----	241
4.3.2 Постоянное тангенциальное напряжение -----	243
4.3.3 Постоянная разность между тангенциальным и радиальным напряжением -----	245
4.3.4 Постоянная линейная комбинация тангенциального и радиального напряжений -----	247
4.3.5 Примеры решения -----	249
4.4. Выводы -----	251
Заключение -----	252
Список литературы -----	254

Введение

Детали многих механизмов и машин в ходе эксплуатации находятся под действием центробежных сил, вызванных вращением вокруг собственной оси с постоянной или переменной скоростью. Такие детали являются неотъемлемым компонентом газовых и паровых турбин, компрессоров высокого давления, маховичных накопителей энергии, двигателей внутреннего сгорания, электродвигателей, механических трансмиссий, ветрогенераторов, центрифуг, гироскопов. Расчет напряженно-деформированного состояния во вращающихся цилиндрах и дисках представляет значительный теоретический и практический интерес и является одной из классических задач механики деформируемого твердого тела. К решению этой задачи в различных постановках обращались многие выдающиеся ученые: Ю. Н. Работнов [1, 2], С. П. Тимошенко [3], А. И. Лурье [4], В. В. Соколовский [5], Н. Н. Малинин [6], А. Надаи [7]. Значительный прогресс в этой области внесли А. М. Wahl, F. P. J. Rimrott, U. Gamer, N. S. Bhatnagar, W. Mack, V. K. Arya, U. Guven, A. N. Eraslan, T. Akis, E. Arslan, S.-Y. Leu, H. R. Zare, H. Darijani, M. Z. Nejad, V. Tvergaard, F. Aziz, R. Shufen, S. M. Kamal, M. Perl, A. M. Eldeeb, D. W. A. Rees, G. Ma, C. O. Horgan, В. И. Розенблюм, О. В. Соснин, А. Г. Костюк, М. И. Рынковская, Н. Александрова, В. М. Мирсалимов, Е. В. Ломакин, С. Е. Александров, Е. А. Лямина, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, М. А. Артемов и многие другие ученые. Вращающимся дискам посвящены специализированные монографии и учебные пособия: И. В. Демьянушко и И. А. Биргера [8]; А. В. Левина, К. Н. Боришанского и Е. Д. Консона [9]; А. Г. Костюка [10]; С. Е. Александрова [11]. Несмотря на большое число публикаций, посвященных расчету вращающихся дисков и цилиндров, и значительный интерес научного общества, в этой области исследований сохраняются пробелы, которые в определенной степени заполняются настоящей диссертацией.

Целью диссертации является получение новых аналитических и численных решений, описывающих упругопластическое деформирование вращающихся цилиндров и дисков различного вида (сплошные, полые, с жестким включением), на основе моделей идеального, линейно- и нелинейно-упрочняемого упругопластического тела, включая расчет предельных скоростей вращения и полей остаточных напряжений.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Каждая из глав начинается кратким введением и литературным обзором.

Первая глава посвящена постановке и решению задачи об упругопластическом деформировании вращающегося сплошного цилиндра и цилиндра с жестким включением в рамках модели идеального тела. В качестве критерия пластичности используются условие Треска и условие Ишлинского-Ивлева. Большое внимание уделяется расчету полей остаточных напряжений после вращения цилиндра с заданной максимальной угловой скоростью. Показано, что в ходе разгрузки в цилиндре возможно зарождение повторного пластического течения.

Во второй главе исследуется влияние пластического упрочнения на напряженно-деформированное вращающихся цилиндров. Получено универсальное аналитическое решение для общего кусочно-линейного условия пластичности и линейного закона упрочнения. Рассмотрено упругопластическое деформирование вращающегося цилиндра с жестким включением при наличии стационарного температурного градиента. Найдены аналитические решения для полого вращающегося цилиндра из нелинейного материала в рамках степенного и экспоненциального законов упрочнения; установлены границы полученных решений. Исследован эффект снижения модуля Юнга в результате предварительного пластического деформирования и его влияние на остаточные напряжения, вызванные ротационным автофретированием.

В третьей главе рассматривается влияние вязких свойств материала на напряженно-деформирование вращающегося диска и цилиндра. Получено аналитическое решение для полого цилиндра из вязкопластического материала. Построена численная схема для расчета ползучести и вязкопластического течения в кольцевом диске и диске с жестким включением. Большое внимание уделяется исследованию влияния предварительного деформирования в режиме ползучести на зарождение и эволюцию вязкопластического течения.

Четвертая глава посвящена решению задач проектирования оптимальных (равнопрочных) вращающихся цилиндров и дисков. Получено аналитическое решение задачи о равнопрочном вращающемся цилиндре из неоднородного материала, это решение представляет собой распределения модуля Юнга, при которых в цилиндре достигается равнопрочное напряженное состояние. Найдено новое точное решение, описывающее профиль равнопрочного вращающегося диска переменной толщины.

В заключении перечислены основные научные результаты и выводы. Общее количество страниц диссертационной работы — 271, рисунков — 90, таблиц — 3. Список литературы содержит 252 источника.

Научная новизна диссертации.

1. В рамках условий текучести Треска и Ишлинского-Ивлева получены новые аналитические решения, описывающие напряженно-деформированное состояние вращающихся цилиндров из идеального упругопластического материала на стадиях нагрузки и разгрузки, включая повторное пластическое течение.

2. Построено универсальное аналитическое решение упругопластической задачи во вращающемся линейно-упрочняемом цилиндре в условиях плоской или обобщенной плоской деформации. Найденное решение основано на общем кусочно-линейном условии пластичности, учитывает влияние промежуточного главного напряжения на развитие

пластического течения и подходит для расчета цилиндров с различными видами граничных/торцевых условий и широкого класса материалов.

3. На основе условия Треска получено точное решение задачи об упругопластическом деформировании вращающегося линейно-упрочняемого цилиндра с жестким включением при наличии стационарного температурного градиента между внутренней и внешней поверхностями.

4. Решена упругопластическая задача во вращающемся полом цилиндра с закрепленными концами при условии пластичности Треска и нелинейных законах изотропного упрочнения. Точные аналитические решения найдены для линейно-экспоненциального закона упрочнения, а также для нескольких частных случаев степенного параметра в степенном законе упрочнения. Вычисление остаточных напряжений в цилиндре после предварительного вращения с заданной максимальной скоростью проводилось с помощью численных методов.

5. Проведен анализ влияния эффекта снижения модуля Юнга после предварительного пластического деформирования на процесс ротационного автофретирования полого цилиндра с закрепленными торцами. Установлено, что данный эффект может оказывать заметное влияние на величину остаточных напряжений после ротационного автофретирования. Обнаружено, что учет падения модуля Юнга особенно важен для расчета толстостенных цилиндров и высоких скоростей автофретирования.

6. Получены новые решения, учитывающие вязкие эффекты материала (ползучесть и вязкопластичность) на процессы необратимого деформирования в цилиндре и диске при наличии центробежных сил. Найдены аналитические решения для установившегося вязкопластического течения во вращающемся полом цилиндра с закрепленными и свободными торцами, а также разработан численный алгоритм для расчета упруговязкопластического деформирования. Разработаны численные схемы расчета необратимых деформаций во вращающемся диске с

граничными условиями различного вида (полый диск и диск с жестким включением) с учетом углового ускорения.

7. Найдены новые аналитические решения, позволяющие для заданных нагрузок на внешней и внутренней поверхностях построить вращающийся цилиндр/диск равной прочности. Для цилиндра в качестве управляющего параметра использовалась зависимость модуля Юнга от радиуса, а для диска — его профиль. Проанализировано влияние анизотропии и асимметрии при растяжении и сжатии на профиль равнопрочного вращающегося диска. Установлено, что равнопрочный профиль диска может не существовать и может быть не единственным.

Методы и подходы. Все научные результаты диссертации получены с использованием известных моделей механики деформируемого твердого тела и методов решения дифференциальных уравнений. В постановке упругопластических задач использовались кусочно-линейные пластические потенциалы, что позволило во многих случаях получить аналитические решения в замкнутом виде. Расчет координат границ между областями различного типа (упругие и пластические области) проводился с помощью численных методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений. При использовании нелинейных законов упрочнения применялись методы численного интегрирования. В некоторых случаях решение упругопластических задач выполнялось численно (применялся метод конечных разностей и метод Рунге-Кутты).

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием фундаментальных уравнений механики деформируемого твердого тела. Многие решения, полученные в диссертации, представлены в замкнутом аналитическом виде, их достоверность обусловлена корректностью постановки начально-краевых задач. В ряде случаев для оценки достоверности полученных результатов использовалось сравнение с аналитическими и численными решениями других авторов.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования результатов при проектировании элементов машин и механизмов, находящихся под действием центробежных сил. Данные упругопластического анализа могут найти применение для расчета предельно допустимой скорости вращения в деталях цилиндрической геометрии. Найденные решения упругопластических задач могут использоваться при проектировании технологий упрочнения цилиндрических деталей на основе ротационного автофретирования. Полученные зависимости для цилиндра и диска равной прочности имеют большое значение в оптимальном проектировании маховичных накопителей энергии.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

- III Дальневосточная школа-семинар «Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций», г. Комсомольск-на-Амуре, 2018 г.,
- V Дальневосточная конференция с международным участием «Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении», г. Комсомольск-на-Амуре, 2018 г.,
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, г. Уфа, 2019 г.

Научные исследования, проведенные в диссертации, выполнялись в рамках государственного задания Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН, а также грантов Российского фонда фундаментальных исследований и Российского научного фонда:

- №18-01-00038 «Учет теплофизических и реологических эффектов при интенсивном формоизменении материалов и упругом последствии» (РФФИ, 2018–2020 гг.),
- №20-01-00147 «Расчёты процессов сборки конструкций из

упруговязкопластических деталей и их последующей функциональной эксплуатации» (РФФИ, 2020–2022 гг.),

– №22-11-00163 «Нелинейные задачи механики твердого тела для материалов со свойствами, зависящими от напряженного-деформированного состояния», (РНФ, 2022–2024 гг.).

Публикации. Научные результаты диссертации представлены в 26-ти работах [12–37], опубликованных в ведущих российских и зарубежных профильных журналах, сборниках статей и материалов научных мероприятий. Из упомянутых выше работ 23 опубликованы в изданиях, рекомендуемых ВАК РФ и/или индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus. Среди 14 статей [12, 13, 24–30, 33–37], проиндексированных в базе данных Web of Science, 1 опубликована в журнале категории Q1 (ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik) и 2 — в журналах категории Q2 (Acta Mechanica, Journal of applied and computational mechanics).

Личный вклад автора. Работы [17, 20, 24, 25, 30, 32–35, 37] выполнены автором диссертации самостоятельно. В работах [14–16, 18, 19, 21–23, 27, 28, 31, 36] автор выполнил постановку задач и разработку методов решения, анализ результатов проводился совместно с А. А. Бурениным и С. В. Фирсовым. В [12, 13, 26, 29] автор частично участвовал в постановке задач и построении решений, анализ результатов проводился совместно с А. А. Бурениным, Л. В. Ковтанюк, А. С. Бегун, Г. Л. Панченко и С. В. Белых.

1. Упругопластическая задача для идеального материала

1.1. Введение

Вращающиеся цилиндры и диски являются важным структурным компонентом многих машин и механизмов [1]. Расчет напряженного состояния во вращающихся цилиндрах обычно выполняется в рамках теории малых деформаций с использованием условия плоской или обобщенной плоской деформации. Одним из важнейших аспектов изучения центробежных сил является определение максимально допустимой скорости вращения. В первом приближении для этой цели могут использоваться уравнения теории упругости. Решение упругой задачи во вращающемся однородном и изотропном цилиндре на основе закона Гука широко известно и входит во многие учебники по теории упругости [3, 38]. В работах [39–41] рассматривались вращающиеся изотропные цилиндры, изготовленные из функционально-градиентного материала. Ортоотропные вращающиеся цилиндры изучались в работах [42–44]. Вышеуказанные работы [39–44] также выполнены в рамках линейной теории упругости и показывают, что неоднородность и анизотропия упругих свойств материала может оказывать существенное влияние на распределение напряжений в цилиндре, и, как следствие, на величину центробежной нагрузки, при которой наступает пластическое течение. Большие упругие деформации вращающихся цилиндров изучались с помощью уравнений нелинейной теории упругости в [45–50]. Градиентная теория упругости использовалась в [51–54] для оценки влияния размерного эффекта на упругий отклик вращающихся цилиндров и дисков.

Использование уравнений теории упругости дает достаточно консервативную оценку несущей способности, поскольку вращающийся цилиндр способен сохранять эксплуатационные характеристики и после частичного перехода в пластическое состояние. Для более точного

расчета критической скорости вращения необходимо применять упругопластический анализ. Здесь также следует упомянуть относительно новую технологию ротационного автофретирования [55–57]. Данная технология заключается в нагружении полой цилиндрической заготовки центробежными силами выше предела упругости и последующей разгрузке. В результате во внутренних слоях полого цилиндра формируется область сжимающих тангенциальных напряжений, что способствует повышению его эксплуатационной прочности. Очевидно, адекватное моделирование ротационного автофретирования возможно только в рамках упругопластического анализа.

Первое решение пластической задачи во вращающемся цилиндре получил Надаи [58]. Он рассматривал состояние полной пластичности в сплошном идеально пластическом цилиндре со свободными торцами. В полученном решении радиальное и тангенциальное напряжения совпадают и превосходят осевое напряжение на величину предела текучести. В работе [59] на основе условий пластичности Треска и Мизеса исследовались сплошные и полые цилиндры из упрочняемого материала. Конечные пластические деформации сплошного упрочняемого цилиндра рассматривались в [60]. Следует отметить, что в работах [58–60] упругие деформации принимались пренебрежимо малыми.

Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра был впервые опубликован в [61], где рассматривались как малые, так и конечные деформации цилиндра. Однако, как позднее показал Гамер [62], решение, представленное в [61], имеет разрыв перемещения на упругопластической границе. Корректное решение упругопластической задачи для вращающегося сплошного цилиндра из идеального материала получено в работах [63, 64]. Авторы рассматривали цилиндр с закрепленными торцами и условие пластичности Треска. Позднее в [65] на основе работ [63, 64] получено распределение остаточных деформаций

во вращающемся цилиндре после его предварительного вращения с заданной скоростью. Упомянутая ранее технология ротационного автофретирования была предложена в [55]. Для определения оптимальных параметров процесса авторами получено распределение напряжений во вращающемся полом идеально-пластическом цилиндре с закрепленными торцами. Решение [55] включает в себя стадии нагрузки и разгрузки основано на условии Треска с учетом эффекта Баушингера. Автофретирование вращающегося полого цилиндра со свободными торцами (обобщенное плоское деформированное состояние) исследовалось в [66] также с помощью условия текучести Треска. Численное моделирование ротационного автофретирования на основе нелинейного условия Мизеса проведено в [67]. Полученные результаты [55, 66, 67] показывают, что новая технология имеет определенные преимущества по сравнению с традиционным гидравлическим автофретированием [68].

Вращающийся полый цилиндр исследовался в статье [69], авторы которой использовали условие Треска, материал цилиндра принимался идеальным, а его торцы предполагались закрепленными. Упругопластический анализ цилиндров со свободными торцами несколько осложняется дополнительным условием на суммарную осевую силу. Вращающийся сплошной цилиндр со свободными торцами изучался в работе [70], а полый — в [71]. Решения, представленные в [70, 71] получены на основе условия Треска и модели идеального упругопластического материала. Ротационное автофретирование полого цилиндра со свободными торцами исследовалось в [66, 72]. В первой части [66] на основе условия Треска получено распределение остаточных напряжений в полом цилиндре после его предварительного нагружения. Предполагалось, что материал цилиндра является идеальным. Повторное пластическое течение и эффект Баушингера не учитывались. Полученное решение использовалось во второй части работы в [72] для валидации результатов

численного моделирования ротационного автофретирования на основе метода конечных элементов. Сравнение аналитического решения и численных расчетов показало достаточно хорошее совпадение, несмотря на то что во втором случае использовалось условие пластичности Мизеса.

В процитированных выше работах использовалось условие плоской или обобщенной плоской деформации, которое подразумевает, что цилиндр имеет бесконечную длину. В действительности длина цилиндра, разумеется, всегда конечна и указанные выше решения справедливы только для цилиндров, чья длина значительно превышает радиус, и только в сечениях, расположенных на достаточном удалении от торцов цилиндра. Иначе условие плоской деформации нарушается и вместо него должна использоваться двумерная постановка задачи. В этом случае получение аналитического решения затруднено и единственным способом решения представляется использование численных методов (МКЭ, МГЭ). Тем не менее, следует упомянуть работу [73], в которой в рамках жестко-пластического анализа получено приближенное аналитическое решение для вращающегося полого цилиндра конечной длины, выполненного из идеального материала. В качестве условия пластичности использовалось условие Мизеса. Все определяющие уравнения и граничные условия выполняются точно за исключением ассоциированного закона течения. Установлено, что условие плоской деформации допустимо для цилиндров, у которых отношение длина/диаметр превышает 20. Кроме того, распределение напряжений несущественно зависит от осевой координаты за исключением областей вблизи торцов цилиндра.

Основное внимание в научной литературе уделяется изучению полых и сплошных цилиндров (или дисков), однако на практике часто встречаются и другие виды цилиндров. Например, в маховичных накопителях энергии крутящий момент передается от двигателя на маховик (полый цилиндр из стали или композитного материала) через вал. В этом

случае более адекватной моделью маховика представляется цилиндр с жестким включением. Вращающийся диск с жестким включением исследовался в упругопластической постановке на основе условия Треска в работах [74–77]. В [74–76] рассматривался диск постоянного профиля, а в [77] — гиперболического. Условие пластичности Мизеса использовалось для расчета вращающихся дисков с жестким включением в [78, 79]. Упругопластический анализ полого диска с жестким покрытием на внутренней и внешней стенках выполнен в [80] в рамках условия Треска.

Упругопластический анализ вращающихся цилиндров и дисков обычно основан на условиях пластичности Треска или Мизеса. Несомненным достоинством условия Треска является возможность получения замкнутых аналитических решений. К недостаткам можно отнести тот факт, что в нем не учитывается влияние промежуточного главного напряжения. В условие Мизеса в явном виде входят все три главных напряжения, однако это условие является нелинейным и, как следствие, решение задач практически всегда сводится к использованию численных методов. Условие Ишлинского-Ивлева [81] (также известное как условие максимальных приведенных напряжений) наряду с условиями Треска и Мизеса относится к классическим. В математическую запись этого условия входят все три главных напряжения и оно, как и условие Треска, является кусочно-линейным. Ранее [82] с помощью этого условия было получено распределение напряжений во вращающемся диске. Из недавних работ также можно выделить [83, 84].

Данная глава посвящена упругопластическому анализу вращающихся цилиндров с закрепленными торцами в рамках модели идеального упругопластического тела. В качестве условий пластичности используются условие Треска и условие Ишлинского-Ивлева (условие максимальных приведенных напряжений, *twin shear yield criterion*). Рассматривается цилиндр с жестким включением (разделы 1.2 и 1.4) и

сплошной цилиндр (раздел 1.3). Анализ включает в себя нагрузку, разгрузку (включая возможное повторное пластическое течение) и итоговое состояние цилиндра (распределение остаточных напряжений).

1.2. Упругопластический анализ вращающегося цилиндра с жестким включением при условии Треска

1.2.1 Стадия нагрузки

Рассмотрим цилиндр с жестким включением (рис. 1.1). Внутренний и внешний радиус цилиндра обозначим, как r_{in} и r_{out} соответственно. Отношение радиусов обозначим δ . Цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω , которая медленно меняется со временем, вследствие чего угловым ускорением можно пренебречь. В условиях плоской деформации и осевой симметрии вектор перемещений в цилиндре имеет только одну ненулевую компоненту u_r .

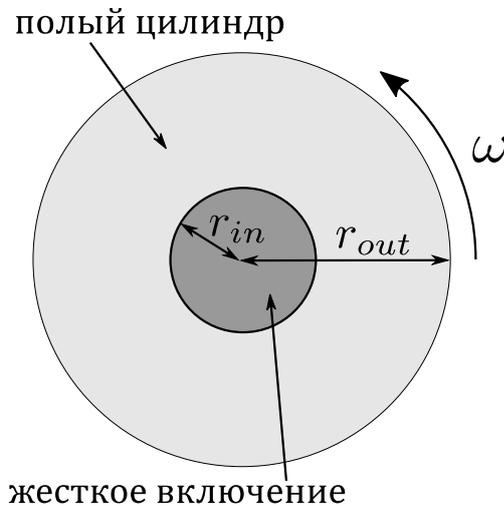


Рис. 1.1 — Вращающийся цилиндр с жестким включением.

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z и перейдем к безразмерным переменным:

$$\delta = \frac{r_{in}}{r_{out}}, \beta = \frac{r}{r_{out}}, \bar{u} = \frac{E}{\sigma_y} \frac{u_r}{r_{out}}, \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_y}, \Omega = \frac{\rho r_{out}^2}{\sigma_y} \omega^2, \quad (1.1)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{E}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{E}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}^e, \bar{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{E}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}^p, \bar{\varepsilon}_{ij}^{pr} = \frac{E}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}^{pr}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{sp} = \frac{E}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}^{sp},$$

где E — модуль Юнга, σ_y — предел текучести, ρ — плотность, σ_{ij} — напряжения, $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p, \varepsilon_{ij}^{sp}$ — полные, упругие, пластические и вторичные пластические деформации. Далее символ подчеркивания везде опущен.

Предположим, что деформации ε_{ij} в цилиндре являются малыми и представляют собой сумму упругих ε_{ij}^e и пластических деформаций ε_{ij}^p .

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{rr}^p = \frac{\partial u}{\partial \beta}; \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{u}{\beta}; \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^p = 0. \quad (1.2)$$

Напряжения (в безразмерном виде) связаны с упругими деформациями законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e \right); \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\varepsilon_{rr}^e + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e \right); \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + (1-\nu)\varepsilon_{zz}^e \right), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Соотношения обратные к (1.3) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^e &= (\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{zz}); \\ \varepsilon_{\theta\theta}^e &= (\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr} - \nu\sigma_{zz}); \\ \varepsilon_{zz}^e &= (\sigma_{zz} - \nu\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Единственное нетривиальное уравнение равновесия в цилиндре:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\beta} = -\Omega\beta, \quad (1.5)$$

где ρ — плотность материала.

Условие пластичности Треска:

$$f = \max(|\sigma_i - \sigma_j|) = 1, \quad (1.6)$$

где f — пластический потенциал, σ_i — главные напряжения.

Поскольку в рассматриваемом случае главные напряжения

совпадают с координатными условие (1.6) примет вид:

$$f = \max(|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|, |\sigma_{rr} - \sigma_{zz}|, |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|) = 1. \quad (1.7)$$

Ассоциированный закон пластического течения:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}}, \quad (1.8)$$

здесь λ — положительный множитель. Далее предполагается, что процесс нагружения является монотонным.

Если напряженное состояние в пластической области соответствует ребру условия пластичности (1.7), то вместо закона (1.8) используется его обобщение

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_1 \frac{df_1}{d\sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{df_2}{d\sigma_{ij}}, \quad (1.9)$$

где $d\lambda_1$ и $d\lambda_2$ — положительные множители, f_1 и f_2 — пластические потенциалы, соответствующие граням условия (1.7), на пересечении которых лежит рассматриваемое ребро.

Использование законов (1.8) и (1.9) вместе с условием (1.7) приводит к пластической несжимаемости, поэтому объемная деформация является чисто упругой:

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = (1 - 2\nu)(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}). \quad (1.10)$$

Граничные условия задачи имеют вид:

$$u(\delta) = 0, \quad \sigma_{rr}(1) = 0. \quad (1.11)$$

Скорость вращения Ω цилиндра монотонно возрастает от 0 до Ω_{max} (нагружение), а затем также монотонно убывает вплоть до полной остановки цилиндра (разгрузка). В начале нагружения цилиндр деформируется чисто упруго. При определенной скорости Ω_p на внутренней поверхности цилиндра впервые выполняется условие пластичности (1.7), в результате чего в цилиндре начинают развиваться области

пластического течения. Дальнейшее увеличение скорости Ω приводит к появлению новых областей течения и постепенному уменьшению области упругого деформирования. Когда скорость вращения достигает Ω_{fp} весь цилиндр переходит в состояние пластичности. При $\Omega > \Omega_{fp}$ новые пластические области уже не появляются, но границы между существующими областями меняют свое положение. Величины Ω_p и Ω_{fp} зависят от параметра δ и механических параметров материала цилиндра.

После достижения максимальной скорости вращения Ω_{max} начинается разгрузка. Весь цилиндр снова ведет себя как упругое тело, но с накопленными пластическими деформациями, которые в процессе разгрузки уже не меняются. С уменьшением скорости вращения Ω перемещения и напряжения в цилиндре также уменьшаются. При некоторой скорости Ω_{sp} на внутренней поверхности может выполняться условие пластичности, и в цилиндре начнется вторичное пластическое течение, которое продолжится вплоть до полной остановки цилиндра. Характер вторичного пластического течения зависит от максимальной скорости Ω_{max} . Чем выше была скорость Ω_{max} , тем больше будет область вторичного течения. Для достаточно больших значений Ω_{max} вторичное течение распространится на весь цилиндр. При малых Ω_{max} область вторичного течения не появится. При этом скорость Ω_{sp} также зависит от Ω_{max} .

Интересно отметить, что в рассматриваемой задаче при определенных значениях δ и Ω_{max} возможно появление пластических областей, соответствующих всем 12 возможным вариантам условия Треска (1.7). По 6 областей на стадии нагружения и разгрузки.

Далее каждая стадия процесса рассматривается подробно.

Положим в (1.2) пластические деформации равными нулю. Преобразуем уравнение равновесия (1.5) с помощью соотношений (1.2), (1.3) и получим уравнение равновесия в перемещениях (уравнение Ламэ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} u = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega \beta. \quad (1.12)$$

Решение этого уравнения:

$$u = \frac{D_1}{\beta} + D_2 \beta - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega \beta^3, \quad (1.13)$$

где D_1, D_2 — константы интегрирования.

Из решения уравнения (1.13) можно найти все остальные неизвестные функции. Ограничимся здесь лишь напряжениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{D_1}{(1+\nu)} \frac{1}{\beta^2} + \frac{D_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega \beta^2, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{D_1}{(1+\nu)} \frac{1}{\beta^2} + \frac{D_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{(1+2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega \beta^2, \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Воспользуемся граничными условиями (1.11) для определения констант интегрирования D_1, D_2 :

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{(3-2\nu-\delta^2)}{(1+\delta^2(1-2\nu))} \delta^2 \Omega, \\ D_2 &= \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{(3-2\nu+\delta^4(1-2\nu))}{(1+\delta^2(1-2\nu))} \Omega. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Найденное упругое решение (1.13)–(1.15) справедливо для скоростей вращения $\Omega \leq \Omega_p$. Условие пластичности впервые выполнится на внутренней поверхности $\beta = \delta$ цилиндра, где напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$. Условие (1.7) запишется в виде:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1, \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 1. \quad (1.16)$$

Преобразуем (1.16), используя (1.14), (1.15), и найдем скорость Ω_p , при которой на поверхности $\beta = \delta$ начнется пластическое течение:

$$\Omega_p = 4 \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{(1+(1-2\nu)\delta^2)}{(3-2\nu-2\delta^2-\delta^4(1-2\nu))}. \quad (1.17)$$

Ранее в работе [75] была найдена аналогичная величина для вращающегося диска (плоское напряженное состояние) с жестким включением:

$$\Omega_p = 4 \frac{\nu(1-\delta^2) + (1+\delta^2)}{(1-\nu)(1-\delta^2)(3+\delta^2 + \nu(1-\delta^2))}.$$

Когда скорость вращения Ω достигает критического значения Ω_p на внутренней поверхности $\beta = \delta$ цилиндра выполняется условие пластичности (1.7). Вследствие этого в цилиндре появляются две области пластического течения, которые обозначим римскими цифрами I и II. Первая из областей соответствует ребру призмы Треска, а вторая — ее грани. Напряжения в области I ($\delta \leq \beta \leq \beta_1$) удовлетворяют неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$, а в области II ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$) неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$. Также в цилиндре сохраняется упругая область ($\beta_2 \leq \beta \leq 1$).

Характер дальнейшего развития пластического течения зависит от значения параметра δ . Для δ бóльших некоторого переходного $\tilde{\delta}$ вначале ($\Omega = \Omega_1$) на внешней границе цилиндра $\beta = 1$ выполнится условие Треска в виде $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$, вследствие чего появится новая область пластического течения (область III). Затем ($\Omega = \Omega_2$) на упругопластической границе $\beta = \beta_2$ напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ сравнивается с σ_{rr} и условие пластичности примет вид $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1, \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. Геометрически это означает переход с грани призмы Треска на ребро. В результате появятся сразу две новые пластические области IV и V. Если же $\delta < \tilde{\delta}$, то пластические области в точках $\beta = 1$ и $\beta = \beta_2$ появятся в обратном порядке. Далее предполагаем, что $\delta > \tilde{\delta}$. Значение $\tilde{\delta}$ будет найдено позднее.

С увеличением скорости вращения Ω упругая область уменьшается и, когда скорость достигает значения Ω_{fp} границы областей V и III встречаются ($\beta_4 = \beta_5$), в результате чего цилиндр полностью переходит в состояние пластичности. Кроме того, в точке $\beta = \beta_4 = \beta_5$ появляется

пластическая область, соответствующая ребру условия Треска в форме $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1, \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1$. Последующее увеличение скорости вращения не приводит к появлению новых областей, но границы между существующими будут менять свое положение. При этом увеличиваться будут области, соответствующие ребрам призмы Треска (области I, IV, VI).

Рассмотрим подробно каждую область.

Область I. Напряжения соответствуют ребру призмы Треска $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$.

Условие пластичности Треска в области I выполняется в виде:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 1; \quad \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1. \quad (1.18)$$

Уравнение равновесия (1.5) с учетом (1.18) примет следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} = -\frac{1}{\beta} - \Omega \beta.$$

Решая последнее уравнение, найдем напряжения σ_{rr} и далее с помощью (1.18) найдем остальные компоненты напряжений $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$:

$$\sigma_{rr} = C_1 - \ln \beta - \Omega \frac{\beta^2}{2}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 1. \quad (1.19)$$

где C_1 — константа интегрирования.

Преобразуем уравнение (1.10) с учетом (1.19) и получим дифференциальное уравнение для перемещения:

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = (1 - 2\nu)(3C_1 - 2) - 3(1 - 2\nu) \ln \beta - \frac{3}{2}(1 - 2\nu)\Omega \beta^2. \quad (1.20)$$

Решение уравнения (1.20) имеет вид:

$$u = \frac{C_2}{\beta} + \frac{1}{4}(1 - 2\nu)(6C_1 - 1)\beta - \frac{3}{2}(1 - 2\nu)\beta \ln \beta - \frac{3}{8}(1 - 2\nu)\Omega \beta^3, \quad (1.21)$$

где C_2 — константа интегрирования.

Из решения (1.21) с помощью кинематических соотношений (1.2) найдем полные деформации. Упругие составляющие деформации определим из закона Гука (1.4) с помощью (1.19). И, наконец, пластические

деформации найдем, как разницу между полными и упругими:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^p &= \frac{1}{4}(2C_1(1-2\nu)-7+6\nu) - \frac{C_2}{\beta^2} - \frac{1}{2}(1-2\nu)\ln\beta - \frac{5}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^2; \\ \varepsilon_{\theta\theta}^p &= \frac{1}{4}(2C_1(1-2\nu)+3-2\nu) + \frac{C_2}{\beta^2} - \frac{1}{2}(1-2\nu)\ln\beta + \frac{1}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^2; \\ \varepsilon_{zz}^p &= -(C_1(1-2\nu)-1+\nu) + (1-2\nu)\ln\beta + \frac{(1-2\nu)}{2}\Omega\beta^2.\end{aligned}\quad (1.22)$$

В дальнейшем аналогичным образом будем определять полные деформации и их составляющие в других пластических областях. Заметим, что хотя в области I напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz} равны между собой, соответствующие пластические деформации $\varepsilon_{\theta\theta}^p$ и ε_{zz}^p различаются.

Область II. В данной области напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$, тогда условие течения запишется как

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1. \quad (1.23)$$

Из ассоциированного закона пластического течения (1.8) следует:

$$\varepsilon_{rr}^p = -\varepsilon_{zz}^p, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = 0, \quad \varepsilon_{zz}^p = -\varepsilon_{zz}^e.$$

С учетом кинематических соотношений (1.2) получим:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{zz}^e, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e.$$

Используя закон Гука (1.4) и условие течения (1.23) найдем:

$$\varepsilon_{rr} + (1-\nu) = 2(1-\nu)\sigma_{rr} - 2\nu\sigma_{\theta\theta}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} - \nu = -2\nu\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}. \quad (1.24)$$

Из системы уравнений (1.24) и соотношений (1.23) выразим компоненты напряжений, как функции полных деформаций:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{1}{2}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{rr} + \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{rr} - 1.\end{aligned}\quad (1.25)$$

Преобразуем уравнение равновесия (1.5) с учетом (1.25):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - 2(1-\nu) \frac{u}{\beta^2} = -(1+\nu)(1-2\nu) \frac{1}{\beta} - 2(1+\nu)(1-2\nu)\Omega\beta.$$

Решая полученное уравнение, найдем перемещение:

$$u = C_3 \beta^{\sqrt{2(1-\nu)}} + C_4 \beta^{-\sqrt{2(1-\nu)}} + (1+\nu)\beta - \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{(7+2\nu)} \Omega \beta^3, \quad (1.26)$$

где C_3, C_4 — константы интегрирования.

Полные деформации найдем из (1.26) с помощью (1.2). Далее, используя (1.25) и (1.4), последовательно найдем напряжения и упругие деформации. Пластические составляющие определяются разницей между полными и упругими деформациями и имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^p &= \frac{\sqrt{1-\nu}}{\sqrt{2}} C_3 \beta^{-1+\sqrt{2}\sqrt{1-\nu}} - \frac{\sqrt{1-\nu}}{\sqrt{2}} C_4 \beta^{-1-\sqrt{2}\sqrt{1-\nu}} - \frac{3(1-2\nu)(1+\nu)}{(7+2\nu)} \Omega \beta^2; \\ \varepsilon_{\theta\theta}^p &= 0; \quad \varepsilon_{zz}^p = -\varepsilon_{rr}^p. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Интересно отметить, что в области II упругая деформация e_{rr} отличается от пластической ε_{rr}^p лишь на постоянное слагаемое $1+\nu$.

Область III. Напряжения соответствуют грани призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$ и условие пластичности запишется в следующей форме

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1.$$

С учетом последнего соотношения условие равновесия (1.5):

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta} - \Omega \beta.$$

Решение предыдущего уравнения:

$$\sigma_{rr} = C_5 + \ln \beta - \Omega \frac{\beta^2}{2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 1, \quad (1.28)$$

здесь C_5 — константа интегрирования.

Из ассоциированного закона течения (1.8), получим, что

$$\varepsilon_{rr}^p = -\varepsilon_{\theta\theta}^p, \quad \varepsilon_{zz}^p = 0.$$

Отсюда вследствие плоского деформированного состояния:

$$\varepsilon_{zz}^e = 0.$$

В результате найдем, что осевое напряжение определяется также, как и при чисто упругом деформировании:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}). \quad (1.29)$$

Преобразуем уравнение (1.10) с учетом (1.28) и (1.29):

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = (1-2\nu)(1+\nu)(1+2C_5 + 2\ln \beta - \Omega\beta^2).$$

Решая предыдущее уравнение, найдем перемещение:

$$u = \frac{C_6}{\beta} - (1-2\nu)(1+\nu) \left(\frac{1}{4} \Omega \beta^3 - \beta \ln \beta - C_5 \beta \right), \quad (1.30)$$

где C_6 — константа интегрирования.

Тогда пластические деформации примут вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^p &= -\frac{C_6}{\beta^2} - \frac{1}{4}(1-2\nu)(1+\nu)\Omega\beta^2 + (1-\nu^2), \\ \varepsilon_{\theta\theta}^p &= -\varepsilon_{rr}^p, \quad \varepsilon_{zz}^p = 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Область IV. В данной области имеет место неравенство $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$, условие пластичности Треска имеет вид:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1, \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1. \quad (1.32)$$

Тогда уравнение равновесия (1.5) запишется, как:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} = -\Omega\beta. \quad (1.33)$$

Из решения уравнения (1.33) с помощью (1.32) найдем распределение напряжений:

$$\sigma_{rr} = C_7 - \frac{\Omega}{2}\beta^2, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 1, \quad (1.34)$$

где C_7 — константа интегрирования.

Далее подставим (1.34) в (1.10) и получим:

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = 3(1-2\nu)C_7 - (1-2\nu) - \frac{3}{2}(1-2\nu)\Omega\beta^2.$$

Из последнего уравнения найдем перемещение:

$$u = C_8 \frac{1}{\beta} - \frac{3}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^3 - \frac{1}{2}(1-2\nu)(1-3C_7)\beta, \quad (1.35)$$

здесь C_8 — константа интегрирования.

Пластические деформации:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}^p &= -C_8 \frac{1}{\beta^2} - \frac{5}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^2 - \frac{1}{2}(1-(1-2\nu)C_7), \\
\varepsilon_{\theta\theta}^p &= C_8 \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^2 - \frac{1}{2}(1-(1-2\nu)C_7), \\
\varepsilon_{zz}^p &= \frac{1}{2}(1-2\nu)\Omega\beta^2 + (1-(1-2\nu)C_7).
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Область V. Напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$, условие пластичности запишется следующим образом:

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1. \tag{1.37}$$

Тогда из ассоциированного закона пластического следует:

$$\varepsilon_{rr}^p = 0, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = -\varepsilon_{zz}^p.$$

С помощью кинематических соотношений (1.2) получим:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{zz}^e.$$

Далее из закона Гука (1.4) и условия (1.37) получим систему

$$\varepsilon_{rr} = \sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{\theta\theta} - 1), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = (1-\nu)\sigma_{\theta\theta} - 2\nu\sigma_{rr} + (1-\nu)(\sigma_{\theta\theta} - 1).$$

Решая предыдущую систему уравнений, выразим напряжения через полные деформации:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{\theta\theta}, \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{rr} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{1}{2}, \\
\sigma_{zz} &= \sigma_{\theta\theta} - 1.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Преобразуем уравнение равновесия (1.5) с помощью (1.38):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{u}{\beta^2} = \frac{1}{2} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{1}{\beta} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega\beta$$

Из последнего уравнения найдем перемещение:

$$u = C_9 \beta^{\sqrt{\frac{1}{2(1-\nu)}}} + C_{10} \beta^{-\sqrt{\frac{1}{2(1-\nu)}}} + (1+\nu)\beta - 2 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(17-18\nu)} \Omega\beta^3 \tag{1.39}$$

где C_9, C_{10} — константы интегрирования.

Пластические деформации после преобразований примут вид:

$$\varepsilon_{rr}^p = 0, \varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{1}{2}C_9\beta^{-1+\sqrt{\frac{1}{2(1-\nu)}}} + \frac{1}{2}C_{10}\beta^{-1-\sqrt{\frac{1}{2(1-\nu)}}} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(17-18\nu)}\Omega\beta^2, \varepsilon_{zz}^p = -\varepsilon_{\theta\theta}^p. \quad (1.40)$$

Область VI. В данной пластической области напряжения соответствуют ребру призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} = \sigma_{zz}$, следовательно условие пластичности (1.7) принимает форму:

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1, \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1. \quad (1.41)$$

С помощью (1.41) уравнение равновесия (1.5) принимает вид:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\beta} = \frac{1}{\beta} - \Omega\beta.$$

Используя решение предыдущего уравнения и условие пластичности (1.41) найдем распределение напряжений:

$$\sigma_{rr} = C_{11} + \ln\beta - \Omega\frac{\beta^2}{2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 1, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr}, \quad (1.42)$$

где C_{11} — константа интегрирования.

Уравнение на перемещения получим из (1.10) с учетом (1.42):

$$\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{u}{\beta} = (1-2\nu)(3C_{11} + 1) + 3(1-2\nu)\ln\beta - \frac{3}{2}(1-2\nu)\Omega\beta^2.$$

Решение последнего уравнения:

$$u = \frac{C_{12}}{\beta} + \frac{1}{4}(1-2\nu)(6C_{11} - 1)\beta + \frac{3}{2}(1-2\nu)\beta\ln\beta - \frac{3}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^3, \quad (1.43)$$

здесь C_{12} — константа интегрирования.

Соотношения для пластических деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^p &= -\frac{C_{12}}{\beta^2} - \frac{5}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^2 + \frac{1}{2}(1-2\nu)\ln\beta + \frac{1}{4}(1-2\nu)(2C_{11} + 5) + \nu, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^p &= \frac{C_{12}}{\beta^2} + \frac{1}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^2 + \frac{1}{2}(1-2\nu)\ln\beta + \frac{1}{4}(1-2\nu)(2C_{11} - 1) - 1, \\ \varepsilon_{zz}^p &= \frac{1}{2}(1-2\nu)\Omega\beta^2 - (1-2\nu)\ln\beta - (1-2\nu)C_{11} + \nu. \end{aligned} \quad (1.44)$$

1.2.2 Стадия разгрузки и повторное пластическое течение

Пластические деформации, накопленные при активном нагружении, в дальнейшем уже не меняются. Далее используется обозначение:

$$\varepsilon_{ij}^{pr} = \varepsilon_{ij}^p(\Omega_{max}). \quad (1.45)$$

Преобразуем уравнение (1.5) с учетом соотношений (1.2), (1.45) и получим уравнение равновесия в перемещениях для стадии разгрузки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} u &= -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega \beta + p(\beta), \\ p(\beta) &= \frac{\partial \varepsilon_{rr}^{pr}}{\partial \beta} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}}{\partial \beta} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}^{pr}}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\beta} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} (\varepsilon_{rr}^{pr} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Поскольку слагаемое $p(\beta)$ в правой части уравнения (1.46) имеет разный вид в зависимости от пластической области, то уравнение необходимо решать отдельно в каждой области.

Общее решение неоднородного уравнения (1.46) имеет вид:

$$u = B_1 u_1 + B_2 u_2 - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega \beta^3 + u_2 \int u_1 \frac{p(\beta)}{W} d\beta - u_1 \int u_2 \frac{p(\beta)}{W} d\beta, \quad (1.47)$$

где B_1, B_2 — константы интегрирования, u_1, u_2 — фундаментальная система решений однородного уравнения (1.46), а W — её вронскиан:

$$u_1 = \beta, \quad u_2 = \beta^{-1}, \quad W = -2\beta^{-1}.$$

Тогда решение (1.47) примет вид:

$$u = B_1 \beta + B_2 \frac{1}{\beta} - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega \beta^3 + \frac{\beta}{2} \int p(\beta) d\beta - \frac{1}{2\beta} \int \beta^2 p(\beta) d\beta. \quad (1.48)$$

Отсюда с учетом (1.22), (1.27), (1.31), (1.36), (1.40), (1.44) получим распределение напряжений при разгрузке в каждой из областей

Область I:

$$\begin{aligned} u &= B_1 \beta + B_2 \frac{1}{\beta} - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega \beta^3 + \\ &+ \frac{3(1-2\nu)}{4} \beta - \frac{3(1-2\nu)}{2} \beta \ln \beta - \frac{(1-2\nu)^2}{(1-\nu)} \Omega_{max} \beta^3. \end{aligned}$$

Область II:

$$u = B_3\beta + B_4 \frac{1}{\beta} - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega\beta^3 + \\ + C_3\beta^{\sqrt{2-2\nu}} + C_4\beta^{-\sqrt{2-2\nu}} - \frac{9(1+\nu)(1-2\nu)^2}{8(1-\nu)(7+2\nu)} \Omega_{\max}\beta^3.$$

Область III

$$u = B_5\beta + B_6 \frac{1}{\beta} - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega\beta^3 - \\ - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2} \beta + (1+\nu)(1-2\nu)\beta \ln \beta - \frac{(1-2\nu)^2(1+\nu)}{8(1-\nu)} \Omega_{\max}\beta^3$$

Область IV

$$u = B_7\beta + B_8 \frac{1}{\beta} - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega\beta^3 - \frac{(1-2\nu)^2}{4(1-\nu)} \Omega_{\max}\beta^3.$$

Область V

$$u = B_9\beta + B_{10} \frac{1}{\beta} - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega\beta^3 + \\ + C_9\beta^{\sqrt{2-2\nu}} + C_{10}\beta^{-\sqrt{2-2\nu}} + \frac{(1-2\nu)^2(1+\nu)}{8(1-\nu)(17-18\nu)} \Omega_{\max}\beta^3.$$

Область VI

$$u = B_{11}\beta + B_{12} \frac{1}{\beta} - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega\beta^3 - \\ - \frac{3(1-2\nu)}{4} \beta + \frac{3(1-2\nu)}{2} \beta \ln \beta - \frac{(1-2\nu)^2}{4(1-\nu)} \Omega_{\max}\beta^3.$$

В предыдущих шести выражениях B_1, \dots, B_{12} — константы интегрирования. Далее с помощью полученных соотношений последовательно вычисляются полные и упругие деформации, а также напряжения. Полученное решение справедливо до скорости вращения Ω_{sp} . В этот момент на внутренней поверхности цилиндра вновь выполнится условие текучести (1.7) (но в другом виде) и начнется повторное пластическое течение.

Повторное пластическое течение. Суммарные пластические деформации ε_{rr}^p состоят из вторичных ε_{rr}^{sp} и накопленных на стадии нагрузки ($\varepsilon_{rr}^{pr} = \varepsilon_{rr}^p(\Omega_{\max})$) пластических деформаций:

$$\varepsilon_{rr}^p = \varepsilon_{rr}^{sp} + \varepsilon_{rr}^{pr}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^{sp} + \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}; \quad \varepsilon_{zz}^p = \varepsilon_{zz}^{sp} + \varepsilon_{zz}^{pr}. \quad (1.49)$$

В общем случае при повторном пластическом течении, как и при нагружении, появляется 6 пластических областей, которые занимают весь цилиндр. Обозначим их римскими цифрами от VII до XII. Области располагаются в следующем порядке: VII, VIII, X, XI, XII, IX. Разобьем области первичного и повторного течения на пары в порядке их расположения в цилиндре: (I, VII), (II, VIII), и т.д. Области в каждой паре соответствуют противоположным ребрам или граням призмы Треска. Например, если в области I справедливо неравенство $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$, то в области VII $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. Вследствие этого приращения пластических деформаций при нагружении и при разгрузке имеют противоположные знаки.

Как будет показано далее уравнения относительно перемещений и напряжений в областях VIII, IX, XI зависят от накопленных пластических деформаций и их производных по радиальной координате. Вследствие этого необходимо отдельно искать решение в каждом непустом пересечении указанных областей с областями первичного пластического течения I–VI и сращивать полученные решения на границах. В оставшихся областях VII, X, XII такой сложности не возникает, поскольку в них накопленные деформации ε_{ij}^{pr} влияют только на распределение вторичных пластических деформаций ε_{ij}^{sp} . Рассмотрим области повторного пластического течения.

Область VII

Напряжения в данной области удовлетворяют неравенству $\sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$. Отсюда следует условие текучести в виде:

$$\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 1, \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1. \quad (1.50)$$

Уравнение равновесия (1.5) с учетом (1.50) принимает форму:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta} - \Omega \beta.$$

Из решения последнего уравнения с учетом условия пластического течения (1.50) найдем распределение напряжений:

$$\sigma_{rr} = A_1 + \ln \beta - \Omega \frac{\beta^2}{2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = \sigma_{rr} + 1. \quad (1.51)$$

где A_1 — константа интегрирования.

Теперь из (1.10) с учетом (1.51) найдем уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = (1 - 2\nu)(3A_1 + 2) + 3(1 - 2\nu) \ln \beta - \frac{3}{2}(1 - 2\nu)\Omega\beta^2.$$

Отсюда перемещение:

$$u = \frac{A_2}{\beta} + \frac{1}{4}(1 - 2\nu)(6A_1 + 1)\beta + \frac{3}{2}(1 - 2\nu)\beta \ln \beta - \frac{3}{8}(1 - 2\nu)\Omega\beta^3, \quad (1.52)$$

где A_2 — константа интегрирования.

Далее из (1.52) и (1.2) найдем полные деформации, а из (1.51) и (1.4) найдем упругие деформации. С помощью (1.49) и (1.2) определим вторичные пластические деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{sp} &= -\frac{A_2}{\beta^2} + \frac{(7 - 6\nu + (2 - 4\nu)A_1)}{4} + \frac{(1 - 2\nu)}{2} \ln \beta - \frac{5(1 - 2\nu)}{8} \Omega \beta^2 - \varepsilon_{rr}^{pr}; \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{sp} &= \frac{A_2}{\beta^2} - \frac{(3 - 2\nu - (2 - 4\nu)A_1)}{4} + \frac{(1 - 2\nu)}{2} \ln \beta + \frac{(1 - 2\nu)}{8} \Omega \beta^2 - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}; \\ \varepsilon_{zz}^{sp} &= -(1 - \nu + (1 - 2\nu)A_1) - (1 - 2\nu) \ln \beta + \frac{(1 - 2\nu)}{2} \Omega \beta^2 - \varepsilon_{zz}^{pr}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Область VIII

Имеет место неравенство $\sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$, следовательно условие текучести принимает вид:

$$\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 1. \quad (1.54)$$

Из ассоциированного закона течения (1.8) и (1.54) следует:

$$\varepsilon_{rr}^{sp} = -\varepsilon_{zz}^{sp}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{sp} = 0.$$

Отсюда с помощью кинематических соотношений (1.2) и разделения деформаций (1.49) найдем:

$$\varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{zz}^e = \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr} - \varepsilon_{zz}^{pr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^e = \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}.$$

Далее используя закон Гука (1.4) и условие (1.54) получим:

$$\begin{aligned} 2(1-\nu)\sigma_{rr} - 2\nu\sigma_{\theta\theta} &= \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr} - \varepsilon_{zz}^{pr} - (1-\nu), \\ \sigma_{\theta\theta} - 2\nu\sigma_{rr} &= \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr} + \nu. \end{aligned}$$

Решая вышеприведенную систему, найдем напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr}) + \\ &+ \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}) - \frac{1}{2} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{zz}^{pr}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr}) + \\ &+ \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}) - \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{zz}^{pr}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Уравнение равновесия (1.5) с учетом (1.55) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - 2(1-\nu) \frac{u}{\beta^2} &= (1+\nu)(1-2\nu) \frac{1}{\beta} - 2(1+\nu)(1-2\nu)\Omega\beta + q(\beta); \\ q(\beta) &= \left(\frac{\partial \varepsilon_{rr}^{pr}}{\partial \beta} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}^{pr}}{\partial \beta} \right) + 2\nu \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}}{\partial \beta} + (1-2\nu) \left(\frac{\varepsilon_{rr}^{pr}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{zz}^{pr}}{\beta} \right) - 2(1-2\nu) \frac{\varepsilon_{\theta\theta}^{pr}}{\beta}. \end{aligned}$$

Решение предыдущего уравнения представлено ниже:

$$\begin{aligned} u &= A_3 \beta^{\sqrt{2(1-\nu)}} + A_4 \beta^{-\sqrt{2(1-\nu)}} - (1+\nu)\beta - \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{(7+2\nu)} \Omega \beta^3 + J_1(\beta); \\ J_1(\beta) &= \beta^{-\sqrt{2(1-\nu)}} \int \frac{\beta^{\sqrt{2(1-\nu)}} q d\beta}{W_1} - \beta^{\sqrt{2(1-\nu)}} \int \frac{\beta^{-\sqrt{2(1-\nu)}} q d\beta}{W_1}, \quad W_1 = -\frac{2\sqrt{2-2\nu}}{\beta}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

В частности, в пересечении с областью I решение примет вид:

$$\begin{aligned} u^{VIII \cap I} &= A_3^{(1)} \beta^{\sqrt{2(1-\nu)}} + A_4^{(1)} \beta^{-\sqrt{2(1-\nu)}} + \frac{C_2}{\beta} - \frac{3}{4} (3 + 2\nu + (-2 + 4\nu)C_1) \beta - \\ &- \frac{5(1-2\nu)^2}{8(7+2\nu)} \Omega_{\max} \beta^3 - \frac{3}{2} (1-2\nu) \beta \log \beta - 2 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(7+2\nu)} \Omega \beta^3. \end{aligned}$$

С другой стороны, в пересечении с областью II функция $J_1(\beta)$ в (1.56) обращается в ноль и решение (1.56) существенно упрощается:

$$u^{VIII \cap II} = A_3^{(2)} \beta^{\sqrt{2(1-\nu)}} + A_4^{(2)} \beta^{-\sqrt{2(1-\nu)}} - (1+\nu)\beta - \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{(7+2\nu)} \Omega \beta^3.$$

Область IX

Данная область соответствует грани призмы Треска $\sigma_{rr} > \sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta}$, условие пластичности принимает вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 1. \quad (1.57)$$

С учетом последнего соотношения условие равновесия (1.5)

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} = -\frac{1}{\beta} - \Omega \beta.$$

Решение предыдущего уравнения представлено ниже

$$\sigma_{rr} = A_5 - \ln \beta - \Omega \beta^2 / 2, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - 1, \quad (1.58)$$

где A_5 — константа интегрирования.

Из ассоциированного закона течения (1.8) и (1.57), получим, что

$$\varepsilon_{rr}^{sp} = -\varepsilon_{\theta\theta}^{sp}, \quad \varepsilon_{zz}^{sp} = 0.$$

Отсюда вследствие плоского деформированного состояния

$$\varepsilon_{zz}^e = -\varepsilon_{zz}^{pr}.$$

В результате найдем, что осевое напряжение определяется как

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \varepsilon_{zz}^{pr}. \quad (1.59)$$

Преобразуем уравнение (1.10) с учетом (1.58) и (1.59)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} &= (1-2\nu)(1+\nu)(2A_5-1) - 2(1-2\nu)(1+\nu) \ln \beta - \\ &- (1-2\nu)(1+\nu)\Omega\beta^2 - (1-2\nu)\varepsilon_{zz}^{pr} \end{aligned}$$

Решая предыдущее уравнение, найдем перемещение:

$$\begin{aligned} u &= \frac{A_6}{\beta} + (1-2\nu)(1+\nu)A_5\beta - (1-2\nu)(1+\nu)\beta \ln \beta - \\ &- \frac{1}{4}(1-2\nu)(1+\nu)\Omega\beta^3 - (1-2\nu)\frac{1}{\beta} \int \beta \varepsilon_{zz}^{pr} d\beta, \end{aligned} \quad (1.60)$$

здесь A_6 — константа интегрирования.

Заметим, что в пересечении с областью III в полученном решении (1.60) последнее слагаемое обнулится, т.к. в области III $\varepsilon_{zz}^{pr} = 0$.

Область X

Напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{zz} > \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$. Условие пластического течения:

$$\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 1, \quad \sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta} = 1, \quad (1.61)$$

Тогда уравнение равновесия (1.5) запишется аналогично области IV (уравнение (1.33)). Из решения уравнения (1.33) с помощью (1.61) найдем распределение напряжений:

$$\sigma_{rr} = A_7 - \Omega \frac{\beta^2}{2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} + 1. \quad (1.62)$$

где A_7 — константа интегрирования.

Далее подставим (1.62) в (1.10) и получим:

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = 3(1-2\nu)A_7 + (1-2\nu) - \frac{3}{2}(1-2\nu)\Omega\beta^2.$$

Из последнего уравнения найдем распределение перемещения

$$u = A_8 \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2}(1-2\nu)(1+3A_7)\beta - \frac{3}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^3, \quad (1.63)$$

где A_8 — константа интегрирования.

Пластические деформации определяются зависимостями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{sp} &= -A_8 \frac{1}{\beta^2} - \frac{5}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^2 + \frac{1}{2}(1+(1-2\nu)A_7) - \varepsilon_{rr}^{pr}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{sp} &= A_8 \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^2 + \frac{1}{2}(1+(1-2\nu)A_7) - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}, \\ \varepsilon_{zz}^{sp} &= \frac{1}{2}(1-2\nu)\Omega\beta^2 - (1+(1-2\nu)A_7) - \varepsilon_{zz}^{pr}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Область XI

Имеет место неравенство $\sigma_{zz} > \sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$, условие пластичности Треска принимает вид:

$$\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta} = 1. \quad (1.65)$$

Тогда из ассоциированного закона течения (1.8) следует

$$\varepsilon_{rr}^{sp} = 0, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{sp} = -\varepsilon_{zz}^{sp}.$$

Следующим шагом с помощью кинематических соотношений (1.2) и разделения деформаций (1.49) получим:

$$\varepsilon_{rr}^e = \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{zz}^e = \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr} - \varepsilon_{zz}^{pr}.$$

Далее из закона Гука (1.4) и условия (1.65) получим уравнения

$$\sigma_{rr} - 2\nu\sigma_{\theta\theta} = \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr} + \nu, \quad -2\nu\sigma_{rr} + 2(1-\nu)\sigma_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr} - \varepsilon_{zz}^{pr} - (1-\nu).$$

Решая предыдущую систему, выразим напряжения через полные деформации и накопленные пластические деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr}) + \\ &+ \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}) - \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{zz}^{pr}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr}) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}) - \frac{1}{2} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{zz}^{pr} - \frac{1}{2}, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{\theta\theta} + 1. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Преобразуем уравнение равновесия (1.5) с помощью (1.66) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{u}{\beta^2} &= -\frac{1}{2} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{1}{\beta} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega\beta + s(\beta) \\ s(\beta) &= \frac{\partial \varepsilon_{rr}^{pr}}{\partial \beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}}{\partial \beta} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}^{pr}}{\partial \beta} \right) + \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{\varepsilon_{rr}^{pr}}{\beta} - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \left(\frac{\varepsilon_{\theta\theta}^{pr}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{zz}^{pr}}{\beta} \right) \end{aligned}$$

Решая последнее уравнение, получим распределение перемещения

$$\begin{aligned} u &= A_9 \beta^{\sqrt{\frac{1}{2(1-\nu)}}} + A_{10} \beta^{-\sqrt{\frac{1}{2(1-\nu)}}} - (1+\nu)\beta - 2 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(17-18\nu)} \Omega\beta^3 + J_2(\beta); \\ J_2(\beta) &= \beta^{-\sqrt{\frac{1}{2(1-\nu)}}} \int \frac{\beta^{\sqrt{\frac{1}{2(1-\nu)}}} s(\beta)}{W_2} d\beta - \beta^{\sqrt{\frac{1}{2(1-\nu)}}} \int \frac{\beta^{-\sqrt{\frac{1}{2(1-\nu)}}} s(\beta)}{W_2} d\beta, \end{aligned} \quad (1.67)$$

В (1.67) $W_2 = -\sqrt{\frac{2}{(1-\nu)}} \frac{1}{\beta}$. Следует отметить, что в пересечении XI \cap

V функция $J_2(\beta)$ обращается в ноль.

Область XII

В данной пластической области напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{rr} = \sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta}$, следовательно условие Треска принимает вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 1; \quad \sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta} = 1. \quad (1.68)$$

Уравнение равновесия (1.5) с учетом (1.68) представлено ниже

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} = -\frac{1}{\beta} - \Omega \beta.$$

Используя решение предыдущего уравнения и условие (1.68) можно получить распределение напряжений

$$\sigma_{rr} = A_{11} - \ln \beta - \Omega \beta^2 / 2, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - 1, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr}. \quad (1.69)$$

Уравнение на перемещение следует из (1.10) с учетом (1.69)

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = (1-2\nu)(3A_{11} - 1) - 3(1-2\nu)\ln \beta - \frac{3}{2}(1-2\nu)\Omega \beta^2$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$u = \frac{A_{12}}{\beta} + \frac{1}{4}(1-2\nu)(6A_{11} + 1)\beta - \frac{3}{8}(1-2\nu)\Omega \beta^3 - \frac{3}{2}(1-2\nu)\beta \ln \beta. \quad (1.70)$$

В (1.69) и (1.70) A_{11}, A_{12} — константы интегрирования.

Из (1.70), (1.49), (1.4) и (1.2) можно найти

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{sp} &= -\frac{A_{12}}{\beta^2} + \frac{1}{4}(1-2\nu)(1+2A_{11}) - \frac{1}{2}(3-4\nu) - \\ &\quad - \frac{1}{2}(1-2\nu)\ln \beta - \frac{5}{8}(1-2\nu)\Omega \beta^2 - \varepsilon_{rr}^{pr}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{sp} &= \frac{A_{12}}{\beta^2} + \frac{1}{4}(1-2\nu)(1+2A_{11}) + 1 - \\ &\quad - \frac{1}{2}(1-2\nu)\ln \beta + \frac{1}{8}(1-2\nu)\Omega \beta^2 - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}, \\ \varepsilon_{zz}^{sp} &= -(1-2\nu)A_{11} - \nu + (1-2\nu)\ln \beta + \frac{1}{2}(1-2\nu)\Omega \beta^2 - \varepsilon_{zz}^{pr}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

1.2.3 Примеры расчетов

Рассмотрим следующие параметры задачи: $\delta = 0.2, \nu = 0.3$. Примем, что максимальная скорость вращения цилиндра $\Omega_{max} = 18.5597$. При скоростях $0 \leq \Omega \leq \Omega_p$ цилиндр деформируется упруго. График зависимости скорости Ω_p от δ для вращающегося цилиндра и диска при $\nu = 0.3$ представлен на рис. 1.2. При выбранных параметрах пластическое течение в цилиндре начнется при $\Omega_p \approx 3.0664$. Эволюция пластических областей изображена на рис. 1.3. Упругое решение (1.13)–(1.15) для скорости вращения $\Omega = \Omega_p$ изображено на рис. 1.4 в виде графиков напряжений.

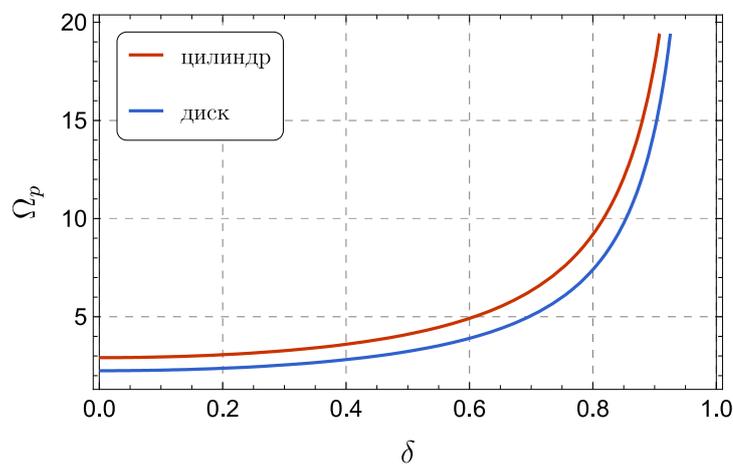


Рис. 1.2 — Зависимость Ω_p от δ при $\nu = 0.3$.

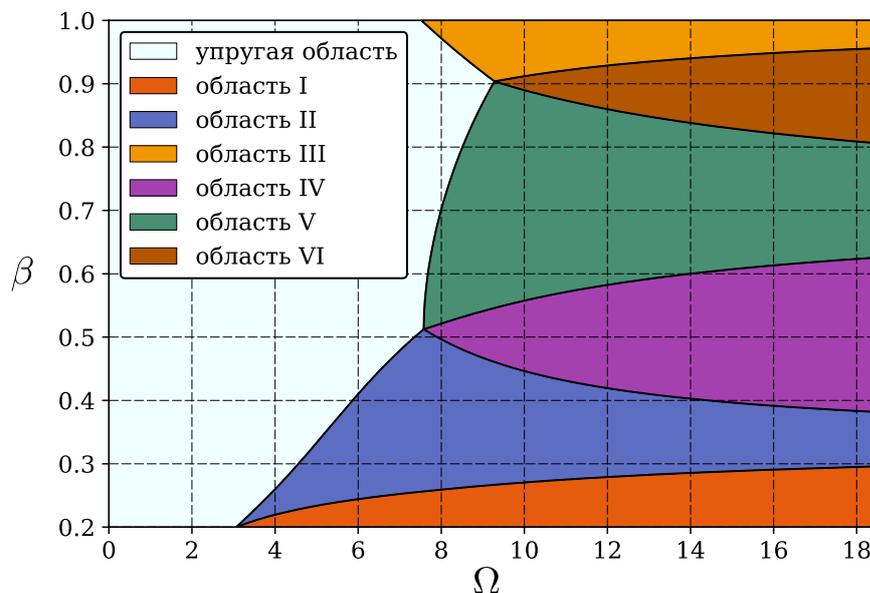


Рис. 1.3 — Эволюция пластических областей на стадии нагрузки.

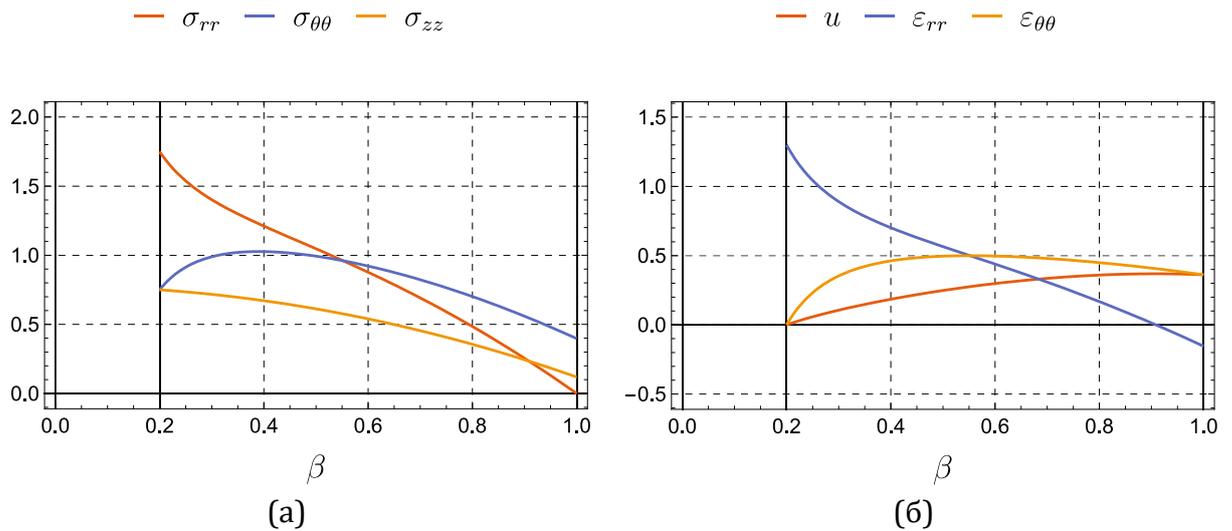


Рис. 1.4 — Упругое решение при $\Omega = \Omega_p$:

(а) напряжения; (б) перемещение и полные деформации.

Упругопластическое деформирование цилиндра происходит вплоть до скорости вращения Ω_{fp} , после чего цилиндр полностью переходит в состояние пластичности. При скоростях $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_{fp}$ появляются новые пластические области. Весь процесс накопления пластических деформаций состоит из четырех стадий: (Ω_p, Ω_1) , (Ω_1, Ω_2) , (Ω_2, Ω_{fp}) , $(\Omega_{fp}, \Omega_{max})$, каждая из которых отличается своей конфигурацией областей. Решение на каждом этапе пластического течения содержит неизвестные константы интегрирования C_i, D_i , и координаты β_i границ между областями. Для вычисления указанных величин используются граничные условия задачи (1.11), а также по 3 условия непрерывности на каждой границе. Подходящий выбор трех условий на границе обеспечивает на ней непрерывность всех функций. Получаемая система алгебраических уравнений является линейной относительно C_i, D_i и нелинейной относительно β_i . Ее решение осуществляется следующим образом. На каждом интервале часть уравнений выбирается для точного выражения констант интегрирования через координаты β_i , скорость вращения Ω , а также параметры задачи δ, ν . Получаемые формулы являются крайне громоздкими и приводиться не будут. Далее в оставшиеся уравнения

подставляются выражения для C_i, D_i и числовые значения параметров δ, ν . В результате имеем систему нелинейных уравнений вида $F_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \Omega) = 0$, которая решается с помощью метода Ньютона для выбранных значений скорости Ω внутри интервала. Вычисление $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_{fp}$ и $\tilde{\delta}$ требует дополнительных условий. На интервале $\Omega_p < \Omega \leq \Omega_1$ имеем:

- Пластическая область I ($\delta \leq \beta \leq \beta_1$);
- Пластическая область II ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$);
- Упругая область ($\beta_2 \leq \beta \leq 1$).

Найденное в разделе 3 решение для указанных областей содержит неизвестные константы интегрирования $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2$ а также границы β_1, β_2 . Для вычисления перечисленных величин составим систему:

$$\begin{aligned} \beta = \delta : u^I &= 0, \\ \beta = \beta_1 : u^I &= u^{II}, \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{II}, \sigma_{\theta\theta}^I = \sigma_{\theta\theta}^{II}, \\ \beta = \beta_2 : u^{II} &= u^{el}, \sigma_{rr}^{II} = \sigma_{rr}^{el}, \sigma_{rr}^{el} - \sigma_{zz}^{el} = 1, \\ \beta = 1 : \sigma_{rr}^{el} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее верхний индекс в названии функции обозначает область. Уравнения №6 и 7 выберем для расчета неизвестных границ β_1, β_2 .

При скорости вращения Ω_1 либо на внешней границе цилиндра $\beta = 1$, либо на упругопластической границе $\beta = \beta_2$ появится новая область (области) пластического течения. Как было сказано ранее, какой из двух вариантов будет реализован зависит от параметра δ . Для определения переходного значения $\tilde{\delta}$ составим нелинейную систему относительно $\beta_1, \beta_2, \Omega_1, \tilde{\delta}$:

$$\begin{aligned} \beta = \beta_2 : \sigma_{\theta\theta}^{II} = \sigma_{rr}^{II}, \sigma_{rr}^{II} = \sigma_{rr}^{el}, \sigma_{rr}^{el} - \sigma_{zz}^{el} &= 1, \\ \beta = 1 : \sigma_{\theta\theta}^{el} - \sigma_{rr}^{el} &= 1. \end{aligned} \tag{1.72}$$

Решая вышеприведенную систему, найдем, что $\tilde{\delta} \cong 0.1908$. Таким образом для выбранного значения $\delta = 0.2 > \tilde{\delta}$ при скорости вращения Ω_1

на внешней границе цилиндра $\beta=1$ выполнится условие пластичности в виде $\sigma_{\theta\theta}^{el} - \sigma_{rr}^{el} = 1$ и появится область III. Для определения Ω_1 воспользуемся упрощенной системой (1.72), из которой исключим первое уравнение. Ее решение: $\beta_1 \cong 0.256, \beta_2 \cong 0.509, \Omega_1 \cong 7.5206$. Решение на первой стадии пластического течения представлено на рис. 1.5 в виде графиков напряжений и пластических деформаций для скорости вращения $\Omega=7$.

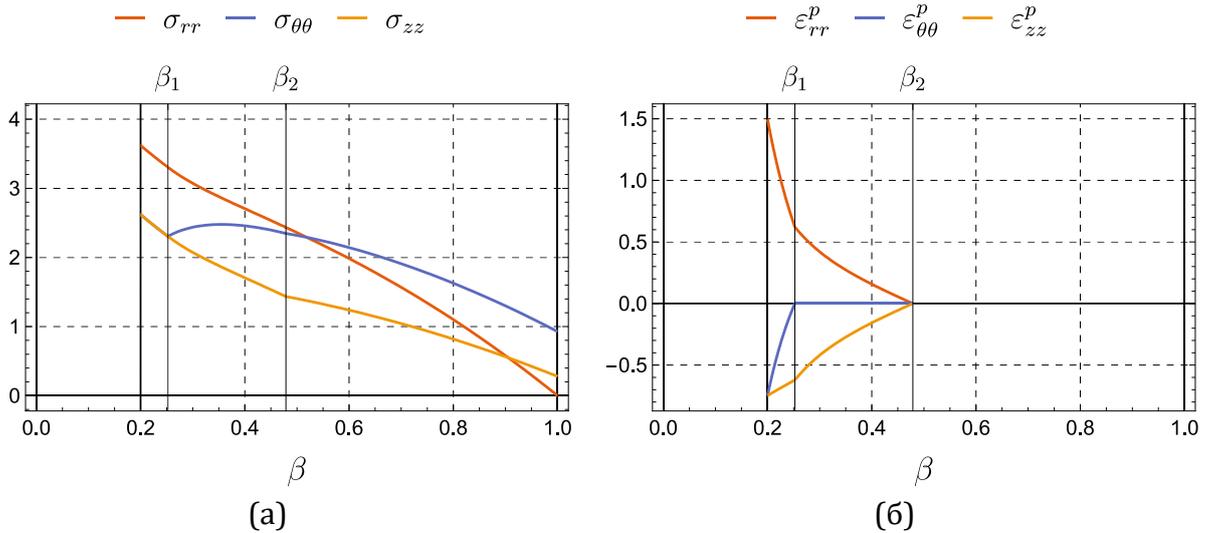


Рис. 1.5 — Решение при $\Omega=7$: (а) напряжения; (б) пластические деформации.

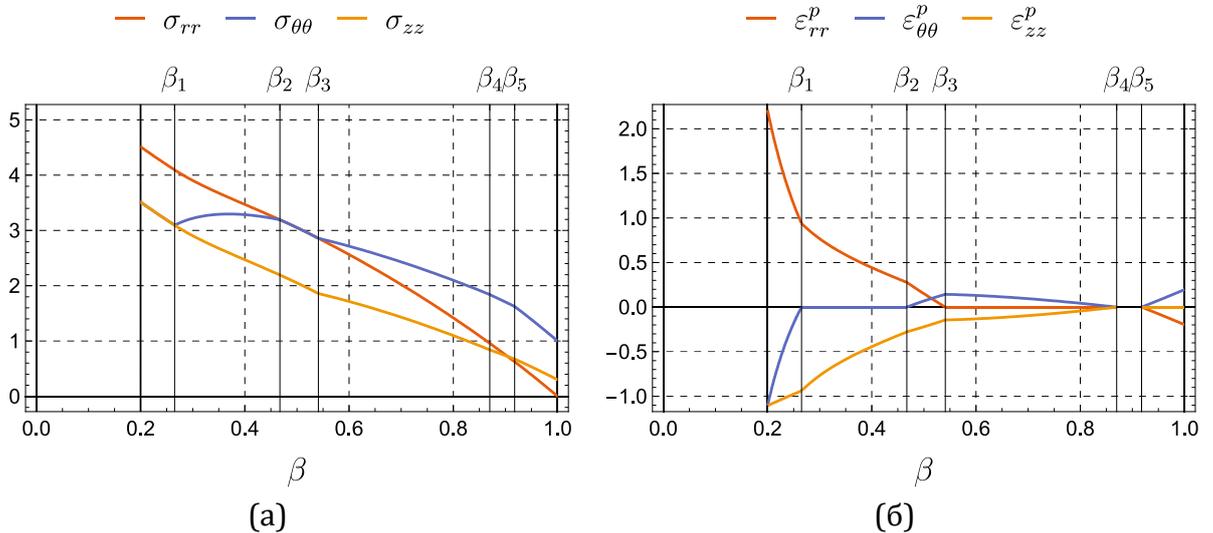


Рис. 1.6 — Решение при $\Omega=9$: (а) напряжения; (б) пластические деформации.

В следующем интервале скоростей $\Omega_1 < \Omega \leq \Omega_2$ цилиндр состоит из перечисленных ниже областей:

- Пластическая область I ($\delta \leq \beta \leq \beta_1$);
- Пластическая область II ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$);

- Упругая область ($\beta_2 \leq \beta \leq \beta_3$);
- Пластическая область III ($\beta_3 \leq \beta \leq 1$).

Решение в данных областях содержит неизвестные константы интегрирования $C_1 - C_6, D_1, D_2$ и координаты границ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Для их вычисления воспользуемся системой

$$\begin{aligned} \beta = \delta : u^I &= 0, \\ \beta = \beta_1 : u^I &= u^{II}, \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{II}, \sigma_{\theta\theta}^I = \sigma_{\theta\theta}^{II}, \\ \beta = \beta_2 : u^{II} &= u^{el}, \sigma_{rr}^{II} = \sigma_{rr}^{el}, \sigma_{rr}^{el} - \sigma_{zz}^{el} = 1, \\ \beta = \beta_3 : u^{el} &= u^{III}, \sigma_{rr}^{el} = \sigma_{rr}^{III}, \sigma_{\theta\theta}^{el} - \sigma_{rr}^{el} = 1, \\ \beta = 1 : \sigma_{rr}^{III} &= 0. \end{aligned}$$

В данной системе уравнений №5, 6 и 9 используются для вычисления границ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. При скорости Ω_2 на упругопластической границе $\beta = \beta_2$ радиальное и тангенциальное напряжения станут равны, что приведет к появлению пластических областей IV и V. Для вычисления Ω_2 составим систему нелинейных уравнений, в которую в качестве неизвестных также входят координаты $\beta_1, \beta_2, \beta_3$:

$$\begin{aligned} \beta = \beta_2 : u^{II} &= u^{el}, \sigma_{\theta\theta}^{II} = \sigma_{rr}^{II}, \sigma_{rr}^{II} = \sigma_{rr}^{el}, \\ \beta = \beta_3 : \sigma_{rr}^{el} &= \sigma_{rr}^{III}, \end{aligned}$$

Решение приведенной системы:

$$\beta_1 \cong 0.256, \beta_2 \cong 0.512, \beta_3 \cong 0.997, \Omega_2 \cong 7.5773.$$

Как видим скорости Ω_1, Ω_2 различаются незначительно, поэтому области III, IV и V появляются практически одновременно.

В интервале от Ω_2 до Ω_{fp} цилиндр состоит из областей:

- Пластическая область I ($\delta \leq \beta \leq \beta_1$);
- Пластическая область II ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$);
- Пластическая область IV ($\beta_2 \leq \beta \leq \beta_3$);
- Пластическая область V ($\beta_3 \leq \beta \leq \beta_4$);

- Упругая область ($\beta_4 \leq \beta \leq \beta_5$);
- Пластическая область III ($\beta_5 \leq \beta \leq 1$).

Для вычисления неизвестных констант интегрирования $C_1 - C_{10}$, D_1, D_2 и координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ сформулируем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \beta = \delta : u^I &= 0, \\
 \beta = \beta_1 : u^I &= u^{II}, \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{II}, \sigma_{\theta\theta}^I = \sigma_{\theta\theta}^{II}, \\
 \beta = \beta_2 : u^{II} &= u^{IV}, \sigma_{rr}^{II} = \sigma_{rr}^{IV}, \sigma_{\theta\theta}^{II} = \sigma_{\theta\theta}^{IV}, \\
 \beta = \beta_3 : u^{IV} &= u^V, \sigma_{rr}^{IV} = \sigma_{rr}^V, \sigma_{\theta\theta}^{IV} = \sigma_{\theta\theta}^V, \\
 \beta = \beta_4 : u^V &= u^{el}, \sigma_{rr}^V = \sigma_{rr}^{el}, \sigma_{\theta\theta}^{el} - \sigma_{zz}^{el} = 1, \\
 \beta = \beta_5 : u^{el} &= u^{III}, \sigma_{rr}^{el} = \sigma_{rr}^{III}, \sigma_{\theta\theta}^{el} - \sigma_{rr}^{el} = 1, \\
 \beta = 1 : \sigma_{rr}^{III} &= 0.
 \end{aligned}$$

При $\Omega = \Omega_{fp}$ упругая область исчезает и появляется область пластического течения VI. Для определения Ω_{fp} используем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \beta = \beta_1 : \sigma_{\theta\theta}^I &= \sigma_{\theta\theta}^{II}, \\
 \beta = \beta_2 : \sigma_{\theta\theta}^{II} &= \sigma_{\theta\theta}^{IV}, \\
 \beta = \beta_3 : \sigma_{\theta\theta}^{IV} &= \sigma_{\theta\theta}^V, \\
 \beta = \beta_4 : u^V &= u^{el}, \\
 \beta = \beta_5 : \sigma_{rr}^{el} &= \sigma_{rr}^{III}, \\
 \beta_4 &= \beta_5.
 \end{aligned}$$

Решая вышеприведенную систему, найдем предельную скорость $\Omega_{fp} \cong 9.2798$, при этом координаты границ имеют следующие значения

$$\beta_1 \cong 0.267, \beta_2 \cong 0.461, \beta_3 \cong 0.546, \beta_4 = \beta_5 \cong 0.904.$$

Решение для интервала $\Omega_2 < \Omega \leq \Omega_{fp}$ представлено на рис. 1.6 в виде графиков напряжений и пластических деформаций для скорости $\Omega = 9$.

При скоростях выше предельной цилиндр полностью находится в пластическом состоянии и делится на следующие области:

- Область I ($\delta \leq \beta \leq \beta_1$);
- Область II ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$);

- Область IV ($\beta_2 \leq \beta \leq \beta_3$);
- Область V ($\beta_3 \leq \beta \leq \beta_4$);
- Область VI ($\beta_4 \leq \beta \leq \beta_5$);
- Область III ($\beta_5 \leq \beta \leq 1$).

Константы интегрирования $C_1 - C_{12}$ и координаты $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ границ между областями вычисляются с помощью системы уравнений:

$$\begin{aligned} \beta = \delta : u^I &= 0; & \beta = \beta_1 : u^I &= u^{II}, \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{II}, \sigma_{\theta\theta}^I = \sigma_{\theta\theta}^{II}; \\ \beta = \beta_2 : u^{II} &= u^{IV}, \sigma_{rr}^{II} = \sigma_{rr}^{IV}, \sigma_{\theta\theta}^{II} = \sigma_{\theta\theta}^{IV}; \\ \beta = \beta_3 : u^{IV} &= u^V, \sigma_{rr}^{IV} = \sigma_{rr}^V, \sigma_{\theta\theta}^{IV} = \sigma_{\theta\theta}^V; \\ \beta = \beta_4 : u^V &= u^{VI}, \sigma_{rr}^V = \sigma_{rr}^{VI}, \sigma_{\theta\theta}^V = \sigma_{\theta\theta}^{VI}; \\ \beta = \beta_5 : u^{VI} &= u^{III}, \sigma_{rr}^{VI} = \sigma_{rr}^{III}, \sigma_{zz}^{VI} = \sigma_{zz}^{III}; & \beta = 1 : \sigma_{rr}^{III} &= 0. \end{aligned}$$

Введем обозначения $\hat{\beta}_i = \beta_i(\Omega_{max})$, $\hat{C}_i = C_i(\Omega_{max})$. Установлено, что

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &\cong 0.296, \hat{\beta}_2 \cong 0.3815, \hat{\beta}_3 \cong 0.6259, \hat{\beta}_4 \cong 0.8057, \hat{\beta}_5 \cong 0.9562; \\ \hat{C}_1 &\cong 7.8444, \hat{C}_2 \cong -0.2184, \hat{C}_3 \cong 4.0499, \hat{C}_4 \cong -0.1204, \hat{C}_5 \cong 9.2798, \hat{C}_6 \cong 0.0148, \\ \hat{C}_7 &\cong 8.9448, \hat{C}_8 \cong -0.2072, \hat{C}_9 \cong 3.0424, \hat{C}_{10} \cong -0.1568, \hat{C}_{11} \cong 9.2798, \hat{C}_{12} \cong -0.259. \end{aligned}$$

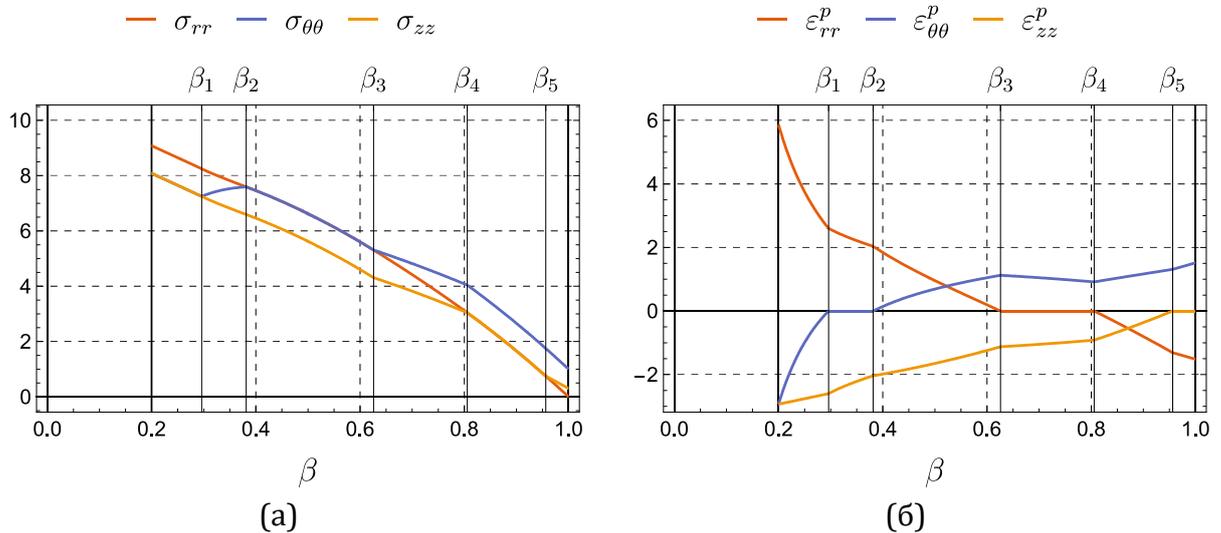


Рис. 1.7 — Решение при $\Omega = \Omega_{max}$: (а) напряжения; (б) пластические деформации.

На рис. 1.7 показаны напряжения и пластические деформации при $\Omega = \Omega_{max}$. Тангенциальное напряжение в среднем является максимальным в цилиндре, а осевое — минимальным. Распределение радиального и осевого напряжения близко к линейному. Максимумы напряжений и

пластических деформаций достигаются вблизи жесткого включения.

Когда скорость вращения начинает уменьшаться в цилиндре происходит упругая разгрузка, в ходе которой первичные пластические деформации уже не меняются. Несмотря на то, что цилиндр снова деформируется чисто упруго, решение необходимо сращивать на границах $\hat{\beta}_i$ между пластическими областями для определения констант интегрирования $B_1 - B_{12}$. Поскольку значения $\hat{\beta}_i$ уже известны, на каждой границе достаточно лишь двух условий: непрерывность перемещения и радиального напряжения. Получаемая система является линейной, что позволяет выразить константы B_i аналитически через $\hat{\beta}_i, \Omega, \Omega_{max}, \delta, \nu$. Упругая разгрузка продолжится до $\Omega = \Omega_{sp}$, когда на внутренней поверхности цилиндра начнется повторное течение и одновременно появятся области VII и VIII. Скорость $\Omega_{sp} \cong 12.4269$ вычислялась из условия

$$\beta = \delta : \sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1.$$

Напряженно-деформированное состояние при $\Omega = \Omega_{sp}$ показано на рис. 1.8. Как видно из рис. 1.7а и 1.8а значения напряжений к началу повторного пластического течения снизились примерно на четверть, при этом в окрестности жесткого включения осевое напряжение является максимальным, а радиальное минимальным.

Эволюция областей повторного пластического течения при разгрузке представлена на рис. 1.9. Новые пластические области появляются на скоростях вращения $\Omega_{sp}, \Omega_3, \Omega_4$. При $\Omega = 0$ весь цилиндр переходит в состояние пластичности и появляется область XII. Для вычисления неизвестных констант интегрирования A_i, B_i и координат упругопластических границ $\beta_6 - \beta_{10}$ необходимо удовлетворить граничным условиям задачи (1.11), а также трем условиям непрерывности на каждой границе между вторичными пластическими областями и упругой областью.

Помимо этого, необходимо использовать по два условия непрерывности на границах между первичными пластическими областями. Следует отметить, что решение для разгрузки зависит от Ω_{max} , $\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_5$ and $\hat{C}_1 - \hat{C}_{12}$.

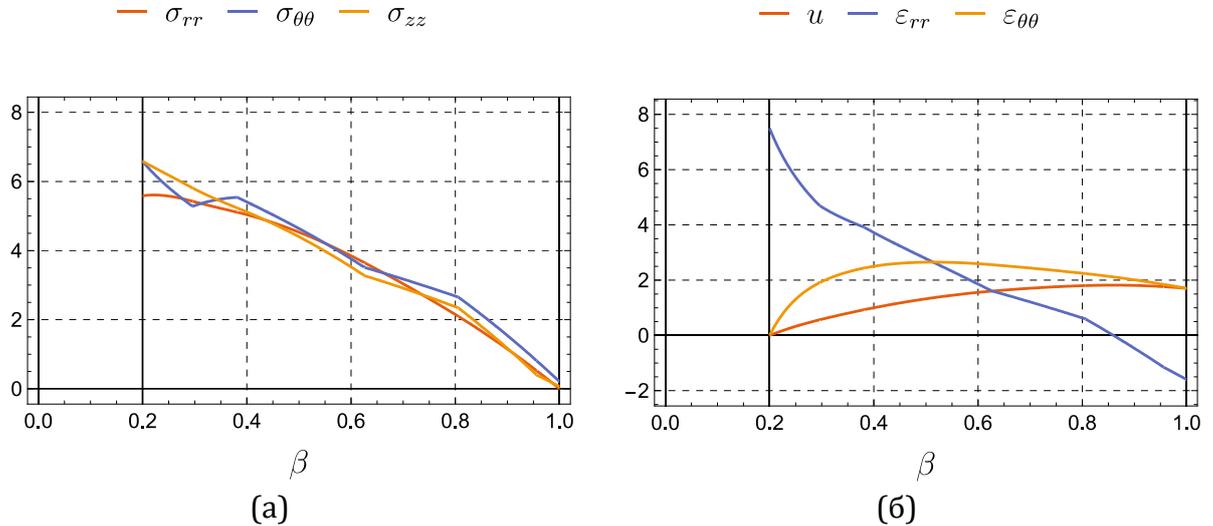


Рис. 1.8 — Напряженно-деформированное состояние при $\Omega = \Omega_{sp}$: (а) напряжения; (б) перемещения и полные деформации.

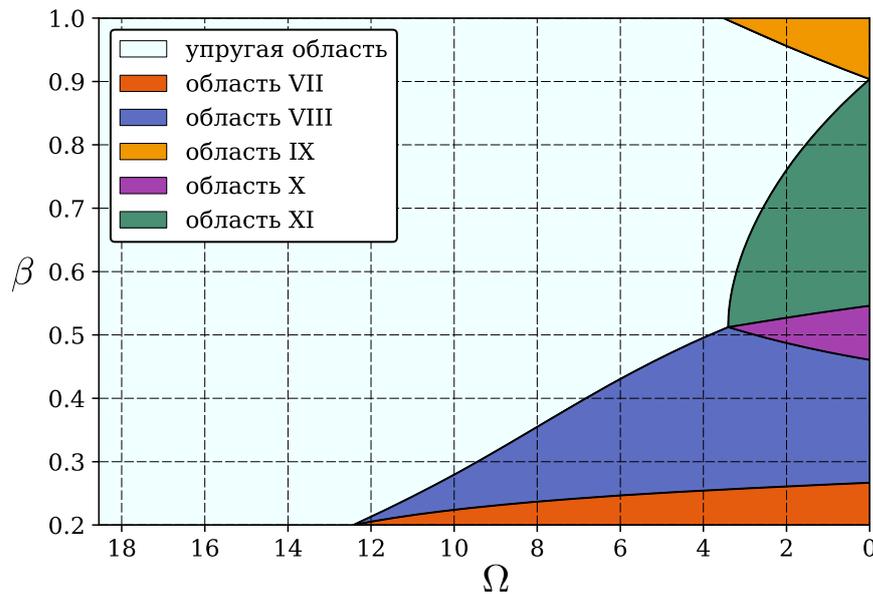


Рис. 1.9 — Эволюция пластических областей при разгрузке.

Процесс повторного пластического течения разделяется на интервалы $(\Omega_{sp} \geq \Omega \geq \Omega_3)$, $(\Omega_3 \geq \Omega \geq \Omega_4)$, $(\Omega_4 \geq \Omega \geq 0)$. Численно установлено, что $\Omega_3 \cong 3.5186$ and $\Omega_4 \cong 3.4051$. Тем не менее, могут появляться новые непустые пересечения областей первичного и повторного течения, поэтому каждый интервал может разделяться в свою очередь на под-интервалы.

Далее рассматривается только состояние после остановки цилиндра. В интервале $\Omega_4 \geq \Omega \geq 0$ цилиндр состоит из

- вторичная пластическая область VII ($\delta \leq \beta \leq \beta_6$);
- вторичная пластическая область VIII ($\beta_6 \leq \beta \leq \beta_7$);
- вторичная пластическая область X ($\beta_7 \leq \beta \leq \beta_8$);
- вторичная пластическая область XI ($\beta_8 \leq \beta \leq \beta_9$);
- упругая область ($\beta_9 \leq \beta \leq \beta_{10}$);
- вторичная пластическая область IX ($\beta_{10} \leq \beta \leq 1$).

Между пластическими областями есть непустые пересечения:

$$\begin{aligned} VIII \cap I \neq \emptyset, VIII \cap II \neq \emptyset, VIII \cap IV \neq \emptyset; IX \cap III \neq \emptyset, \\ IX \cap VI \neq \emptyset; XI \cap IV \neq \emptyset, XI \cap V \neq \emptyset, XI \cap VI \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Найденное решение содержит константы интегрирования $A_1, A_2, A_3^{(1)}, A_4^{(1)}, A_3^{(2)}, A_4^{(2)}, A_3^{(4)}, A_4^{(4)}, A_5^{(3)}, A_6^{(3)}, A_5^{(6)}, A_6^{(6)}, A_7, A_8, A_9^{(4)}, A_{10}^{(4)}, A_9^{(5)}, A_{10}^{(5)}, A_9^{(6)}, A_{10}^{(6)}, B_{11}, B_{12}$ и координаты границ $\beta_6, \dots, \beta_{10}$. Для вычисления перечисленных неизвестных величин используется система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \beta = \delta : u^{VII} &= 0; \\ \beta = \beta_6 : u^{VII} &= u^{VIII \cap I}, \sigma_{rr}^{VII} = \sigma_{rr}^{VIII \cap I}, \sigma_{\theta\theta}^{VII} = \sigma_{\theta\theta}^{VIII \cap I}; \\ \beta = \hat{\beta}_1 : u^{VIII \cap I} &= u^{VIII \cap II}, \sigma_{rr}^{VIII \cap I} = \sigma_{rr}^{VIII \cap II}; \quad \beta = \hat{\beta}_2 : u^{VIII \cap II} = u^{VIII \cap IV}, \sigma_{rr}^{VIII \cap II} = \sigma_{rr}^{VIII \cap IV}; \\ \beta = \beta_7 : u^{VIII \cap IV} &= u^X, \sigma_{rr}^{VIII \cap IV} = \sigma_{rr}^X, \sigma_{\theta\theta}^{VIII \cap IV} = \sigma_{\theta\theta}^X; \\ \beta = \beta_8 : u^X &= u^{XI \cap IV}, \sigma_{rr}^X = \sigma_{rr}^{XI \cap IV}, \sigma_{\theta\theta}^X = \sigma_{\theta\theta}^{XI \cap IV}; \\ \beta = \hat{\beta}_3 : u^{XI \cap IV} &= u^{XI \cap V}, \sigma_{\theta\theta}^{XI \cap IV} = \sigma_{\theta\theta}^{XI \cap V}; \quad \beta = \hat{\beta}_4 : u^{XI \cap V} = u^{XI \cap VI}, \sigma_{\theta\theta}^{XI \cap V} = \sigma_{\theta\theta}^{XI \cap VI}; \\ \beta = \beta_9 : u^{XI \cap VI} &= u^{El \cap VI}, \sigma_{\theta\theta}^{XI \cap VI} = \sigma_{\theta\theta}^{El \cap VI}, \sigma_{zz}^{El \cap VI} - \sigma_{\theta\theta}^{El \cap VI} = 1; \\ \beta = \beta_{10} : u^{El \cap VI} &= u^{IX \cap VI}, \sigma_{\theta\theta}^{El \cap VI} = \sigma_{\theta\theta}^{IX \cap VI}, \sigma_{rr}^{El \cap VI} - \sigma_{\theta\theta}^{El \cap VI} = 1; \\ \beta = \hat{\beta}_5 : u^{IX \cap VI} &= u^{IX \cap III}, \sigma_{rr}^{IX \cap VI} = \sigma_{rr}^{IX \cap III}; \\ \beta = 1 : \sigma_{rr}^{IX \cap III} &= 0. \end{aligned}$$

Итоговые значения границ: $\beta_6 \cong 0.2668$, $\beta_7 \cong 0.4607$, $\beta_8 \cong 0.546$, $\beta_9 = \beta_{10} \cong 0.9036$. Напряженное состояние после остановки изображено на рис. 1.10. Следует отметить, что в цилиндре появились зоны сжимающих

напряжений, а остаточное осевое напряжение является наибольшим. Из рис. 1.7 и 1.10 видно, что при повторном течении пластические деформации около жесткого включения снизились более, чем в два раза и почти сравнялись с деформациями в окрестности внешней границы цилиндра.

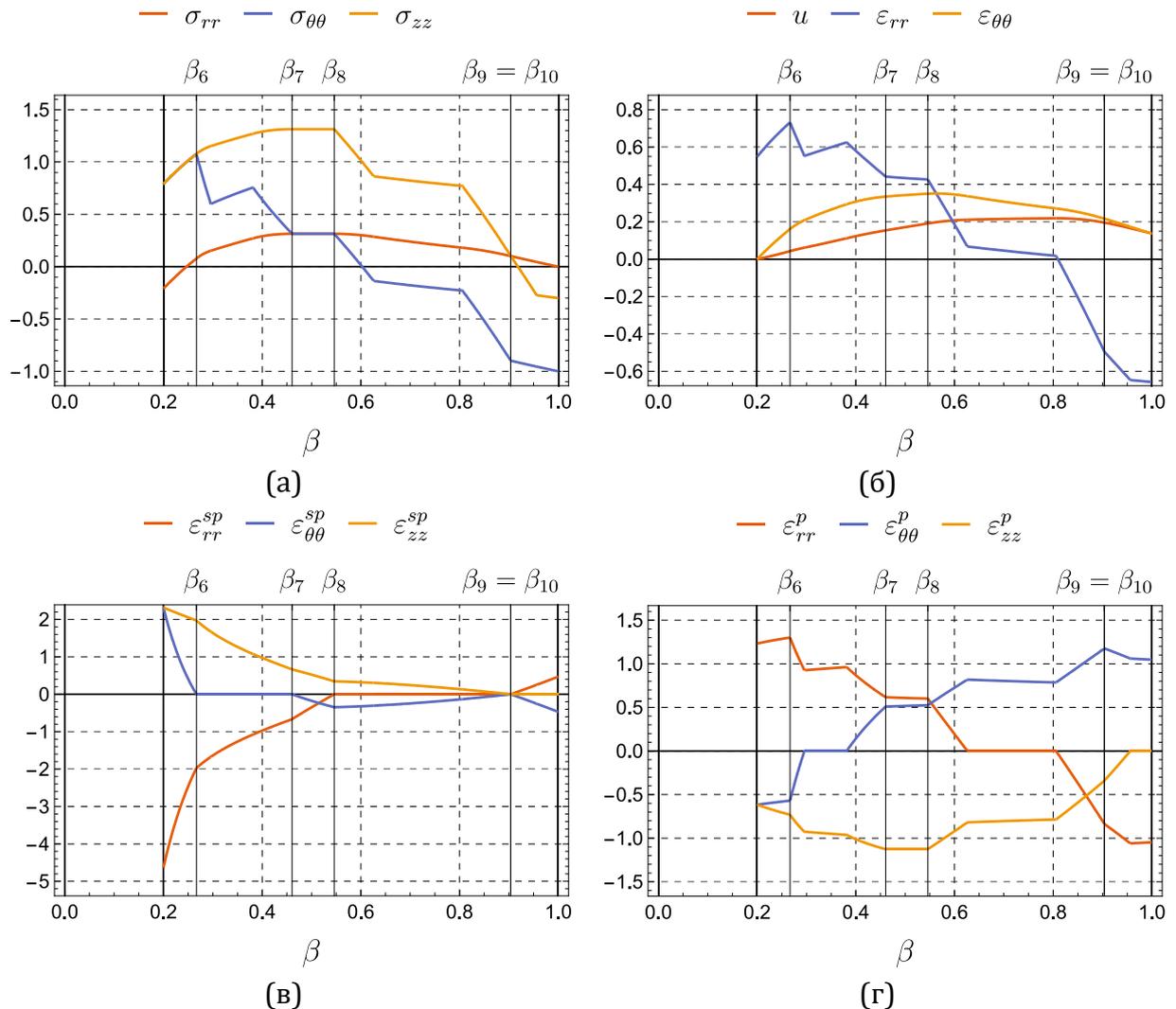


Рис. 1.10 — Напряженно-деформированное состояние при $\Omega=0$ (остановка цилиндра): (а) напряжения; (б) перемещение и полные деформации; (в) вторичные пластические деформации; (г) пластические деформации.

На рис. 1.11 показано распределение перемещений на различных этапах процесса. Видно, что даже при максимальной скорости вращения перемещения в цилиндре остаются относительно небольшими. В рамках линейной теории (1.2) возможно рассмотрение и существенно бóльших Ω_{max} . Однако напряжения на внутренней границе цилиндра (рис. 1.7) достигают значительных величин, поэтому при больших скоростях

вращения необходимо проверять выполнение критериев разрушения.

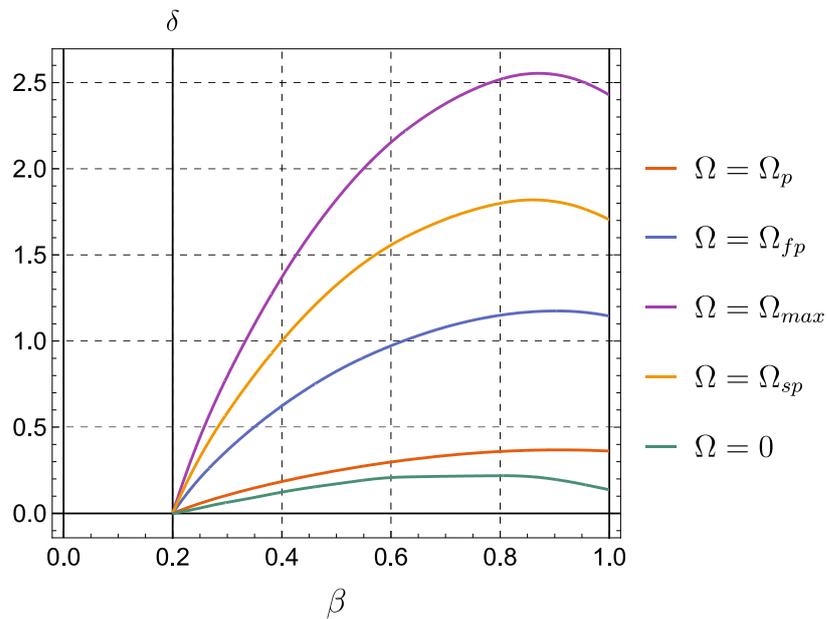


Рис. 1.11 — Перемещения в цилиндре для разных Ω .

1.3. Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра при условии Ишлинского-Ивлева (условии максимальных приведенных напряжений)

1.3.1 Постановка задачи

Рассматривается сплошной цилиндр с закрепленными концами. Цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω , которая медленно меняется со временем, вследствие чего угловым ускорением можно пренебречь. В условиях плоской деформации и осевой симметрии вектор перемещений в цилиндре имеет только одну ненулевую компоненту u_r . Введена цилиндрическая система координат ρ, θ, z и безразмерные величины (1.1). Для решения используется постановка задачи аналогичная использованной в предыдущем разделе. Определяющая система уравнений включает кинематические соотношения (1.2), закон Гука (1.3), (1.4), уравнение равновесия (1.5) в радиальном направлении и ассоциированный закон пластического течения (1.8). В качестве условия пластичности используется условие Ишлинского-Ивлева (условие максимальных приведенных напряжений [81, 85])

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) &= 1, \text{ если } \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \\ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 &= 1, \text{ если } \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \end{aligned} \quad (1.73)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения, упорядоченные по убыванию. Поверхность текучести, соответствующая условию (1.73), далее называется призмой Ивлева. Использование условия (1.73) вместе с законом течения (1.8) приводит к пластической несжимаемости, поэтому объемная деформация является чисто упругой и справедливо уравнение (1.10).

Граничные условия задачи имеют вид:

$$u(0) = 0, \quad \sigma_{rr}(1) = 0. \quad (1.74)$$

Параметр нагружения Ω монотонно возрастает от 0 до некоторого Ω_{max} , а затем также монотонно убывает вплоть до полной остановки цилиндра. В начале нагружения цилиндр деформируется упруго. Затем, при $\Omega = \Omega_p$ в центре цилиндра $\beta = 0$ впервые выполняется условие пластичности (1.73), в результате чего появляется область пластического течения I. Дальнейшее увеличение параметра Ω приводит к постепенному уменьшению области упругого деформирования и при $\Omega = \Omega_{p2}$ на поверхности $\beta = 1$ появляется пластическая область II. Напряженное состояние в областях I и II соответствует разным граням призмы Ивлева. Когда Ω достигает значения Ω_{fp} упругая область исчезает, весь цилиндр переходит в состояние пластичности, а между областями I и II появляется пластическая область III, напряжения в которой лежат на ребре призмы Ивлева. Далее при $\Omega = \Omega_{fp2}$ напряжения на поверхности $\beta = 1$ переходят на ребро призмы Ивлева, в результате чего возникает пластическая область IV. При последующем увеличении параметра нагружения $\Omega > \Omega_{fp2}$ новые пластические области уже не появляются, но границы между существующими областями меняют свое положение, при этом

увеличиваются области III и IV, соответствующие ребрам поверхности (1.73). Величины $\Omega_p, \Omega_{p2}, \Omega_{fp}, \Omega_{fp2}$ зависят от коэффициента Пуассона ν .

Как только параметр Ω начинает уменьшаться весь цилиндр вновь ведет себя, как упругое тело, но с накопленными пластическими деформациями, которые в процессе разгрузки уже не меняются. Если максимальное значение параметра нагружения Ω_{max} было достаточно высоким, то в ходе разгрузки при $\Omega = \Omega_{sp}$ в центре цилиндра может начаться повторное (или вторичное) пластическое течение. В общем случае возможно появление четырех вторичных пластических областей V–VIII в том же порядке, в котором появлялись первичные области I–IV. Заметим, что области первичного и вторичного пластического течения соответствуют противоположным граням и ребрам призмы Ивлева. В настоящем подразделе значение Ω_{max} выбрано таким образом, чтобы в момент остановки $\Omega = 0$ цилиндр полностью переходил в состояние повторного пластического течения. Поэтому в цилиндре возникают только две из возможных четырех вторичных областей. При $\Omega = \Omega_{sp}$ в центре цилиндра появляется область V, и далее при $\Omega = \Omega_{sp2}$ на поверхности цилиндра появляется область VI. В момент остановки $\Omega = 0$ упругая область между вторичными областями V и VI исчезает. В следующих разделах получено решение для каждой области. Символы D_i, C_i, B_i, A_i обозначают константы интегрирования.

1.3.2 Упругопластическое решение

Распределение перемещений и напряжений во вращающемся цилиндре имеет вид (1.13), (1.14). Это решение справедливо только для стадии нагружки и параметра нагружения $0 \leq \Omega \leq \Omega_{fp}$. При чисто упругом деформировании ($0 \leq \Omega \leq \Omega_p$) константы D_1, D_2 определяются из граничных условий (1.74) и имеют вид

$$D_1 = 0, D_2 = \frac{1(1+\nu)(1-2\nu)(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega. \quad (1.75)$$

Пластическое течение зарождается в центре цилиндра $\beta=0$, где напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$, а условие (1.73) принимает следующую форму

$$\sigma_{rr}(0) + \sigma_{\theta\theta}(0) - 2\sigma_{zz}(0) = 2. \quad (1.76)$$

Используя (1.76) вместе с (1.14) и (1.75) найдем критическое значение параметра нагружения Ω_p , при котором в цилиндре начинается пластическое течение:

$$\Omega_p = \frac{8(1-\nu)}{(1-2\nu)(3-2\nu)}. \quad (1.77)$$

Интересно отметить, что Ω_p имеет одно и то же значение (1.77) для условий пластичности Треска [63], Мизеса [86] и (1.73).

В ходе разгрузки ($\Omega_{max} \geq \Omega \geq 0$) в упругой области присутствуют первичные пластические деформации $\varepsilon_{ij}^{pr} = \varepsilon_{ij}^p(\Omega_{max})$, распределение которых известно и уже не меняется. Перемещение в упругой области имеет вид (1.48). Константы B_1, B_2 и интегралы в (1.48) вычисляются отдельно для каждой первичной пластической области I–IV.

Рассмотрим каждую область пластического течения.

Область I. В первой области пластического течения $\sigma_3 = \sigma_{zz}, \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ и условие (1.73) принимает вид:

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} - 2\sigma_{zz} = 2.$$

Отсюда осевое напряжение:

$$\sigma_{zz} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2 - 1. \quad (1.78)$$

Из закона течения (1.8) и условия плоской деформации следует:

$$\varepsilon_{rr}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p, \quad \varepsilon_{zz}^p = -2\varepsilon_{rr}^p, \quad \varepsilon_{zz}^e = -\varepsilon_{zz}^p.$$

С помощью последних выражений преобразуем кинематические

соотношения (1.2) и получим систему:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \frac{\varepsilon_{zz}^e}{2}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \frac{\varepsilon_{zz}^e}{2}. \quad (1.79)$$

Далее преобразуем (1.79) с помощью закона Гука (1.4) и выражения для осевого напряжения (1.78). Из полученной системы уравнений можно выразить радиальное и тангенциальное напряжение через полные деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6(1+\nu)(1-2\nu)} \left((5-4\nu)\varepsilon_{rr} - (1-8\nu)\varepsilon_{\theta\theta} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6(1+\nu)(1-2\nu)} \left(6(1-8\nu)\varepsilon_{rr} - (5-4\nu)\varepsilon_{\theta\theta} \right). \end{aligned} \quad (1.80)$$

Перемещение определяется из решения уравнения равновесия (1.5) с учетом соотношений (1.80).

$$u = C_1 \frac{1}{\beta} + C_2 \beta - \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)}{4(5-4\nu)} \Omega \beta^3. \quad (1.81)$$

Оставшиеся неизвестные функции можно найти с помощью (1.78), (1.80) и (1.81). Полные деформации определяются из соотношений (1.2), а их упругие составляющие через обратный закон Гука (1.4). Пластические деформации вычисляются, как разница между полными и упругими деформациями.

Область II. Здесь $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, поэтому условие пластичности (1.73) примет вид:

$$2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 2.$$

Осевое напряжение вычисляется из предыдущего выражения:

$$\sigma_{zz} = 2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} - 2. \quad (1.82)$$

Следствие ассоциированного закона пластического течения

$$\varepsilon_{rr}^p = \varepsilon_{zz}^p, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = -2\varepsilon_{zz}^p.$$

Напряжения можно выразить через полные деформации, также как

это было сделано для области I:

$$\sigma_{rr} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6(1-2\nu)} \left(\frac{(5-4\nu)}{(1+\nu)} \varepsilon_{rr} + 2\varepsilon_{\theta\theta} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}). \quad (1.83)$$

Перемещение следует из уравнения (1.5) и соотношений (1.83)

$$u = C_3 \beta^{-\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}}} + C_4 \beta^{\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}}} + 2(1+\nu)\beta - 6 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(43-38\nu)} \Omega \beta^3. \quad (1.84)$$

Область III. Напряженное состояние в этой области соответствует ребру призмы Ивлева и условие (1.73) имеет вид:

$$2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 2, \quad \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr} - 2\sigma_{zz} = 2.$$

Из предыдущих соотношений следует:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \frac{2}{3}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - \frac{2}{3}. \quad (1.85)$$

Решая уравнение равновесия (1.5) с учетом (1.85) найдем:

$$\sigma_{rr} = C_6 + \frac{2}{3} \ln \beta - \frac{1}{2} \Omega \beta^2. \quad (1.86)$$

Далее с помощью (1.85) и (1.86) решим уравнение (2.2.7) и получим распределение перемещений:

$$u = C_5 \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2} (1-2\nu)(3C_6 - 1)\beta + (1-2\nu)\beta \ln \beta - \frac{3}{8} (1-2\nu)\Omega \beta^3. \quad (1.87)$$

Область IV. Ход решения аналогичен области III. Напряжения соответствуют ребру призмы Ивлева, условие (1.73) имеет вид:

$$2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 2, \quad \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} - 2\sigma_{rr} = 2. \quad (1.88)$$

Из (1.88) следует:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \frac{4}{3}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \frac{2}{3}. \quad (1.89)$$

Интегрируя уравнение равновесия (1.5) с учетом (1.89) найдем:

$$\sigma_{rr} = C_8 + \frac{4}{3} \ln \beta - \frac{1}{2} \Omega \beta^2. \quad (1.90)$$

Перемещение следует из решения (1.10) с учетом (1.89) и (1.90):

$$u = C_7 \frac{1}{\beta} + \frac{3}{2}(1-2\nu)C_8\beta + 2(1-2\nu)\beta \ln \beta - \frac{3}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^3. \quad (1.91)$$

Область V. В первой из областей повторного пластического течения $\sigma_1 = \sigma_{zz}$, $\sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ и условие (1.73) имеет вид:

$$2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2. \quad (1.92)$$

Осевое напряжение следует из (1.92):

$$\sigma_{zz} = 1 + (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2. \quad (1.93)$$

Вследствие ассоциированного закона пластического течения и условия плоской деформации получим:

$$\varepsilon_{rr}^{sp} = \varepsilon_{\theta\theta}^{sp} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{zz}^{sp}, \quad \varepsilon_{zz}^{sp} = -\varepsilon_{zz}^e - \varepsilon_{zz}^{pr}. \quad (1.94)$$

Кинематические соотношения (1.2) с учетом (1.94) примут вид:

$$\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr} - \frac{1}{2}\varepsilon_{zz}^{pr} = \varepsilon_{rr}^e + \frac{1}{2}\varepsilon_{zz}^e, \quad \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr} - \frac{1}{2}\varepsilon_{zz}^{pr} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \frac{1}{2}\varepsilon_{zz}^e. \quad (1.95)$$

Распределение напряжений следует из (1.95), (1.93), (1.2) и (1.4):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{(5-4\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr}) - \\ &\quad - \frac{1}{6} \frac{(1-8\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}) - \frac{1}{3} \frac{1}{(1-2\nu)} \varepsilon_{zz}^{pr}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \frac{(1-8\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr}) + \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{(5-4\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}) - \frac{1}{3} \frac{1}{(1-2\nu)} \varepsilon_{zz}^{pr}. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Уравнение равновесия с учетом (1.96) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} u &= -6 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(5-4\nu)} \Omega\beta + p(\beta), \\ p(\beta) &= 6 \frac{(1-2\nu)}{(5-4\nu)} \frac{1}{\beta} (\varepsilon_{rr}^{pr} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}) + \frac{\partial \varepsilon_{rr}^{pr}}{\partial \beta} - \frac{(1-8\nu)}{(5-4\nu)} \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}}{\partial \beta} + 2 \frac{(1+\nu)}{(5-4\nu)} \frac{\partial \varepsilon_{zz}^{pr}}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Перемещение найдем из решения уравнения (1.97):

$$u = A_1 \frac{1}{\beta} + A_2 \beta - \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)}{4(5-4\nu)} \Omega \beta^3 + \frac{\beta}{2} \int p(\beta) d\beta - \frac{1}{2\beta} \int \beta^2 p(\beta) d\beta. \quad (1.98)$$

Константы A_1, A_2 и интегралы в (1.98) вычисляются отдельно для каждого непустого пересечения области V с первичными областями I–IV.

Область VI. В данной области $\sigma_3 = \sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, поэтому условие пластичности (1.73) запишется, как:

$$\sigma_{rr} + \sigma_{zz} - 2\sigma_{\theta\theta} = 2.$$

Осевое напряжение:

$$\sigma_{zz} = 2 - \sigma_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta}. \quad (1.99)$$

Из ассоциированного закона пластического течения следует:

$$\varepsilon_{rr}^{sp} = \varepsilon_{zz}^{sp}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{sp} = -2\varepsilon_{zz}^{sp}. \quad (1.100)$$

Соотношения (1.2) с учетом (1.100) принимают вид:

$$\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr} + \varepsilon_{zz}^{pr} = \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{zz}^e, \quad \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr} - 2\varepsilon_{zz}^{pr} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + 2\varepsilon_{zz}^e. \quad (1.101)$$

Распределение напряжений определяется на основе (1.101), также как это было сделано ранее:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{(5-4\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr}) + \\ &+ \frac{1}{3} \frac{1}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}) + \frac{1}{6} \frac{(1-8\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{zz}^{pr}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr} + \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr} - \varepsilon_{zz}^{pr}). \end{aligned} \quad (1.102)$$

Уравнение равновесия с учетом (1.102) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - 2 \frac{(1+\nu)}{(5-4\nu)} \frac{1}{\beta^2} u &= -6 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(5-4\nu)} \left(\Omega \beta + \frac{1}{\beta} \right) + q(\beta), \\ q(\beta) &= 3 \frac{(1-2\nu)}{(5-4\nu)} \frac{1}{\beta} (\varepsilon_{rr}^{pr} - \varepsilon_{zz}^{pr}) + \frac{\partial \varepsilon_{rr}^{pr}}{\partial \beta} + 2 \frac{(1+\nu)}{(5-4\nu)} \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}}{\partial \beta} - \frac{(1-8\nu)}{(5-4\nu)} \frac{\partial \varepsilon_{zz}^{pr}}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Перемещение следует из решения уравнения (1.103):

$$u = A_3 u_1 + A_4 u_2 - 2(1+\nu)\beta - 6 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(43-38\nu)} \Omega \beta^3 + J_2(\beta),$$

$$u_1 = \beta^{-\sqrt{2\frac{1+\nu}{5-4\nu}}}, \quad u_2 = \beta^{\sqrt{2\frac{1+\nu}{5-4\nu}}}, \quad W = \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{(5-4\nu)}}, \quad (1.104)$$

$$J_2(\beta) = u_2 \int \frac{u_1}{W} q(\beta) d\beta - u_1 \int \frac{u_2}{W} q(\beta) d\beta.$$

Константы A_3, A_4 и интегралы в (1.104) вычисляются отдельно в каждом непустом пересечении области VI с первичными областями I–IV.

1.3.3 Примеры расчетов

Используется значение коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$. В соответствии с (1.77) пластическое течение начнется при $\Omega_p \cong 3.066$. Максимальное значение параметра нагружения $\Omega_{max} \cong 18.534$ определено численно. Безразмерным величинам Ω_p и Ω_{max} соответствуют угловые скорости $\omega_p \cong 3115 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_{max} \cong 7659 \text{ с}^{-1}$. Решение для $\Omega = \Omega_p$ показано на рис. 1.12.

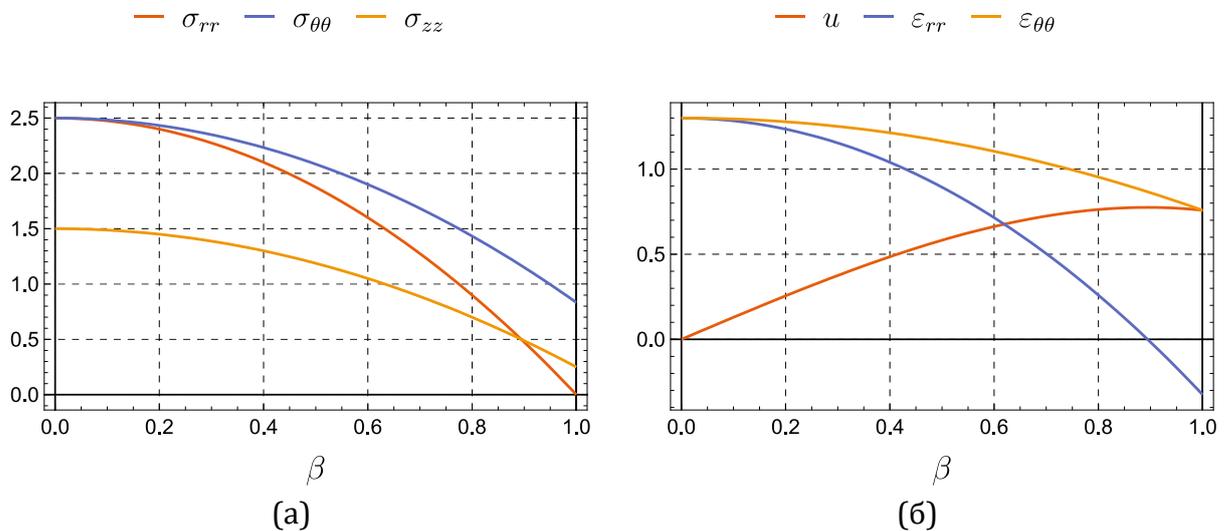


Рис. 1.12 — Упругое решение при $\Omega = \Omega_p$:

(а) напряжения; (б) перемещение и полные деформации.

Процесс пластического деформирования ($\Omega_p \leq \Omega \leq \Omega_{max}$) делится на интервалы: $(\Omega_p \leq \Omega \leq \Omega_{p2})$, $(\Omega_{p2} \leq \Omega \leq \Omega_{fp})$, $(\Omega_{fp} \leq \Omega \leq \Omega_{fp2})$, $(\Omega_{fp2} \leq \Omega \leq \Omega_{max})$, в каждом из которых цилиндр состоит из различных областей. Решение на каждом этапе пластического течения содержит неизвестные

константы интегрирования C_i , D_i , и координаты β_i границ между областями. Для вычисления указанных величин используются граничные условия (1.74) и по 3 условия непрерывности на каждой границе. Как показано в [63] подходящий выбор трех условий на границе обеспечивает на ней непрерывность всех функций. Получаемая система алгебраических уравнений является линейной относительно C_i , D_i и нелинейной относительно β_i . На каждом интервале часть уравнений выбирается для точного выражения констант интегрирования через координаты β_i , параметр нагружения Ω , а также параметр ν . Получаемые формулы здесь не приводятся. Далее в оставшиеся уравнения подставляются выражения для C_i , D_i и числовое значение параметра ν . В результате имеем систему нелинейных уравнений вида $F_i(\beta_1, \dots, \Omega) = 0$, которая решается с помощью метода Ньютона для выбранных значений Ω внутри интервала. Вычисление величин Ω_{p2} , Ω_{fp} , Ω_{fp2} требует дополнительных условий.

Рассмотрим подробно каждый интервал. Заметим, что в каждом из них $C_1 = 0$. В диапазоне $\Omega_p \leq \Omega \leq \Omega_{p2}$ в цилиндре присутствуют:

- пластическая область I ($0 \leq \beta \leq \beta_1$);
- упругая область ($\beta_1 \leq \beta \leq 1$).

Найденное решение для указанных областей содержит неизвестные константы интегрирования C_1, C_2, D_1, D_2 и координату границы β_1 . Для определения оставшихся неизвестных составим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \beta = \beta_1 : u^I &= u^{El}, \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{El}, \sigma_{rr}^{El} + \sigma_{\theta\theta}^{El} - 2\sigma_{zz}^{El} = 2, \\ \beta = 1 : \sigma_{rr}^{El} &= 0. \end{aligned}$$

Для определения Ω_{p2} дополним предыдущую систему условием:

$$\beta = 1 : 2\sigma_{\theta\theta}^{El} - \sigma_{zz}^{El} = 2.$$

Отсюда найдем: $\Omega_{p2} \cong 8.135$. Решение на первой стадии течения показано на рис. 1.13 в виде графиков напряжений и деформаций.

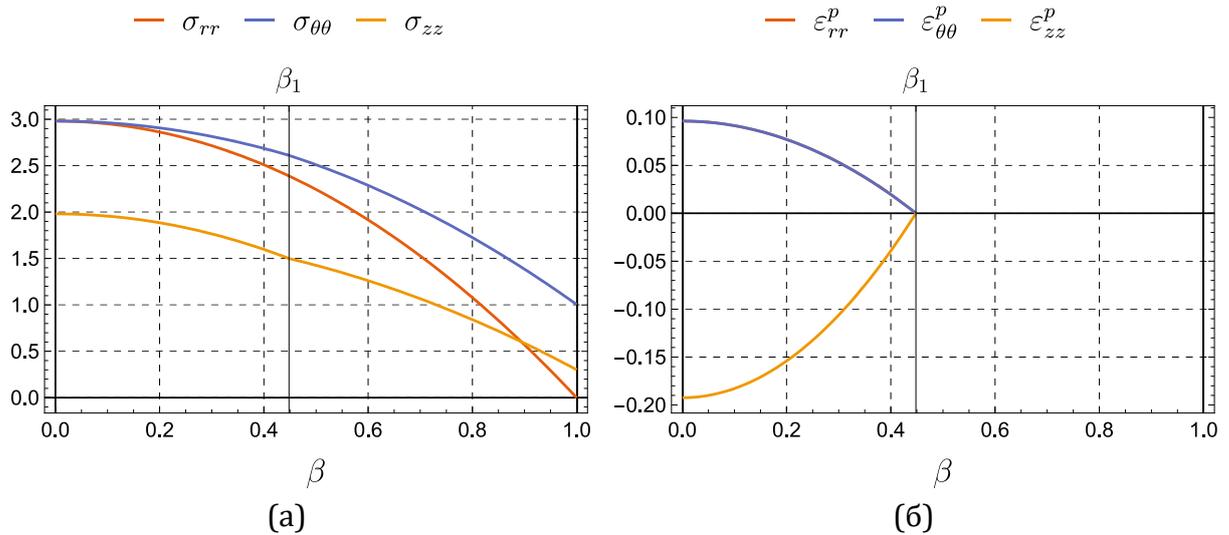


Рис. 1.13 — Решение при $\Omega=7$: (а) напряжения; (б) пластические деформации.

В интервале $\Omega_{p2} \leq \Omega \leq \Omega_{fp}$ цилиндр состоит из следующих областей:

- пластическая область I ($0 \leq \beta \leq \beta_1$);
- упругая область ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$);
- пластическая область II ($\beta_2 \leq \beta \leq 1$).

Решение в данных областях содержит неизвестные константы интегрирования C_2, C_3, C_4, D_1, D_2 и координаты границ β_1, β_2 . Для вычисления остальных неизвестных воспользуемся системой:

$$\begin{aligned} \beta = \beta_1 : u^I &= u^{El}, \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{El}, \sigma_{rr}^{El} + \sigma_{\theta\theta}^{El} - 2\sigma_{zz}^{El} = 2, \\ \beta = \beta_2 : u^{El} &= u^{II}, \sigma_{rr}^{El} = \sigma_{rr}^{II}, 2\sigma_{\theta\theta}^{El} - \sigma_{zz}^{El} - \sigma_{rr}^{El} = 2, \\ \beta = 1 : \sigma_{rr}^{II} &= 0. \end{aligned}$$

Для определения Ω_{fp} предыдущую систему необходимо дополнить условием $\beta_1 = \beta_2$. Найдем, что $\Omega_{fp} \cong 9.267$ ($\omega_{fp} \cong 5415 c^{-1}$). Решение на второй стадии пластического течения представлено на рис. 1.14.

В интервале $\Omega_{fp} \leq \Omega \leq \Omega_{fp2}$ весь цилиндр находится в пластическом состоянии и делится на следующие области:

- пластическая область I ($0 \leq \beta \leq \beta_1$);
- пластическая область III ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$);
- пластическая область II ($\beta_2 \leq \beta \leq 1$).

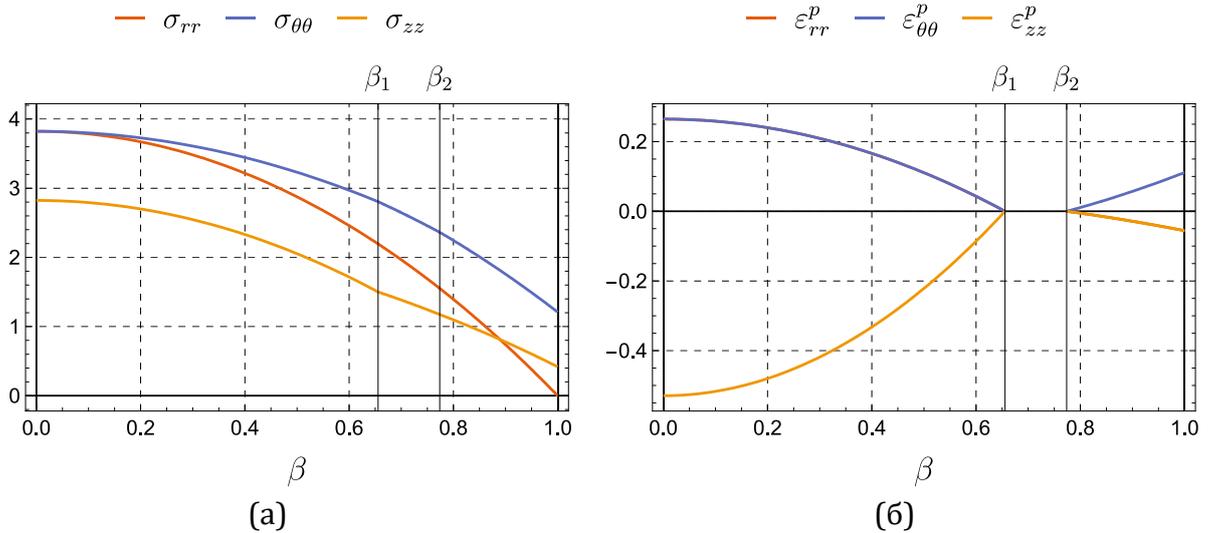


Рис. 1.14 — Решение при $\Omega = 9$: (а) напряжения; (б) пластические деформации.

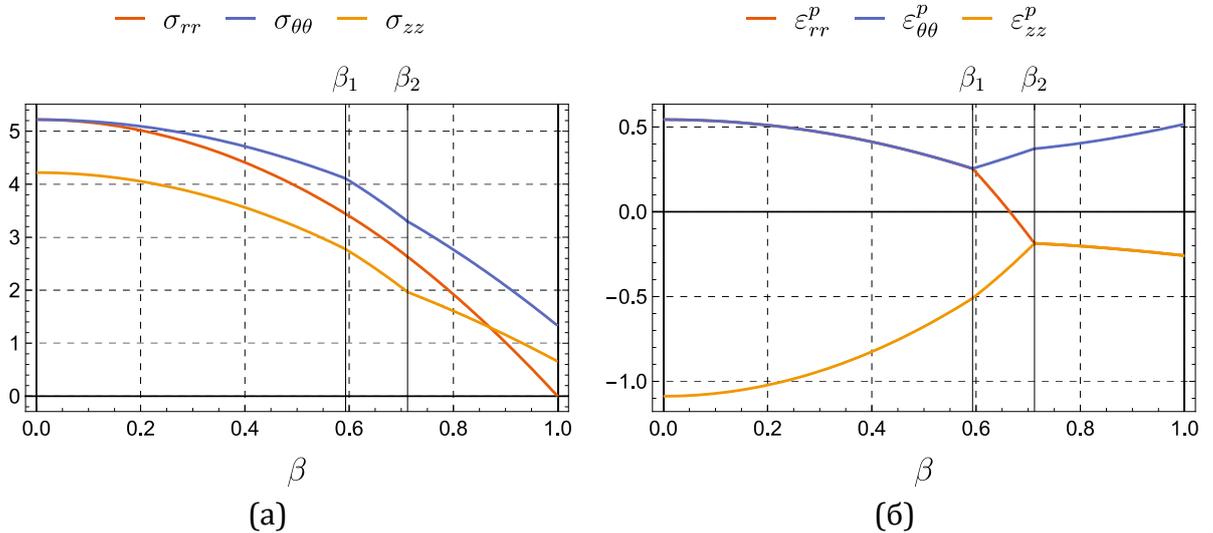


Рис. 1.15 — Решение при $\Omega = 12$: (а) напряжения; (б) пластические деформации.

Константы интегрирования C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 , и координаты β_1, β_2 границ между пластическими областями вычисляются с помощью системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 \beta = \beta_1 : u^I &= u^{III}, \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{III}, \sigma_{\theta\theta}^I = \sigma_{\theta\theta}^{III}, \\
 \beta = \beta_2 : u^{III} &= u^{II}, \sigma_{rr}^{III} = \sigma_{rr}^{II}, \sigma_{\theta\theta}^{III} = \sigma_{\theta\theta}^{II}, \\
 \beta = 1 : \sigma_{rr}^{II} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.105}$$

Для вычисления Ω_{fp2} систему (1.105) дополним условием:

$$\beta = 1 : \sigma_{zz}^{II} = (\sigma_{\theta\theta}^{II} + \sigma_{rr}^{II}) / 2.$$

Отсюда найдем $\Omega_{fp2} \cong 12.118$. Решение на третьей стадии пластического течения представлено на рис. 1.15 в виде графиков напряжений и

пластических деформаций для $\Omega = 12$.

Наконец, в последнем интервале $\Omega_{fp2} \leq \Omega \leq \Omega_{max}$ состоит из:

- пластической области I ($0 \leq \beta \leq \beta_1$);
- пластической области III ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$);
- пластической области II ($\beta_2 \leq \beta \leq \beta_3$);
- пластической области IV ($\beta_3 \leq \beta \leq 1$).

Константы интегрирования $C_2 - C_8$ и координаты $\beta_1 - \beta_3$ границ между пластическими областями вычисляются с помощью системы:

$$\begin{aligned} \beta = \beta_1 : u^I = u^{III}, \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{III}, \sigma_{\theta\theta}^I = \sigma_{\theta\theta}^{III}, \quad \beta = \beta_2 : u^{III} = u^{II}, \sigma_{rr}^{III} = \sigma_{rr}^{II}, \sigma_{\theta\theta}^{III} = \sigma_{\theta\theta}^{II}, \\ \beta = \beta_3 : u^{II} = u^{IV}, \sigma_{rr}^{II} = \sigma_{rr}^{IV}, \sigma_{\theta\theta}^{II} = \sigma_{\theta\theta}^{IV}, \quad \beta = 1 : \sigma_{rr}^{IV} = 0. \end{aligned}$$

На рис. 1.16а и рис. 1.17а представлено распределение напряжений и пластических деформаций в цилиндре при $\Omega = \Omega_{max}$. Из рис. 1.12–1.16 видно, что в ходе нагрузки наибольшим является тангенциальное напряжение. При этом наименьшим напряжением практически везде за исключением небольшой области вблизи поверхности цилиндра является осевое напряжение. Схожая картина наблюдается для распределения пластических деформаций (рис. 1.12–1.15, рис. 1.17). Далее параметр Ω уменьшается и в цилиндре начинается разгрузка. Цилиндр снова деформируется чисто упруго, но решение, представленное выше, необходимо сращивать на границах $\hat{\beta}_i$ между первичными пластическими областями для определения констант $B_1 - B_8$. Аналогично подразделу 1.2 для этого используются непрерывность перемещения и радиального напряжения. Такая система является линейной, что позволяет выразить константы B_i аналитически через $\hat{\beta}_i, \Omega_{max}, \Omega$ и ν . Упругая разгрузка продолжится до $\Omega = \Omega_{sp}$, при которой на внутренней поверхности цилиндра начнется повторное пластическое течение и появится область V. Значение $\Omega_{sp} \cong 6.868$ ($\omega_{sp} \cong 4662 \text{ c}^{-1}$) найдено из условия (1.92).

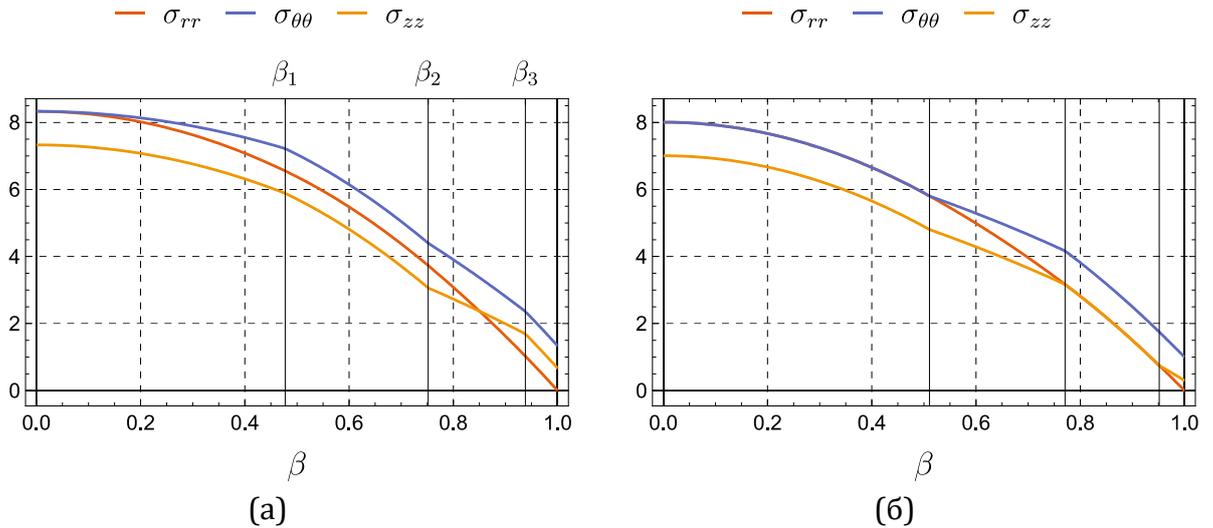


Рис. 1.16 — Напряжения при $\Omega = \Omega_{max}$: (а) условие Ивлева; (б) условие Треска.

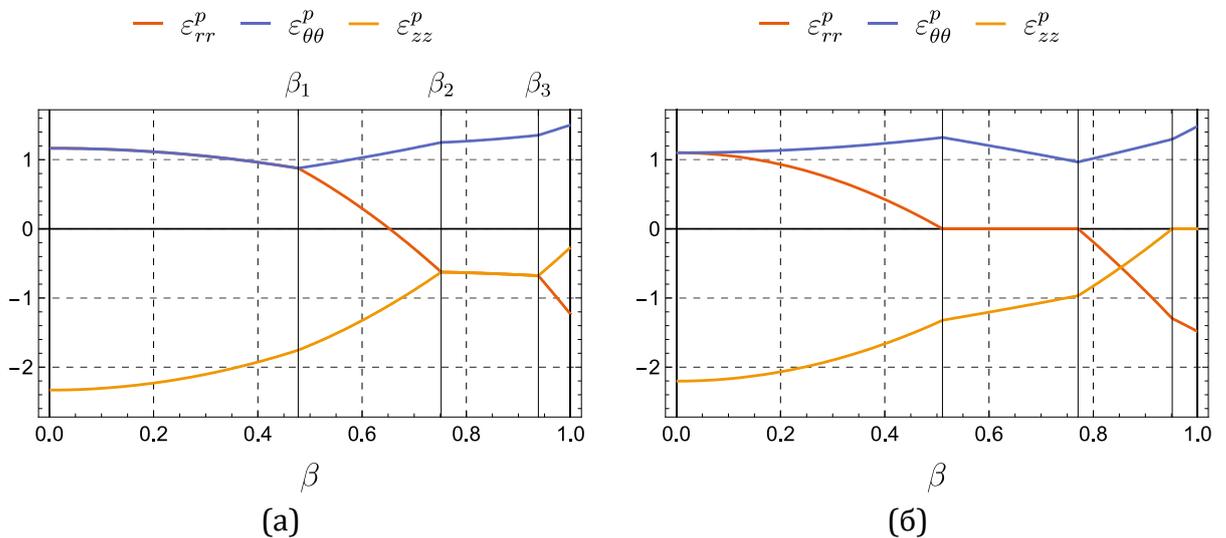


Рис. 1.17 — Пластические деформации при $\Omega = \Omega_{max}$:
(а) условие Ивлева; (б) условие Треска.

Повторное пластическое течение продолжится вплоть до полной остановки цилиндра. При $\Omega = 0$ цилиндр полностью переходит в состояние повторной пластичности. Решение в интервале $\Omega_{sp} \geq \Omega \geq 0$ содержит неизвестные константы интегрирования A_i , B_i и границы β_4, β_5 между областями. Для определения неизвестных используются граничные условия, 3 условия непрерывности на границах между областями вторичного течения и упругой областью. Также может возникнуть необходимость использовать по 2 условия непрерывности на границах между первичными пластическими областями.

Вторичное пластическое течение разделяется на два интервала: $\Omega_{sp} \geq \Omega \geq \Omega_{sp2}, \Omega_{sp2} \geq \Omega \geq 0$. Численно найдено, что $\Omega_{sp2} \cong 2.264$. Однако внутри интервала могут появляться новые непустые пересечения вторичных и первичных пластических областей, поэтому каждый интервал в свою очередь может состоять из нескольких подинтервалов.

Рассмотрим решение в момент остановки цилиндра. В интервале $\Omega_{sp2} \geq \Omega \geq 0$ цилиндр состоит из следующих областей:

- пластическая область V ($0 \leq \beta \leq \beta_4$);
- упругая область ($\beta_4 \leq \beta \leq \beta_5$);
- пластическая область VI ($\beta_5 \leq \beta \leq 1$).

В момент остановки в цилиндре присутствуют следующие пересечения областей первичного и вторичного течения: $V \cap I, V \cap III, VI \cap III, VI \cap II, VI \cap IV$. Очевидно, что $A_1^{(1)} = 0$. Для определения оставшихся констант интегрирования $A_2^{(1)}, A_1^{(3)}, A_2^{(3)}, A_3^{(3)}, A_4^{(3)}, A_3^{(2)}, A_4^{(2)}, A_3^{(4)}, A_4^{(4)}, B_1, B_2$ и границ β_4, β_5 между областями используется следующая система условий:

$$\begin{aligned} \beta = \hat{\beta}_1 : u^{V \cap I} = u^{V \cap III}, \sigma_{rr}^{V \cap I} = \sigma_{rr}^{V \cap III}; \beta = \beta_4 : u^{V \cap III} = u^{El}, \sigma_{rr}^{V \cap III} = \sigma_{rr}^{El}, 2\sigma_{zz}^{El} - \sigma_{rr}^{El} - \sigma_{\theta\theta}^{El} = 2; \\ \beta = \beta_5 : u^{El} = u^{VI \cap III}, \sigma_{rr}^{El} = \sigma_{rr}^{VI \cap III}, \sigma_{zz}^{El} + \sigma_{rr}^{El} - 2\sigma_{\theta\theta}^{El} = 2; \beta = \hat{\beta}_2 : u^{VI \cap III} = u^{VI \cap II}, \sigma_{rr}^{VI \cap III} = \sigma_{rr}^{VI \cap II}; \\ \beta = \hat{\beta}_3 : u^{VI \cap II} = u^{VI \cap IV}, \sigma_{rr}^{VI \cap II} = \sigma_{rr}^{VI \cap IV}; \beta = 1 : \sigma_{\beta\beta}^{VI \cap IV} = 0. \end{aligned}$$

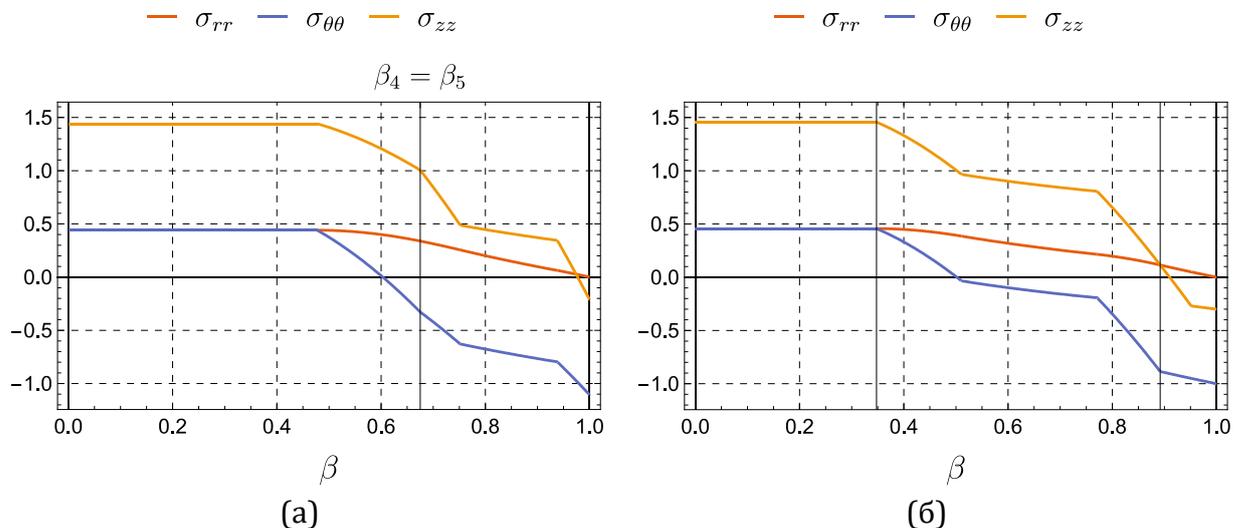


Рис. 1.18 — Остаточные напряжения ($\Omega = 0$): (а) условие Ивлева; (б) условие Треска.

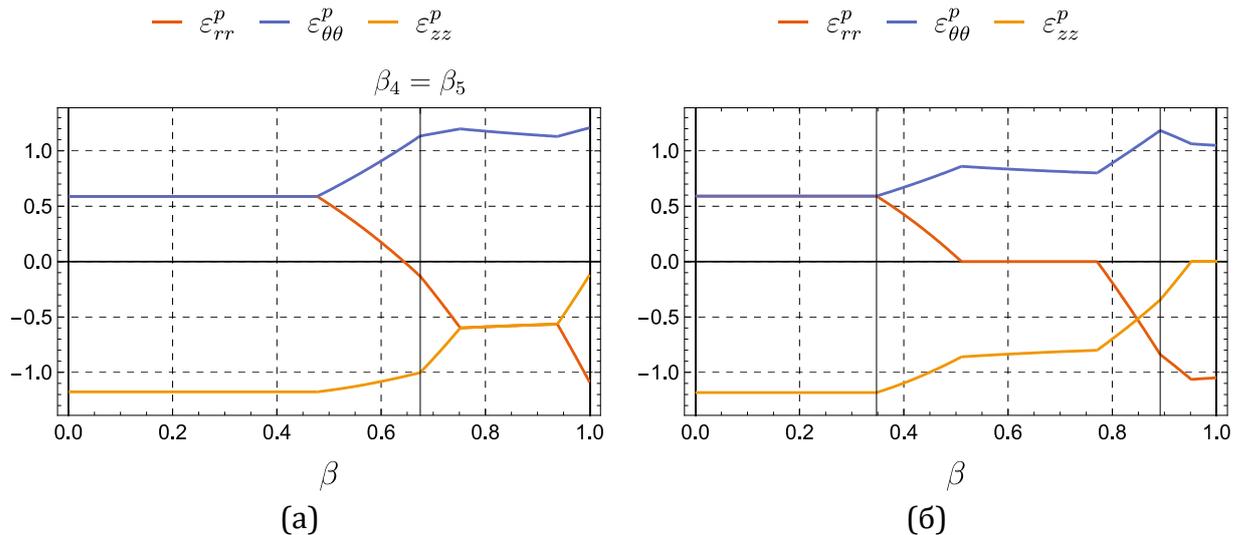


Рис. 1.19 — Остаточные пластические деформации при $\Omega = 0$:
(а) условие Ивлева; (б) условие Треска.

Распределение остаточных напряжений и пластических деформаций приведено на рис. 1.18а и рис. 1.19а. В ходе разгрузки (рис. 1.16а, рис. 1.18а) происходит перераспределение напряжений и в цилиндре появляются области сжимающих напряжений. Наибольшим остаточным напряжением является осевое, а наименьшим — тангенциальное. После повторного течения качественная картина распределения пластических деформаций почти не меняется, однако их величина уменьшается примерно в два раза. Интересно отметить (рис. 1.18а), что после остановки в области $0 \geq \beta \geq 0.5$ наблюдается равенство $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$, хотя условие (1.92) в области V не накладывает такого ограничения.

Для сравнения результатов используются работы [63–65], в которых аналогичная задача решается с помощью условия Треска. Установлено, что цилиндр полностью переходит в состояние пластичности при $\Omega = \Omega_{fp}^T \cong 8.445$ [63, 64]. Максимальное значение параметра нагружения Ω , необходимое для полного повторного течения $\Omega_{max}^T \cong 16.892$ [65]. Разница в значениях величин Ω_{fp} и Ω_{max} , вычисленных для условий Треска и Ишлинского-Ивлева, составляет около 10%. Распределение напряжений и пластических деформаций для сравниваемых условий пластичности при максимальном значении параметра нагружения изображено на

рис. 1.16 и рис. 1.17, а после остановки — на рис. 1.18 и рис. 1.19. Качественная картина напряженно-деформированного состояния для критериев Треска и Ишлинского-Ивлева имеет существенные отличия.

1.4. Упругопластический анализ вращающегося цилиндра с жестким включением при условии Ишлинского-Ивлева (условии максимальных приведенных напряжений)

1.4.1 Стадия нагрузки

Рассматривается упругопластическая задача для вращающегося цилиндра с жестким включением (рис. 1.1). Для решения используется постановка задачи из раздела 1.3. Система определяющих уравнений записана в безразмерных параметрах (1.1) и включает в себя кинематические соотношения (1.2), связь между напряжениями и упругими деформациями (1.3), (1.4), уравнение равновесия в радиальном направлении (1.5) и ассоциированный закон течения (1.8), (1.9). Для расчета пластических деформаций применяется условие максимальных приведенных напряжений (1.73). Граничные условия задачи имеют вид (1.11).

На стадии нагрузки предполагается, что параметр нагружения Ω возрастает от 0 до некоторого выбранного максимального значения Ω_{\max} . В общем случае для достаточно высоких значений Ω_{\max} в цилиндре возможно появление 6 пластических областей, соответствующих разным граням и ребрам призмы Ивлева (1.73). Для удобства пластические области обозначаются римскими цифрами от I до VI в порядке их расположения в цилиндре (этот порядок, вообще говоря, не совпадает с порядком появления областей). Границы между областями будем обозначать в порядке их расположения. Проекция напряженного состояния в цилиндре на девиаторную плоскость для разных значений параметра нагружения Ω схематично изображена на рис. 1.20.

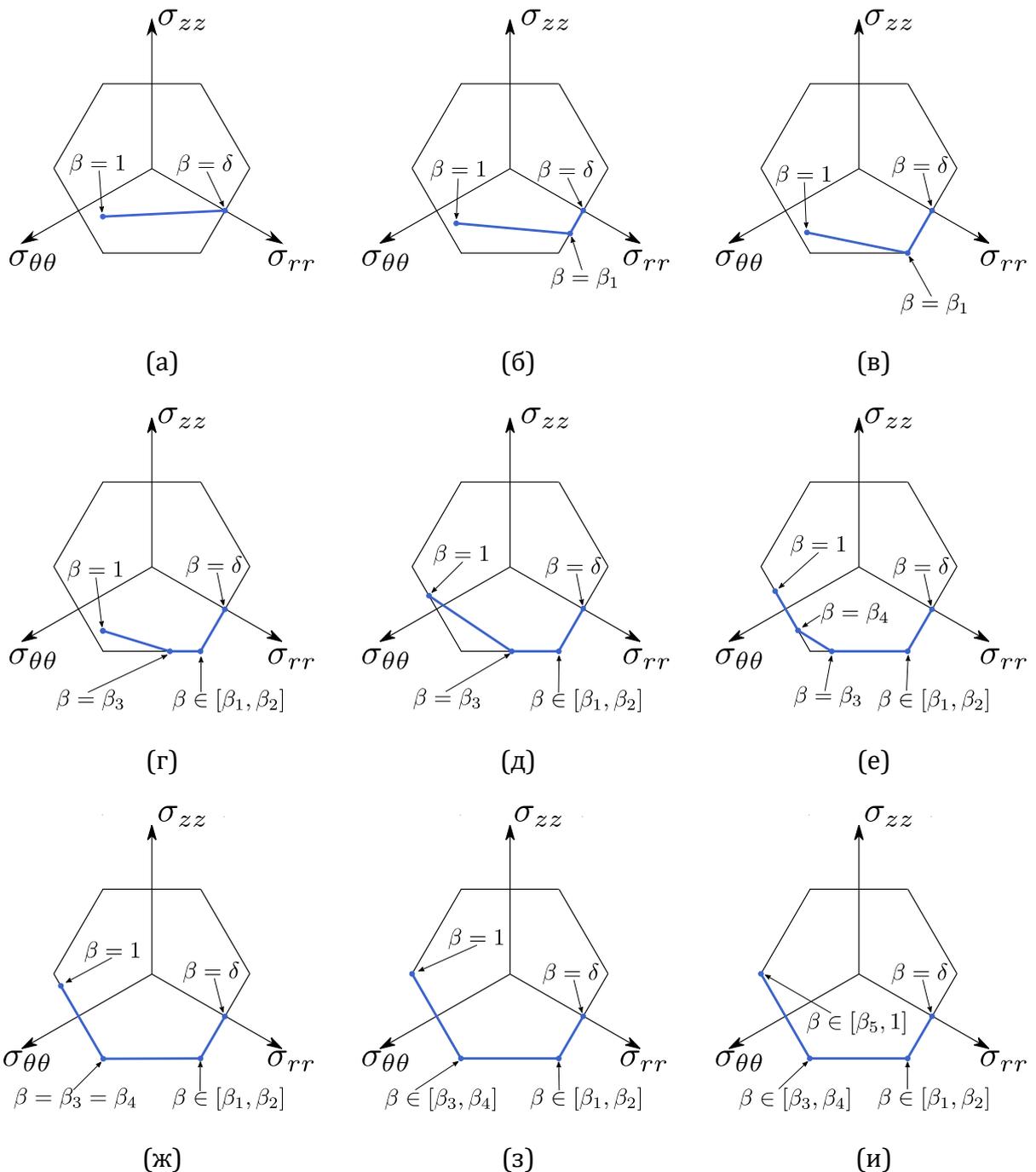


Рис. 1.20 — Проекция напряженного состояния на девиаторную плоскость для разных значений параметра Ω : (а) $\Omega = \Omega_p$; (б) $\Omega_p < \Omega < \Omega_1$; (в) $\Omega = \Omega_1$; (г) $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$; (д) $\Omega = \Omega_1$; (е) $\Omega_2 < \Omega < \Omega_{fp}$; (ж) $\Omega = \Omega_{fp}$; (з) $\Omega = \Omega_{fp2}$; (и) $\Omega > \Omega_{fp2}$.

Вначале цилиндр деформируется чисто упруго, а при $\Omega = \Omega_p$ (рис. 1.20а) на внутренней поверхности цилиндра $\beta = \delta$ выполняется условие пластичности (1.73) в виде соответствующем грани призмы Ивлева $\sigma_1 = \sigma_r, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ и появляется область пластического течения I. С увеличением параметра (рис. 1.20б) Ω упругопластическая граница

$\beta = \beta_1$ движется в сторону внешней поверхности цилиндра $\beta = 1$. Далее при $\Omega = \Omega_1$ (рис. 1.20в) напряженное состояние на упругопластической границе переходит на ребро $\sigma_{\theta\theta} = (\sigma_{rr} + \sigma_{zz})/2$ призмы Ивлева. В результате этого в указанном месте появляются две новые пластические области II и III. В первой из них напряженное состояние соответствует ребру $\sigma_{\theta\theta} = (\sigma_{rr} + \sigma_{zz})/2$, а во второй — грани $\sigma_3 = \sigma_{zz}, \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ призмы Ивлева. При последующем увеличении параметра Ω размеры пластических областей I-III увеличиваются, а размеры упругой области уменьшаются (рис. 1.20г). В момент $\Omega = \Omega_2$ на внешней поверхности цилиндра выполняется условие пластичности (1.73) в виде соответствующем грани $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ (рис. 1.20д). Это приводит к появлению пластической области V. С увеличением параметра Ω упругая область между пластическими областями III и V уменьшается (рис. 1.20е). При $\Omega = \Omega_{fp}$ упругая область исчезает, весь цилиндр полностью переходит в пластическое состояние, а между областями III и V появляется пластическая область IV, напряжения в которой соответствуют ребру $\sigma_{rr} = (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})/2$ призмы Ивлева (рис. 1.20ж). Решение поставленной задачи существует и для $\Omega > \Omega_{fp}$. При $\Omega = \Omega_{fp2}$ (рис. 1.20з) напряжения на внешней поверхности цилиндра переходят с грани $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ на ребро $\sigma_{zz} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2$ призмы (1.73), что приводит к зарождению пластической области VI. Дальнейшее увеличение параметра Ω не приводит к появлению новых пластических областей (рис. 1.20и), но границы между областями I-VI меняют свое положение, в частности увеличиваются области II, IV, VI, соответствующие ребрам призмы (1.73). Таким образом, в общем случае процесс нагружения цилиндра разделяется на следующие интервалы:

$$(0, \Omega_p), (\Omega_p, \Omega_1), (\Omega_1, \Omega_2), (\Omega_2, \Omega_{fp}), (\Omega_{fp}, \Omega_{fp2}), (\Omega_{fp2}, \Omega_{\max}) \quad (1.106)$$

Далее рассмотрим решение для упругой области и пластических областей I-VI. Упругое решение во вращающемся полом цилиндре с жестким включением имеет вид (1.13)–(1.15). В работе [25] показано, что при использовании условия Треска пластическое течение начинается на внутренней поверхности цилиндра, а напряженное состояние в этой точке соответствует ребру призмы Треска. Как известно, призмы Треска и Ивлева (1.73), а также цилиндр Мизеса пересекаются в ребрах призмы Треска. Отсюда можно сделать вывод, что пластическое течение в цилиндре с жестким включением начинается в одном и том же месте и при одной и той же скорости вращения для всех указанных условий текучести. Скорость начала пластического течения определяется из (1.17).

Решение (1.13), (1.14) остается справедливым в упругой области в течение всего процесса нагрузки. Однако константы интегрирования D_1, D_2 необходимо определять отдельно для каждой стадии нагружения (1.106). Как было отмечено ранее, в общем случае в цилиндре возникают 6 областей пластического течения, соответствующих разным граням и ребрам призмы Ивлева. Рассмотрим решение определяющей системы уравнений в пластических областях I и II. Символами C_i традиционно обозначены константы интегрирования.

Область I. В этой области имеют место соотношения $\sigma_1 = \sigma_{rr}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Условие пластичности (1.73) имеет вид:

$$2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 2. \quad (1.107)$$

Из (1.107), используя ассоциированный закон течения (1.8), найдем:

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{zz}^p, \varepsilon_{rr}^p = -2\varepsilon_{zz}^p, \varepsilon_{zz}^p = -\varepsilon_{zz}^e. \quad (1.108)$$

Соотношения (1.2) с учетом (1.108) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} + 2\varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{rr}^e + 2\varepsilon_{zz}^e, \\ \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{\theta\theta}^e - \varepsilon_{zz}^e. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Далее из предыдущей системы с помощью обратного закона Гука

(1.4) найдем распределение напряжений в виде функций от полных деформаций. Распределение осевого напряжения следует непосредственно из условия пластичности (1.107):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1-2\nu)} \varepsilon_{rr} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1-2\nu)} \varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1-2\nu)} \varepsilon_{rr} + \frac{1}{6} \frac{(5-4\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{zz} &= 2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - 2.\end{aligned}\quad (1.110)$$

Перемещение определяется из уравнения равновесия (1.5) с учетом зависимостей (1.110):

$$u = C_1 \beta^{-\sqrt{\frac{5-4\nu}{2(1+\nu)}}} + C_2 \beta^{\sqrt{\frac{5-4\nu}{2(1+\nu)}}} + 2(1+\nu)\beta - 6 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(13+22\nu)} \Omega^2 \beta^3. \quad (1.111)$$

Все остальные неизвестные функции определяются из (1.111).

Область II. Напряженное состояние здесь соответствует призме Ивлева $\sigma_{\theta\theta} = (\sigma_{rr} + \sigma_{zz})/2$, $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$, а условие пластичности (1.73) имеет вид:

$$\begin{aligned}2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} &= 2, \\ \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} - 2\sigma_{zz} &= 2.\end{aligned}\quad (1.112)$$

Из условия (1.112) найдем:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - \frac{2}{3}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - \frac{4}{3}. \quad (1.113)$$

Решая уравнение равновесия (1.5) с учетом соотношений (1.113) получим распределение радиального напряжения:

$$\sigma_{rr} = C_3 - \frac{1}{2} \Omega^2 \beta^2 - \frac{2}{3} \ln \beta. \quad (1.114)$$

Дифференциальное уравнение на перемещение следует из пластической несжимаемости. В этом случае объемная деформация является чисто упругой и определяется соотношением (1.10), откуда с учетом (1.2), (1.113) и (1.114) найдем:

$$u = C_4 \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2}(1-2\nu)(3C_3-1)\beta - (1-2\nu)\beta \ln \beta - \frac{3}{8}(1-2\nu)\Omega^2 \beta^3. \quad (1.115)$$

Оставшиеся функции определяются из (1.113)–(1.115).

Решение для пластической области III имеет вид (1.78), (1.80), (1.81). Напряженное-деформированное состояние в области IV определяется соотношениями (1.85)–(1.87). В области V решение записано в (1.82)–(1.84). Наконец, в области VI имеют место формулы (1.89)–(1.91).

Константы интегрирования в областях III–VI обозначим символами C_5, \dots, C_{12} . На каждой стадии упругопластического деформирования необходимо определить $2N$ констант интегрирования D_i, C_i и $N-1$ координату границ β_i между областями. В сумме $3N-1$ неизвестных, где N — количество областей на данном интервале (1.106). Для определения указанных неизвестных составляется система алгебраических уравнений, включающая в себя граничные условия задачи (1.11), а также по 3 условия непрерывности на каждой границе между областями. Очевидно, в данной системе число уравнений совпадает с числом неизвестных. Выбор условий непрерывности на границах между областями не единственен, произволен и должен обеспечивать непрерывность всех функций во всем цилиндре. Далее используются условия непрерывности $u, \sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$. Нетрудно убедиться, что выбор данных условий обеспечивает непрерывность всех функций на границе. Полученная таким образом система алгебраических уравнений является линейной относительно констант интегрирования D_i, C_i и нелинейной относительно координат границ β_i . На каждом интервале Ω получены точные аналитические выражения для констант интегрирования D_i, C_i , которые здесь не приводятся. Координаты границ β_i определяются численно из решения нелинейного уравнения (системы уравнений). Для вычисления переходных скоростей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_{fp}, \Omega_{fp2}$ используются дополнительные условия. Рассмотрим

пример. В интервале $\Omega \in (\Omega_2, \Omega_{fp})$ цилиндр состоит из:

- Пластическая область I ($\delta \leq \beta \leq \beta_1$);
- Пластическая область II ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$);
- Пластическая область III ($\beta_2 \leq \beta \leq \beta_3$);
- Упругая область ($\beta_3 \leq \beta \leq \beta_4$);
- Пластическая область V ($\beta_4 \leq \beta \leq 1$).

Система уравнений относительно неизвестных констант интегрирования $D_1, D_2, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_9, C_{10}$ и координат границ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ между областями имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \beta = \delta: & \quad u^I = 0; \\
 \beta = \beta_1: & \quad u^I = u^{II}, \quad \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{II}, \quad \sigma_{\theta\theta}^I = \sigma_{\theta\theta}^{II}; \\
 \beta = \beta_2: & \quad u^{II} = u^{III}, \quad \sigma_{rr}^{II} = \sigma_{rr}^{III}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{II} = \sigma_{\theta\theta}^{III}; \\
 \beta = \beta_3: & \quad u^{III} = u^{EL}, \quad \sigma_{rr}^{III} = \sigma_{rr}^{EL}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{III} = \sigma_{\theta\theta}^{EL}; \\
 \beta = \beta_4: & \quad u^{EL} = u^V, \quad \sigma_{rr}^{EL} = \sigma_{rr}^V, \quad \sigma_{\theta\theta}^{EL} = \sigma_{\theta\theta}^V; \\
 \beta = 1: & \quad \sigma_{rr}^V = 0.
 \end{aligned} \tag{1.116}$$

Для определения критической скорости вращения Ω_{fp} приведенная выше система дополняется условием $\beta_3 = \beta_4$. Аналогичным образом определяются константы интегрирования D_i, C_i , границы между областями β_i и переходные скорости $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_{fp2}$ для других интервалов параметра нагружения Ω (1.106). Численные значения переходных скоростей $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_{fp}, \Omega_{fp2}$ приведены далее.

1.4.2 Стадия разгрузки

На стадии разгрузки предполагается, что параметр нагружения Ω монотонно убывает от Ω_{max} вплоть до полной остановки цилиндра. Далее используются обозначения: $\varepsilon_{ij}^{pr} = \varepsilon_{ij}^p(\Omega_{max})$, $\hat{\beta}_i = \beta_i(\Omega_{max})$. Если максимальная скорость вращения Ω_{max} была достаточно высокой, то при $\Omega = \Omega_{sp}$ на

внутренней поверхности цилиндра возникает вторичное (повторное) пластическое течение. В общем случае для достаточно высоких значений Ω_{\max} в цилиндре возможно появление 6 вторичных пластических областей, соответствующих разным граням и ребрам призмы Ивлева. Области вторичного течения обозначаются римскими цифрами от VII до XII в порядке их расположения в цилиндре. Границы между областями обозначаются γ_i также в порядке их расположения. Вторичное пластическое течение в цилиндре в целом развивается аналогично первичному пластическому течению на стадии нагрузки. Однако, области I-VI первичного и области повторного VII-XII пластического течения соответствуют противоположным граням и ребрам призмы Ивлева.

В момент $\Omega = \Omega_{sp}$ на поверхности $\beta = \delta$ возникает область VII, соответствующая условию (1.73) в виде $\sigma_3 = \sigma_{rr}, \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Далее при $\Omega = \Omega_3$ напряженное состояние на упругопластической границе γ_1 переходит на ребро, в результате чего одновременно появляются две вторичные пластические области. Напряжения в области VIII соответствуют ребру $\sigma_{\theta\theta} = (\sigma_{rr} + \sigma_{zz})/2, \sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$, а в области IX — грани $\sigma_1 = \sigma_{zz}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. С уменьшением Ω упругая область ($\gamma_3 \leq \beta \leq 1$) в цилиндре уменьшается и при $\Omega = \Omega_4$ на внешней поверхности цилиндра условие пластичности (1.73) выполняется в виде $\sigma_3 = \sigma_{\theta\theta}, \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, в результате чего в указанном месте появляется вторичная пластическая область XI. Максимальная скорость вращения выбрана с тем расчетом, чтобы в момент полной остановки весь цилиндр переходил в состояние пластичности. Поэтому при $\Omega = 0$ упругая область между областями IX и XI исчезает и в точке $\gamma_3 = \gamma_4$ возникает вторичная пластическая область X, соответствующая ребру призмы Ивлева $\sigma_{rr} = (\sigma_{zz} + \sigma_{\theta\theta})/2, \sigma_{zz} > \sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$. Таким образом процесс разгрузки состоит из следующих интервалов

$$(\Omega_{sp}, \Omega_{max}), (\Omega_3, \Omega_{sp}), (\Omega_4, \Omega_3), (0, \Omega_4).$$

Когда скорость вращения начинает уменьшаться, весь цилиндр вновь ведет себя как упругое тело, но с первичными пластическими деформациями, накопленными на стадии нагрузки в 6 областях пластического течения. При $\Omega_{max} \geq \Omega \geq \Omega_{sp}$ вращающийся цилиндр деформируется чисто упруго, а перемещение в нем имеет вид (1.48). Заметим, что выражение (1.48) справедливо для любого условия пластического течения. Поскольку функция является кусочно-определенной, то ее необходимо вычислять отдельно в каждой области пластического течения. Для этого из решений для первичных областей I-VI, приведенных в разделе 1.4.1, можно получить распределение пластических деформаций в каждой области. Далее, вычисляя функцию $p(\beta)$ найдем окончательно:

Область I:

$$u = B_1 \frac{1}{\beta} + B_2 \beta - \frac{1(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega^2 \beta^3 + \\ + C_1 \beta^{-\sqrt{\frac{5-4\nu}{2(1+\nu)}}} + C_2 \beta^{\sqrt{\frac{5-4\nu}{2(1+\nu)}}} - \frac{35(1+\nu)(1-2\nu)^2}{8(1-\nu)(13+22\nu)} \Omega_{max}^2 \beta^3;$$

Область II:

$$u = B_3 \frac{1}{\beta} + B_4 \beta - \frac{1(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega^2 \beta^3 + \frac{1}{2}(1-2\nu)(1-2\ln \beta) \beta - \frac{1(1-2\nu)^2}{4(1-\nu)} \Omega_{max}^2 \beta^3;$$

Область III

$$u = B_5 \frac{1}{\beta} + B_6 \beta - \frac{1(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega^2 \beta^3 - \frac{1(1+\nu)(1-2\nu)^2}{8(1-\nu)(5-4\nu)} \Omega_{max}^2 \beta^3;$$

Область IV

$$u = B_7 \frac{1}{\beta} + B_8 \beta - \frac{1(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega^2 \beta^3 - \\ - \frac{1}{2}(1-2\nu)(1-2\ln \beta) \beta - \frac{1(1-2\nu)^2}{4(1-\nu)} \Omega_{max}^2 \beta^3;$$

Область V

$$u = B_9 \frac{1}{\beta} + B_{10} \beta - \frac{1(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega^2 \beta^3 + \\ + C_9 \beta^{-\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}}} + C_{10} \beta \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}} - \frac{5(1+\nu)(1-2\nu)^2}{8(1-\nu)(43-38\nu)} \Omega_{\max}^2 \beta^3;$$

Область VI

$$u = B_{11} \frac{1}{\beta} + B_{12} \beta - \frac{1(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega^2 \beta^3 - \\ - (1-2\nu)(1-2\ln \beta) \beta - \frac{1(1-2\nu)^2}{4(1-\nu)} \Omega_{\max}^2 \beta^3.$$

В приведенных выше выражениях B_i — константы интегрирования.

Скорость начала повторного пластического течения Ω_{sp} можно найти из решения уравнения $\sigma_{\theta\theta}(\delta) + \sigma_{zz}(\delta) - 2\sigma_{rr}(\delta) = 2$.

Рассмотрим решение для вторичных пластических областей.

Область VII. В этой пластической области имеют место соотношения $\sigma_3 = \sigma_{rr}$, $\sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Условие пластичности (1.73) принимает вид:

$$\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} - 2\sigma_{rr} = 2. \quad (1.117)$$

Используя ассоциированный закон пластического течения (1.8), найдем из соотношения (1.117):

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{sp} = \varepsilon_{zz}^{sp}, \varepsilon_{rr}^{sp} = -2\varepsilon_{zz}^{sp}, \varepsilon_{zz}^{sp} = -\varepsilon_{zz}^e. \quad (1.118)$$

Соотношения (1.2) с учетом (1.118) преобразуются к виду:

$$\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr} - 2\varepsilon_{zz}^{pr} = \varepsilon_{rr}^e + 2\varepsilon_{zz}^e, \\ \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr} - \varepsilon_{zz}^{pr} = \varepsilon_{\theta\theta}^e - \varepsilon_{zz}^e. \quad (1.119)$$

Далее из системы (1.119) с помощью обратного закона Гука (1.4) найдем распределение напряжений в виде функций от полных и накопленных пластических деформаций. Распределение осевого напряжения следует непосредственно из условия пластичности (1.117):

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr}) + \frac{1}{3} \frac{1}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}) - \frac{1}{3} \frac{1}{(1-2\nu)} \varepsilon_{zz}^{pr}, \\
\sigma_{\theta\theta} &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^{pr}) + \\
&\quad \frac{1}{6} \frac{(5-4\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}) + \frac{1}{6} \frac{(1-8\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{zz}^{pr}, \\
\sigma_{zz} &= 2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + 2.
\end{aligned} \tag{1.120}$$

Перемещение определяется из уравнения (1.5) с учетом (1.120):

$$\begin{aligned}
u &= A_1 u_1 + A_2 u_2 - 2(1+\nu)\beta - 6 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(13+22\nu)} \Omega^2 \beta^3 + \\
&\quad + u_2 \int \frac{u_1}{W} d(\beta) d\beta - u_1 \int \frac{u_2}{W} d(\beta) d\beta, \\
u_1 &= \beta^{-\sqrt{\frac{5-4\nu}{2(1+\nu)}}}, u_2 = \beta^{\sqrt{\frac{5-4\nu}{2(1+\nu)}}}, \\
W &= \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{5-4\nu}{2(1+\nu)}}, \quad d(\beta) = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{1}{\beta} (\varepsilon_{zz}^{pr} - \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}).
\end{aligned} \tag{1.121}$$

Заметим, что поскольку функция $d(\beta)$ в решении является кусочно-определенной, то решение (1.121) будет иметь разный вид в каждом непустом пересечении области VI с областями первичного течения.

Область VIII. Напряженное состояние в данной области соответствует ребру $\sigma_{\theta\theta} = (\sigma_{rr} + \sigma_{zz})/2$, $\sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$ призмы Ивлева, а условие пластичности (1.73) имеет вид:

$$\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} - 2\sigma_{rr} = 2, \quad 2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2. \tag{1.122}$$

Из условия пластичности (1.122) найдем:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \frac{2}{3}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \frac{4}{3}. \tag{1.123}$$

Решая уравнение равновесия (1.5) с учетом соотношений (1.123), получим распределение радиального напряжения:

$$\sigma_{rr} = A_3 - \frac{1}{2} \Omega^2 \beta^2 + \frac{2}{3} \ln \beta \tag{1.124}$$

Из уравнения (1.10) с учетом (1.123) и (1.124) найдем:

$$u = A_4 \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2}(1-2\nu)(3A_3+1)\beta + (1-2\nu)\beta \ln \beta - \frac{3}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^3 \quad (1.125)$$

Область IX соответствует грани $\sigma_1 = \sigma_{zz}$, $\sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ призмы Ивлева, а решение в ней имеет вид (1.93), (1.96) и (1.98). Наконец, в **области XI** имеют место соотношения $\sigma_3 = \sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, а решение определяется (1.99), (1.102) и (1.104). Константы интегрирования в областях IX и XI обозначим символами A_5, \dots, A_8 . Вычисление констант интегрирования B_i, A_i , границ между областями γ_i , а также переходных скоростей Ω_3, Ω_4 в целом производится аналогично разделам 1.2 и 1.3.

1.4.3 Примеры решения

Рассмотрим значения параметров: $\nu = 0.3, \delta = 0.2$. Предельная упругая скорость вращения (1.17) $\Omega_p = 3.07$. Переходные скорости вращения $\Omega_1 \cong 6.46, \Omega_2 \cong 8.83, \Omega_{fp} \cong 10.62, \Omega_{fp2} \cong 13.16$. Максимальная скорость вращения $\Omega_{\max} \cong 21.23$. Для условия Треска: $\Omega_{fp} \cong 9.28, \Omega_{\max} \cong 18.56$. Распределения напряжения и пластических деформаций для $\Omega = \Omega_1, \Omega_2, \Omega_{fp}, \Omega_{\max}$ изображены на рис. 1.21–1.24. Видно, что осевое напряжение является наименьшим в большей части цилиндра. Пластические деформации достигают максимума по абсолютной величине в окрестности включения. Переходные скорости для разгрузки имеют значения $\Omega_{sp} \cong 15.1, \Omega_3 \cong 8.31, \Omega_4 \cong 3.58$. На рис. 1.25 показано распределение остаточных напряжений, перемещений, деформаций, вторичных пластических деформаций и остаточных пластических деформаций. Осевое остаточное напряжение является наибольшим. Пластические деформации существенно уменьшаются вследствие повторного течения. Распределение остаточных напряжений для условий Треска и максимальных приведенных напряжений достаточно близко (рис. 1.10а и 1.25а), однако распределение пластических деформаций заметно отличается (рис. 1.10б и 1.25б).

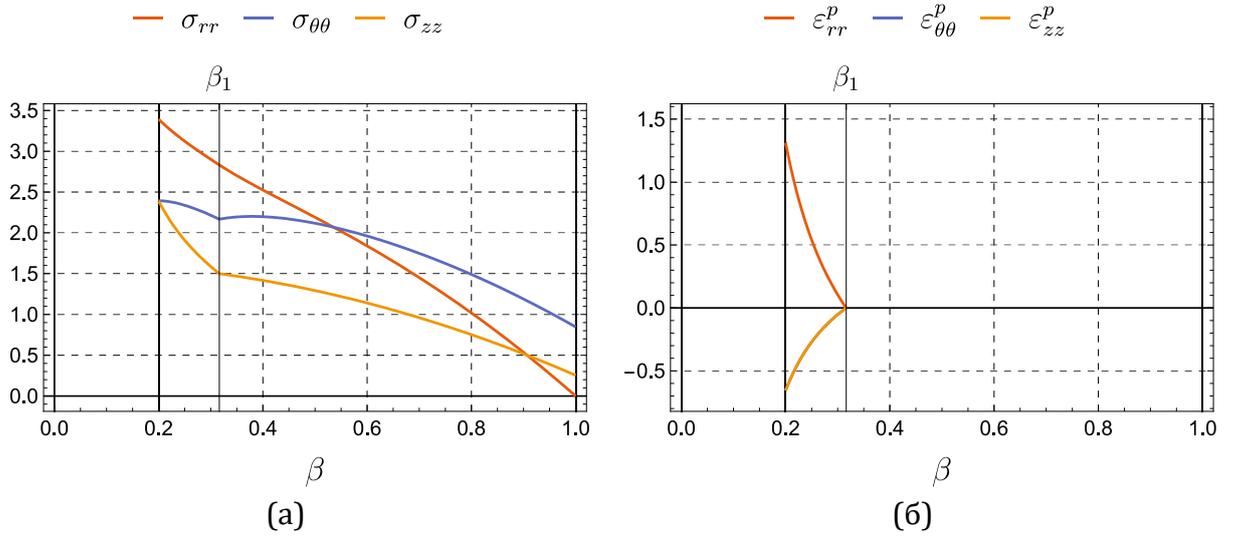


Рис. 1.21 — Распределение (а) напряжений и (б) пластических деформаций при скорости вращения $\Omega = \Omega_1$.

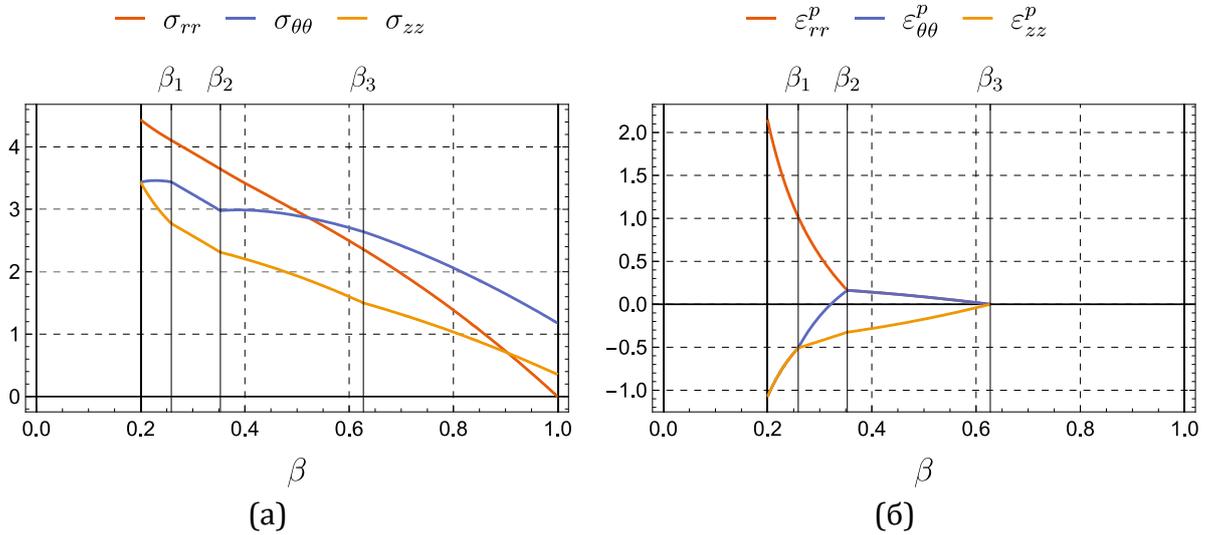


Рис. 1.22 — Распределение (а) напряжений и (б) пластических деформаций при скорости вращения $\Omega = \Omega_2$.

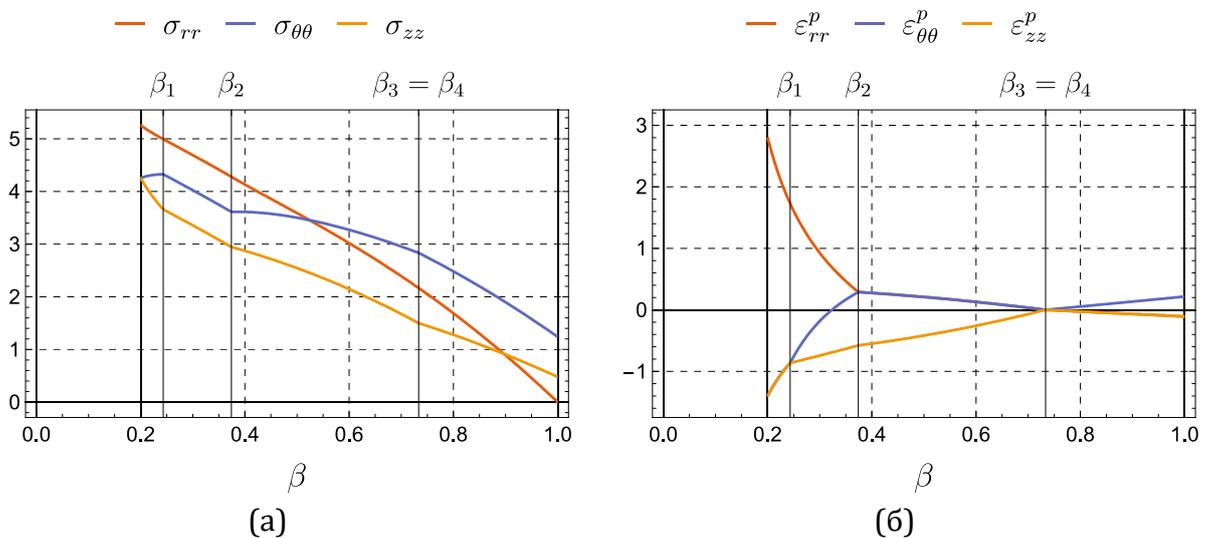


Рис. 1.23 — Распределение (а) напряжений и (б) пластических деформаций при скорости вращения $\Omega = \Omega_{fp}$.

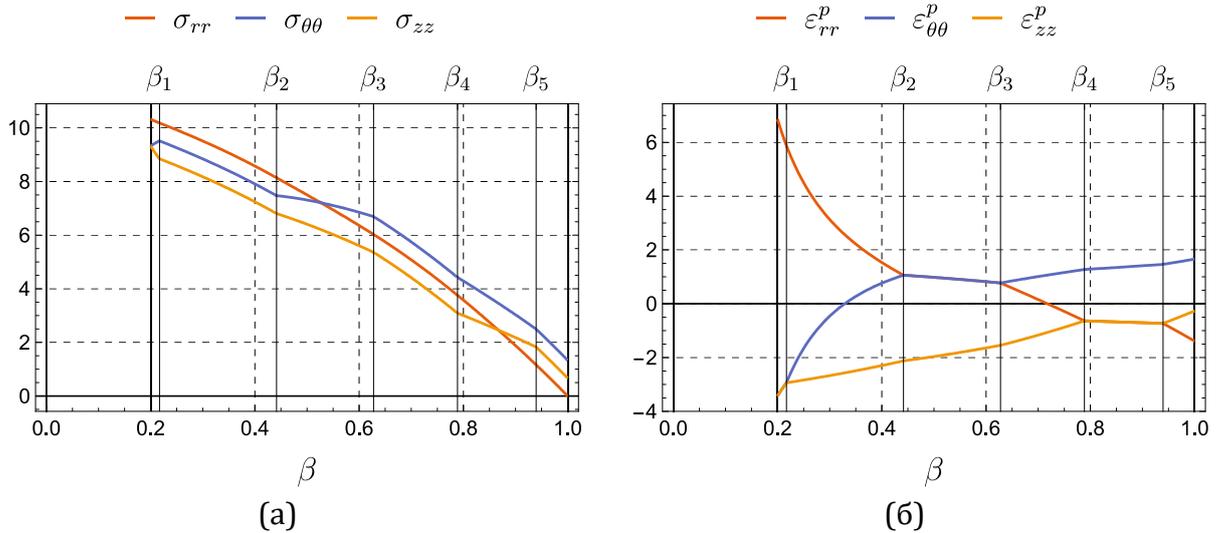


Рис. 1.24 — Распределение (а) напряжений и (б) пластических деформаций при скорости вращения $\Omega = \Omega_{\max}$.

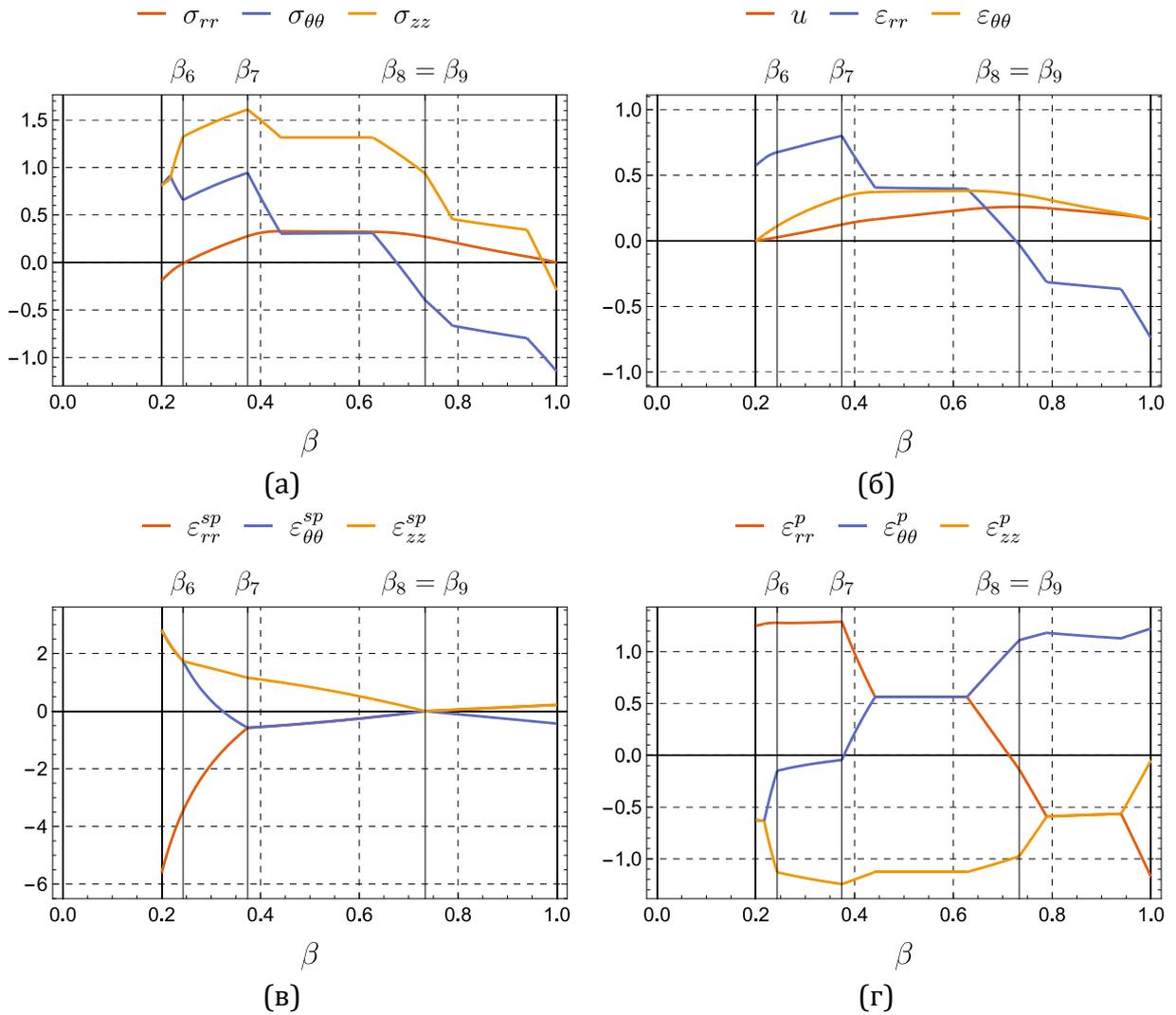


Рис. 1.25 — Напряженно-деформированное состояние при $\Omega = 0$ (остановка цилиндра): (а) остаточные напряжения; (б) перемещение и полные деформации; (в) вторичные пластические деформации; (г) пластические деформации.

1.5. Выводы

В первой главе найдены новые аналитические решения, описывающие напряженно-деформированное состояние во вращающихся цилиндрах с закрепленными торцами в процессе упругопластического деформирования. В качестве критериев пластичности использовались два кусочно-линейных условия, а именно, условие Треска и условие Ишлинского-Ивлева; материал цилиндров принимался идеальным. Рассматривались стадии нагрузки и разгрузки, а максимальная скорость вращения выбирались с тем расчетом, чтобы после остановки весь цилиндр переходил в состояние пластичности.

Установлено, что в ходе нагрузки в цилиндре может возникать сразу несколько пластических областей, соответствующих различным граням и ребрам условия пластичности. Например, во вращающемся цилиндре с жестким включением в самом общем случае появляется шесть пластических областей, а в сплошном — четырех, одна половина которых соответствует ребрам призмы текучести, а другая — граням. Эта закономерность имеет место и для условия Треска, и для условия Ишлинского-Ивлева. Процесс нагрузки, таким образом, разделяется на несколько интервалов, каждый из которых характеризуется определенной конфигурацией пластических областей. Для каждой из возможных пластических областей найдено точное аналитическое решение определяющей системы дифференциальных уравнений. Сформулированы системы алгебраических уравнений для вычисления констант интегрирования и координат границ между областями.

Результаты расчетов показали, что в цилиндре с жестким включением напряжения достигают максимума на внутренней поверхности цилиндра. В окрестности жесткого включения наибольшим является радиальное напряжение, в центре цилиндра — радиальное и тангенциальное, а в оставшейся части — тангенциальное. Пластические

деформации достигают наибольших по модулю значений в окрестности жесткого включения. При одинаковой скорости вращения условия Треска и Ишлинского-Ивлева предсказывают существенно разные распределения для напряжений и пластических деформация, однако их максимальные значения оказываются достаточно близкими. Как и ожидалось, критическая скорость, при которой весь цилиндр переходит в пластическое состояние, выше для условия Ишлинского-Ивлева. В случае сплошного цилиндра разница составляет около 10%, а для цилиндра с жестким включением при $\delta = 0.2$ — около $\approx 14\%$.

Процесс нагрузки в начале является чисто упругим, а затем, если максимальная скорость вращения была достаточно высокой, в цилиндре происходит зарождение повторного пластического течения. Интересно отметить, что при нагрузке и разгрузке в цилиндре появляются пластические области, соответствующие противоположным граням и ребрам поверхности текучести. Распределение остаточных напряжений для условий Ишлинского-Ивлева достаточно близко, распределение остаточных пластических деформаций отличается более существенно.

Аналитические решения, найденные в первой главе, могут использоваться при проектировании валов и маховиков, в частности, для оценки максимальной скорости вращения. Кроме того, решения для стадии разгрузки могут найти применение в моделировании технологии ротационного автофретирования. В целом полученные результаты показали, что условия пластичности Треска и Ишлинского-Ивлева приводят к заметным качественным и количественным отличиям в напряженно-деформированном состоянии вращающегося цилиндра. Этот вывод имеет большое практическое значение, поскольку для ряда материалов более адекватным оказывается условие Ишлинского-Ивлева [87]. Вопрос оценки влияния выбранного условия пластичности на упругопластический отклик будет рассмотрен более подробно в следующей главе.

2. Упругопластическая задача для упрочняющегося материала

2.1. Введение

Большинство конструкционных материалов в той или иной степени проявляют упрочнение, которое в свою очередь может оказывать существенное влияние на несущую способность конструкции. Эразлан представил решение [88] для вращающегося сплошного цилиндра, изготовленного из линейно-упрочняемого материала. Он рассматривал, как закрепленные, так и свободные торцы. В другой работе [86] Эразлан провел подробный численный анализ вращающегося сплошного и полого цилиндров из нелинейно-упрочняемого материала. Математическая модель [86] основана на деформационной теории пластичности, условии Мизеса и законе упрочнения Свифта. Рассматривались оба типа торцевых условий. Полученные результаты показали, что параметры нелинейного упрочнения оказывают существенное влияние на распределение напряжений и деформаций в цилиндре, а также на критическую скорость вращения цилиндра. Результаты Эразлана [86] расширены в работе [89], в которой найдено распределение остаточных деформаций во вращающемся нелинейно-упрочняемом цилиндре после его предварительного вращения с заданной скоростью. Рассматривались сплошные и полые цилиндры, как с закрепленными, так и свободными торцами. Получены критические скорости вращения цилиндра, при которых на стадии разгрузки не возникает повторное пластическое течение. Поскольку в работах [86, 89] использовалось условие Мизеса и нелинейный закон упрочнения, то для решения авторы разработали численный алгоритм, основанный на методе стрельбы. Осесимметричные упругопластические задачи (полые цилиндр и сфера под действием внутреннего давления) с использованием степенного закона упрочнения рассматривались в [90–

93], где для ряда частных случаев степенного параметра получены аналитические решения в замкнутом виде. Упругопластический анализ вращающегося диска, посаженного с натягом на упругий вал, проведен в [94] на основе степенного закона упрочнения. В работе [94] получены аналитические решения для некоторых частных случаев степенного параметра, а также приближенное аналитическое решение для общего случая.

Ротационное автофретирование полого цилиндра с закрепленными торцами, изготовленного из линейно-упрочняемого материала, изучалось в работе [56]. Авторы использовали условие пластичности Треска с учетом эффекта Баушингера. Проанализировано влияние упрочнения материала и эффекта Баушингера на оптимальные параметры автофретирования. Моделирование гидравлического автофретирования полых цилиндрических заготовок на основе условия Треска и новой модели нелинейного упрочнения выполнено в [95]. Авторами [96] разработана комбинированная модель изотропно-кинематического упрочнения, параметры которой зависят от величины предварительно накопленной пластической деформации; построенная модель и условие пластичности Треска использовались для расчета ротационного автофретирования полых заготовок с закрепленными торцами. Закон изотропного упрочнения в [95, 96] представляет собой сумму линейной функции и квадратного корня от эквивалентной пластической деформации и допускает получение аналитических решений в рассмотренных задачах. Результаты работ [56, 86, 88, 89, 96] показали, что упрочнение может оказывать существенное влияние на упругопластический отклик вращающегося цилиндра, в особенности на распределение остаточных напряжений.

В ходе эксплуатации вращающиеся элементы механизмов могут подвергаться температурному воздействию. В работах [97, 98] изучалось упругопластическое деформирование полого цилиндра при наличии стационарного температурного градиента, вызванного разницей

температур на внутренней и внешней поверхностях, в несвязной постановке. Пластические деформации вычислялись на основе условия Треска, ассоциированного закона течения и модели линейного изотропного упрочнения. Механические и теплофизические параметры материала предполагались не зависящими от температуры. Авторами [97, 98] установлено, что температурное поле оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние вращающегося цилиндра. В частности, в [97] отмечено что, присутствие положительного градиента температуры приводит к существенному уменьшению скорости начала пластического течения и незначительному увеличению скорости, соответствующей полному переходу цилиндра в пластическое состояние. В то же время цилиндр, предварительно нагруженный отрицательным температурным градиентом практически до предела текучести, способен выдерживать значительные скорости вращения до зарождения пластического течения [98]. Влияние нестационарного температурного поля на упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра рассматривалось в работе [99]. Авторы использовали условие Треска и модель идеального материала, предел текучести которого линейно уменьшается с ростом температуры. Предполагалось, что температура внешней поверхности вначале возрастает до максимальной, затем сохраняет постоянное значение, после чего снижается до исходной. Установлено, что достаточный нагрев внешней поверхности может привести к зарождению пластического течения даже если скорость вращения цилиндра не превосходит предельную упругую скорость вращения. Интересно отметить, что пластическое течение появляется уже после того, как температура внешней поверхности начала снижаться. Этот эффект по всей видимости объясняется неоднородностью температурного поля и механических свойств цилиндра. Упрочнение полого цилиндра со свободными торцами с помощью комбинации ротационного и

температурного автофретирования исследовалось в [100], где установлено, что неоднородное температурное поле в цилиндре позволяет сократить скорость вращения при сохранении уровня упрочнения.

Одним из способов повышений несущей способности конструкции и снижения ее веса является использование функционально-градиентных материалов (ФГМ). Механические свойства ФГМ плавно меняются в зависимости от пространственных координат, что облегчает получение аналитического решения по сравнению с расчетом многослойных композитов. Упругопластический анализ вращающихся полых ФГМ-цилиндров с закрепленными торцами представлен в работах [101–103]. Результаты получены на основе условия пластичности Треска, материал цилиндра принимался идеальным. Использовалась степенная зависимость свойств материала от радиальной координаты цилиндра. В [101] данная зависимость использовалась только модуля Юнга, в [102] для модуля Юнга и предела текучести. Авторы [103] предполагали, что все свойства материала, за исключением коэффициента Пуассона зависят от радиальной координаты. Вращающийся сплошной ФГМ-цилиндр с закрепленными торцами, изготовленный из нелинейно упрочняемого материала изучался в работе [104]. Анализ основан на деформационной теории пластичности, условии пластичности Мизеса и законе упрочнения Свифта. Для модуля Юнга, предела текучести, коэффициента Пуассона и плотности материала использовалась квадратичная зависимость от радиальной координаты. Для решения разработан численный алгоритм на основе метода стрельбы. Полученные результаты [101–104] показывают, что неоднородность материала оказывает существенное влияние на напряженное состояние в цилиндре. Более того, подходящим выбором распределений механических свойств материала можно значительно повысить максимальную скорость вращения ФГМ-цилиндра. Влияние размерного эффекта на упругопластический отклик вращающегося полого

цилиндра из функционально-градиентного материала изучалось в работе [105] на основе градиентной теории пластичности деформационного типа, условия Мизеса и закона линейного изотропного упрочнения. Установлено, что градиентная теория предсказывает замедление пластического течения в цилиндре по сравнению с классическими решениями, однако этот эффект проявляется только в микромасштабе и для цилиндров с внутренним радиусом свыше 500 мкм разница между градиентной и классической теориями практически исчезает.

Применение более сложных моделей материалов затрудняет расчет напряжений во вращающихся цилиндрах, что приводит к необходимости использования численных методов. Следует отметить публикации [106–108], посвященные исследованию вращающихся полых цилиндров из нелинейно упрочняющегося материала в рамках жесткопластического анализа. Авторы использовали теоремы предельного пластического состояния. В работе [106] использовалось условие пластичности Мизеса и экспоненциальный закон упрочнения Воге. В [107] дополнительно учитывалась вязкость материала, а в [108] — пластическая анизотропия. Для решения в [106–108] использовался метод конечных элементов. Для ряда значений параметров найдены замкнутые аналитические решения.

Подробный обзор работ, посвященных упругопластическому анализу вращающихся цилиндров, показывает, что для расчета обычно используются условия Треска и Мизеса. Результаты расчетов показывают, что напряженное состояние в цилиндре существенно зависит от условия пластичности. В [109] предложено общее кусочно-линейное условие:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \frac{\alpha}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) &= \sigma_t, \quad \text{если } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha}, \\ \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 &= \sigma_t, \quad \text{если } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha}, \\ \alpha &= \frac{\sigma_t}{\sigma_c}, \quad b = \frac{(1+\alpha)\tau_0 - \sigma_t}{\sigma_t - \tau_0} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\sigma_t, \sigma_c, \tau_0$ — предел текучести при одноосном растяжении, одноосном сжатии и на сдвиг соответственно.

Выражение (2.1) определяет не одно, а множество кусочно-линейных условий пластичности, зависящее от параметров α и b . Эти параметры определяются из базовых одноосных экспериментов и могут рассматриваться в качестве механических характеристик материала. В частных случаях условие (2.1) описывает многие известные условия пластичности. Например, при $\alpha = 1$ и $b = 0$ условие (2.1) сводится к условию Треска, при $\alpha = 1$ и $b = 1$ к условию Ишлинского-Ивлева. В целом при $\alpha = 1$ условие (2.1) описывает материалы, чьи пластические свойства одинаковы при растяжении и сжатии. Частный случай $\alpha \neq 1$ и $b = 0$ соответствует условию Мора-Кулона. При $\alpha \neq 1$ и $b = 1$ условие (2.1) сводится к обобщенному условию Ишлинского-Ивлева. Подходящим выбором коэффициентов α и b из общего кусочно-линейного условия (2.1) можно получить достаточно точные аппроксимации нелинейных условий пластичности, например Мизеса и Друкера-Прагера.

Общее кусочно-линейное условие пластичности (2.1) описывает чрезвычайно широкий класс материалов. Главное ограничение состоит в том, что пластические свойства материала должны быть изотропны и не зависеть от гидростатического давления. В последние годы получен ряд универсальных решений на основе общего условия (2.1). Отличительная особенность таких решений заключается в том, что они обобщают ранее полученные результаты для классических условий пластичности. Ма [110] использовал частный случай $\alpha = 1$ условия (2.1) для расчета предельного пластического состояния вращающегося сплошного и полого диска. Авторы использовали модель идеального пластического тела. Их решение ограничивается расчетом напряженного состояния. Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра с закрепленными торцами представлен в [111]. Авторы предполагали, что $\alpha = 1$ (2.1), а

материал цилиндра принимался идеальным. Полученное решение справедливо для стадии нагрузки вплоть до полного перехода цилиндра в состояние пластичности. В работах [112–114] изучались полые цилиндры, находящиеся под действием внутреннего давления. В [112, 114] условие (2.1) использовалось в общем виде, а в [113] предполагалось, что $\alpha = 1$. Особое внимание в [112–114] уделено расчету зависимостей критического давления от параметров материала.

Общее кусочно-линейное условие (2.1) также использовалось для упругопластического расчета предельной нагрузки локтевого соединения [115] и покрытия [116], для упругопластического анализа изогнутой балки [117]. Работы [118, 119] посвящены упругопластическому анализу многослойных полых цилиндров под действием внутреннего давления. Пластическое деформирование и предельная несущая способность круговых пластин изучались в [120, 121]. Условие (2.1) также находит применение при решении задач геомеханики. В работе [122] в рамках градиентной теории пластичности рассматривалась задача о буровой скважине. Упругопластическому расчету тоннелей посвящены работы [123–126]. Общее кусочно-линейное условие (2.1) также может использоваться для решения задач в рамках неассоциированных моделей пластического течения [127]. В работах [128, 129] показано, что общее кусочно-линейное условие (2.1) может быть реализовано численно с помощью метода конечных разностей или метода конечных элементов.

Настоящая глава посвящена анализу влияния промежуточного главного напряжения, а также изотропного упрочнения (линейного и нелинейного) на упругопластический отклик вращающихся цилиндров. В разделе 2.2 представлено универсальное аналитическое решение для общего кусочно-линейного условия пластичности в условиях обобщенной плоской деформации и осевой симметрии. Линейно-упрочняемый вращающийся цилиндр с жестким включением в присутствии неоднородного

температурного поля рассматривается в разделе 2.3. Степенной и экспоненциальный законы упрочнения применяются для упругопластического анализа вращающегося полого цилиндра в разделах 2.4 и 2.5. Влияние эффекта падения модуля Юнга после предварительного пластического деформирования на остаточные напряжения, вызванные ротационном автофретированием полого цилиндра исследуется в разделе 2.5.

2.2. Упругопластические деформации в сплошном и полом вращающемся цилиндре из линейно-упрочняемого материала при общем кусочно-линейном условии пластичности

2.2.1 Постановка задачи

Рассматривается цилиндр бесконечной длины. Внутренний и внешний радиус цилиндра обозначается r_{in} и r_{out} соответственно. Для сплошного цилиндра $r_{in}=0$. Цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω , которая медленно возрастает с течением времени. Анализ ограничен стадией нагрузки. Угловым ускорением пренебрегаем. В этом и всех последующих разделах данной главы для решения используется цилиндрическая система координат r, θ, z , ось z которой совпадает с осью симметрии цилиндра. Цилиндр находится в состоянии обобщенной плоской деформации и сохраняет осевую симметрию в процессе деформирования. При таких условиях единственным ненулевым перемещением в цилиндре является радиальное перемещение u_r .

Используется система безразмерных величин и параметров:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{r_{in}}{r_{out}}, \beta = \frac{r}{r_{out}}, \bar{u} = \frac{E}{\sigma_0} \frac{u_r}{r_{out}}, \Omega = \frac{\rho r_{out}^2 \omega^2}{\sigma_0}, \\ \bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}^e, \bar{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}^p, \\ \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}, \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_0}, \bar{H} = \frac{H}{E}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где E — модуль Юнга, σ_0, σ_y — начальный/актуальный предел текучести при одноосном растяжении-сжатии, ε_{ij} — полные деформации, ε_{ij}^e — упругие деформации, ε_{ij}^p — пластические деформации, σ_{ij} — напряжения, H — параметр, характеризующий упрочнение материала ($H > 0$), ρ — плотность материала. Параметр нагружения Ω монотонно возрастает от 0 до некоторого максимального значения Ω_{\max} . Далее все уравнения записаны в безразмерных переменных (2.2), а знак подчеркивания опущен. Параметр нагружения Ω называется скоростью вращения.

Предполагаем, что деформации в цилиндре являются малыми и представляют собой сумму упругих и пластических деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial \beta}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{\beta}; \quad \varepsilon_{zz} = \text{const}; \\ \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{rr}^p; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p; \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^p. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Осевая деформация вычисляется из условия

$$\int_{\delta}^1 \beta \sigma_{zz} d\beta = 0. \quad (2.4)$$

При расчете цилиндров с закрепленными торцами вместо (2.4) используется условие $\varepsilon_{zz} = 0$. Напряжения определяются законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\varepsilon_{rr}^e + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + (1-\nu)\varepsilon_{zz}^e \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где ν — коэффициент Пуассона. Далее предполагается, что $\nu \in (0, 1/2)$.

Соотношения обратные к (2.5) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^e &= \sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^e &= \sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr} - \nu\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{zz}^e &= \sigma_{zz} - \nu\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Единственное нетривиальное уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\beta} = -\Omega\beta. \quad (2.7)$$

Граничные условия для сплошного цилиндра имеют вид

$$u(0) = 0, \quad \sigma_{rr}(1) = 0. \quad (2.8)$$

а для полого:

$$\sigma_{rr}(\delta) = 0, \quad \sigma_{rr}(1) = 0. \quad (2.9)$$

Предполагая, что пластические деформации равны нулю, нетрудно получить распределение перемещений и напряжений в области чисто упругого деформирования:

$$\begin{aligned} u &= \frac{d_1}{\beta} + d_2\beta - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega\beta^3; \\ \sigma_{rr} &= -\frac{d_1}{(1+\nu)} \frac{1}{\beta^2} + \frac{d_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega\beta^2; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{d_1}{(1+\nu)} \frac{1}{\beta^2} + \frac{d_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{(1+2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega\beta^2; \\ \sigma_{zz} &= \frac{2\nu d_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \Omega\beta^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

где d_1, d_2 — константы интегрирования в упругой области. Вычисление констант d_1, d_2 рассмотрено в разделе 2.2.6.

Рассмотрим частный случай $\alpha = 1$ общего кусочно-линейного условия пластичности (2.1), который записывается в виде [109]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \frac{1}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) &= \sigma_y, \quad \text{если } \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \\ \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \sigma_3 &= \sigma_y, \quad \text{если } \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) — главные напряжения, b — параметр, отражающий влияние промежуточного главного напряжения на пластическое деформирование. Далее предполагается, что $b \in [0, 1]$, поскольку только в

этом случае поверхность текучести, соответствующая условию (2.11), является выпуклой [109]. Условие (2.11) представляет собой множество условий пластичности, зависящее от параметра b . Значение b зависит от отношения λ предела текучести материала при чистом сдвиге τ_0 к пределу текучести при одноосном/растяжении сжатии σ_0 :

$$b = \frac{2\lambda - 1}{1 - \lambda}, \quad \lambda = \frac{\tau_0}{\sigma_t}.$$

Далее предполагается, что в процессе изотропного упрочнения материала величина λ , и, следовательно, b , остается постоянной. Из предыдущего выражения также найдем:

$$\lambda = (1 + b)/(2 + b). \quad (2.12)$$

Параметр λ определяется экспериментально и может рассматриваться в качестве характеристики материала. После экспериментального определения λ (или b) условие (2.11) конкретизируется и может использоваться для расчетов.

Рассмотрим предельные случаи общего условия (2.11).

Случай $b = 0$ ($\lambda = 1/2$) соответствует условию Треска (условие максимальных касательных напряжений):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y. \quad (2.13)$$

Согласно экспериментальным исследованиям, условие (2.13) подходит для описания пластического поведения мягких сталей и меди [87]. Также важно отметить, что условие (2.13) — единственное из возможных вариантов общего условия (2.11) — не учитывает влияние промежуточного главного напряжения на пластическое поведение материала.

Случай $b = 1$ ($\lambda = 2/3$) соответствует условию Ишлинского-Ивлева:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) &= \sigma_y, \quad \text{если } \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \\ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 &= \sigma_y, \quad \text{если } \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Условие (2.14) подходит для никелевых сплавов, титана, нержавеющей сталей [87]. Поверхности текучести в девиаторной плоскости, соответствующие условиям Треска, Ишлинского-Ивлева и Мизеса, изображены на рис. 2.1а. Заметим, что поверхность текучести любого изотропного материала должна располагаться между призмами Треска и Ивлева [109, 130–132]. Расчеты, выполненные на основе условий Треска и Ишлинского-Ивлева, дают соответственно нижнюю и верхнюю оценку несущей способности конструкции.

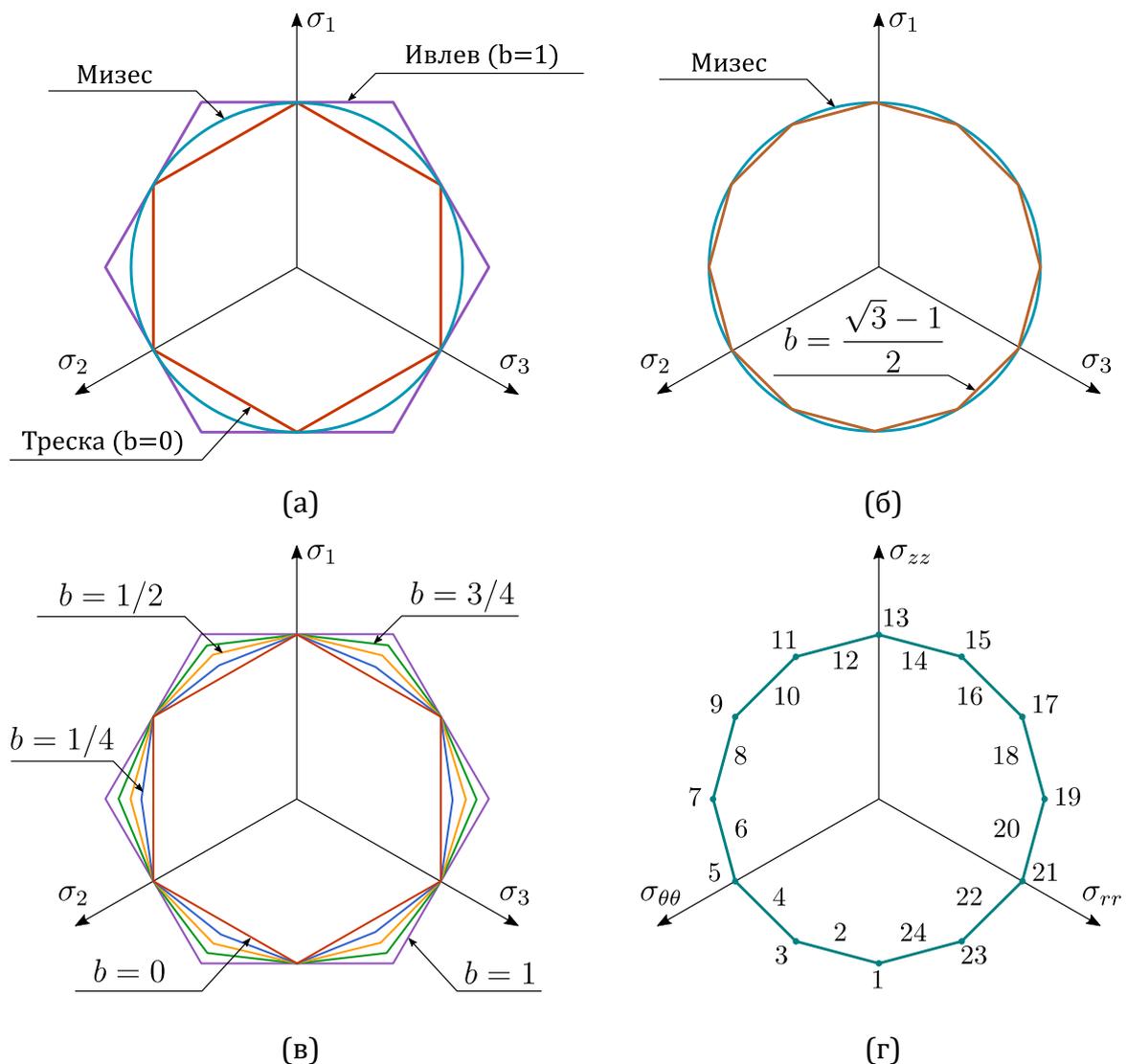


Рис. 2.1 — Сечения поверхностей текучести девиаторной плоскостью:
 (а) условия Треска, Мизеса и максимальных приведенных напряжений;
 (б) нелинейное условие Мизеса и его кусочно-линейная аппроксимация;
 (в) общее кусочно-линейное условие для разных b ;
 (г) нумерация граней и ребер общего кусочно-линейного условия.

Перечислим некоторые другие частные случаи условия (2.11). Случай $b = (\sqrt{3} - 1)/2$ в девиаторной плоскости представляет собой правильный 12-угольник, вписанный в окружность, соответствующую условию Мизеса (рис. 2.1б). Условие (2.11) при $b = (\sqrt{3} - 1)/2$ также называется условием Соколовского [87, 133] и может служить кусочно-линейной аппроксимацией условия Мизеса. Другой аппроксимации условия Мизеса соответствует случай $b = 1/2$. Как показали эксперименты, условие Мизеса и его кусочно-линейные аппроксимации подходят для железа, алюминия и алюминиевых сплавов, углеродистых сталей [87].

Поверхности текучести в девиаторной плоскости, соответствующие условию, для ряда значений b показаны на рис. 2.1в. В случаях $b = 0$ и $b = 1$ поверхности текучести представляют собой правильные шестиугольники, а при $b \in (0, 1)$ — двенадцатиугольники. Таким образом, условие (2.11) в случае $b \in (0, 1)$ имеет 24 возможные формы. Их нумерация представлена на рис. 2.1г. Ребра поверхности текучести (2.11) обозначаются нечетными числами от 1 до 23, а грани — четными от 2 до 24. Заметим, что в частном случае $b = 0$ каждая пара соседних граней с номерами $(4n - 2, 4n)$, $n = 1, 2, \dots, 6$ вырождается в грань условия Треска. При $b = 1$ каждая пара соседних граней с номерами $(4n, (4n \bmod 24) + 2)$, $n = 1, 2, \dots, 6$ вырождается в грань условия Ишлинского-Ивлева.

Пластическая составляющая деформации определяется ассоциированным законом пластического течения [81]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}}, \quad (2.15)$$

где $d\varepsilon_{ij}^p$ — приращения пластических деформаций, $d\lambda$ — положительный множитель, f — пластический потенциал (2.11).

В пластических областях, соответствующих ребрам условия (2.11),

вместо закона течения (2.15) используется его обобщение [5, 134, 135]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_1 \frac{df_1}{d\sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{df_2}{d\sigma_{ij}}, \quad (2.16)$$

где $d\lambda_1, d\lambda_2$ — положительные множители, f_1, f_2 — пластические потенциалы, соответствующие ребрам поверхности текучести (2.11) на пересечении которых лежит рассматриваемое ребро.

Предел текучести является линейной функцией эквивалентной пластической деформации ε_{eq}^p [134]:

$$\sigma_y = 1 + H\varepsilon_{eq}^p, \quad (2.17)$$

Нагружение цилиндра предполагается монотонным, а эквивалентная пластическая деформация определяется из соотношения:

$$\sigma_y d\varepsilon_{eq}^p = \sigma_{rr} d\varepsilon_{rr}^p + \sigma_{\theta\theta} d\varepsilon_{\theta\theta}^p + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz}^p. \quad (2.18)$$

Эквивалентное напряжение вычисляется в соответствии с условием пластичности (2.11) с помощью следующего выражения

$$\sigma_y = \begin{cases} \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), & \text{если } \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \\ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3, & \text{если } \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2. \end{cases}$$

2.2.2 Общая стратегия решения

Главным преимуществом кусочно-линейных условий пластичности является возможность получения замкнутых аналитических решений для широко класса упругопластических задач. С другой стороны, для кусочно-линейных условий пластичности решение зависит от того какому ребру или поверхности текучести соответствует напряженное состояние в пластической области. В общем случае в деформируемом теле может присутствовать несколько пластических областей, соответствующих разным граням и ребрам поверхности текучести. Например, использование условия Треска предсказывает появление в процессе нагрузки во

вращающемся сплошном цилиндре 4 пластических областей [63], а во вращающемся цилиндре с жестким включением — 6 пластических областей [25]. Разумеется, данное обстоятельство существенно усложняет анализ, поскольку помимо упругопластической границы необходимо также определять границы между пластическими областями, а также переходные скорости вращения, при которых зарождаются новые пластические области или исчезают существующие. Гладкие условия пластичности (условие Мизеса, условие Хилла и др.) свободны от указанного недостатка, но их использование, как правило, требует применения численных или приближенно-аналитических методов.

Система уравнений (2.1)–(2.14) описывает широкий класс упругопластических задач, поэтому заранее неизвестно какие из возможных 24 пластических областей возникнут при деформировании цилиндра. Конфигурация пластических областей во вращающемся цилиндре в общем случае зависит от граничных и торцевых условий, механических характеристик материала и геометрического параметра δ (только для полого цилиндра). Поэтому вместо решения системы (2.1)–(2.14) для конкретной грани или ребра поверхности текучести мы рассмотрим произвольную пластическую область, соответствующую общему кусочно-линейному условию пластичности (2.11). Такое общее решение может использоваться для упругопластического анализа вращающихся цилиндров с любыми граничными и торцевыми условиями.

В диссертации используется геометрически линейная теория малых деформаций. Закон Гука и закон упрочнения также являются линейными. Предположим, что напряжения являются линейной комбинации полных деформаций:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= a_{rr} \varepsilon_{rr} + a_{r\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + a_{rz} \varepsilon_{zz} + b_r; \\ \sigma_{\theta\theta} &= a_{r\theta} \varepsilon_{rr} + a_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + a_{\theta z} \varepsilon_{zz} + b_\theta; \\ \sigma_{zz} &= a_{rz} \varepsilon_{rr} + a_{\theta z} \varepsilon_{\theta\theta} + a_{zz} \varepsilon_{zz} + b_z.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Дополнительно в (2.19) предположим, что $a_{rr} > 0, a_{\theta\theta} > 0$. Коэффициенты a_{ij}, b_i , разумеется, имеют разные значения для каждой возможной пластической области общего условия пластичности (2.11). Далее уравнение равновесия (2.7) с учетом кинематических соотношений (2.3) и (2.19) запишется относительно неизвестного перемещения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{a_{\theta\theta}}{a_{rr}} \frac{u}{\beta^2} = \left(\frac{b_\theta - b_r}{a_{rr}} \right) \frac{1}{\beta} + \left(\frac{a_{\theta z} - a_{rz}}{a_{rr}} \right) \frac{\varepsilon_{zz}}{\beta} - \frac{1}{a_{rr}} \Omega \beta. \quad (2.20)$$

Если $a_{rr} \neq a_{\theta\theta}$, то общее решение уравнения (2.20) имеет вид:

$$u = c_1 \beta^{-\sqrt{\tau}} + c_2 \beta^{\sqrt{\tau}} + \kappa_1 \beta + \kappa_2 \varepsilon_{zz} \beta - \kappa_3 \Omega \beta^3; \quad (2.21)$$

$$\tau = \frac{a_{\theta\theta}}{a_{rr}}; \quad \kappa_1 = \frac{b_\theta - b_r}{a_{rr} - a_{\theta\theta}}; \quad \kappa_2 = \frac{a_{\theta z} - a_{rz}}{a_{rr} - a_{\theta\theta}}; \quad \kappa_3 = \frac{1}{9a_{rr} - a_{\theta\theta}}.$$

В случае $a_{rr} = a_{\theta\theta}$ решение уравнения (2.20) примет вид:

$$u = c_1 \beta^{-1} + c_2 \beta + \kappa_4 \beta \log \beta + \kappa_5 \varepsilon_{zz} \beta \log \beta - \kappa_6 \Omega \beta^3; \quad (2.22)$$

$$\kappa_4 = \frac{b_\theta - b_r}{2a_{rr}}; \quad \kappa_5 = \frac{a_{\theta z} - a_{rz}}{2a_{rr}}; \quad \kappa_6 = \frac{1}{8a_{rr}}.$$

В (2.21) и (2.22) c_1, c_2 — константы интегрирования.

Далее все оставшиеся неизвестные функции вычисляются тривиальным образом. Из (2.21) или (2.21) с помощью (2.3) определяются полные деформации. Напряжения вычисляются из полных деформаций по формулам (2.19), а упругие деформации из напряжений в соответствии с обратным законом Гука (2.6). Наконец, пластические деформации представляют собой разницу между полными и упругими составляющими деформации (2.3).

Раздел 2.2.3 посвящен вычислению коэффициентов a_{ij}, b_i для произвольной грани, а раздел 2.2.4 — для произвольного ребра поверхности текучести (2.11). Решение для идеального упругопластического материала приведено в разделе 2.2.5. Процесс вычисления констант интегрирования и координат границ между областями рассмотрен в разделе 2.2.6.

2.2.3 Произвольная грань общего условия пластичности

Запишем условие пластичности в виде:

$$k_{rr}\sigma_{rr} + k_{\theta\theta}\sigma_{\theta\theta} + k_{zz}\sigma_{zz} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p. \quad (2.23)$$

Введем обозначение $k_{\alpha\beta} = k_{\alpha\alpha}k_{\beta\beta}$.

Таблица 2.1 — Коэффициенты $k_{rr}, k_{\theta\theta}, k_{zz}$ для граней поверхности текучести (2.23)

№	Напряженное состояние	Коэффициенты в (2.23)		
		k_{rr}	$k_{\theta\theta}$	k_{zz}
2	$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}, \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$b/(1+b)$	$1/(1+b)$	-1
4	$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$-b/(1+b)$	1	$-1/(1+b)$
6	$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$-1/(1+b)$	1	$-b/(1+b)$
8	$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}, \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	-1	$1/(1+b)$	$b/(1+b)$
10	$\sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}, \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	-1	$b/(1+b)$	$1/(1+b)$
12	$\sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$-1/(1+b)$	$-b/(1+b)$	1
14	$\sigma_{zz} > \sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$-b/(1+b)$	$-1/(1+b)$	1
16	$\sigma_{zz} > \sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}, \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$b/(1+b)$	-1	$1/(1+b)$
18	$\sigma_{rr} > \sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta}, \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$1/(1+b)$	-1	$b/(1+b)$
20	$\sigma_{rr} > \sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	1	$-1/(1+b)$	$-b/(1+b)$
22	$\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	1	$-b/(1+b)$	$-1/(1+b)$
24	$\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}, \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$1/(1+b)$	$b/(1+b)$	-1

Коэффициенты для всех возможных граней условия пластичности (рис. 2.1г) приведены в таблице 2.1. Очевидно, что в силу пластической несжимаемости $k_{ii} = 0$, поэтому из 3 коэффициентов $k_{\alpha\alpha}$ только два являются независимыми. Заметим, что коэффициенты для двух противоположных граней удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\tilde{k}_{ii} = -k_{ii}, \tilde{k}_{ij} = k_{ij} \text{ (нет суммирования по } i \text{)}.$$

В соответствии с ассоциированным законом (2.15) получим:

$$d\varepsilon_{rr}^p = d\lambda k_{rr}; \quad d\varepsilon_{\theta\theta}^p = d\lambda k_{\theta\theta}; \quad d\varepsilon_{zz}^p = d\lambda k_{zz}.$$

Подставляя предыдущие соотношения в (2.18), получим выражение для пластического множителя

$$d\lambda = d\varepsilon_{eq}^p.$$

Для случая монотонного нагружения получим:

$$\varepsilon_{rr}^p = k_{rr} \varepsilon_{eq}^p; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = k_{\theta\theta} \varepsilon_{eq}^p; \quad \varepsilon_{zz}^p = k_{zz} \varepsilon_{eq}^p. \quad (2.24)$$

Из условия (2.23) найдем:

$$\varepsilon_{eq}^p = \frac{1}{H} (k_{rr} \sigma_{rr} + k_{\theta\theta} \sigma_{\theta\theta} + k_{zz} \sigma_{zz} - 1). \quad (2.25)$$

Разделение (2.3) с помощью (2.24) и (2.25) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} (k_{rr} k_{rr} + H) \sigma_{rr} + (k_{rr} k_{\theta\theta} - \nu H) \sigma_{\theta\theta} + (k_{rr} k_{zz} - \nu H) \sigma_{zz} &= k_{rr} + H \varepsilon_{rr}; \\ (k_{rr} k_{\theta\theta} - \nu H) \sigma_{rr} + (k_{\theta\theta} k_{\theta\theta} + H) \sigma_{\theta\theta} + (k_{\theta\theta} k_{zz} - \nu H) \sigma_{zz} &= k_{\theta\theta} + H \varepsilon_{\theta\theta}; \\ (k_{rr} k_{zz} - \nu H) \sigma_{rr} + (k_{\theta\theta} k_{zz} - \nu H) \sigma_{\theta\theta} + (k_{zz} k_{zz} + H) \sigma_{zz} &= k_{zz} + H \varepsilon_{zz}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Решение системы (2.26) имеет вид (2.19), а коэффициенты a_{ij}, b_i :

$$\begin{aligned} a_{rr} &= \frac{k_{rr}^2 - 2(1-\nu)k_{\theta z} + (1-\nu^2)H}{Z}; \quad a_{r\theta} = \frac{2\nu k_{zz}^2 - k_{r\theta} + \nu(1+\nu)H}{Z}; \\ a_{\theta\theta} &= \frac{k_{\theta\theta}^2 - 2(1-\nu)k_{rz} + (1-\nu^2)H}{Z}; \quad a_{rz} = \frac{2\nu k_{\theta\theta}^2 - k_{rz} + \nu(1+\nu)H}{Z}; \\ a_{zz} &= \frac{k_{zz}^2 - 2(1-\nu)k_{r\theta} + (1-\nu^2)H}{Z}; \quad a_{\theta z} = \frac{2\nu k_{rr}^2 - k_{\theta z} + \nu(1+\nu)H}{Z}; \\ b_r &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{Z} k_{rr}; \quad b_\theta = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{Z} k_{\theta\theta}; \quad b_z = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{Z} k_{zz}; \\ Z &= (1+\nu)(1-2\nu)((1+\nu)H - 2(k_{r\theta} + k_{rz} + k_{\theta z})). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Если $\tau > 0, \tau \neq 1$, то неизвестное перемещение имеет вид (2.21), где коэффициенты можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{(1-\nu)((1+\nu)H - 2k_{rz}) + k_{\theta\theta}^2}{(1-\nu)((1+\nu)H - 2k_{\theta z}) + k_{rr}^2}, \quad \kappa_1 = -\frac{1+\nu}{k_{zz}}, \quad \kappa_2 = 1, \\ \kappa_3 &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)((1+\nu)H - 2(k_{r\theta} + k_{rz} + k_{\theta z}))}{8(1-\nu^2)H + (1-10\nu)k_{rr}^2 - 8(1-\nu)k_{zz}^2 - (9-10\nu)k_{\theta\theta}^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим подробно выражение (2.27). Величина Z всегда строго положительна, поскольку для любой грани поверхности (2.11):

$$k_{r\theta} + k_{rz} + k_{\theta z} = b/(1+b)^2 - 1 < 0.$$

Докажем, что коэффициенты $a_{rr}, a_{\theta\theta}, a_{zz}$ также строго положительны. Рассмотрим числитель выражения (2.27) для a_{rr} . Очевидно, если коэффициенты $k_{\theta\theta}$ и k_{zz} разного знака, то $a_{rr} > 0$. В противном случае с учетом того, что $\nu \in (0, 1/2)$ и $b \in [0, 1]$ найдем:

$$k_{rr}^2 - 2(1-\nu)k_{\theta z} = 1 - 2(1-\nu)\frac{b}{(1+b)^2} > 0.$$

Из последнего выражения и неравенства $Z > 0$ следует, что $a_{rr} > 0$. Аналогично доказывается, что $a_{\theta\theta} > 0$ и $a_{zz} > 0$. Отсюда следует, что $\tau = a_{\theta\theta}/a_{rr} > 0$.

Рассмотрим условия, при которых выполняется равенство $\tau = 1$. Используя (2.27) уравнение ($\tau = 1$) преобразуется к виду

$$a_{rr} - a_{\theta\theta} = \frac{(k_{rr} - k_{\theta\theta})(k_{rr} + 2(1-\nu)k_{zz} + k_{\theta\theta})}{Z} = 0.$$

Предыдущее уравнение имеет 3 решения.

1. $k_{rr} = k_{\theta\theta}$. Этому решению соответствуют грани $\sigma_1 = \sigma_{zz}$ и $\sigma_3 = \sigma_{zz}$ условия максимальных приведенных решений ($b = 1$).

2. $k_{rr} = -k_{\theta\theta}, k_{zz} = 0$. Данному решению соответствуют две грани условия Треска ($b = 0$), на которых $\sigma_2 = \sigma_{zz}$.

3. Решение $\nu = 1/2$ соответствует несжимаемому упругому материалу и далее не рассматривается.

В указанных выше областях перемещение имеет вид (2.22), коэффициенты запишутся следующим образом:

$$\kappa_4 = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)(k_{rr} - k_{\theta\theta})}{2(k_{rr}^2 + (1-\nu)((1+\nu)H - 2k_{\theta z}))}, \kappa_5 = 0,$$

$$\kappa_6 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)((1+\nu)H - 2(k_{r\theta} + k_{rz} + k_{\theta z}))}{8(k_{rr}^2 + (1-\nu)((1+\nu)H - 2k_{\theta z}))}.$$

Очевидно, что для граней $\sigma_1 = \sigma_{zz}$ и $\sigma_3 = \sigma_{zz}$ условия максимальных

приведенных напряжений ($b=1$) $\kappa_4 = 0$.

Отметим, что на противоположных гранях общего кусочно-линейного условия (2.11) полученное решение для перемещения отличается только знаком одного из слагаемых: κ_1 и κ_4 соответственно. Решение для напряжений на противоположных гранях отличается только знаком коэффициентов b_r, b_θ, b_z .

2.2.4 Произвольное ребро общего условия пластичности

Рассмотрим произвольное ребро поверхности текучести (2.11):

$$\begin{aligned} m_{rr}\sigma_{rr} + m_{\theta\theta}\sigma_{\theta\theta} + m_{zz}\sigma_{zz} &= \sigma_y(\varepsilon_{eq}^p); \\ n_{rr}\sigma_{rr} + n_{\theta\theta}\sigma_{\theta\theta} + n_{zz}\sigma_{zz} &= \sigma_y(\varepsilon_{eq}^p). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Каждое из соотношений (2.28) соответствует определенной грани (таблица 2.1) условия текучести (2.11). В силу пластической несжимаемости, разумеется:

$$m_{ii} = 0; \quad n_{ii} = 0.$$

Заметим (рис. 2.1г), что ребра поверхности текучести (2.11) делятся на два типа. Ребра первого типа существуют для $b \in [0, 1)$ и совпадают с ребрами поверхности Треска. Логично предположить, что решение в областях, соответствующих указанным ребрам, не будет зависеть от параметра b . Ребра второго типа существуют для $b \in (0, 1]$ и решение в соответствующих областях, очевидно, должно зависеть от параметра b .

Вследствие ассоциированного закона течения (2.16) получим:

$$d\varepsilon_{rr}^p = m_{rr}d\lambda_1 + n_{rr}d\lambda_2; \quad d\varepsilon_{\theta\theta}^p = m_{\theta\theta}d\lambda_1 + n_{\theta\theta}d\lambda_2; \quad d\varepsilon_{zz}^p = m_{zz}d\lambda_1 + n_{zz}d\lambda_2.$$

Далее с учетом (2.18) найдем:

$$\sigma_y d\varepsilon_{eq}^p = (m_{rr}\sigma_{rr} + m_{\theta\theta}\sigma_{\theta\theta} + m_{zz}\sigma_{zz})d\lambda_1 + (n_{rr}\sigma_{rr} + n_{\theta\theta}\sigma_{\theta\theta} + n_{zz}\sigma_{zz})d\lambda_2.$$

Из предыдущего выражения с учетом (2.28) найдем:

$$d\varepsilon_{eq}^p = d\lambda_1 + d\lambda_2.$$

Для монотонного нагружения получим систему:

$$\varepsilon_{rr}^p = m_{rr} \lambda_1 + n_{rr} \lambda_2; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = m_{\theta\theta} \lambda_1 + n_{\theta\theta} \lambda_2; \quad \varepsilon_{zz}^p = m_{zz} \lambda_1 + n_{zz} \lambda_2; \quad (2.29)$$

и выражение для эквивалентной пластической деформации:

$$\varepsilon_{eq}^p = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (2.30)$$

Из (2.29) и (2.30) найдем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{eq}^p &= \Delta_{r\theta} \varepsilon_{rr}^p + \Delta_{\theta r} \varepsilon_{\theta\theta}^p; \\ \varepsilon_{eq}^p &= \Delta_{\theta z} \varepsilon_{\theta\theta}^p + \Delta_{z\theta} \varepsilon_{zz}^p; \\ \varepsilon_{eq}^p &= \Delta_{rz} \varepsilon_{rr}^p + \Delta_{zr} \varepsilon_{zz}^p. \end{aligned} \quad (2.31)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{r\theta} &= \frac{m_{\theta\theta} - n_{\theta\theta}}{m_{\theta\theta} n_{rr} - m_{rr} n_{\theta\theta}}; & \Delta_{\theta r} &= \frac{m_{rr} - n_{rr}}{m_{\theta\theta} n_{rr} - m_{rr} n_{\theta\theta}}; \\ \Delta_{\theta z} &= \frac{m_{zz} - n_{zz}}{m_{zz} n_{\theta\theta} - m_{\theta\theta} n_{zz}}; & \Delta_{z\theta} &= \frac{m_{\theta\theta} - n_{\theta\theta}}{m_{\theta\theta} n_{zz} - m_{zz} n_{\theta\theta}}; \\ \Delta_{rz} &= \frac{m_{zz} - n_{zz}}{m_{zz} n_{rr} - m_{rr} n_{zz}}; & \Delta_{zr} &= \frac{m_{rr} - n_{rr}}{m_{rr} n_{zz} - m_{zz} n_{rr}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Заметим, что коэффициенты Δ_{ij} не зависят от того в каком порядке выбираются грани, на пересечении которых лежит рассматриваемое ребро. Кроме того, для двух противоположных граней $\Delta_{ij} = -\tilde{\Delta}_{ij}$. Вследствие пластической несжимаемости также имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_{r\theta} &= -\Delta_{z\theta}, \quad \Delta_{\theta z} = -\Delta_{rz}, \quad \Delta_{zr} = -\Delta_{\theta r}, \\ \Delta_{r\theta} + \Delta_{\theta z} + \Delta_{zr} &= 0, \\ \Delta_{rz} + \Delta_{z\theta} + \Delta_{\theta r} &= 0. \end{aligned}$$

Из последних соотношений следует, что из 6 величин Δ_{ij} только 2 независимы. Дальнейший ход решения записан с помощью переменных Δ_{ij} , поскольку их использование позволяет получить решение в более компактном виде по сравнению с коэффициентами m_{ij}, n_{ij} . Из 6 величин Δ_{ij} далее используются только $\Delta_{r\theta}, \Delta_{\theta z}, \Delta_{zr}$. Их значения для всех ребер поверхности текучести (2.11) приведены в таблице 2.2. На ребрах первого типа величины Δ_{ij} не зависят от b , а на ребрах второго типа Δ_{ij} равны λ

с точностью до множителя. Разумеется, при $b=1$ Δ_{ij} не определены на ребрах первого типа, а при $b=0$ — на ребрах второго типа.

Таблица 2.2 — Коэффициенты для ребер поверхности текучести (2.28)

№	Напряженное состояние	$\Delta_{r\theta}$	$\Delta_{\theta z}$	Δ_{zr}	Примечание
1	$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$	1	0	-1	не определено при $b=1$
3	$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}, \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	λ	λ	-2λ	не определено при $b=0$
5	$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} = \sigma_{zz}$	0	1	-1	не определено при $b=1$
7	$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}, \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$-\lambda$	2λ	$-\lambda$	не определено при $b=0$
9	$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$	-1	1	0	не определено при $b=1$
11	$\sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}, \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	-2λ	λ	λ	не определено при $b=0$
13	$\sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr}$	-1	0	1	не определено при $b=1$
15	$\sigma_{zz} > \sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}, \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$-\lambda$	$-\lambda$	2λ	не определено при $b=0$
17	$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$	0	-1	1	не определено при $b=1$
19	$\sigma_{rr} > \sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta}, \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	λ	-2λ	λ	не определено при $b=0$
21	$\sigma_{rr} > \sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta}$	1	-1	0	не определено при $b=1$
23	$\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}, \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	2λ	$-\lambda$	$-\lambda$	не определено при $b=0$

Далее предположим, что $n_{zz} \neq m_{zz}$. Случай $n_{zz} = m_{zz}$ будет рассмотрен позднее. Выразим из условия пластичности (2.28) осевое напряжение:

$$\sigma_{zz} = \frac{m_{rr} - n_{rr}}{n_{zz} - m_{zz}} \sigma_{rr} + \frac{m_{\theta\theta} - n_{\theta\theta}}{n_{zz} - m_{zz}} \sigma_{\theta\theta} = -\frac{\Delta_{zr}}{\Delta_{\theta z}} \sigma_{rr} - \frac{\Delta_{r\theta}}{\Delta_{\theta z}} \sigma_{\theta\theta}. \quad (2.33)$$

Из (2.28) и (2.33) следует

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + \Delta_{\theta z} (1 + H \varepsilon_{eq}^p) = 0; \quad \varepsilon_{eq}^p = \frac{1}{H} \left(\frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{\Delta_{\theta z}} - 1 \right). \quad (2.34)$$

Соотношения (2.3) с учетом (2.6) и (2.33) примут вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^p &= \varepsilon_{rr} - \left(1 - \nu \frac{\Delta_{zr}}{\Delta_{r\theta} + \Delta_{zr}} \right) \sigma_{rr} + \nu \left(1 + \frac{\Delta_{r\theta}}{\Delta_{r\theta} + \Delta_{zr}} \right) \sigma_{\theta\theta}; \\ \varepsilon_{\theta\theta}^p &= \varepsilon_{\theta\theta} + \nu \left(\frac{\Delta_{r\theta} + 2\Delta_{zr}}{\Delta_{r\theta} + \Delta_{zr}} \right) \sigma_{rr} - \left(1 - \nu \frac{\Delta_{r\theta}}{\Delta_{r\theta} + \Delta_{zr}} \right) \sigma_{\theta\theta}; \\ \varepsilon_{zz}^p &= \varepsilon_{zz} + \left(\nu - \frac{\Delta_{zr}}{\Delta_{r\theta} + \Delta_{zr}} \right) \sigma_{rr} + \left(\nu - \frac{\Delta_{r\theta}}{\Delta_{r\theta} + \Delta_{zr}} \right) \sigma_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

Преобразуем выражения (2.31) для эквивалентной пластической деформации с помощью последних соотношений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{eq}^p &= \Delta_{r\theta} \varepsilon_{rr} - \Delta_{zr} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{(\Delta_{r\theta} \Delta_{\theta z} - 2\nu \Delta_{zr}^2)}{\Delta_{\theta z}} \sigma_{rr} + \left(\frac{\Delta_{zr} \Delta_{\theta z} - 2\nu \Delta_{r\theta}^2}{\Delta_{\theta z}} \right) \sigma_{\theta\theta}; \\ \varepsilon_{eq}^p &= \Delta_{\theta z} \varepsilon_{\theta\theta} - \Delta_{r\theta} \varepsilon_{zz} + \left(\frac{\Delta_{r\theta} \Delta_{zr} - 2\nu \Delta_{\theta z}^2}{\Delta_{\theta z}} \right) \sigma_{rr} - \left(\frac{\Delta_{r\theta}^2 + 2\nu \Delta_{r\theta} \Delta_{\theta z} + \Delta_{\theta z}^2}{\Delta_{\theta z}} \right) \sigma_{\theta\theta}; \\ \varepsilon_{eq}^p &= -\Delta_{\theta z} \varepsilon_{rr} + \Delta_{zr} \varepsilon_{zz} + \left(\frac{\Delta_{zr}^2 + 2\nu \Delta_{zr} \Delta_{\theta z} + \Delta_{\theta z}^2}{\Delta_{\theta z}} \right) \sigma_{rr} + \left(\frac{\Delta_{r\theta} \Delta_{zr} - 2\nu \Delta_{\theta z}^2}{\Delta_{\theta z}} \right) \sigma_{\theta\theta}.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Преобразуем 2-ое и 3-е уравнения (2.35) с помощью (2.34):

$$\begin{aligned}(1 - H\Delta_{r\theta}\Delta_{zr} + 2H\nu\Delta_{\theta z}^2)\sigma_{rr} - (1 + H(\Delta_{r\theta}^2 + 2\nu\Delta_{r\theta}\Delta_{\theta z} + \Delta_{\theta z}^2))\sigma_{\theta\theta} &= \\ &= -\Delta_{\theta z} - H\Delta_{\theta z}^2\varepsilon_{\theta\theta} + H\Delta_{r\theta}\Delta_{\theta z}\varepsilon_{zz}, \\ (1 + H(\Delta_{zr}^2 + 2\nu\Delta_{zr}\Delta_{\theta z} + \Delta_{\theta z}^2))\sigma_{rr} - (1 - H\Delta_{r\theta}\Delta_{zr} + 2H\nu\Delta_{\theta z}^2)\sigma_{\theta\theta} &= \\ &= -\Delta_{\theta z} + H\Delta_{\theta z}^2\varepsilon_{rr} - H\Delta_{zr}\Delta_{\theta z}\varepsilon_{zz}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Из решения вышеприведенной системы (2.36) относительно неизвестных компонент напряжений найдем коэффициенты в соотношениях (2.19) для напряженного состояния:

$$\begin{aligned}a_{rr} &= \frac{1 + H\Delta_{zr}^2 - 2H(1-\nu)\Delta_{r\theta}\Delta_{\theta z}}{X}; a_{\theta\theta} = \frac{1 + H\Delta_{r\theta}^2 - 2H(1-\nu)\Delta_{\theta z}\Delta_{zr}}{X}; \\ a_{r\theta} &= \frac{1 + 2H\nu(\Delta_{r\theta}^2 + \Delta_{zr}^2) - H(1-4\nu)\Delta_{r\theta}\Delta_{zr}}{X}; \\ a_{zz} &= \frac{1 + H(\Delta_{r\theta}^2 + 2\nu\Delta_{r\theta}\Delta_{zr} + \Delta_{zr}^2)}{X}; a_{\theta z} = \frac{1 + H(\Delta_{r\theta}^2 + \Delta_{r\theta}\Delta_{zr} + 2\nu\Delta_{zr}^2)}{X}; \\ a_{rz} &= \frac{1 + H(2\nu\Delta_{r\theta}^2 + \Delta_{r\theta}\Delta_{zr} + \Delta_{zr}^2)}{X}; b_r = \frac{(1-2\nu)(\Delta_{r\theta} - \Delta_{\theta z})}{X}; \\ b_\theta &= \frac{(1-2\nu)(\Delta_{\theta z} - \Delta_{zr})}{X}; b_z = \frac{(1-2\nu)(\Delta_{zr} - \Delta_{r\theta})}{X}; \\ X &= (1-2\nu)(3 + 2H(1+\nu)(\Delta_{\theta z}^2 - \Delta_{r\theta}\Delta_{zr}))\end{aligned}\quad (2.37)$$

Следует отметить, что если $\tau > 0$, $\tau \neq 1$, то коэффициенты в решении (2.21) для перемещения можно преобразовать к следующему виду

$$\tau = \frac{1 + H\Delta_{r\theta}^2 + 2H(1-\nu)(\Delta_{r\theta} + \Delta_{zr})\Delta_{zr}}{1 + H\Delta_{zr}^2 + 2H(1-\nu)(\Delta_{r\theta} + \Delta_{zr})\Delta_{r\theta}}; \kappa_1 = \frac{3}{H(\Delta_{zr} - \Delta_{r\theta})}; \kappa_2 = 1; \quad (2.38)$$

$$\kappa_3 = \frac{(1-2\nu)(3 + 2H(1+\nu)(\Delta_{r\theta}^2 + \Delta_{r\theta}\Delta_{zr} + \Delta_{zr}^2))}{8 + H(17-18\nu)\Delta_{r\theta}^2 + 16H(1-\nu)\Delta_{r\theta}\Delta_{zr} + H(7+2\nu)\Delta_{zr}^2}.$$

Рассмотрим подробно выражения (2.37) для коэффициентов a_{ij}, b_i .

Отметим, что величина X всегда строго положительна, поскольку $\Delta_{\theta z}^2 - \Delta_{r\theta}\Delta_{zr}$ равняется 1 и $3\lambda^2$ для ребер первого и второго типа соответственно. Коэффициенты $a_{rr}, a_{\theta\theta}, a_{zz}$ также всегда строго положительны. Рассмотрим числитель выражения для a_{rr} , после преобразований получим $1 + H(\Delta_{zr}^2 - 2(1-\nu)\Delta_{\theta z}\Delta_{r\theta})$. Очевидно, что если $\Delta_{\theta z}$ и $\Delta_{r\theta}$ имеют разные знаки, то $a_{rr} > 0$. В противном случае величина $\Delta_{zr}^2 - 2(1-\nu)\Delta_{\theta z}\Delta_{r\theta}$ равняется 1 и $2(1+\nu)\lambda^2 > 0$ для ребер первого и второго типа соответственно. Отсюда, поскольку $H > 0$ и $X > 0$ получим $a_{rr} > 0$. Аналогично доказыва-ется, что $a_{\theta\theta} > 0$ и $a_{zz} > 0$. Следовательно, $\tau > 0$.

Найдем условия, при которых выполняется соотношение $\tau = 1$. После преобразований получим:

$$H(1-2\nu)(\Delta_{r\theta}^2 - \Delta_{zr}^2) = 0.$$

Данное уравнение имеет 3 решения. Первое решение $H = 0$ соответствует идеальному материалу, который будет рассмотрен в следующем подразделе. Второе решение $\nu = 1/2$ не рассматривается. Третье решение $\Delta_{r\theta}^2 - \Delta_{zr}^2$ выполняется на ребрах №1 и №13, соответствующих условию Треска $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$, а также на ребрах №7 и №19 (таблица 2). Таким образом, при $\tau = 1$ решение для перемещения имеет вид (2.22), при этом:

$$\kappa_4 = \frac{3(1-2\nu)\Delta_{\theta z}}{2 + 2H((3-2\nu)\Delta_{r\theta} + 2(1-\nu)\Delta_{zr})\Delta_{r\theta}}, \kappa_5 = 0,$$

$$\kappa_6 = \frac{(1-2\nu)(3 + 2H(1+\nu)(\Delta_{r\theta} - \Delta_{\theta z})\Delta_{r\theta})}{8 + 8H((3-2\nu)\Delta_{r\theta} + 2(1-\nu)\Delta_{zr})\Delta_{r\theta}}.$$

Заметим, что на ребрах №1 и №13 имеет место равенство $\kappa_4 = 0$ и выражение (2.23) для осевого напряжения несправедливо.

2.2.5 Решение для идеального материала

Этот подраздел посвящен поиску решения для общего кусочно-линейного условия пластичности и идеального упругопластического материала. Такое решение обобщает результаты, представленные в первой главе настоящей диссертации.

Рассмотрим произвольную грань условия (2.11). Положим $H = 0$, тогда коэффициенты a_{ij}, b_i в решении (2.27) для напряжений примут вид:

$$\begin{aligned} a_{rr} &= \frac{k_{rr}^2 - 2(1-\nu)k_{\theta z}}{\Delta}; & a_{r\theta} &= \frac{2\nu k_{zz}^2 - k_{r\theta}}{\Delta}; & a_{\theta\theta} &= \frac{k_{\theta\theta}^2 - 2(1-\nu)k_{rz}}{\Delta}; \\ a_{rz} &= \frac{2\nu k_{\theta\theta}^2 - k_{rz}}{\Delta}; & a_{zz} &= \frac{k_{zz}^2 - 2(1-\nu)k_{r\theta}}{\Delta}; & a_{\theta z} &= \frac{2\nu k_{rr}^2 - k_{\theta z}}{\Delta}; \\ b_r &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\Delta} k_{rr}; & b_\theta &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\Delta} k_{\theta\theta}; & b_z &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\Delta} k_{zz}; \\ \Delta &= -(1+\nu)(1-2\nu)(k_{r\theta} + k_{rz} + k_{\theta z}). \end{aligned}$$

В свою очередь коэффициенты $\tau, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ в решении (2.21) для перемещения определяются приведенными ниже соотношениями

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{k_{\theta\theta}^2 - 2(1-\nu)k_{rz}}{k_{rr}^2 - 2(1-\nu)k_{\theta z}}, \quad \kappa_1 = -\frac{1+\nu}{k_{zz}}, \quad \kappa_2 = 1, \\ \kappa_3 &= -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)(k_{r\theta} + k_{rz} + k_{\theta z})}{(1-10\nu)k_{rr}^2 - 8(1-\nu)k_{zz}^2 - (9-10\nu)k_{\theta\theta}^2}. \end{aligned}$$

Для граней $\sigma_2 = \sigma_{zz}$ условия Треска ($b=0$) и граней $\sigma_1 = \sigma_{zz}$ и $\sigma_3 = \sigma_{zz}$ условия максимальных приведенных напряжений ($b=1$), на которых $\tau = 1$, перемещение имеет вид (2.22), а коэффициенты $\kappa_4, \kappa_5, \kappa_6$ запишутся следующим образом:

$$\kappa_4 = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)(k_{rr} - k_{\theta\theta})}{2(k_{rr}^2 - 2(1-\nu)k_{\theta z})}, \quad \kappa_5 = 0, \quad \kappa_6 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)(k_{r\theta} + k_{rz} + k_{\theta z})}{8(k_{rr}^2 + 2(1-\nu)k_{\theta z})}.$$

В областях, соответствующих ребрам условия (2.11), в случае $H = 0$

получим следующие значения коэффициентов a_{ij}, b_i в решении (2.19) для напряжений:

$$a_{rr} = a_{\theta\theta} = a_{zz} = a_{r\theta} = a_{\theta z} = a_{rz} = \frac{1}{3(1-2\nu)};$$

$$b_r = \frac{\Delta_{r\theta} - \Delta_{\theta z}}{3}; \quad b_\theta = \frac{\Delta_{\theta z} - \Delta_{zr}}{3}; \quad b_z = \frac{\Delta_{zr} - \Delta_{r\theta}}{3}.$$

Поскольку $a_{rr} = a_{\theta\theta}$, то перемещение имеет вид (2.22), а коэффициенты $\kappa_4, \kappa_5, \kappa_6$ запишутся следующим образом:

$$\kappa_4 = \frac{3}{2}(1-2\nu)\Delta_{\theta z}, \quad \kappa_5 = 0, \quad \kappa_6 = \frac{3}{8}(1-2\nu).$$

Полное решение для перемещения и напряжений имеет вид

$$u = c_1\beta^{-1} + c_2\beta + \frac{3}{2}(1-2\nu)\Delta_{\theta z}\beta \log \beta - \frac{3}{8}(1-2\nu)\Omega\beta^3;$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2}{3(1-2\nu)}c_2 + \frac{1}{6}(\Delta_{r\theta} - \Delta_{zr}) + \frac{1}{3(1-2\nu)}\varepsilon_{zz} + \Delta_{\theta z} \log \beta - \frac{\Omega}{2}\beta^2;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \Delta_{\theta z}; \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - \Delta_{r\theta}.$$

2.2.6 Вычисление констант интегрирования, границ между областями и переходных скоростей вращения

Введем обозначения: $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}$ — константы интегрирования в i -ой пластической области; d_1, d_2 — константы интегрирования в упругой области; β_i — координаты границ между областями; Ω_p — скорость начала пластического течения; Ω_{fp} — скорость при которой цилиндр полностью переходит в состояние пластичности; $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{n-1}$ — переходные скорости при которых происходит смена режимов пластического деформирования (зарождение новых пластических областей или исчезновение существующих). Величина Ω_p определяется из упругого решения задачи с учетом граничных и торцевых условий.

В общем случае процесс деформирования цилиндра состоит из n

интервалов: $(\Omega_p, \Omega_1), (\Omega_1, \Omega_2), \dots, (\Omega_{n-1}, \Omega_{fp})$. Каждый из интервалов характеризуется своей конфигурацией пластических областей. Упругая область также присутствует в цилиндре на каждом из интервалов.

Рассмотрим произвольный интервал и предположим, что цилиндр состоит из N областей. Решение в каждой из областей содержит 2 неизвестные константы интегрирования. Неизвестными также являются $N-1$ координата границ между областями и осевая деформация ε_{zz} . Для вычисления указанных величин используются граничные условия задачи, условие на суммарную осевую силу и 3 условия непрерывности на каждой границе между области. Очевидно, число неизвестных и число используемых условий равно $3N$. Разумеется, система условий должна обеспечивать непрерывность решения во всем цилиндре. Использование граничных условий и условия на суммарную осевую силу тривиально, рассмотрим более подробно условия на границах между областями.

В цилиндре могут существовать лишь два типа границ:

- граница $\beta = \beta_{ep}$ между пластической областью, соответствующей грани поверхности текучести (2.11) и упругой областью;
- граница $\beta = \beta_{pp}$ между пластическими областями, соответствующими ребру и грани поверхности текучести (2.11).

Далее обозначение $\llbracket \cdot \rrbracket$ используется для скачка переменной на границе между областями различного типа:

$$\beta = \beta_{ep} : \llbracket g \rrbracket = g^{(f)} - g^{(el)};$$

$$\beta = \beta_{pp} : \llbracket g \rrbracket = g^{(c)} - g^{(f)}.$$

где g — некоторая неизвестная функция, верхний индекс el обозначает упругую область, верхние индексы f, c обозначают пластические области, соответствующие ребру и грани поверхности текучести (2.11).

На границах $\beta = \beta_{ep}$ выберем следующие условия непрерывности:

$$\begin{aligned} \llbracket u \rrbracket &= 0; \quad \llbracket \sigma_{rr} \rrbracket = 0; \\ k_{rr} \sigma_{rr}^{(el)} + k_{\theta\theta} \sigma_{\theta\theta}^{(el)} + k_{zz} \sigma_{zz}^{(el)} &= 1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Из первого условия (2.39) следует непрерывность $\varepsilon_{\theta\theta}$. Осевая деформация ε_{zz} , очевидно, также непрерывна. Получим:

$$\llbracket \varepsilon_{\theta\theta} \rrbracket = 0; \quad \llbracket \varepsilon_{zz} \rrbracket = 0.$$

Из третьего условия (2.39) и (2.17), следует, что $\varepsilon_{eq}^{p(el)} = 0$. Следовательно: $\varepsilon_{rr}^{p(el)} = \varepsilon_{\theta\theta}^{p(el)} = \varepsilon_{zz}^{p(el)} = 0$. Отсюда найдем:

$$\llbracket \varepsilon_{rr}^p \rrbracket = \varepsilon_{rr}^{p(f)}, \quad \llbracket \varepsilon_{\theta\theta}^p \rrbracket = \varepsilon_{\theta\theta}^{p(f)}, \quad \llbracket \varepsilon_{zz}^p \rrbracket = \varepsilon_{zz}^{p(f)}.$$

Также из третьего условия (2.39) следует, что

$$k_{\theta\theta}^f \llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket + k_{zz}^f \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket = H \varepsilon_{eq}^{p(f)}.$$

Далее преобразуем соотношения (2.3) с помощью закона Гука (2.5) и (2.39). К полученным уравнениям добавим предыдущее выражение. В итоге получим систему:

$$\begin{aligned} \nu \llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket + \nu \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket - k_{rr} \varepsilon_{eq}^{p(f)} + \llbracket \varepsilon_{rr} \rrbracket &= 0; \\ -\llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket + \nu \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket - k_{\theta\theta} \varepsilon_{eq}^{p(f)} &= 0; \\ \nu \llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket - \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket - k_{zz} \varepsilon_{eq}^{p(f)} &= 0; \\ -k_{\theta\theta}^f \llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket - k_{zz}^f \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket + H \varepsilon_{eq}^{p(f)} &= 0. \end{aligned}$$

Решение вышеприведенной системы $\llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket = \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket = \llbracket \varepsilon_{rr} \rrbracket = \varepsilon_{eq}^{p(f)} = 0$.

Непрерывность остальных неизвестных величин доказывается очевидным образом. Заметим, что определитель полученной системы:

$$H(1 - \nu^2) + (k_{\theta\theta}^2 + 2\nu k_{zz} k_{\theta\theta} + k_{zz}^2) > 0.$$

Таким образом система условий (2.39) обеспечивает непрерывность решения на границе между упругой областью и пластической областью, соответствующей произвольной грани общего кусочно-линейного условия для всех $b \in [0, 1]$, $H \geq 0$.

Рассмотрим границу $\beta = \beta_{pp}$ второго типа. Условие текучести в области, соответствующей ребру поверхности текучести имеет вид:

$$m_{rr}\sigma_{rr}^{(c)} + m_{\theta\theta}\sigma_{\theta\theta}^{(c)} + m_{zz}\sigma_{zz}^{(c)} = 1 + H\varepsilon_{eq}^{p(c)};$$

$$n_{rr}\sigma_{rr}^{(c)} + n_{\theta\theta}\sigma_{\theta\theta}^{(c)} + n_{zz}\sigma_{zz}^{(c)} = 1 + H\varepsilon_{eq}^{p(c)},$$

а в области, соответствующей грани поверхности текучести:

$$m_{rr}\sigma_{rr}^{(f)} + m_{\theta\theta}\sigma_{\theta\theta}^{(f)} + m_{zz}\sigma_{zz}^{(f)} = 1 + H\varepsilon_{eq}^{p(f)}.$$

Выберем условия непрерывности следующего вида:

$$\begin{aligned} \llbracket u \rrbracket &= 0; \quad \llbracket \sigma_{rr} \rrbracket = 0; \\ n_{rr}\sigma_{rr}^{(f)} + n_{\theta\theta}\sigma_{\theta\theta}^{(f)} + n_{zz}\sigma_{zz}^{(f)} &= 1 + H\varepsilon_{eq}^{p(f)}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Разделение деформаций (2.3) и условие пластичности вместе с (2.5) и (2.40) примут вид:

$$\begin{aligned} -\nu \llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket - \nu \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket + \llbracket \varepsilon_{rr}^p \rrbracket - \llbracket \varepsilon_{rr} \rrbracket &= 0; \\ \llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket - \nu \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket + \llbracket \varepsilon_{\theta\theta}^p \rrbracket &= 0; \\ -\nu \llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket + \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket + \llbracket \varepsilon_{zz}^p \rrbracket &= 0; \\ m_{\theta\theta} \llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket + m_{zz} \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket - H \llbracket \varepsilon_{eq}^p \rrbracket &= 0; \\ n_{\theta\theta} \llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket + n_{zz} \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket - H \llbracket \varepsilon_{eq}^p \rrbracket &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{rr}^p &= m_{rr}\Delta\lambda_1 + n_{rr}\lambda_2; \\ \Delta\varepsilon_{\theta\theta}^p &= m_{\theta\theta}\Delta\lambda_1 + n_{\theta\theta}\lambda_2; \\ \Delta\varepsilon_{zz}^p &= m_{zz}\Delta\lambda_1 + n_{zz}\lambda_2; \\ \Delta\varepsilon_{eq}^p &= \Delta\lambda_1 + \lambda_2; \end{aligned}$$

где $\Delta\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda$

Преобразуем приведенную выше систему с помощью предыдущих соотношений и в итоге получим:

$$\begin{aligned} \nu \llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket + \nu \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket - m_{rr} \llbracket \lambda_1 \rrbracket - n_{rr} \lambda_2 + \llbracket \varepsilon_{rr} \rrbracket &= 0; \\ -\llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket + \nu \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket - m_{\theta\theta} \llbracket \lambda_1 \rrbracket - n_{\theta\theta} \lambda_2 &= 0; \\ \nu \llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket - \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket - m_{zz} \llbracket \lambda_1 \rrbracket - n_{zz} \lambda_2 &= 0; \\ -m_{\theta\theta} \llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket - m_{zz} \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket + H \llbracket \lambda_1 \rrbracket + H \lambda_2 &= 0; \\ -n_{\theta\theta} \llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket - n_{zz} \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket + H \llbracket \lambda_1 \rrbracket + H \lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решение преобразованной системы, очевидно:

$$\llbracket \sigma_{\theta\theta} \rrbracket = \llbracket \sigma_{zz} \rrbracket = \llbracket \lambda_1 \rrbracket = \lambda_2 = \llbracket \varepsilon_{rr} \rrbracket = 0.$$

Определитель вышеприведенной системы имеет вид:

$$(m_{\theta\theta}n_{zz} - m_{zz}n_{\theta\theta})^2 + H\left((m_{rr} - n_{rr})^2 - 2(1-\nu)(m_{zz} - n_{zz})(m_{\theta\theta} - n_{\theta\theta})\right).$$

Заметим, что после преобразований определитель с точностью до положительного множителя $(m_{\theta\theta}n_{zz} - m_{zz}n_{\theta\theta})^2$ примет вид:

$$1 + H\left((\Delta_{r\theta} - \Delta_{\theta z})^2 + 2(1+\nu)\Delta_{r\theta}\Delta_{\theta z}\right) > 0.$$

Непрерывность остальных величин очевидна. В итоге доказано, что система условий (2.40) обеспечивает непрерывность решения на границе между пластическими областями, соответствующими произвольным ребру и грани общего кусочно-линейного условия для $b \in [0, 1]$, $H \geq 0$.

Заметим, что выбор условий (2.39) и (2.40) является неединственным. Преимуществом условий (2.39) и (2.40) является то, что они справедливы для всех возможных значений параметров b, ν, H .

Дополнительно к граничным условиям и условию на суммарную осевую силу на каждой границе в соответствии с указанными принципами выбираются три условия непрерывности. Полученная система уравнений является линейной относительно констант интегрирования $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, d_1, d_2$ и нелинейной относительно границ между областями β_i . 2N уравнений системы решаются в символьном виде относительно констант интегрирования. Для этого удобно использовать системы компьютерной алгебры. Этот шаг является достаточно трудоемким и может занимать длительное время, однако его выполнение требуется лишь один раз для каждого из интервалов в процессе нагрузки. Далее аналитические выражения для констант интегрирования подставляются в оставшиеся уравнения системы. Полученная таким образом система нелинейных алгебраических уравнений решается численно относительно неизвестных границ β_i между областями для выбранных значений параметров δ, ν, b, H и скорости вращения Ω .

Вычисление переходных скоростей вращения Ω_i требует дополнительных условий и в общем случае также сводится к решению нелинейных систем алгебраических уравнений. Однако, если пластическое течение в цилиндре происходит только в одной области, то условие полного перехода цилиндра в пластическое состояние принимает вид $\beta_{ep} = \delta$ или $\beta_{ep} = 1$, поэтому нелинейное уравнение относительно упругопластической границы β_{ep} сводится к уравнению линейному относительно Ω_{fp} , откуда критическая скорость Ω_{fp} может быть выражена аналитически.

2.2.7 Сплошной вращающийся цилиндр с закрепленными и свободными торцами

В этом и следующем разделах механические параметры цилиндра имеют следующие значения, если не сказано иное:

$$\nu = 0.3, \quad b = 0.5, \quad H = 1.0.$$

Далее для краткости распределение напряжений и деформаций на каждой стадии нагрузки подробно не рассматривается, и анализ ограничен состоянием полной пластичности ($\Omega = \Omega_{fp}$). Однако, следует отметить, что построенное решение позволяет получить распределение всех искомых функций для любой скорости вращения в диапазоне $\Omega \leq \Omega_{fp}$.

Несмотря на то, что решение может существовать и при скоростях, превышающих Ω_{fp} , с инженерной точки зрения именно скорость Ω_{fp} следует считать максимально допустимой скоростью вращения. В этом и следующем подразделе особое внимание уделяется вычислению зависимостей Ω_{fp} от механических параметров b, H и геометрического параметра δ (только для полого цилиндра). В ряде частных случаев получены аналитические зависимости критической скорости Ω_{fp} .

Для сравнения полученных результатов используется статья Эразлана [86], в которой схожие задачи решались с помощью условия

Мизеса, деформационной теории пластичности и нелинейного закона изотропного упрочнения Свифта. В частном случае $m=1$ закон Свифта сводится к линейному закону упрочнения, что позволяет сравнить данные [86] с полученными результатами.

Цилиндр находится в состоянии плоской деформации $\varepsilon_{zz}=0$. Граничные условия задачи записаны ниже:

$$u(0)=0, \sigma_{rr}(1)=0.$$

Упругое решение имеет вид:

$$u = \frac{1(3-5\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta - \frac{1(1-2\nu)(1+\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^3; \sigma_{rr} = \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega(1-\beta^2);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\left(1 - \frac{1+2\nu}{3-2\nu}\beta^2\right); \sigma_{zz} = \frac{\nu}{2(1-\nu)}\Omega\left(\frac{(3-2\nu)}{2} - \beta^2\right).$$

Известно [63, 64], что условие Треска впервые выполняется в центре сплошного цилиндра в виде $\sigma_{rr}(0) = \sigma_{\theta\theta}(0) > \sigma_{zz}(0)$, соответствующем ребру №1 (рис. 2.1г). Из этого следует, что и общее кусочно-линейное условие пластичности (2.11) для любого $b \in [0, 1]$ впервые выполнится в виде, соответствующем ребру №1. Тогда скорость вращения Ω_p , соответствующая началу течения, является функцией коэффициента Пуассона ν

$$\Omega_p = \frac{8(1-\nu)}{(3-2\nu)(1-2\nu)}.$$

Эволюция пластического течения для условия Треска рассматривалась в работах [63, 64], а для условия Ишлинского-Ивлева в [24]. Далее рассматривается случай $b \in (0, 1)$. В момент $\Omega = \Omega_p$ в центре цилиндра зарождаются области, соответствующие ребру №1 и грани №2 поверхности текучести (2.11). При $\Omega = \Omega_1$ на внешней поверхности появляется область, соответствующая грани №6. Развитие течения в момент $\Omega = \Omega_2$ зависит от значения параметра b . При $b < b_t(\nu, H)$ напряженное состояние на границе между областью II и упругой области переходит на ребро №3

поверхности текучести (2.11), в результате чего возникают 2 новых пластических области (напряжения соответствуют ребру №3 и грани №4). Если же $b > b_t(\nu, H)$, то переход напряженного состояния на ребро поверхности текучести происходит на границе между упругой областью и пластической областью №6, что приводит к появлению 2 новых пластических областей (грань №4 и ребро №5). Наконец, в момент $\Omega = \Omega_{fp}$ упругая область в цилиндре исчезает и цилиндр переходит в состояние пластичности. Величина b_t определяется численно и, как показали расчеты, незначительно зависит от H : для $H = 0$: $b_t \cong 0.553$, а для $H = 1.0$: $b_t \cong 0.527$. Таким образом, процесс нагрузки состоит из 3 интервалов. Ниже приведена конфигурация областей на каждом из интервалов:

(Ω_p, Ω_1) : №1, №2, упругая область;

(Ω_1, Ω_2) : №1, №2, упругая область, №6;

(Ω_2, Ω_{fp}) : $\begin{cases} \text{№1, №2, №3, №4, упругая область, №6,} & \text{если } b < b_t(\nu, H); \\ \text{№1, №2, упругая область, №4, №5, №6,} & \text{если } b > b_t(\nu, H). \end{cases}$

Непосредственно перед переходом в состояние полной пластичности цилиндр состоит из 6 областей и упругой области ($\beta \in [\beta_4, \beta_5]$). При $\Omega = \Omega_{fp}$ упругая область исчезает и выполняется $\beta_4 = \beta_5$. Распределение напряжений и пластических деформаций в цилиндре при $\Omega = \Omega_{fp}$ представлено на рис. 2.2а и рис. 2.3а соответственно. Интересно отметить, что пластическая область №3, в которой справедливо равенство $\sigma_{rr} = (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})/2$ имеет незначительные размеры. Величина напряжений в цилиндре монотонно убывает с увеличением радиальной координаты β (рис. 2.2а). Как показали расчеты это справедливо и для других значений параметров b, H . Как видно из рис. 2.3а в цилиндре присутствует область $\beta \in [\beta_2, \beta_5]$, в которой пластические деформации практически равны нулю. Размеры этой области максимальны при $b = b_t$.

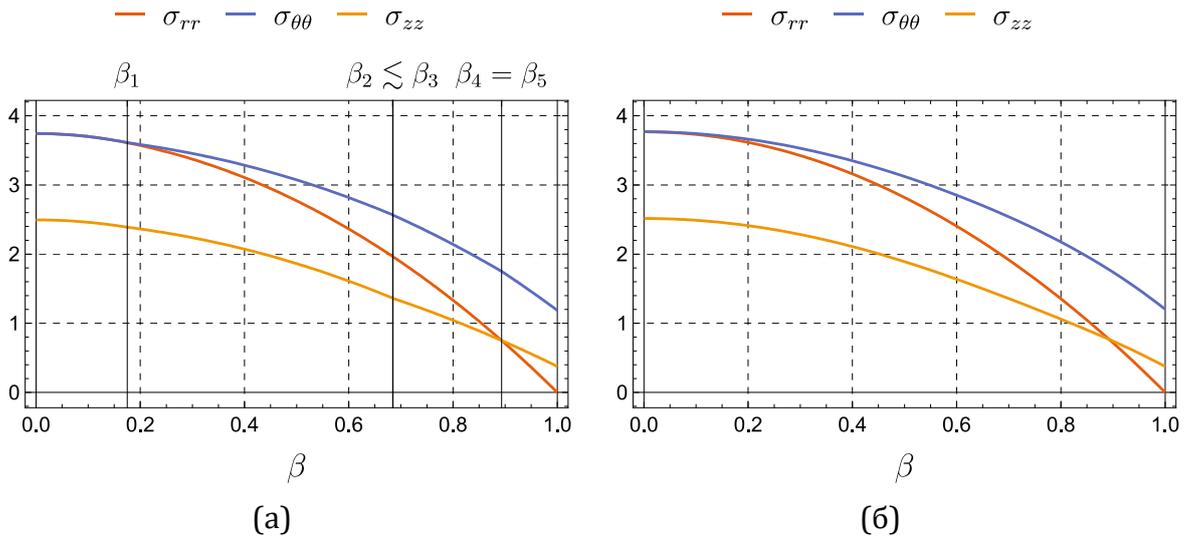


Рис. 2.2 — Распределение напряжений в сплошном цилиндре с закрепленными торцами при $\Omega = \Omega_{fp}$: (а) условие (2.11) при $b=1/2$, (б) условие Мизеса.

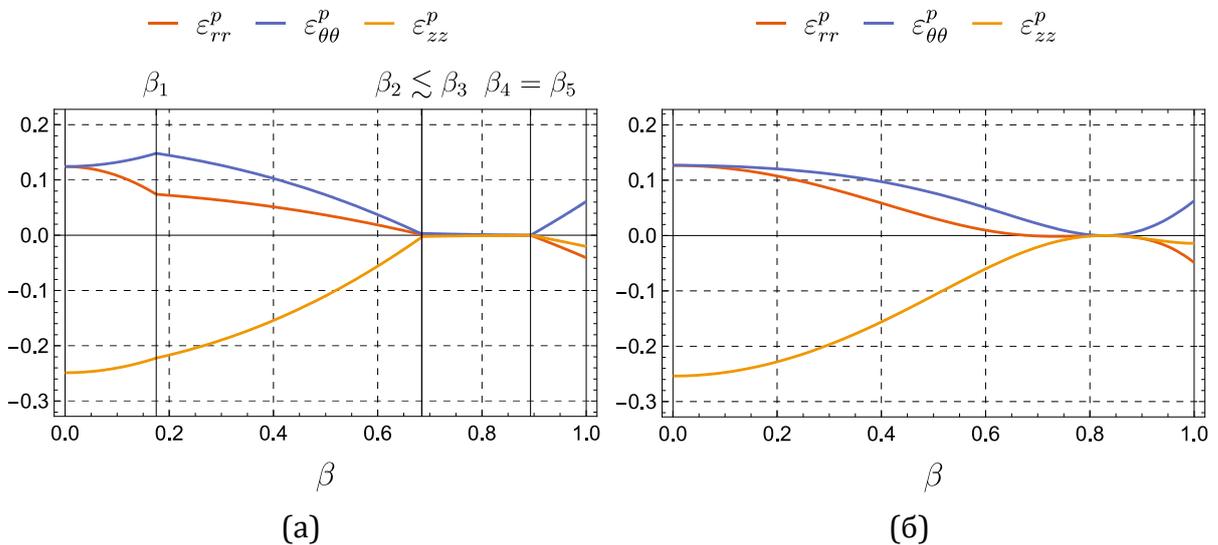


Рис. 2.3 — Распределение пластических деформаций в сплошном цилиндре с закрепленными торцами при $\Omega = \Omega_{fp}$: (а) условие (2.11) при $b=1/2$, (б) условие Мизеса.

На рис. 2.2б и 2.3б показано распределение напряжений и пластических деформаций для условия Мизеса [86]. Из рис. 2.2 и 2.3 видно, что при использовании условия Мизеса и его кусочно-линейной аппроксимации напряженное состояние в цилиндре практически идентично, а распределение пластических деформаций различается более существенно.

Зависимости максимального эквивалентного напряжения при $\Omega = \Omega_{fp}$ от параметров b, H изображены на рис. 2.4а и рис. 2.4б соответственно. Разумеется, критическая скорость вращения Ω_{fp} в свою очередь

также зависит от параметров b, H . Заметим, что максимум эквивалентного напряжения достигается в центре цилиндра $\beta = 0$. Интересно отметить, что минимальное значение эквивалентных напряжений достигается при $b = b_t$, а максимальное — при $b = 1$. С увеличением параметра H эквивалентные напряжения в цилиндре также возрастают.

На рис. 2.5а и рис. 2.5б представлены зависимости критической скорости вращения цилиндра Ω_{fp} от параметров b, H соответственно. На рис. 2.5б дополнительно отмечены данные для Ω_{fp} , полученные с помощью условия Мизеса [86]. Как и ожидалось величина Ω_{fp} возрастает с увеличением параметра b , однако эта зависимость имеет выраженный нелинейный характер. В диапазоне $b \in [0, b_t]$ увеличение критической скорости незначительно и составляет $\approx 1.2\%$ и $\approx 1.3\%$ для $H = 0$ и для $H = 1$ соответственно. С другой стороны, для $b \in [b_t, 1]$ наблюдается значительный рост величины Ω_{fp} , который составляет $\approx 8.4\%$ и $\approx 9.1\%$ для $H = 0$ и для $H = 1$ соответственно. По всей видимости такой характер зависимости $\Omega_{fp}(b)$ объясняется тем, что при $b = b_t$ происходит смена режима пластического течения и новые пластические области зарождаются в окрестности боковой поверхности цилиндра. Заметим, что зависимость критической скорости вращения сплошного диска от параметра b является практически линейной [110].

Как видно из рис. 2.5б с увеличением параметра упрочнения H критическая скорость вращения Ω_{fp} растет практически линейно. С увеличением H в диапазоне $H \in [0, 1]$ рост величины Ω_{fp} для $b = 0$ и для $b = 1$ составляет $\approx 1.6\%$ и $\approx 2.3\%$ соответственно. Для общего кусочно-линейно условия с параметром $b = 1/2$ и условия Мизеса средняя разница величины критической скорости Ω_{fp} составляет $\approx 1.5\%$.

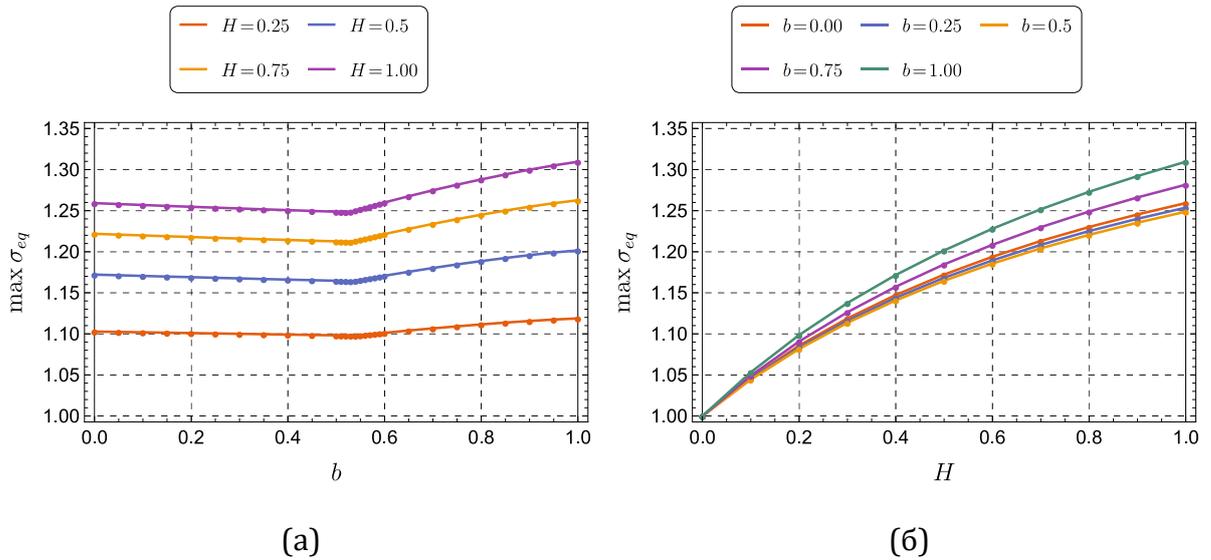


Рис. 2.4 — Зависимости максимума эквивалентного напряжения от (а) параметра b ; (б) параметра H при $\Omega = \Omega_{fp}$ для сплошного цилиндра с закрепленными торцами

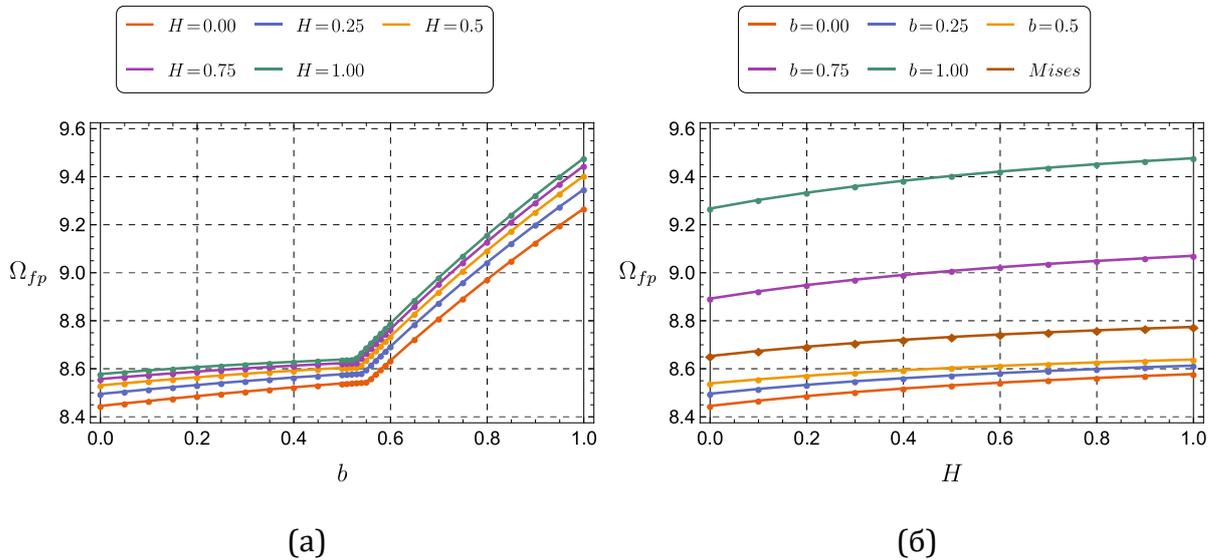


Рис. 2.5 — Зависимости критической скорости вращения Ω_{fp} от (а) параметра b ; (б) параметра H для сплошного цилиндра с закрепленными торцами

Далее рассмотрим цилиндр в состоянии обобщенной плоской деформации $\varepsilon_{zz} \neq 0 = const$. Граничные условия задачи имеют вид:

$$u(0) = 0, \sigma_{rr}(1) = 0.$$

Условие на суммарную осевую силу:

$$\int_0^1 \beta \sigma_{zz} d\beta = 0.$$

Упругое решение имеет вид [70]:

$$u = \frac{1(3-5\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta - \frac{1(1-2\nu)(1+\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^3; \sigma_{rr} = \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega(1-\beta^2);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\left(1 - \frac{1+2\nu}{3-2\nu}\beta^2\right); \sigma_{zz} = \frac{\nu}{4(1-\nu)}\Omega(1-2\beta^2), \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{2}\Omega.$$

Как и в случае сплошного цилиндра с закрепленными торцами, условие пластичности (2.11) впервые выполнится в виде $\sigma_{rr}(0) = \sigma_{\theta\theta}(0) > \sigma_{zz}(0)$, соответствующем ребру №1 (рис. 2.1г). Из этого следует, что и общее кусочно-линейное условие пластичности (2.11) для любого $b \in [0, 1]$ впервые выполнится в виде, соответствующем ребру №1. Скорость, соответствующая началу пластического течения, является функцией только коэффициента Пуассона ν :

$$\Omega_p = \frac{8(1-\nu)}{3-4\nu}.$$

Эволюция пластического течения для условия Треска изучалась в работе [70], а для условия Ишлинского-Ивлева в работе [27]. Рассмотрим случай $b \in (0, 1)$. В момент $\Omega = \Omega_p$ на оси цилиндра возникают пластические области №1 и №2. С увеличением скорости вращения упругопластическая граница движется в сторону боковой поверхности цилиндра. В простейшем случае в момент $\Omega = \Omega_{fp}$ цилиндр полностью переходит в состояние пластичности. Однако для определенной комбинации значений при $\Omega = \Omega_1 < \Omega_{fp}$ возможно появление пластических областей №3 и №4 либо на упругопластической границе, либо на боковой поверхности цилиндра. Таким образом, в общем случае возможны следующие сценарии развития упругопластического деформирования. В первом случае процесс деформирования разбивается на один интервал, конфигурация областей на котором имеет вид:

$$(\Omega_p, \Omega_{fp}): N^{\circ}1, N^{\circ}2, \text{ упругая область.}$$

Во втором случае процесс деформирования разбивается на два интервала

(Ω_p, Ω_1) и (Ω_1, Ω_{fp}) . Ниже приведена конфигурация областей в цилиндре:

$$\begin{aligned} & (\Omega_p, \Omega_1): \text{№1, №2, упругая область}; \\ & (\Omega_1, \Omega_{fp}): \begin{cases} \text{№1, №2, №3, №4, упругая область}; \\ \text{или} \\ \text{№1, №2, упругая область, №4.} \end{cases} \end{aligned}$$

Установить аналитически зависимость между параметрами b, ν, H , при которой реализуется тот или иной сценарий деформирования, затруднительно. Однако это можно реализовать с помощью достаточно простого численного алгоритма. Расчеты показали, что $\Omega_1 \approx \Omega_{fp}$, поэтому для упрощения вычисления критической скорости вращения можно положить $\Omega_{fp} = \Omega_1$. В текущем подразделе это упрощение не используется.

На рис. 2.6а и рис. 2.7а представлены графики напряжений и пластических деформаций при $\Omega = \Omega_{fp}$. Непосредственно перед полным переходом в состояние пластичности цилиндр состоит из 5 областей, а упругая область имеет координаты $\beta \in [\beta_4, 1]$. При $\Omega = \Omega_{fp}$ упругая область исчезает и выполняется $\beta_4 = 1$. Пластическая область №3 напряжения, в которой удовлетворяют равенству $\sigma_{rr} = (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})/2$ имеет незначительные размеры, координаты ее границ: $\beta_2 \approx 0.9748, \beta_3 \approx 0.9749$. В целом полученное решение похоже на решение для сплошного цилиндра с закрепленными торцами, с тем отличием, что в сплошном цилиндре со свободными торцами пластические области №5 и №6 не появляются, а величина напряжений и пластических деформаций ниже. На рис. 2.6б и рис. 2.7б представлены графики напряжений и пластических деформаций, полученные на основе условия Мизеса [86]. Из рис. 2.6б и 2.6а видно, что напряжения при условии Мизеса и его кусочно-линейном аналоге достаточно близки. В то же время пластические деформации (рис. 2.7б и 2.7а) для данных условий пластичности отличаются более существенно.

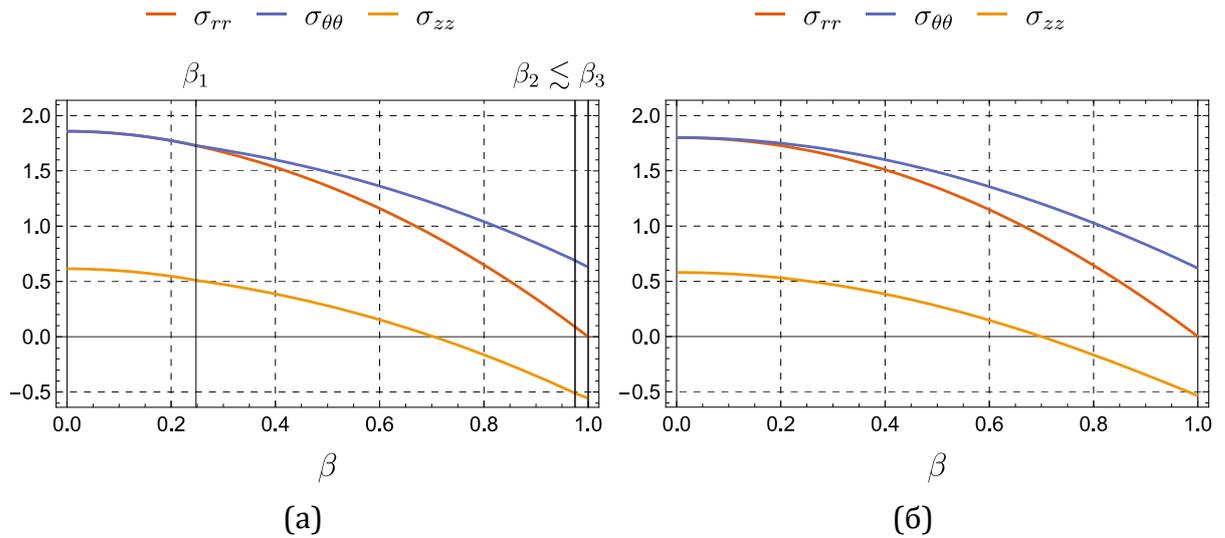


Рис. 2.6 — Распределение напряжений в сплошном цилиндре со свободными торцами при $\Omega = \Omega_{fp}$: (а) условие (2.11) при $b = 1/2$, (б) условие Мизеса.

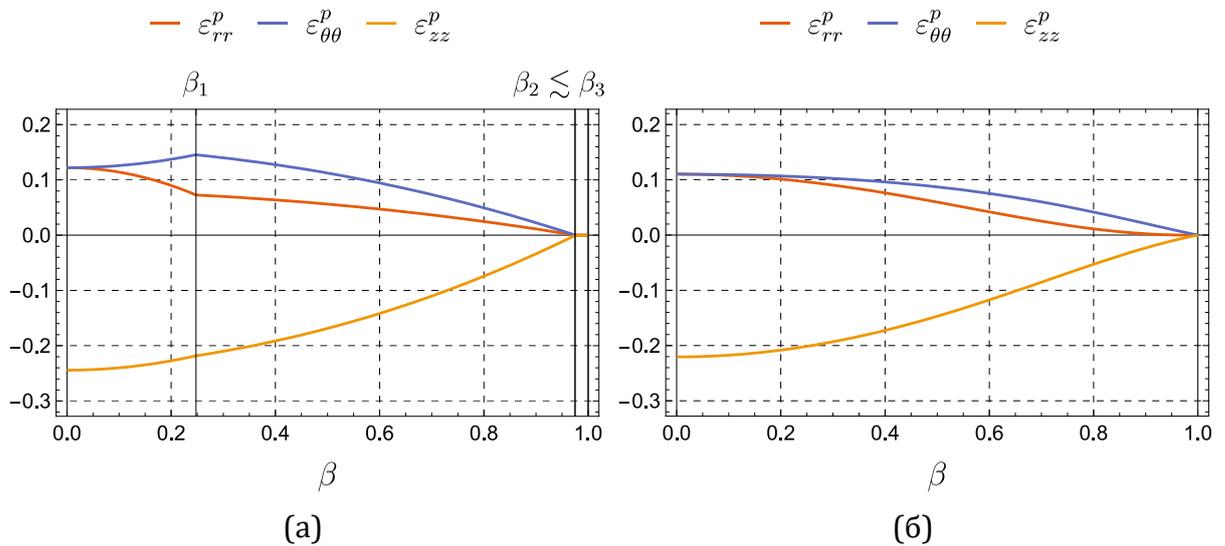


Рис. 2.7 — Распределение пластических деформаций в сплошном цилиндре со свободными торцами при $\Omega = \Omega_{fp}$: (а) условие (2.11) при $b = 1/2$, (б) условие Мизеса.

На рис. 2.8а и рис. 2.8б представлены зависимости максимального эквивалентного напряжения при $\Omega = \Omega_{fp}$ от параметров b, H . Максимальная величина σ_{eq} достигается в центре цилиндра. Для цилиндра из идеального упругопластического материала, разумеется, $\max \sigma_{eq} = 1$. Видим, что в отличие от сплошного цилиндра с закрепленными торцами эквивалентное напряжение в сплошном цилиндре со свободными торцами монотонно возрастает с увеличением параметров b, H .

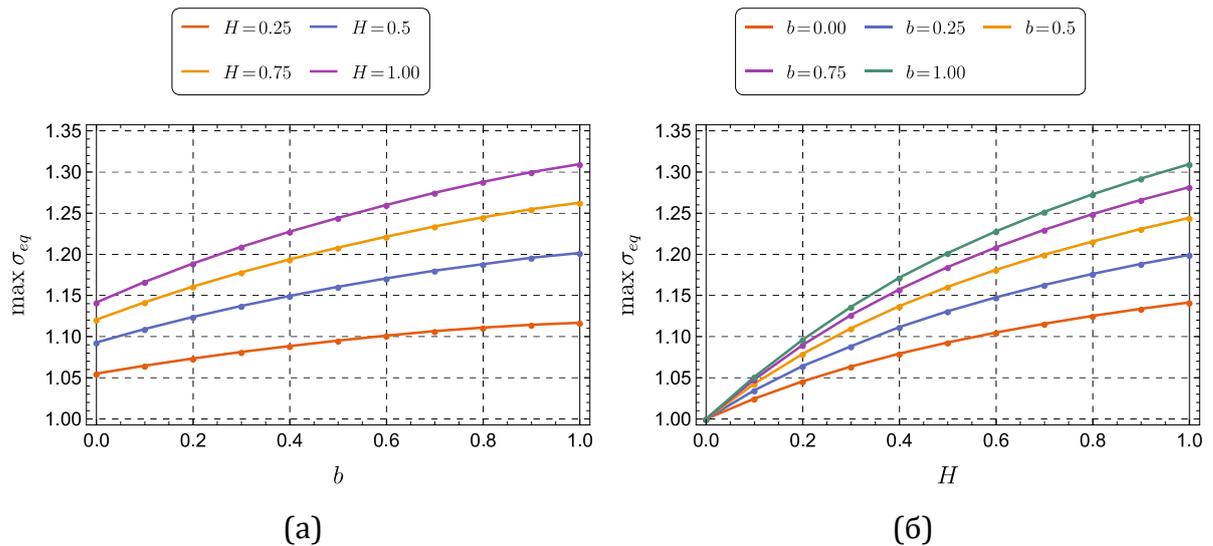


Рис. 2.8 — Зависимости максимального эквивалентного напряжения от (а) параметра b ; (б) параметра упрочнения H в момент $\Omega = \Omega_{fp}$ для сплошного цилиндра со свободными торцами.

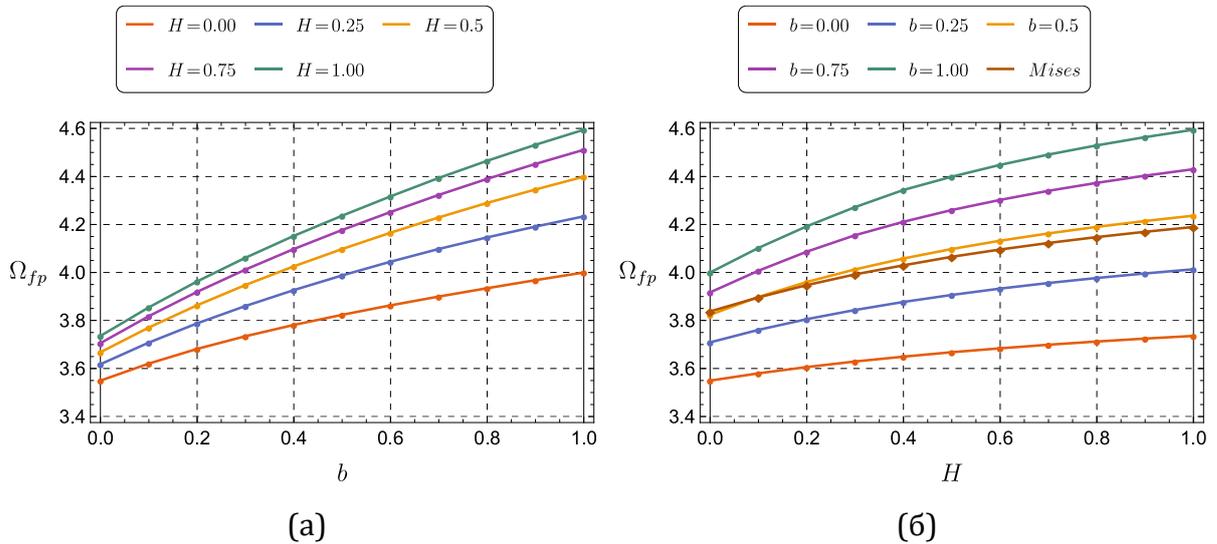


Рис. 2.9 — Зависимости критической скорости вращения Ω_{fp} от (а) параметра b ; (б) параметра упрочнения H для сплошного цилиндра со свободными торцами.

На рис. 2.9а и рис. 2.9б представлены зависимости критической скорости вращения цилиндра Ω_{fp} от параметров b, H соответственно. На рис. 2.9б дополнительно отмечены данные для Ω_{fp} , полученные с помощью условия Мизеса [86]. Видим, что с увеличением параметра b в диапазоне $b \in [0, 1]$ критическая скорость Ω_{fp} возрастает, что особенно выражено для упрочняемого материала. Для $H = 0$ увеличение критической скорости составляет $\approx 12.6\%$, а для $H = 1$ уже $\approx 23\%$. Таким образом,

полученное решение предсказывает значительное увеличение максимально допустимой скорости вращения для материалов, у которых отношение λ близко к $2/3$, по сравнению с классическими решениями, полученными на основе условия Треска [70, 88].

Разница критической скорости вращения Ω_{fp} для общего кусочно-линейного условия (2.11) при $b = 1/2$ и условия Мизеса возрастает с увеличением параметра упрочнения H и в среднем составляет $\approx 0.6\%$. В целом полученные результаты достаточно хорошо согласуются с данными Эразлана [86]. Заметим, что критическая скорость вращения цилиндра со свободными торцами примерно в два раз ниже по сравнению с цилиндром с закрепленными торцами (рис. 2.5 и рис. 2.9).

Рассмотрим частный случай $b=1$ условия пластичности (2.11). В этом случае в момент $\Omega = \Omega_p$ на оси цилиндра зарождается пластическая область, соответствующая грани призмы Ивлева $\sigma_3 = \sigma_{zz}, \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. В дальнейшем при определенных условиях в цилиндре могут появиться новые пластические области. Предположим, что пластическое течение происходит только в одной области. Тогда возможно получить следующее компактное выражение для критической скорости вращения:

$$\Omega_{fp} = 4 \left(1 + 2H \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{5-4\nu+2H(1+\nu)} \right).$$

Границы применимости приведенной выше формулы можно установить, используя пластическое решение для условия Ишлинского-Ивлева. Для $\nu < 2/7$ формула неприменима. Для $2/7 \geq \nu > 1/3$ границы применимости имеют вид

$$H \in \left[0, -2(2-7\nu)/((1+\nu)(1-3\nu)) \right]. \quad (2.41)$$

В частности, для $\nu = 0.3$ границы применимости предыдущей формулы равны $H \in [0, 5/13]$. Наконец, для $\nu \geq 1/3$ формула (2.41) применима без ограничений.

2.2.8 Полый цилиндр с закрепленными и свободными торцами

Цилиндр находится в состоянии плоской деформации $\varepsilon_{zz} = 0$. Граничные условия задачи имеют вид:

$$\sigma_{rr}(\delta) = 0, \sigma_{rr}(1) = 0.$$

Упругое решение запишется следующим образом [71]:

$$u = \frac{(1+\nu)}{8(1-\nu)} \left((3-2\nu)\delta^2\beta^{-1} + (3-2\nu)(1-2\nu)(1+\delta^2)\beta - (1-2\nu)\beta^3 \right) \Omega;$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)} (1 - \delta^2\beta^{-2} + \delta^2 - \beta^2) \Omega;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)} \left(1 + \delta^2\beta^{-2} + \delta^2 - \frac{1+2\nu}{3-2\nu}\beta^2 \right) \Omega;$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu}{4(1-\nu)} \left((3-2\nu)(1+\delta^2) - 2\beta^2 \right) \Omega.$$

Эволюция течения для случая $b=0$ рассматривалась в работе [71]. Далее рассмотрим случай $b \in (0, 1]$. Условие (2.11) впервые выполняется на внутренней поверхности цилиндра, где напряженное состояние удовлетворяет неравенствам $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$ и $\sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Отсюда

$$\Omega_p(\delta, \nu, \lambda) = 4 \frac{\lambda}{(\nu + (1-2\nu)\lambda)} \frac{(1-\nu)}{(3-2\nu + (1-2\nu)\delta^2)}. \quad (2.42)$$

В формуле (2.42) вместо b используется параметр λ (2.12). При $\Omega = \Omega_p$ на внутренней поверхности цилиндра зарождается пластическая область №6. С увеличением скорости вращения упругопластическая граница движется в сторону внешней поверхности цилиндра. Далее в зависимости от значений параметров возможны два сценария:

1. упругопластическая граница достигает внешней поверхности цилиндра и цилиндр полностью переходит в пластическое состояние;
2. на внутренней поверхности цилиндра напряженное состояние достигает ребра $\sigma_{zz} = (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr})/2$ и зарождается область №7, с последующим увеличением скорости весь цилиндр переходит в пластичность.

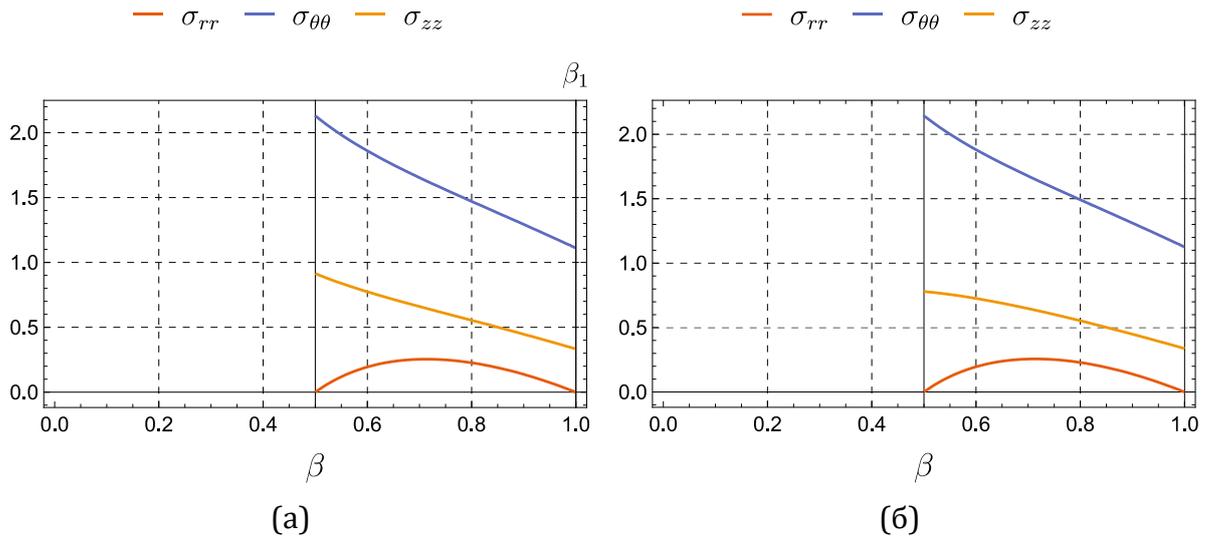


Рис. 2.10 — Распределение напряжений в полном цилиндре с закрепленными торцами при $\Omega = \Omega_{fp}$: (а) условие (2.11) при $b=1/2$, (б) условие Мизеса.

Заметим, что для достаточно толстых цилиндров возможно появление и других пластических областей, поэтому далее будем предполагать $\delta > 0.4$. Как показали расчеты в этом случае в цилиндре возможно появление одной (№6) или двух (№6 и №7) пластических областей. Далее в подразделе $\delta = 0.5$ если не указано иное. В этом случае пластическое течение в цилиндре происходит только в области №6. На рис. 2.10а и рис. 2.11а показаны напряжения и пластические деформации при $\Omega = \Omega_{fp}$.

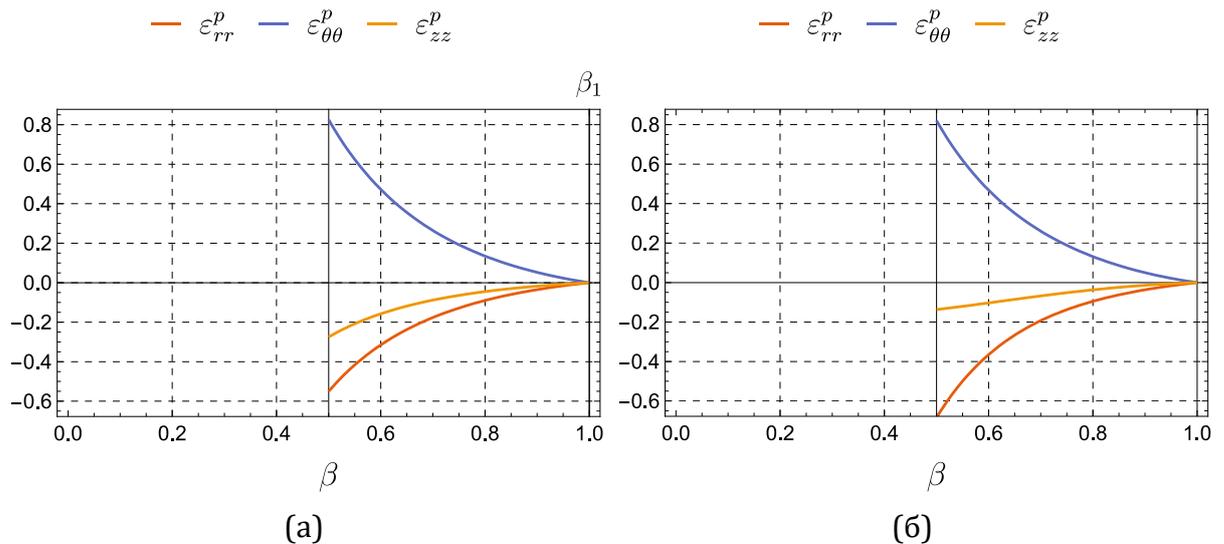


Рис. 2.11 — Распределение пластических деформаций в полном цилиндре с закрепленными торцами при $\Omega = \Omega_{fp}$: (а) условие (2.11) при $b=1/2$, (б) условие Мизеса.

Сравнение результатов расчетов, полученных с помощью численных расчетов на основе нелинейного условия Мизеса [86] (рис. 2.10б и 2.11б), и его кусочно-линейной аппроксимации (рис. 2.10а и 2.11а) показало, что напряжения в цилиндре за исключением осевой компоненты почти не отличаются. Из пластических деформаций заметная разница присутствует в радиальной и осевой компонентах, тогда как тангенциальная составляющая практически совпадает.

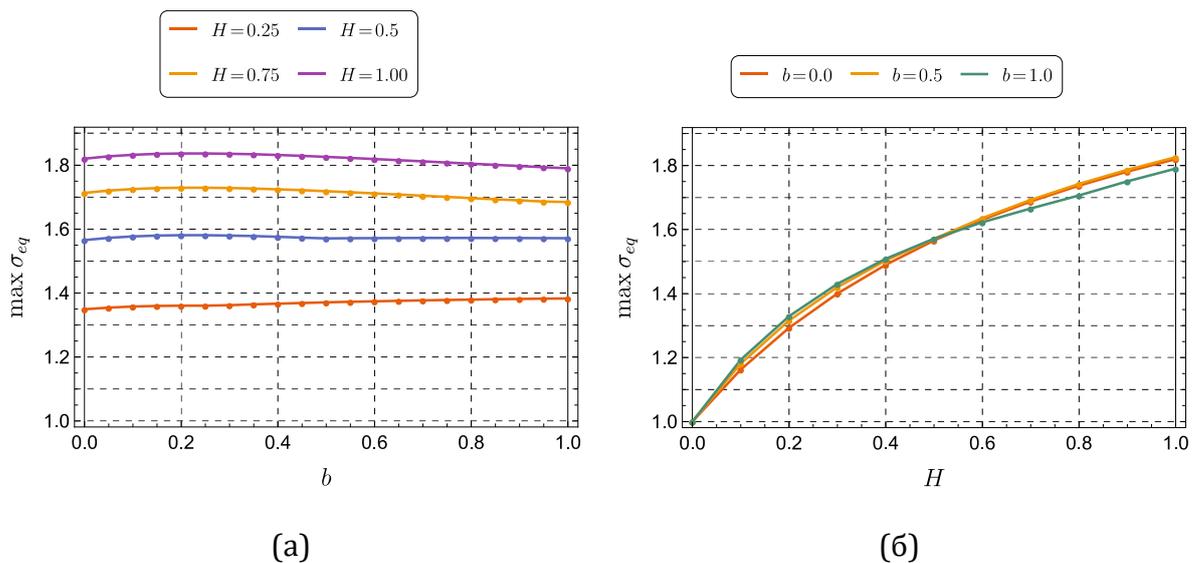


Рис. 2.12 — Зависимости максимального эквивалентного напряжения от (а) параметра b ; (б) параметра H при $\Omega = \Omega_{fp}$ в полем цилиндре с закрепленными торцами.

Зависимости максимального эквивалентного напряжения при $\Omega = \Omega_{fp}$ от параметров b, H изображены на рис. 2.12а и рис. 2.12б. Максимальное значение эквивалентного напряжения достигается на поверхности цилиндра $\beta = \delta$. Видим, что эквивалентные напряжения в цилиндре в большей степени зависят от параметра упрочнения H по сравнению с параметром b . Величина эквивалентных напряжений в полем цилиндре значительно выше по сравнению со сплошным. (рис. 2.4 и рис. 2.8).

На рис. 2.13а и рис. 2.13б представлены зависимости критической скорости вращения Ω_{fp} от параметров b, H . На рис. 2.13б также отмечены данные для Ω_{fp} , полученные с помощью условия Мизеса [86]. Видим, что

критическая скорость Ω_{fp} практически линейно возрастает с увеличением параметра b . Величина прироста слабо зависит от параметра упрочнения H и составляет более 20%. Увеличение параметра упрочнения H в свою очередь также существенно увеличивает критическую скорость вращения. Прирост Ω_{fp} для $H \in [0, 1]$ составляет более 23%. Результаты для $b = 0.5$ хорошо согласуются с данными Эразлана, полученными численно с использованием условия Мизеса. Средняя разница критической скорости вращения Ω_{fp} составляет менее 0.5%.

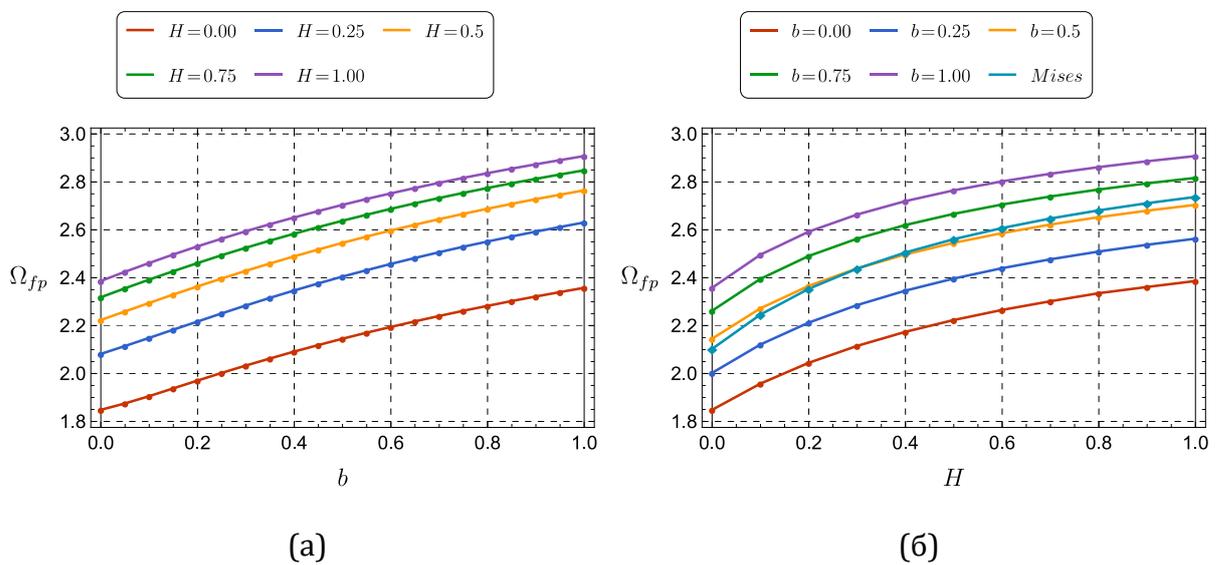


Рис. 2.13 — Зависимости критической скорости вращения Ω_{fp} от (а) параметра b ; (б) параметра упрочнения H для полого цилиндра с закрепленными торцами.

Как было сказано ранее, в цилиндре возможно появление одной или двух пластических областей, соответствующих условию (2.11). К сожалению, установить аналитическую зависимость между параметрами, при которой реализуется тот или иной сценарий пластического течения, представляется невозможным. Тем не менее, с помощью численных расчетов установлено, что если $\nu \in [0.1, \nu_t]$ и $\delta \in [0.75, 1)$, то для $b \in [0, 1]$ и $H \geq 0$ пластическое течение в цилиндре происходит только в одной пластической области (область №6). Величина ν_t определена численно и составляет $\nu_t \cong 0.3087$. При $\nu \leq 0.1$ возможно появление других

пластических областей. Заметим, что неравенство $\nu \in [0.1, \nu_t]$ справедливо для многих конструкционных материалов. Если приведенные выше условия выполняются, то справедлива следующая точная формула:

$$\begin{aligned} \Omega_{fp}(\delta, \nu, \lambda, H) &= \\ &= \frac{\lambda}{(\nu + (1-2\nu)\lambda)} \frac{(1-\nu)(9-\tau^2)}{(1-2\nu)} \frac{(\tau f_1(1+\delta^{2\tau} - 2\delta^{1+\tau}) - f_2(1-\delta^{2\tau}))}{(\tau f_3(1+\delta^{2\tau} - 2\delta^{3+\tau}) + f_4(1-\delta^{2\tau}))}, \\ f_1 &= \nu + (1-2\nu)\lambda; \quad f_2 = 1 - f_1; \quad f_3 = (1-\lambda)(1-\tau^2)f_1 - (1-2\lambda)(3-2\nu); \quad (2.43) \\ f_4 &= (3\lambda + (2-3\lambda)\tau^2)f_1 + (1-\lambda)(3+\tau^2) - 3; \\ \tau^2 &= 1 + (1-2\nu)(1-2\lambda) / (1 - 2(2-\nu)\lambda + (5-4\nu + (1-\nu^2)H)\lambda^2). \end{aligned}$$

Заметим, что для выбранных значений параметров b, H границы применимости формулы (2.43) могут быть существенно расширены. В частности, при $H=1.0$ формула (2.43) справедлива для $\delta \in [0.4, 1)$. В целом с увеличением параметра упрочнения H границы применимости (2.43) увеличиваются, а с увеличением параметра b — уменьшаются.

Рассмотрим некоторые свойства зависимости (2.43). В пределе при $\lambda \rightarrow 1/2 (b \rightarrow 0)$ формула (2.43) дает оценку для условия Треска:

$$\Omega_{fp}^{Tr} = \frac{4(1-\delta^2)(1-\nu^2)H - 8\delta^2 \log \delta}{(1-\delta^2)(4\delta^2 + (1+\nu)(1-2\nu + \delta^2(3-2\nu))H)}.$$

В частном случае для идеального упругопластического материала ($H=0$) выражение (2.43) даст нижнюю оценку критической скорости вращения $\Omega_{fp}(\nu, \lambda, H, \delta)$:

$$\Omega_{fp}^{\min} = -\frac{2 \log \delta}{1-\delta^2} \leq \Omega_{fp}(\nu, \lambda, H, \delta). \quad (2.44)$$

С другой стороны,

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \Omega_{fp}(\nu, \lambda, H, \delta) = 4 \frac{\lambda}{((1-2\nu)\lambda + \nu)} \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu + (3-2\nu)\delta^2)}.$$

Последняя величина совпадает с критической скоростью вращения

Ω_{fp} для чисто упругой модели материала, в которой напряжения не ограничены поверхностью текучести (2.11). В случае условия Ишлинского-Ивлева найдем верхнюю оценку для критической скорости вращения

$$\Omega_{fp}^{\max} = \frac{8(1-\nu)}{(2-\nu)(1-2\nu+\delta^2(3-2\nu))} \geq \Omega_{fp}(\nu, \lambda, H, \delta). \quad (2.45)$$

Следует отметить, что формулы (2.44) и (2.45) справедливы по крайней мере для $\delta \in [0.4, 1)$ и $\nu \in [0.1, 0.5]$. В итоге получим

$$\Omega_{fp}(\nu, \lambda, H, \delta) \in [\Omega_{fp}^{\min}, \Omega_{fp}^{\max}].$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 1} \Omega_{fp}(\nu, \lambda, H, \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 1} \Omega_p(\nu, \lambda, \delta) = \frac{\lambda}{\nu + (1-2\nu)\lambda}.$$

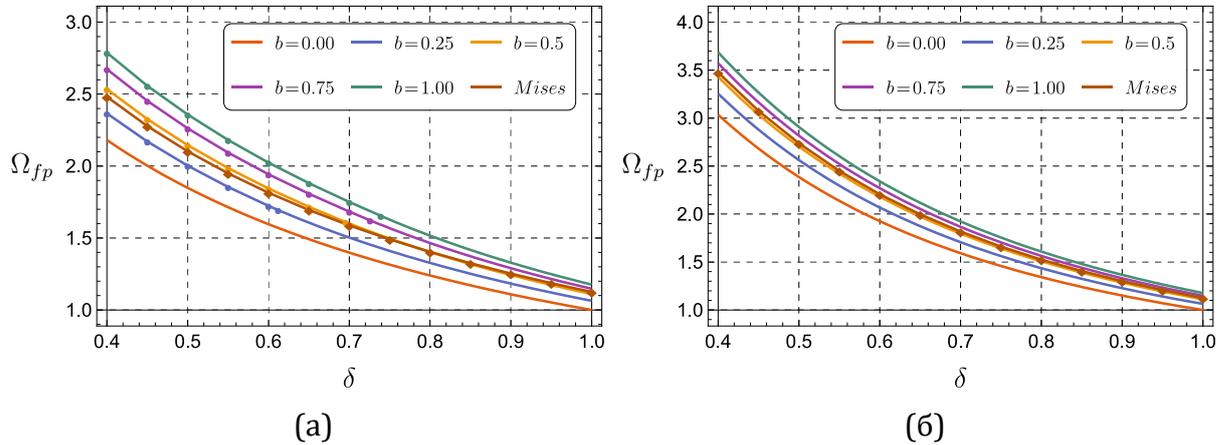


Рис. 2.14 — Зависимости критической скорости вращения Ω_{fp} от δ и b при $\nu=0.3$:
(а) $H=0.0$; (б) $H=1.0$.

На рис. 2.14а и рис. 2.14б представлены зависимости Ω_{fp} от δ и b для идеального и упрочняемого материала ($H=1.0$) соответственно. Графики построены с помощью (2.43) в границах ее применимости, а там, где формула (2.43) неприменима использовались численные расчеты.

Далее рассмотрим цилиндр со свободными торцами ($\varepsilon_{zz} \neq 0 = const$).
Граничные условия задачи имеют вид:

$$\sigma_{rr}(\delta) = 0, \sigma_{rr}(1) = 0.$$

Условие на суммарную осевую силу:

$$\int_{\delta}^1 \beta \sigma_{zz} d\beta = 0.$$

Чисто упругое решение задачи представлено ниже:

$$u = \frac{(1+\nu)}{8(1-\nu)} \left((3-2\nu)\delta^2\beta^{-1} + \frac{(3-5\nu)}{(1+\nu)}(1+\delta^2)\beta - (1-2\nu)\beta^3 \right) \Omega;$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)} (1-\delta^2\beta^{-2} + \delta^2 - \beta^2) \Omega; \sigma_{\theta\theta} = \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)} \left(1 + \delta^2\beta^{-2} + \delta^2 - \frac{1+2\nu}{3-2\nu}\beta^2 \right) \Omega;$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu}{4(1-\nu)} (1 + \delta^2 - 2\beta^2) \Omega; \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{2} (1 + \delta^2) \nu \Omega.$$

Условие пластичности (2.11) впервые выполняется на внутренней поверхности материала, где напряженное состояние соответствует грани №6. Отсюда скорость начала пластического течения принимает вид:

$$\Omega_p(\delta, \nu, b) = \frac{4(1-\nu)(1+b)}{(1-\nu)(1+b)(3+\delta^2) + \nu(1-\delta^2)}.$$

Далее предполагаем, что $\delta > 0.4$. Решение упругопластической задачи для частного случая $b=0$ приведено в работах [71, 88]. Сначала рассмотрим эволюцию пластического течения для случая $b \in (0, 1)$. Условие пластичности (2.11) впервые выполняется на внутренней поверхности цилиндра, где напряжения удовлетворяют неравенствам $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$ и $\sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. В результате этого на внутренней поверхности цилиндра зарождается пластическая область №6. Далее с увеличением скорости вращения упругопластическая граница движется в сторону внешней поверхности цилиндра. При $\Omega = \Omega_1$ напряженное состояние на упругопластической границе переходит на ребро №5, в результате чего в цилиндре появляются области №4 и №5. Далее в момент $\Omega = \Omega_2$ пластическая область №4 исчезает. Наконец, при $\Omega = \Omega_{fp}$ весь цилиндр переходит в пластическое состояние. Таким образом, в общем случае процесс упругопластического деформирования разбивается на 3 интервала. Ниже приведена конфигурация областей в цилиндре на каждом из интервалов:

$(\Omega_p, \Omega_1): N^{\circ}6$, упругая область;

$(\Omega_1, \Omega_2): N^{\circ}6, N^{\circ}5, N^{\circ}4$, упругая область;

$(\Omega_2, \Omega_{fp}): N^{\circ}5, N^{\circ}4$, упругая область.

Заметим, что при некоторых условиях возможно выполнение неравенства $\Omega_2 \geq \Omega_{fp}$. В этом случае процесс деформирования состоит только из двух интервалов (Ω_p, Ω_1) и (Ω_1, Ω_{fp}) , на которых цилиндр состоит из следующих пластических областей:

$(\Omega_p, \Omega_1): N^{\circ}6$, упругая область;

$(\Omega_1, \Omega_{fp}): N^{\circ}6, N^{\circ}5, N^{\circ}4$, упругая область.

Следует отметить, что, как и в случае полого цилиндра с закрепленными торцами для $\delta < 0.4$ возможно появление и других областей.

При использовании условия Ишлинского-Ивлева ($b=1$) в момент $\Omega = \Omega_p$ появляется пластическая область, напряжения в которой удовлетворяют соотношениям $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Далее при определенных условиях напряженное состояние на внутренней поверхности цилиндра может перейти на ребро $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ призмы Ивлева, в результате чего появятся 2 новых пластических области.

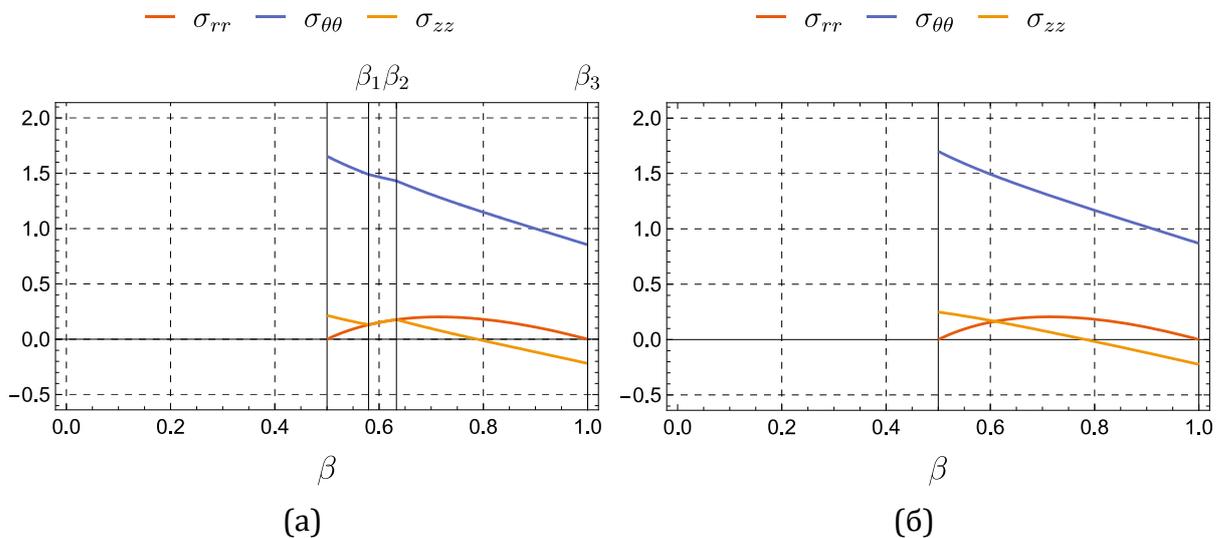


Рис. 2.15 — Распределение напряжений в полом цилиндре со свободными торцами при $\Omega = \Omega_{fp}$: (а) условие (2.11) при $b=1/2$, (б) условие Мизеса.

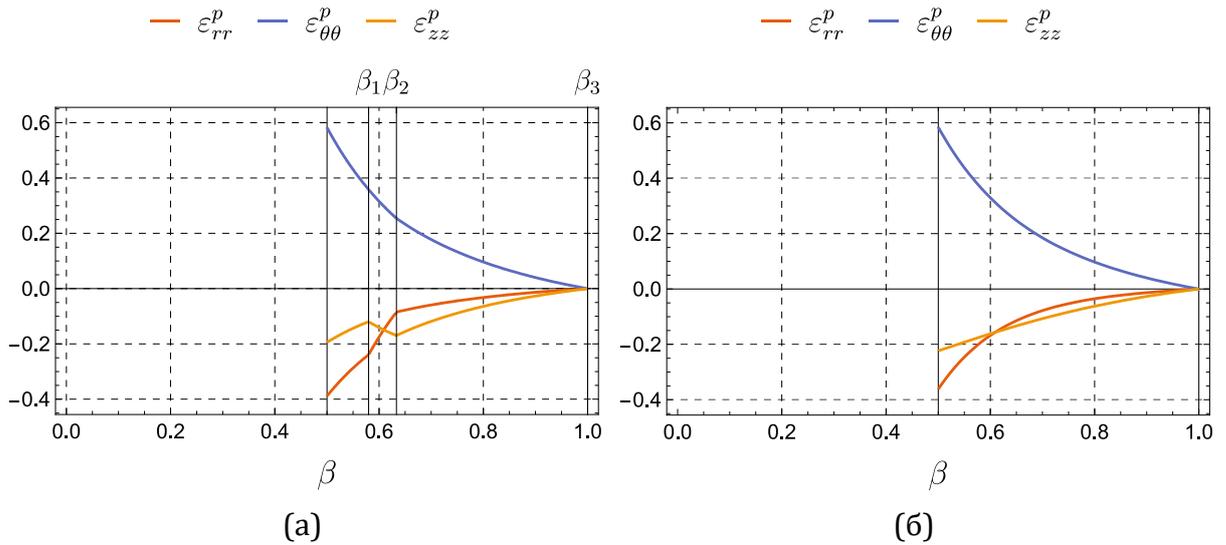


Рис. 2.16 — Распределение пластических деформаций в полном цилиндре со свободными торцами при $\Omega = \Omega_{fp}$: (а) условие (2.11) при $b = 1/2$, (б) условие Мизеса.

Далее $\delta = 0.5$, если не указано иное. На рис. 2.15а и рис. 2.16а представлено распределение напряжений и пластических деформаций для полого цилиндра при скорости $\Omega = \Omega_{fp}$. На рис. 2.15б и рис. 2.16б представлено численное решение для условия пластичности Мизеса [86]. Видно, что напряженно-деформированное состояние для кусочно-линейного и нелинейного условий практически не отличается за исключением небольшой области $\beta \in (\beta_1, \beta_2)$.

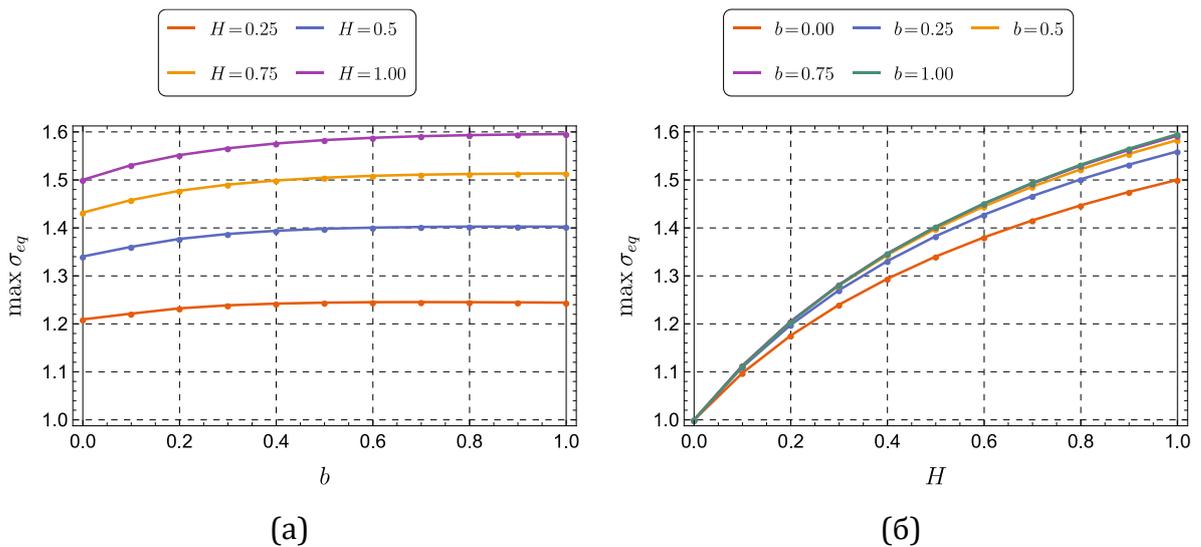


Рис. 2.17 — Зависимости максимального эквивалентного напряжения от (а) параметра b ; (б) параметра H при $\Omega = \Omega_{fp}$ для полого цилиндра со свободными торцами.

На рис. 2.17 показаны зависимости максимального эквивалентного напряжения от параметров b, H . Предполагается, что скорость вращения $\Omega = \Omega_{fp}$. Заметим, что максимальное значение эквивалентного напряжения достигается на внутренней поверхности цилиндра ($\beta = \delta$). Видим, что с увеличением параметров b, H величина эквивалентных напряжений в цилиндре также растет, при этом параметр H оказывает большее влияние по сравнению с параметром b .

Зависимости критической скорости вращения от параметров b, H представлены на рис. 2.18. На рис. 2.18б также отмечены данные, полученные с помощью условия Мизеса [86]. Видим, что критическая скорость вращения существенно возрастает с увеличением параметров b, H . Повышение Ω_{fp} при $b \in [0, 1]$ составляет $\approx 5.2\%$ и 10.1% для идеального и упрочняемого ($H = 1.0$) материала соответственно. Заметим, что критическая скорость вращения в полом цилиндре со свободными торцами более чем, на 20% ниже по сравнению с полым цилиндром с закрепленными торцами (рис. 2.17). Разница между решениями для $b = 1/2$ и условием Мизеса составляет в среднем $\approx 1.6\%$.

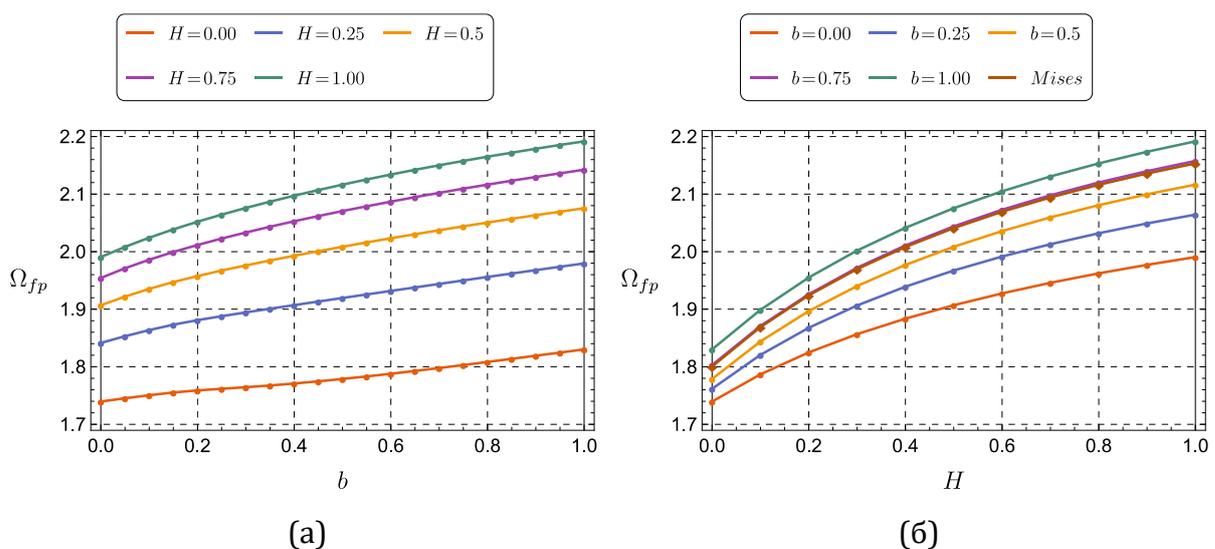


Рис. 2.18 — Зависимости критической скорости вращения Ω_{fp} от (а) параметра b ; (б) параметра H для полого цилиндра со свободными торцами.

Рассмотрим более подробно случай $b = 1$. Предположим, что пластическое течение при $\Omega \leq \Omega_{fp}$ происходит только в одной области. Благодаря этому становится возможным получить аналитическое выражение для критической скорости вращения:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{fp} &= 12(1-\nu)(1-\delta^2)(9-d^2) \frac{g_0 + g_1 d}{h_0 + h_1 d + h_2 d^2 + h_3 d^3}; \\
 g_0 &= (1+\nu)(1-\delta^{2d}); \quad g_1 = (2-\nu)(\delta^d(2\delta - \delta^d) - 1); \\
 h_0 &= 3(1+\nu)(1-\delta^2)(1-\delta^{2d})(7-11\nu+15(1-\nu)\delta^2); \\
 h_1 &= -(1+\delta^{2d}) \times \\
 &\times (34-\nu(85-43\nu)-2(2-\nu)(25-29\nu)\delta^2+3(1-\nu)(14-13\nu)\delta^4) - \\
 &- 2\delta^{1+d}(3(1-\nu)(22-5\nu)-2(4-5\nu)(11-7\nu)\delta^2+(2-\nu)(23-31\nu)\delta^4); \\
 h_2 &= -3(1-\delta^2)(1-\delta^{2d})(7-(10-\nu)\nu+3(1-\nu^2)\delta^2); \\
 h_3 &= (1-\delta^2)(2-\nu) \times \\
 &\times ((1+\delta^{2d})(5-7\nu-3(1-\nu)\delta^2)+2\delta^{1+d}(3-3\nu-(5-7\nu)\delta^2)); \\
 d &= \sqrt{\frac{2(1+\nu)(1+2(1-\nu)H)}{5-4\nu+4(1-\nu^2)H}}.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Установлено, что для $H \geq 0$ и $\nu \in [0, 0.46148]$ формула (2.46) справедлива в диапазоне $\delta \in [1/2, 1]$. Как видим, границы применимости формулы (2.46) покрывают большинство конструкционных материалов. При $\nu < 0.46148$ и $\delta < 1/2$ в цилиндре может появляться более одной пластической области, и формула (2.46) становится несправедливой. Также отметим, что с увеличением параметра упрочнения H границы применимости формулы (2.46) расширяются. В частности, уже при $H = 0.1$ формула (2.46) справедлива для $\nu \in [0, 1/2]$ и $\delta \in [1/2, 1]$.

Рассмотрим некоторые свойства формулы (2.46). Заметим, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 1} \Omega_{fp} = \lim_{\delta \rightarrow 1} \Omega_p = 1.$$

Кроме того,

$$\Omega_{fp}^{\max} = \lim_{H \rightarrow \infty} \Omega_{fp} = \frac{8(1-\nu)}{2-3\nu+(6-5\nu)\delta^2}.$$

Величина Ω_{fp}^{\max} совпадает с критической скоростью вращения, полученной для чисто упругой модели материала.

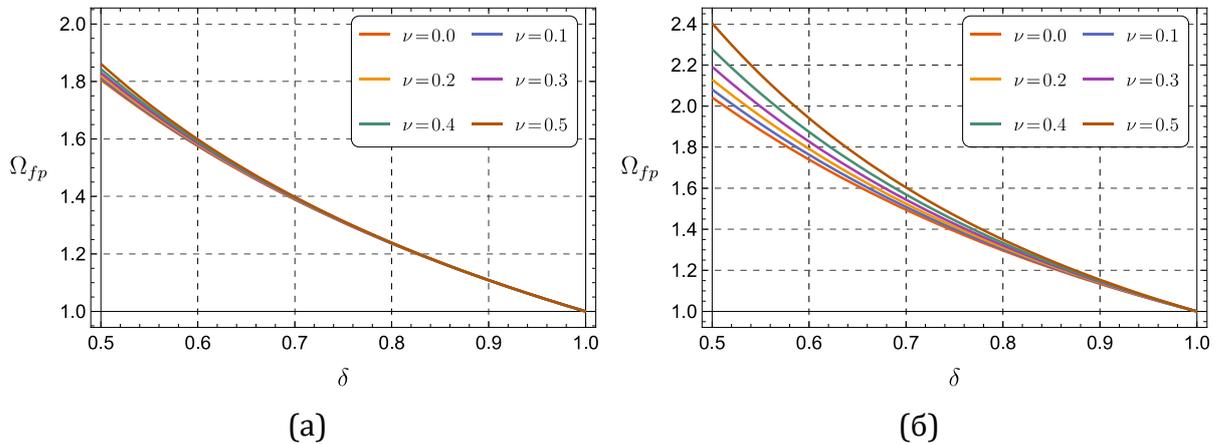


Рис. 2.19 — Зависимости критической скорости вращения Ω_{fp} от δ и ν для полого цилиндра со свободными торцами при $b=1$: (а) $H=0.0$; (б) $H=1.0$.

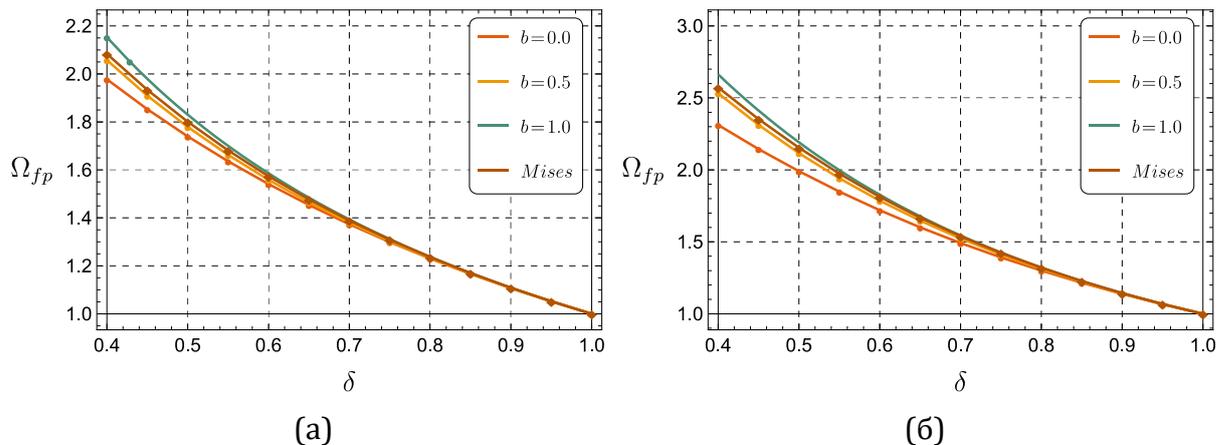


Рис. 2.20 — Зависимости критической скорости вращения Ω_{fp} от δ и b для полого цилиндра со свободными торцами при $\nu=0.3$: (а) $H=0.0$; (б) $H=1.0$.

На рис. 2.19 приведены зависимости $\Omega_{fp}(\delta, \nu)$ для идеального и упрочняемого материалов. Видим, что повышение коэффициента Пуассона ведет к повышению критической скорости вращения, что особенно заметно для упрочняемого материала (рис. 2.19б). Интересно отметить, что для идеального упругопластического материала величина Ω_{fp} для $\delta \geq 3/4$ практически не зависит от коэффициента Пуассона. В этом

случае с помощью разложения в ряд Тейлора можно получить следующую очень точную приближенную формулу:

$$\Omega_{fp} \approx \frac{4}{(1+\delta)^2} \quad (2.47)$$

На рис. 2.20а и рис. 2.20б изображены зависимости критической скорости Ω_{fp} от δ и b для идеального и упрочняемого материала ($H=1.0$) соответственно. Представленные графики построены с использованием точной формулы (2.46) в границах ее применимости, а там, где формула (2.46) неприменима использовались численные расчеты. Видим, что с увеличением параметра δ критическая скорость вращения быстро уменьшается. Кроме того, для достаточно тонких цилиндров влияние параметра b пренебрежимо мало. Так, для цилиндра из идеального упругопластического материала при $\delta \geq 0.85$ критическая скорость Ω_{fp} зависит только от параметра δ и для нее с высокой степенью точности справедлива приближенная формула (2.47).

В заключении покажем, что полученная формула для критической скорости вращения (2.46) согласуется с теорией мембран. Рассмотрим тонкий полый цилиндр со свободными торцами. Радиальное и осевое напряжения в нем пренебрежимо малы: $\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = 0$. Из уравнения равновесия получим: $\sigma_{\theta\theta} = \Omega\beta^2$. Предположим, что тангенциальное напряжение не зависит от радиальной координаты β и равняется напряжению в среднем сечении $\beta = (1+\delta)/2$ цилиндра. Тогда $\sigma_{\theta\theta} = \Omega(1+\delta)^2/4$. Общее кусочно-линейное условие (2.11) сводится к условию $\sigma_{\theta\theta} = 1$. Откуда предельная скорость $\Omega_{fp} = \frac{4}{(1+\delta)^2}$, что совпадает с формулой (2.47).

2.3. Упругопластическое деформирование вращающегося цилиндра с жестким включением при наличии температурного градиента

2.3.1 Определяющие уравнения

Данный раздел посвящен термоупругопластическому анализу вращающегося цилиндра с жестким включением. Цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω , угловым ускорением пренебрегаем. Также в цилиндре присутствует неравномерное стационарное температурное поле, вызванное разностью температур на внутренней и внешней поверхностях. Предполагается, что цилиндр находится в состоянии плоской деформации и сохраняет осевую симметрию в процессе деформирования. При таких ограничениях точки цилиндра движутся только в радиальном направлении и u_r является единственным ненулевым перемещением. Для удобства в данном подразделе используется система безразмерных величин, включающая в себя параметры (2.2), а также параметры, связанные с температурным деформированием

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^t = \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}^t, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_0} - 1, \quad \bar{\alpha} = \frac{E T_0}{\sigma_0} \alpha, \quad (2.48)$$

ε_{ij}^t — температурные деформации, T — температура, T_0 — отсчетная температура, α — коэффициент линейного теплового расширения. Далее в разделе знак верхнего подчеркивания для краткости всюду опущен. Механические и теплофизические параметры материала предполагаются не зависящими от температуры. Материал цилиндра принят однородным и изотропным. При сформулированных выше допущениях, касательные напряжения в цилиндре отсутствуют, единственным уравнением равновесия является уравнение (2.7) в радиальном направлении.

Полные деформации (2.3) представляют собой сумму упругих, пластических и температурных деформаций

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{rr}^t; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^t; \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^p + \varepsilon_{zz}^t. \quad (2.49)$$

Связь между напряжениями и упругими деформациями имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e - (1+\nu)\alpha T \right); \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\varepsilon_{rr}^e + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e - (1+\nu)\alpha T \right); \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \alpha T. \end{aligned} \quad (2.50)$$

В качестве условия пластичности используется условие Треска вместе с линейным законом изотропного упрочнения [134]

$$\max(|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|, |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|, |\sigma_{zz} - \sigma_{rr}|) = 1 + H\varepsilon_{eq}^p, \quad (2.51)$$

Пластическая составляющая деформации вычисляется в соответствии с ассоциированным законом течения (2.15) или (2.16), а приращение пластической деформации $d\varepsilon_{eq}^p$ определяется законом (2.18).

Граничные условия задачи задаются следующим образом

$$u(\delta) = 0, \quad \sigma_{rr}(1) = 0. \quad (2.52)$$

В свою очередь граничные условия по температуре имеют вид

$$T(\delta) = T_{in}, \quad T(1) = T_{out}, \quad T_{out} \geq T_{in}. \quad (2.53)$$

Решая стационарное уравнение теплопроводности с учетом граничных условий (2.53), нетрудно получить распределение температуры

$$T(\beta) = T_{in} + \Delta T \left(1 - \frac{\ln \beta}{\ln \delta} \right), \quad \Delta T = T_{out} - T_{in}. \quad (2.54)$$

2.3.2 Упругое равновесие и зарождение пластического течения

Рассмотрим состояние в цилиндре до наступления пластического течения. Соотношения (2.50) в условиях плоской деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)\alpha T \right); \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\varepsilon_{rr} + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)\alpha T \right); \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \alpha T. \end{aligned}$$

Уравнение равновесия (2.7) с учетом предыдущих соотношений запишется следующим образом

$$u'' + u'\beta^{-1} - u\beta^{-2} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}\Omega\beta + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T',$$

здесь и далее штрих обозначает производную по координате β . Решая полученное уравнение, найдем упругое решение для произвольного температурного распределения

$$\begin{aligned} u &= \bar{d}_1\beta^{-1} + \bar{d}_2\beta - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^3 + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha\beta^{-1}\int_{\delta}^{\beta}\beta T d\beta; \\ \sigma_{rr} &= -d_1\beta^{-2} + d_2 - \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^2 - \frac{\alpha}{(1-\nu)}\beta^{-2}\int_{\delta}^{\beta}\beta T d\beta; \\ \sigma_{\theta\theta} &= d_1\beta^{-2} + d_2 - \frac{(1+2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^2 - \frac{\alpha T(\beta)}{(1-\nu)} + \frac{\alpha}{(1-\nu)}\beta^{-2}\int_{\delta}^{\beta}\beta T d\beta; \\ \bar{d}_1 &= (1+\nu)d_1; \quad \bar{d}_2 = (1+\nu)(1-2\nu)d_2; \end{aligned} \quad (2.55)$$

где d_1, d_2 — константы интегрирования.

Далее предполагается, что $T_{in} = 0$ (температура на внутренней поверхности совпадает с отсчетной), тогда $\Delta T = T_{out}$. Определенный интеграл, входящий в решение (2.55), с учетом температурного распределения (2.54) запишется следующим образом

$$\int_{\delta}^{\beta}\beta T d\beta = \frac{(\beta^2 - 2\beta^2 \ln \beta - \delta^2)}{4 \ln \delta} \Delta T + \frac{\beta^2 \Delta T}{2}.$$

Константы d_1, d_2 вычисляются из граничных условий (2.52)

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{(1-2\nu)(3-2\nu-\delta^2)}{4d}\delta^2\Omega - \frac{\alpha\delta^2}{d \ln \delta}(1-\nu+(1-2\nu)\ln \delta)\Delta T; \\ d_2 &= \frac{(3-2\nu+(1-2\nu)\delta^4)}{8d}\Omega + \frac{(1-\delta^2+2\ln \delta)}{4d \ln \delta}\Delta T; \\ d &= (1-\nu)(1+(1-2\nu)\delta^2). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Найдем значение температурного градиента ΔT_p , соответствующее началу пластического течения, в отсутствии центробежных сил ($\Omega = 0$).

Во-первых, докажем, что $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$. Рассмотрим разность

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\frac{\alpha(\beta^2 - \delta^2 + \delta^2(1-2\nu)(\beta^2 - 2\ln\delta - 1))}{2\beta^2(1-\nu)(1+(1-2\nu)\delta^2)\ln\delta}\Delta T.$$

Эта величина положительна, поскольку

$$\beta^2 - 2\ln\delta - 1 \geq \delta^2 - \ln\delta^2 - 1 > 0.$$

Аналогичным образом можно доказать, что $\sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz}$, причем равенство достигается только на внутренней поверхности $\beta = \delta$. Из вышесказанного следует, что напряженное состояние в цилиндре удовлетворяет неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz}$. Теперь необходимо найти точку цилиндра, в которой разность $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ достигает наибольшего значения. Приравняем к нулю производную

$$\frac{\partial(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})}{\partial\beta} = \frac{(2\delta^2((1-\nu) + (1-2\nu)\ln\delta) + (1 + \delta^2(1-2\nu))\beta^2)}{2\beta^3(\nu-1)(1 + \delta^2(1-2\nu))\ln\delta}\alpha\Delta T = 0.$$

Приведенное выше уравнение имеет решение в точке

$$\beta^2 = -\frac{2\delta^2((1-\nu) + (1-2\nu)\ln\delta)}{1 + \delta^2(1-2\nu)}.$$

Нетрудно убедиться, что эта точка является точкой минимума функции $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$. Если указанная точка принадлежит отрезку $[\delta, 1]$, то тогда разность $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ достигает наибольшего значения на одной из боковых поверхностей цилиндра. В противном случае наибольшее значение — на внешней поверхности цилиндра. Рассмотрим значения $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ на боковых поверхностях и заметим, что

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})\Big|_{\beta=1} - (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})\Big|_{\beta=\delta} = -\alpha\frac{((1-\delta^2)(1-\nu) - 2(\nu + (1-2\nu)\delta^2)\ln\delta)}{2(1-\nu)(1 + \delta^2(1-2\nu))\ln\delta}\Delta T > 0,$$

откуда следует, что разность $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ имеет большее значение на поверхности $\beta = 1$. Таким образом, при воздействии только температурного градиента пластическое течение зарождается на внешней поверхности

цилиндра $\beta=1$, а соответствующее значение градиента ΔT_p можно найти из (2.55), (2.56) и записать следующим образом

$$\Delta T_p = \alpha \frac{2(1-\nu)(1+\delta^2(1-2\nu))\ln\delta}{(2(1-\nu+\delta^2(1-2\nu))\ln\delta - \nu(1-\delta^2))}. \quad (2.57)$$

Далее предполагается, что действия лишь температурного градиента недостаточно для начала течения, т.е. $\Delta T < \Delta T_p$.

Рассмотрим общий случай $\Omega > 0$. В упругом состоянии поле напряжений в цилиндре представляет собой сумму механических и температурных напряжений. В работе [25] показано, что в изотермическом случае цилиндр состоит из трех областей, напряжения в которых удовлетворяют следующим неравенствам (в порядке их расположения в цилиндре): $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz}$; $\sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{rr} \geq \sigma_{zz}$; $\sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. С другой стороны, выше было доказано, что температурные напряжения всегда удовлетворяют неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{zz}$. Очевидно, что при одновременном температурном и механическом воздействии цилиндр в общем случае также состоит из трех указанных выше областей, а с увеличением градиента температуры ΔT в цилиндре последовательно исчезают третья и вторая области. Поэтому условие пластичности Треска (2.51) может выполняться в одной из следующих форм: $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$, $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1$, $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$. Определение скорости Ω_p начала пластического течения и соответствующей радиальной координаты сводится к вычислению наибольшего значения каждой из перечисленных выше функций. К сожалению, строгое решение этой задачи является достаточно сложным и громоздким в силу большого количества параметров и необходимости решать трансцендентные уравнения. Разумеется, для известных значений параметров данная задача может быть решена численно.

Далее покажем, что при определенных условиях течение в цилиндре всегда начинается в соответствии с уравнением $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. Во-

первых, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})|_{\beta=\delta} - (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) = \\ & = \frac{(1-2\nu)(3-2\nu-\delta^2 - (1+(1-2\nu)\delta^2)\beta^2)}{4\beta^2(1-\nu)(1+(1-2\nu)\delta^2)}(\delta^2 + \beta^2)\Omega - \\ & - \frac{\alpha(\nu(\delta^2 + \beta^2) - \delta^2 + (1-2\nu)(\delta^2\beta^2 - (\delta^2 + \beta^2)\ln\delta))}{\beta^2(1-\nu)(1+(1-2\nu)\delta^2)\ln\delta}\Delta T. \end{aligned}$$

Предыдущее выражение положительно, следовательно, условие $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$ выполнится на внутренней поверхности раньше, чем где-либо в цилиндре выполнится условие $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$. Далее предположим, что на внутренней поверхности цилиндра $\beta = \delta$ выполнилось условие $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. Соответствующая скорость вращения равна

$$\begin{aligned} \Omega_* & = \frac{4(1-\nu)(1+(1-2\nu)\delta^2)}{(1-2\nu)S} - \frac{2\alpha(1-\delta^2+2\ln\delta)}{S\ln\delta}\Delta T, \\ S & = (1-\delta^2)(3-2\nu+(1-2\nu)\delta^2). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Заметим, что Ω_* убывает с увеличением температуры ΔT . Оценим сверху разность напряжений $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}$. Рассмотрим по отдельности механическую и температурную составляющие напряжений, для которых будем использовать верхние индексы « m » и « t » соответственно. В дальнейших рассуждениях используется ряд производных, вывод которых для краткости пропущен. Используя соотношения (2.55) и (2.56) нетрудно убедиться, что разность $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}$ возрастает с увеличением скорости вращения Ω , максимальное значение которой в свою очередь достигается при $\Delta T = 0$. Отсюда следует, что механические напряжения удовлетворяют неравенству

$$\sigma_{\theta\theta}^m - \sigma_{zz}^m \leq (\sigma_{\theta\theta}^m - \sigma_{zz}^m)|_{\Omega=\Omega_*, \Delta T=0} = \frac{(\beta^2 - \delta^2)(3-2\nu-\delta^2 - \beta^2(1+(1-2\nu)\delta^2))}{2\beta^2(1-\delta^2)(3-2\nu+(1-2\nu)\delta^2)}.$$

Далее, используя стандартные методы математического анализа, найдем наибольшее значение функции в правой части предыдущего

неравенства и получим оценку

$$\sigma_{\theta\theta}^m - \sigma_{zz}^m \leq \frac{(1 + (1 - 2\nu)\delta^2) \left(\delta - \sqrt{\frac{3 - 2\nu - \delta^2}{1 + (1 - 2\nu)\delta^2}} \right)^2}{2(1 - \delta^2)(3 - 2\nu + (1 - 2\nu)\delta^2)}. \quad (2.59)$$

Теперь рассмотрим температурную составляющую напряжений. Заметим, что разность $\sigma_{\theta\theta}^t - \sigma_{zz}^t$ растет с увеличением координаты β , следовательно справедливо следующее соотношение

$$\sigma_{\theta\theta}^t - \sigma_{zz}^t \leq (\sigma_{\theta\theta}^t - \sigma_{zz}^t)|_{\beta=1} = \alpha \Delta T \frac{(1 - \delta^2 + 2\ln\delta)}{2(1 + \delta^2(1 - 2\nu))\ln\delta}. \quad (2.60)$$

В итоге условие $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} < 1$ с помощью неравенств (2.59), (2.60) и выражения (2.57) для ΔT_p преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + (1 - 2\nu)\delta^2) \left(\delta - \sqrt{\frac{3 - 2\nu - \delta^2}{1 + (1 - 2\nu)\delta^2}} \right)^2}{2(1 - \delta^2)(3 - 2\nu + (1 - 2\nu)\delta^2)} + \\ & + \frac{(1 - \nu)(1 - \delta^2 + 2\ln\delta)}{(2(1 - \nu + (1 - 2\nu)\delta^2)\ln\delta - \nu(1 - \delta^2))} < 1. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Выполнение предыдущего неравенства гарантирует, что пластическое течение начнется в соответствии с условием $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. С помощью численных расчетов установлено, что при $\delta > 0.245$ неравенство (2.61) справедливо для любых $\nu > 0$ и $\Delta T < \Delta T_p$. Случай нарушения неравенства (2.61) подробно не рассматривается, но тестовые расчеты показали, что качественные отличия от описанных ниже результатов могут проявиться только при $\delta \approx 0$ и $\Delta T \approx \Delta T_p$.

2.3.3 Упругопластическое деформирование

В общем случае в цилиндре формируются 6 пластических областей, соответствующих разным граням и ребрам призмы Треска. На эволюцию пластического течения существенное влияние оказывают

геометрические и механические параметры, а также величина температурного градиента. Далее предполагается, что параметры ν и δ удовлетворяют неравенству (2.61), а значит, условие Треска впервые выполняется в форме $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. Для не слишком высоких значений ΔT пластическое течение начинается на внутренней поверхности цилиндра, а соответствующую скорость Ω_p можно вычислить с помощью (2.58). В результате на внутренней поверхности цилиндра зарождаются пластические области I и II, напряженное состояние в которых удовлетворяет неравенствам $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$ и $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$ соответственно. Разумеется, с увеличением скорости вращения размеры пластических областей увеличиваются, а границы между областями I и II, и между областью II и упругой областью движутся в сторону внешней поверхности цилиндра. Далее, если $\nu < \nu_{tr}$, то при $\Omega = \Omega_1$ на внешней поверхности цилиндра зарождается пластическая область VI, соответствующая грани $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$ поверхности Треска (2.51). После этого, при $\Omega = \Omega_2$ на упругопластической границе между областью II и упругой областью выполняется равенство $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$, в результате чего в указанной точке появляются пластические области III и IV, напряженное состояние в которых удовлетворяет неравенствам $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$ и $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$ соответственно. Наконец, при $\Omega = \Omega_{fp}$ упругая область между областями IV и VI исчезает, а на ее месте формируется пластическая область V, соответствующая ребру $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} = \sigma_{zz}$ поверхности текучести Треска (2.51). Если же $\nu > \nu_{tr}$, то сначала при $\Omega = \Omega_1$ появляются пластические области III и IV. Далее при $\Omega = \Omega_2$, для $\Delta T < \Delta T_{tr}$ на внешней поверхности цилиндра появляется пластическая область VI, а в случае $\Delta T \geq \Delta T_{tr}$ упругопластическая граница достигает внешней поверхности и весь цилиндр переходит в пластическое состояние. При скоростях выше Ω_{fp} цилиндр состоит из 6 пластических

областей, границы между которыми меняют свое положение, при этом увеличиваются области, соответствующие ребрам призмы Треска. В настоящей подразделе предполагается, что $\Omega \leq \Omega_{fp}$.

Рассмотрим коротко случай, когда $\Delta T \approx \Delta T_p$. Условие $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$ может впервые выполниться не на внутренней поверхности, а внутри цилиндра. Тогда скорость Ω_p и соответствующая координата могут быть найдены из численного решения оптимизационной задачи

$$\operatorname{argmin}_{\beta, \Omega} \Omega,$$

при ограничениях $\Omega > 0, \beta \geq \delta, \beta \leq 1, \sigma_{rr}(\beta) - \sigma_{zz}(\beta) = 1$.

В результате внутри цилиндра формируется пластическая область II, которая с каждой стороны окружена упругими областями (константы интегрирования, в которых, разумеется, различны). С увеличением скорости вращения условие пластичности $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$ выполняется на внутренней поверхности, в результате чего в цилиндре появляются области I и II* (в этой области справедливы те же уравнения, что и в появившейся ранее области II, но константы интегрирования имеют другое значение). При определенной скорости вращения упругая область между областями II* и II исчезает, и указанные области сливаются в одну. В результате остаются пластические области I, II и упругая область, а дальнейшая эволюция течения следует рассмотренным выше закономерностям.

Далее найдем решение определяющей системы уравнений для каждой из пластических областей. Для констант интегрирования введены обозначения c_1, c_2, \dots, c_{12} . Решение (2.55) остается справедливым в упругой области, но константы d_1, d_2 необходимо определять отдельно для каждой стадии упругопластического деформирования. Пластическая область I соответствует ребру призмы Треска, в котором справедливо неравенство $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$, тогда условие пластичности (2.51) примет вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из предыдущих соотношений с помощью (2.16) и (2.18) получим $\varepsilon_{rr}^p = -(\varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{zz}^p)$, $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{rr}^p$. Далее используя закон Гука (2.50) и условие пластической несжимаемости, преобразуем условие пластичности к системе

$$\begin{aligned}(1 + H + H\nu)\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\theta\theta}^p &= \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta} - (1 + \nu); \\ (2 + H + H\nu)\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p &= \varepsilon_{rr} - (1 + \nu);\end{aligned}$$

решая которую найдем компоненты пластических деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^p &= \frac{2}{g_1}\varepsilon_{rr} - \frac{1}{g_1}\varepsilon_{\theta\theta} - \frac{2(1+\nu)}{g_1}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^p &= -\frac{1}{g_1}\varepsilon_{rr} + \frac{g_1+1}{2g_1}\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{1+\nu}{g_1},\end{aligned}$$

где $g_1 = 3 + 2(1 + \nu)H$. С учетом последних соотношений из закона Гука (2.50) найдем распределение напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{(1 + 2(1 - \nu)H)}{(1 - 2\nu)g_1}\varepsilon_{rr} + \frac{(1 + 2\nu H)}{(1 - 2\nu)g_1}\varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\alpha T}{1 - 2\nu} + \frac{2}{g_1}; \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} &= \frac{(1 + 2\nu H)}{(1 - 2\nu)g_1}\varepsilon_{rr} + \frac{(1 + H)}{(1 - 2\nu)g_1}\varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\alpha T}{1 - 2\nu} - \frac{1}{g_1}.\end{aligned}$$

Далее преобразуем уравнение равновесия (2.7) с учетом полученных выше формул для напряжений к виду

$$\begin{aligned}u'' + u'\beta^{-1} - k_1 u \beta^{-2} &= -3h_1 \beta^{-1} - h_1 g_1 \Omega \beta + \frac{\alpha}{(1 - 2\nu)} h_1 g_1 T, \\ k_1 &= \frac{1 + H}{(1 + 2(1 - \nu)H)}; h_1 = \frac{(1 - 2\nu)}{(1 + 2(1 - \nu)H)}.\end{aligned}$$

решение этого уравнения с учетом (2.54) запишется следующим образом

$$\begin{aligned}u &= c_1 \beta^{-\sqrt{k_1}} + c_2 \beta^{\sqrt{k_1}} - 3H^{-1} \beta - m_1 \Omega \beta^3 - n_1 \Delta T \beta, \\ m_1 &= \frac{(1 - 2\nu)}{8 + (17 - 18\nu)H} g_1; n_1 = \frac{\alpha}{H(1 - 2\nu) \ln \delta} g_1.\end{aligned}$$

Рассмотрим пластическую область II, в которой напряженное состояние удовлетворяет неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$, а условие Треска (2.51) выполняется в следующем виде

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из предыдущего условия вместе с (2.15), (2.18) следует, что $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{rr}^p$, $\varepsilon_{zz}^p = -\varepsilon_{rr}^p$, $\varepsilon_{\theta\theta}^p = 0$. Далее закон Гука (2.50) примет вид

$$\sigma_{rr} = \frac{(1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} - (1-2\nu)\varepsilon_{eq}^p - (1+\nu)\alpha T}{(1+\nu)(1-2\nu)};$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\nu\varepsilon_{rr} + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)\alpha T}{(1+\nu)(1-2\nu)};$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + \varepsilon_{eq}^p - \alpha T.$$

С помощью полученных соотношений преобразуем условие пластичности и представим пластическую деформацию в виде

$$\varepsilon_{eq}^p = \frac{\varepsilon_{rr} - (1+\nu)}{2 + (1+\nu)H}. \text{ Уравнение равновесия (2.7) с учетом закона Гука и}$$

предыдущего соотношения запишется следующим образом

$$u'' + u'\beta^{-1} - k_2 u \beta^{-2} = -h_2 \beta^{-1} - h_2 g_2 \Omega \beta + \alpha \frac{h_2 g_2}{(1-2\nu)} T',$$

$$k_2 = \frac{(1-\nu)g_2}{(1+(1-\nu^2)H)}; \quad h_2 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1+(1-\nu^2)H)}; \quad g_2 = 2 + (1+\nu)H.$$

Используя (2.54), найдем решение приведенного выше уравнения

$$u = c_3 \beta^{-\sqrt{k_2}} + c_4 \beta^{\sqrt{k_2}} + (1+\nu)\beta - m_2 \Omega \beta^3 + n_2 \Delta T \beta.$$

$$m_2 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)g_2}{7 + 2\nu + 8(1-\nu^2)H}; \quad n_2 = \alpha \frac{(1+\nu)g_2}{(1-2\nu)\ln\delta}.$$

В пластической области III справедливо неравенство $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$.

Условие пластичности Треска (2.51) запишется в виде

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из предыдущих соотношений с помощью (2.16) и (2.18) получим $\varepsilon_{zz}^p = -(\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p)$, $\varepsilon_{eq}^p = -\varepsilon_{zz}^p$. Поскольку $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$, то уравнение равновесия (2.7) легко интегрируется, в результате чего найдем

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = c_6 - \Omega \beta^2 / 2; \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 1 + H\varepsilon_{zz}^p.$$

Далее преобразуем закон Гука (2.50) с помощью предыдущих соотношений для напряженного состояния

$$\varepsilon_{zz}^p = 2(1+\nu)\sigma_{rr} - \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{rr} - \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{\theta\theta} + 2\alpha\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)},$$

$$\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\left((1-2\nu)(1-(3+2H(1+\nu))\sigma_{rr}) - \alpha(3+2H(1+\nu))T\right)}{(1+H)}.$$

Используя (2.3) и (2.54), найдем решение второго из представленных выше уравнений относительно неизвестного перемещения в виде

$$u = \frac{c_5}{\beta} + \bar{c}_6\beta - \frac{(1-2\nu)}{8(1+H)}g_3\Omega\beta^3 + \frac{\alpha}{4(1+H)\ln\delta}g_3\Delta T(1-2\ln\beta)\beta;$$

$$\bar{c}_6 = \frac{(1-2\nu)}{2(1+H)}\left(g_3\left(c_6 + \frac{\alpha\Delta T}{(1-2\nu)}\right) - 1\right); \quad g_3 = 3+2H(1+\nu).$$

Оставшиеся компоненты пластических деформаций определяются из разделения (2.49) и закона, обратного к закону Гука (2.50):

$$\varepsilon_{rr}^p = \varepsilon_{rr} - (1-2\nu)\sigma_{rr} + \nu(H\varepsilon_{zz}^p - 1) - \alpha T;$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\theta\theta} - (1-2\nu)\sigma_{rr} + \nu(H\varepsilon_{zz}^p - 1) - \alpha T.$$

Напряженное состояние в пластической области IV соответствует грани призмы Треска $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$, следовательно условие пластичности (2.51) примет вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p,$$

Из (2.15) и (2.18) следует $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p$, $\varepsilon_{zz}^p = -\varepsilon_{\theta\theta}^p$, $\varepsilon_{rr}^p = 0$. Далее закон Гука (2.50) с учетом предыдущих соотношений преобразуется к виду

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)\alpha T\right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\varepsilon_{rr} + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} - (1-2\nu)\varepsilon_{eq}^p - (1+\nu)\alpha T\right);$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + \varepsilon_{eq}^p - \alpha T.$$

Из полученных выше соотношений и условия пластичности найдем

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{\varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)}{2 + (1+\nu)H}.$$

Используя закон Гука (2.50) и последнее выражение, преобразуем уравнение равновесия (2.7) к следующей форме

$$u'' + u'\beta^{-1} - k_4 u \beta^{-2} = \frac{h_4}{g_4} \beta^{-1} - h_4 \Omega \beta + \alpha \frac{h_4}{(1-2\nu)} T;$$

$$k_4 = \frac{1 + (1-\nu^2)H}{(1-\nu)g_4}, \quad h_4 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}, \quad g_4 = 2 + (1+\nu)H.$$

Решение предыдущего уравнения с учетом (2.54) запишется в виде

$$u = c_7 \beta^{-\sqrt{k_4}} + c_8 \beta^{\sqrt{k_4}} + (1+\nu)\beta - m_4 \Omega \beta^3 - n_4 \Delta T \beta.$$

$$m_4 = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{17-18\nu+8H(1-\nu^2)} g_4; \quad n_4 = \frac{\alpha(1+\nu)}{(1-2\nu)\ln\delta} g_4.$$

Пластическая область V соответствует ребру призмы Треска, напряженное состояние в котором удовлетворяет неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} = \sigma_{zz}$.

Условие пластичности примет вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p.$$

Из предыдущих соотношений с помощью (2.16) и (2.18) получим $\varepsilon_{\theta\theta}^p = -(\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{zz}^p)$, $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p$. По аналогии с пластической областью I получим систему линейных уравнений относительно пластических деформаций

$$-\varepsilon_{rr}^p + (1 + H + H\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^p = -\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu);$$

$$\varepsilon_{rr}^p + (2 + H + H\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu).$$

решение которой имеет вид

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{g_5 + 1}{2g_5} \varepsilon_{rr} - \frac{1}{g_5} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{1+\nu}{g_5};$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = -\frac{1}{g_5} \varepsilon_{rr} + \frac{2}{g_5} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{2(1+\nu)}{g_5},$$

где $g_5 = 3 + 2(1+\nu)H$. Используя предыдущие выражения, преобразуем закон Гука (2.50) к виду

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \frac{(1+H)}{(1-2\nu)g_5} \varepsilon_{rr} + \frac{(1+2\nu H)}{(1-2\nu)g_5} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\alpha T}{1-2\nu} - \frac{1}{g_5};$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(1+2\nu H)}{(1-2\nu)g_5} \varepsilon_{rr} + \frac{(1+2(1-\nu)H)}{(1-2\nu)g_5} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\alpha T}{1-2\nu} + \frac{2}{g_5}.$$

Далее уравнение равновесия (2.7) с учетом приведенных выше соотношений запишется следующим образом

$$u'' + u' \beta^{-1} - k_5 u \beta^{-2} = 3h_5 \beta^{-1} - h_5 g_5 \Omega \beta + \frac{\alpha h_5 g_5}{(1-2\nu)} T;$$

$$k_5 = \frac{1+2(1-\nu)H}{1+H}; \quad h_5 = \frac{(1-2\nu)}{(1+H)};$$

а его решение с учетом температурного распределения (2.54) примет вид

$$u = c_9 \beta^{-\sqrt{k_5}} + c_{10} \beta^{\sqrt{k_5}} - 3H^{-1} \beta - m_5 \Omega \beta^3 + n_5 \Delta T \beta;$$

$$m_5 = \frac{(1-2\nu)g_5}{8+(7+2\nu)H}; \quad n_5 = \frac{\alpha g_5}{H(1-2\nu) \ln \delta}.$$

В пластической области VI напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$, следовательно условие Треска примет вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1 + H \varepsilon_{eq}^p,$$

Из приведенного выше уравнения вместе с (2.15) и (2.18) следует, что $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p$, $\varepsilon_{\theta\theta}^p = -\varepsilon_{rr}^p$, $\varepsilon_{zz}^p = 0$. Отсюда закон Гука (2.55) можно преобразовать к представленной ниже форме

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu) \varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta} - (1-2\nu) \varepsilon_{eq}^p - (1+\nu) \alpha T \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu \varepsilon_{rr} + (1-\nu) \varepsilon_{\theta\theta} + (1-2\nu) \varepsilon_{eq}^p - (1+\nu) \alpha T \right);$$

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \alpha T.$$

Из полученных выше соотношений и условия пластичности найдем

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{-\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)}{(2+H+H\nu)}.$$

Используя закон Гука и выражение для пластической деформации,

преобразуем уравнение равновесия (2.7) к виду

$$u'' + u'\beta^{-1} - u\beta^{-2} = 2h_6\beta^{-1} - h_6 g_6 \Omega\beta + \alpha \frac{h_6 g_6}{(1-2\nu)} T,$$

$$h_6 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1+(1-\nu^2)H)}; \quad g_6 = 2 + H + H\nu.$$

Решение этого уравнения с учетом (2.54) запишется как

$$u = c_{11}\beta^{-1} + c_{12}\beta + h_6\beta \ln\beta - m_6\Omega\beta^3 + n_6\Delta T(1-2\ln\beta)\beta,$$

$$m_6 = \frac{h_6 g_6}{8}; \quad n_6 = \frac{\alpha(1+\nu)g_6}{4(1+H(1-\nu^2))\ln\delta}.$$

Процесс упругопластического деформирования разделяется на два или три интервала в каждом из которых цилиндр состоит из нескольких пластических и упругой области. Завершающим шагом решения является вычисление неизвестных констант интегрирования и координат границ между областями. С этой целью для каждого интервала формулируется система уравнений, состоящая из граничных условий задачи (2.52), а также трех условий непрерывности на каждой границе. Такая система является линейной относительно констант интегрирования и нелинейной относительно координат между областями. Часть уравнений системы решается в символьном виде относительно констант интегрирования. Данный шаг может занимать длительное время, однако его достаточно выполнить лишь один раз. Далее полученные выражения вместе с параметрами задачи подставляются в оставшиеся уравнения системы, которые решаются численно относительно неизвестных координат границ. Эту процедуру удобно выполнять в системах компьютерной алгебры.

Рассмотрим первый интервал $\Omega_p \leq \Omega \leq \Omega_1$. Неизвестными величинами являются константы интегрирования c_1, c_2, c_3, c_4 в пластических областях I и II, d_1, d_2 в упругой области, а также координаты β_1 и β_2 границ между областями. Выражения для констант интегрирования можно получить из решения следующей системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} u'(\delta) &= 0; \quad u'(\beta_1) = u''(\beta_1); \quad \sigma_{rr}'(\beta_1) = \sigma_{rr}''(\beta_1); \\ p_{rr}''(\beta_2) &= 0; \quad \sigma_{rr}^{El}(\beta_2) - \sigma_{zz}^{El}(\beta_2) = 1; \quad \sigma_{rr}^{El}(1) = 0; \end{aligned} \quad (2.62)$$

здесь верхний индекс обозначает область, индекс «El» соответствует упругой области. Координаты β_1 и β_2 определяются численно из приведенной ниже системы (2.63) нелинейных уравнений с учетом решения системы (2.62), численных значений параметров задачи δ , ν , H , α , ΔT и выбранного значения скорости вращения Ω .

$$\sigma_{zz}'(\beta_1) = \sigma_{zz}''(\beta_1); \quad u''(\beta_2) = u^{El}(\beta_2). \quad (2.63)$$

Нетрудно убедиться в том, что уравнения (2.62) и (2.63) обеспечивают выполнение граничных условий, а также непрерывность всех искомых функций. Переходное значение коэффициента Пуассона ν_{tr} вычисляется с помощью уравнений (2.63) вместе с условиями

$$\sigma_{rr}''(\beta_2) = \sigma_{\theta\theta}''(\beta_2); \quad \sigma_{\theta\theta}^{El}(1) - \sigma_{rr}^{El}(1) = 1. \quad (2.64)$$

В полученной расширенной системе уравнений неизвестными являются β_1 , β_2 , ν_{tr} , Ω . Для вычисления скорости Ω_1 к уравнениям (2.63) добавляется одно из уравнений (2.64) в зависимости от выполнения неравенства $\nu < \nu_{tr}$. Значение ν_{tr} зависит от параметров δ , H , α , ΔT .

На интервале $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$ цилиндр может состоять из трех или четырех пластических областей. В первом случае неизвестные константы интегрирования определяются из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} u'(\delta) &= 0; \quad u'(\beta_1) = u''(\beta_1); \quad \sigma_{rr}'(\beta_1) = \sigma_{rr}''(\beta_1); \\ p_{rr}''(\beta_2) &= 0; \quad \sigma_{rr}^{El}(\beta_2) - \sigma_{zz}^{El}(\beta_2) = 1; \\ \sigma_{\theta\theta}^{El}(\beta_3) - \sigma_{rr}^{El}(\beta_3) &= 1; \quad p_{\theta\theta}^{VI}(\beta_3) = 0; \quad \sigma_{rr}^{VI}(1) = 0; \end{aligned}$$

В свою очередь для вычисления границ используются уравнения

$$\sigma_{zz}'(\beta_1) = \sigma_{zz}''(\beta_1); \quad u''(\beta_2) = u^{El}(\beta_2); \quad u^{El}(\beta_3) = u^{VI}(\beta_3). \quad (2.65)$$

Для определения переходной скорости Ω_2 уравнения (2.65) дополняются первым из условий (2.64). Если $\nu < \nu_{tr}$, то на втором интервале цилиндр состоит из четырех пластических областей. Константы

интегрирования вычисляются из следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} u^I(\delta) &= 0; \quad u^I(\beta_1) = u^{II}(\beta_1); \quad \sigma_{rr}^I(\beta_1) = \sigma_{rr}^{II}(\beta_1); \\ u^{II}(\beta_2) &= u^{III}(\beta_2); \quad \sigma_{rr}^{II}(\beta_2) = \sigma_{rr}^{III}(\beta_2); \\ \sigma_{rr}^{III}(\beta_3) &= \sigma_{rr}^{IV}(\beta_3); \quad \sigma_{zz}^{III}(\beta_3) = \sigma_{zz}^{IV}(\beta_3); \\ \sigma_{rr}^{IV}(\beta_4) &= \sigma_{rr}^{El}(\beta_4); \quad \sigma_{\theta\theta}^{El}(\beta_4) - \sigma_{zz}^{El}(\beta_4) = 1; \quad \sigma_{rr}^{El}(1) = 0. \end{aligned}$$

Координаты границ определяются численно с помощью системы

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^I(\beta_1) &= \sigma_{zz}^{II}(\beta_1); \quad \sigma_{zz}^{II}(\beta_2) = \sigma_{zz}^{III}(\beta_2); \\ u^{III}(\beta_3) &= u^{IV}(\beta_3); \quad u^{IV}(\beta_4) = u^{El}(\beta_4). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Если $\Delta T = \Delta T_{tr}$, то пластическая область VI зарождается на внешней поверхности цилиндра в момент $\Omega = \Omega_{fp}$ перехода в состояние полной пластичности. Таким образом, для вычисления ΔT_{tr} дополним систему (2.66) следующими условиями

$$\beta_4 = 1; \quad \sigma_{\theta\theta}^{El}(1) - \sigma_{rr}^{El}(1) = 1. \quad (2.67)$$

Заметим, что константы интегрирования в упругой области с учетом условия $\beta_4 = 1$ примут вид

$$d_1 = \frac{(4 - (1 - 2\nu)\Omega) \ln \delta - 2\alpha(1 + 2\ln \delta) \Delta T_{tr}}{4(1 - \nu) \ln \delta}; \quad d_2 = \frac{2 + \Omega}{4 - 4\nu}.$$

Второе из условий (2.67) преобразуется следующим образом

$$d_1 + \frac{(1 - 2\nu)\Omega \ln \delta + 2\alpha \Delta T_{tr}}{4(1 - \nu) \ln \delta} = 1.$$

Из двух последних соотношений нетрудно найти переходное значение градиента температуры

$$\Delta T_{tr} = \nu / \alpha.$$

Если $\Delta T < \Delta T_{tr}$, то для вычисления Ω_2 система уравнений (2.66) дополняется вторым условием (2.67). В противном случае система уравнений (2.66) решается совместно с первым из уравнений (2.67) для определения Ω_{fp} . На третьем интервале $\Omega_2 \leq \Omega \leq \Omega_{fp}$ цилиндр состоит из 5 пластических областей. Необходимые системы уравнений на этом

интервале формулируются аналогичным образом, а дополнительное условие для вычисления Ω_{fp} имеет вид $\beta_4 = \beta_5$.

2.3.4 Пример решения

В качестве примера рассмотрим цилиндр, геометрический параметр которого равен $\delta = 0.25$. В качестве отсчетной температуры принято $T_0 = 300 \text{ K}$. Цилиндр изготовлен из алюминиевого сплава со следующими значениями параметров $E = 66 \text{ ГПа}$, $\sigma_0 = 237 \text{ МПа}$, $H = 6.195 \text{ ГПа}$, $\alpha = 2.32 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\nu = 0.33$ [136]. Соответствующие безразмерные величины примут значения $\bar{N} = 0.094$, $\bar{\alpha} = 1.938$. Отсюда максимальное значение температурного градиента $\Delta T_p = 0.4388$, а переходное значение температурного градиента $\Delta T_{tr} = 0.1703$. Также отметим, что неравенство (2.61) выполняется.

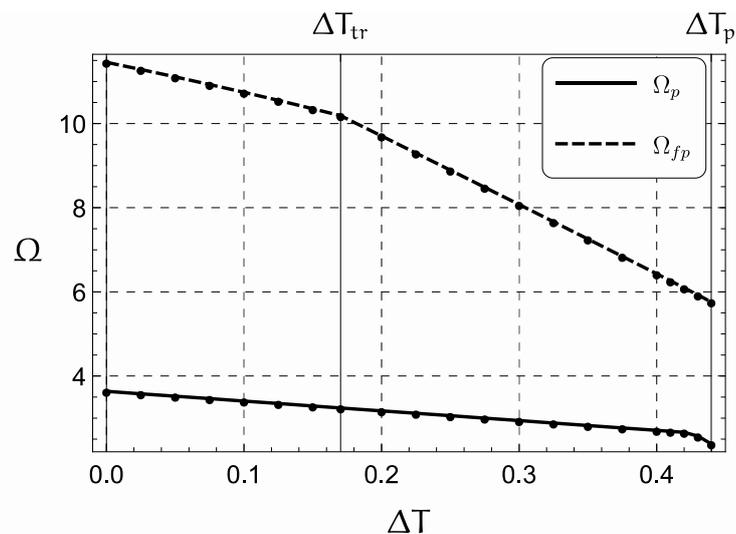


Рис. 2.21 — Скорости начала пластического течения Ω_p и полного перехода в состояние пластичности Ω_{fp} в зависимости от температурного градиента ΔT .

Численные зависимости скоростей вращения Ω_p и Ω_{fp} от градиента температуры ΔT представлены на рис. 2.21. Видно, что и Ω_p и Ω_{fp} снижаются с увеличением ΔT от 0 до ΔT_p на 34% и 50% соответственно. Следует отметить, что в полom вращающемся цилиндре, боковые поверхности которого свободны от напряжений, наличие положительного

температурного градиента также приводит к снижению Ω_p , однако умеренные значения градиента ΔT могут вызвать даже небольшое увеличение критической скорости Ω_{fp} [97]. Скорость начала пластического течения (рис. 2.21) следует линейной аналитической зависимости (2.58) практически для всех значений ΔT , лишь для $\Delta T \approx \Delta T_p$ у графика Ω_p появляется небольшой нелинейный участок. Зависимость $\Omega_{fp}(\Delta T)$ состоит из двух практически линейных участков, а для $\Delta T > \Delta T_{tr}$ скорость падения Ω_{fp} увеличивается. Интересно отметить, что для $\Delta T \approx \Delta T_p$ во всем цилиндре еще до начала пластического течения реализуется напряженное состояние близкое к условию пластичности $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$, откуда можно ожидать, что скорости Ω_p и Ω_{fp} будут практически равны. Однако, как показали расчеты, при таких условиях цилиндр способен выдерживать значительные скорости до полного перехода в пластическое состояние и в нем также появляются пластические области III и IV.

Перейдем к анализу напряженно-деформированного состояния. Не будем подробно останавливаться на каждой стадии процесса упругопластического деформирования. Рассмотрим влияние температурного градиента на распределение и величину напряжений и пластических деформаций в цилиндре. Для сравнения используются следующие значения температурного градиента $\Delta T = 0.0$ (изотермический случай), $\Delta T = 0.2$, $\Delta T = 0.4$. На рис. 2.22 представлено распределение напряжений в цилиндре при скорости $\Omega = 2.709$. Данное значение скорости соответствует началу пластического течения в цилиндре при температурном градиенте $\Delta T = 0.4$. Разумеется, для значений градиента $\Delta T = 0.0$ и $\Delta T = 0.2$ цилиндр при такой скорости еще находится в упругом состоянии. Из рис. 2.22 видно, что наличие температурного градиента приводит к значительному повышению абсолютной величины напряжений во вращающемся цилиндре. Помимо этого происходит и качественное

изменение напряженного состояния, в частности, при больших значениях градиента ΔT и скоростях близких к Ω_p в цилиндре реализуется неравенство $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$, однако при дальнейшем увеличении скорости вращения вблизи внешней поверхности появится область где $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$.

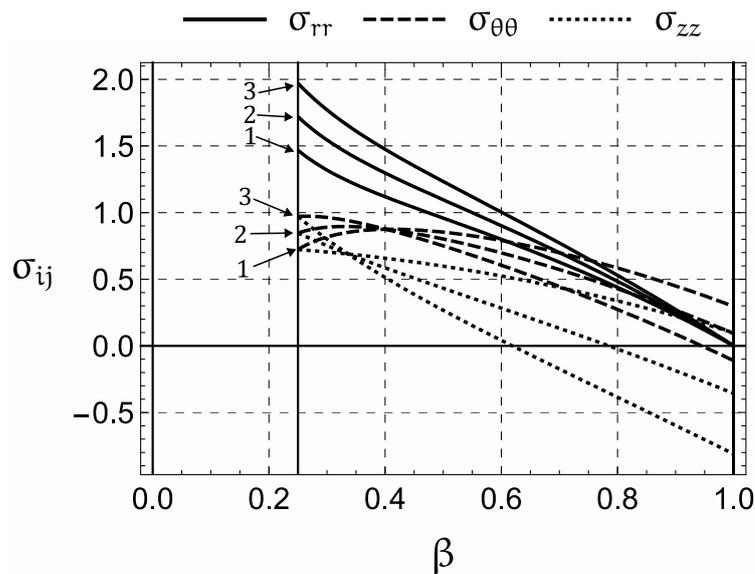


Рис. 2.22 — Распределение упругих напряжений в цилиндре при $\Omega=2.709$ для различных значений градиента температуры: 1) $\Delta T=0.0$; 2) $\Delta T=0.2$; 3) $\Delta T=0.4$.

На рис. 2.23 представлено распределение напряжений и пластических деформаций в цилиндре при скорости $\Omega=6.428$. Выбранное значение скорости соответствует полному переходу цилиндра в пластическое состояние для значения градиента $\Delta T=0.4$. При $\Delta T=0.0$ и $\Delta T=0.2$ и указанном значении скорости в цилиндре еще присутствует область чисто упругого деформирования. Сравнивая рис. 2.22 и 2.23 отметим, что с ростом скорости вращения напряжения в цилиндре, разумеется, также возрастают. Из рис. 2.23 видим, что температурный градиент значительно ускоряет распространения пластического течения. Кроме того, как и в чисто упругом состоянии, абсолютная величина напряжений и пластических деформаций существенно возрастает с увеличением температурного градиента. Для достаточно больших значений температурного

градиента и скоростей вращения вблизи внешней поверхности цилиндра появляется область отрицательных осевых напряжений. В то время как в изотермическом случае все напряжения остаются положительными.

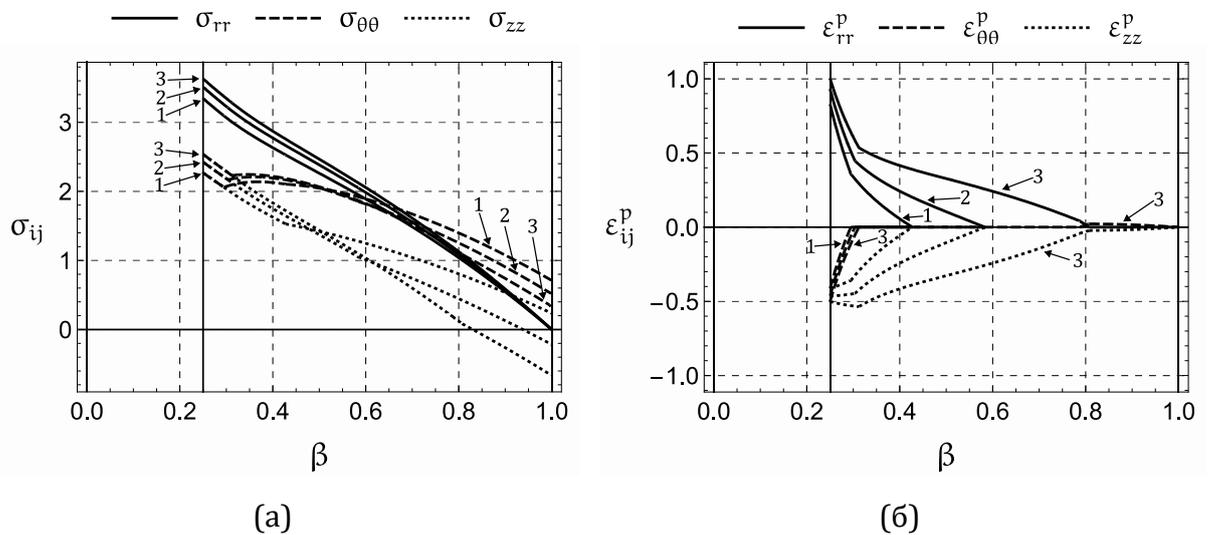


Рис. 2.23 — Распределение напряжений (а) и пластических деформаций (б) при $\Omega = 6.428$ для различных значений градиента температуры: 1) $\Delta T = 0.0$; 2) $\Delta T = 0.2$; 3) $\Delta T = 0.4$.

В данном разделе получено точное решение задачи об упругопластическом деформировании вращающегося цилиндра с жестким включением при наличии температурного градиента между внутренней и внешней поверхностями. Установлено, что температурный градиент приводит к значительному снижению скорости начала пластического течения, а само течение может возникнуть внутри цилиндра, а не на внутренней боковой поверхности, как и в изотермическом случае. Скорость вращения, соответствующая полному переходу цилиндра в пластическое состояние, также снижается с увеличением температурного градиента.

2.4. Ротационное автофретирование полых цилиндров из нелинейно-упрочняющегося материала

2.4.1 Постановка задачи

Рассмотрим полый цилиндр, вращающийся вокруг собственной оси. Скорость вращения цилиндра ω медленно возрастает со временем,

вследствие чего угловое ускорение можно считать пренебрежимо малым. Предполагается, что цилиндр находится в состоянии плоской деформации ($\varepsilon_{zz} = 0$) и сохраняет осевую симметрию в ходе деформирования. При таких кинематических ограничениях единственным ненулевым перемещением в цилиндре является радиальное перемещение u_r , а сдвиговые деформации и касательные напряжения равны нулю. В данном разделе используется следующая система безразмерных величин:

$$\begin{aligned} \delta = \frac{r_{in}}{r_{out}}, \beta = \frac{r}{r_{out}}, \bar{u} = \frac{E}{\sigma_0} \frac{u_r}{r_{out}}, \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}^e, \bar{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}^p, \\ \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}, \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_0}, H = K \left(\frac{\sigma_0}{E} \right)^n, \Omega = \frac{\rho r_{out}^2}{\sigma_0} \omega^2, \end{aligned} \quad (2.68)$$

где K, n — параметры, характеризующие упрочнение материала. Безразмерные величины (2.68) в целом аналогичны системе величин (2.2) за исключением параметра упрочнения H .

Постановка задачи в данном разделе включает в себя кинематические соотношения (2.3), уравнение равновесия (2.7) в радиальном направлении, закон Гука (2.5).

В качестве условия пластичности используется условие Треска:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y, \quad (2.69)$$

где σ_{eq} — эквивалентное напряжение, σ_1, σ_3 — наибольшее и наименьшее главное напряжение. Пластические деформации вычисляются по ассоциированному закону течения (2.15). Предел текучести определяется степенным законом упрочнения (законом Людвики):

$$\sigma_y = 1 + H \varepsilon_{eq}^n, \quad (2.70)$$

где ε_{eq} — эквивалентная пластическая деформация.

Предполагается, что боковые поверхности цилиндра свободны от нагрузок. В этом случае граничные условия задачи имеют вид:

$$\sigma_{rr}(\delta) = 0, \sigma_{rr}(1) = 0. \quad (2.71)$$

Условие пластичности (2.69) впервые выполняется на внутренней поверхности цилиндра при скорости вращения $\Omega = \Omega_p$. С последующим увеличением скорости вращения упругопластическая граница $\beta = \beta_{ep}$ движется в сторону внешней поверхности цилиндра. При $\Omega = \Omega_{fp}$ цилиндр полностью переходит в состояние пластичности. Данный анализ ограничен диапазоном скоростей $\Omega_p \leq \Omega \leq \Omega_{fp}$, на котором цилиндр состоит из пластической ($\beta \in [\delta, \beta_{ep}]$) и упругой ($\beta \in [\beta_{ep}, 1]$) областей. Далее рассмотрим решение определяющей системы в каждой из областей.

2.4.2 Упругопластическое решение

Для обозначения упругой и пластической области используются верхние индексы «*el*» и «*pl*» соответственно. Предположим, что напряжения в пластической области удовлетворяют неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. В этом случае условие пластичности Треска (2.69) выполняется в форме:

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_y. \quad (2.72)$$

Распределение перемещений и напряжений в области упругого деформирования ($\beta \in [\beta_{ep}, 1]$) имеет вид:

$$u^{el} = \frac{(1+\nu)d_1}{2\beta} + (1+\nu)(1-2\nu)d_2\beta - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega\beta^3, \quad (2.73)$$

$$\sigma_{rr}^{el} = -\frac{d_1}{2\beta^2} + d_2 - \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega\beta^2, \quad \sigma_{\theta\theta}^{el} = \frac{d_1}{2\beta^2} + d_2 - \frac{(1+2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega\beta^2,$$

где d_1, d_2 — константы интегрирования.

Скорость, соответствующая началу пластического течения, является функцией параметров ν и δ [55, 56, 69]:

$$\Omega_p = \frac{4(1-\nu)}{3-2\nu+(1-2\nu)\delta^2}. \quad (2.74)$$

Константы интегрирования d_1, d_2 определяются из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta}^{el}(\beta_{ep}) - \sigma_{rr}^{el}(\beta_{ep}) = 1, \\ \sigma_{rr}^{el}(1) = 0. \end{cases}$$

Смысл первого условия заключается в том, что на упругопластической границе должно выполняться условие пластичности. Решение вышеприведенной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} d_1 &= \beta_{ep}^2 - \frac{(1-2\nu)}{4(1-\nu)} \Omega \beta_{ep}^4, \\ d_2 &= \frac{1}{2} \beta_{ep}^2 - \frac{(1-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega \beta_{ep}^4 + \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Из ассоциированного закона пластического течения (2.15) и условия (2.72) следует, что

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_{\theta\theta}^p = -\varepsilon_{rr}^p, \quad \varepsilon_{zz}^p = 0.$$

Тогда с учетом кинематических соотношений (2.3) напряжения в пластической области цилиндра примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} + (1-2\nu)\varepsilon_{eq} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\varepsilon_{rr} + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} - (1-2\nu)\varepsilon_{eq} \right), \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}). \end{aligned}$$

С учетом последних соотношений уравнение равновесия (2.7) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{u}{\beta^2} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega \beta - \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left(2 \frac{\varepsilon_{eq}}{\beta} + \frac{d\varepsilon_{eq}}{d\beta} \right). \quad (2.76)$$

Решение предыдущего уравнения должно удовлетворять граничным условиям вида

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{pl}(\delta) = 0, \\ \varepsilon_{eq}(\beta_{ep}) = 0. \end{cases} \quad (2.77)$$

Решение уравнения (2.76) с учетом (2.77) запишется как

$$\begin{aligned}
u^{pl} &= \frac{(1+\nu)c_1}{2\beta} + (1+\nu)(1-2\nu)c_2\beta - \\
&\quad - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^3 - \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\beta \int_{\delta}^{\beta} \frac{\varepsilon_{eq}}{\beta} d\beta, \\
\sigma_{rr}^{pl} &= -\frac{c_1}{2\beta^2} + c_2 - \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^2 - \frac{1}{1-\nu^2} \int_{\delta}^{\beta} \frac{\varepsilon_{eq}}{\beta} d\beta, \\
\sigma_{\theta\theta}^{pl} &= \frac{c_1}{2\beta^2} + c_2 - \frac{(1+2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^2 - \frac{1}{1-\nu^2} \left(\int_{\delta}^{\beta} \frac{\varepsilon_{eq}}{\beta} d\beta - \varepsilon_{eq} \right), \\
c_1 &= \beta_{ep}^2 - \frac{(1-2\nu)}{4(1-\nu)}\Omega\beta_{ep}^4, \quad c_2 = \frac{\beta_{ep}^2}{2\delta^2} - \frac{(1-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega \frac{\beta_{ep}^4}{\delta^2} + \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\delta^2.
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Координата упругопластической границы определяется из условия

$$u^{el}(\beta_{ep}) = u^{pl}(\beta_{ep}),$$

которое после преобразований с учетом (2.73), (2.75) и (2.78) примет вид:

$$\begin{aligned}
&(1-2\nu)\Omega\beta_{ep}^4 - 4(1-\nu)\beta_{ep}^2 + \\
&+ \frac{8\delta^2}{(1-\delta^2)(1+\nu)} \int_{\delta}^{\beta_{ep}} \frac{\varepsilon_{eq}}{\beta} d\beta + (3-2\nu)\Omega\delta^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Вышеприведенное уравнение нелинейно относительно β_{ep} и его решение для выбранных значений параметров задачи и скорости вращения ($\Omega > \Omega_p$) производится методом Ньютона. При полном переходе цилиндра в состояние пластичности выполняется условие $\beta_{ep} = 1$, а уравнение (2.79) запишется следующим образом:

$$((1-2\nu) + (3-2\nu)\delta^2)\Omega_{fp} + \frac{8\delta^2}{(1-\delta^2)(1+\nu)} \int_{\delta}^1 \frac{\varepsilon_{eq}}{\beta} d\beta - 4(1-\nu) = 0. \tag{2.80}$$

Уравнение (2.80) имеет аналитическое решение для линейно-упрочняемого материала ($n=1$). Если же $n \neq 1$, то уравнение (2.80) является нелинейным относительно Ω_{fp} и его решение может быть найдено с помощью метода Ньютона. Доказательство того, что выполнение системы условий $u^{el}(\beta_{ep}) = u^{pl}(\beta_{ep}), \varepsilon_{eq}(\beta_{ep}) = 0, \sigma_{\theta\theta}^{el}(\beta_{ep}) - \sigma_{rr}^{el}(\beta_{ep}) = 1$

обеспечивает непрерывность найденного решения на упругопластической границе, не составляет труда.

Следует отметить, что полученное решение (2.73), (2.75), (2.78) а также уравнения (2.79) и (2.80) справедливы для любого закона изотропного упрочнения. Если функция $\varepsilon_{eq}(\beta)$ известна, то распределение перемещений и напряжений в цилиндре может быть легко получено для любой скорости в диапазоне $\Omega_p < \Omega \leq \Omega_{fp}$. Последним шагом решения является определение пластической деформации ε_{eq} . Из (2.72), (2.70) и (2.78) следует уравнение:

$$\varepsilon_{eq} + H_0 \varepsilon_{eq}^n + \nu_0 \Psi = 0, \quad (2.81)$$

$$\nu_0 = 1 - \nu^2, H_0 = \nu_0 H, \Psi = 1 - \frac{c_1}{\beta^2} - \frac{(1-2\nu)}{4(1-\nu)} \Omega \beta^2.$$

Уравнение (2.81) в общем случае является трансцендентным и не имеет общего решения для произвольного $n \in \mathbb{R}$. Если же $n \in \mathbb{Q}$, то уравнение (2.81) сводится к алгебраическому. Как известно из теоремы Абеля — Руффини, общее решение в радикалах имеют алгебраические уравнения степени не выше четвертой. Следовательно, точное решение уравнения (2.81) существует для $n = 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1, 4/3, 3/2, 2, 3, 4$. Результаты экспериментов [91] показывают, что значение параметра n для металлов не превосходит 1, поэтому далее ограничим анализ следующими значениями $n = 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1$.

В тривиальном случае $n = 1$ решение соответствует линейно-упрочняемому материалу и имеет вид

$$\varepsilon_{eq} = -\frac{\nu_0 \Psi}{1 + \nu_0 H} \quad (2.82)$$

С учетом (2.82) интеграл в уравнении (2.80) вычисляется в элементарных функциях, что позволяет получить зависимость:

$$\Omega_{fp} = \frac{4(1-\delta^2)(1-\nu^2)H - 8\delta^2 \log \delta}{(1-\delta^2)(4\delta^2 + (1+\nu)(1-2\nu + \delta^2(3-2\nu)))H}. \quad (2.83)$$

Найденное решение (2.82), (2.83), разумеется, совпадает с известным решением [69]. В свою очередь при $H_0 = 0$ решение упрощается до $\varepsilon_{eq} = -\nu_0 \Psi$ и описывает идеальный упругопластический материал.

Рассмотрим частные случаи нелинейного упрочнения. Уравнение вида $x + ax^{p/q} + b = 0$, где p, q — натуральные числа, сводится к уравнению $y^q + ay^p + b = 0$ с помощью очевидной замены $y = x^{1/q}$.

Для $n = 1/2$ алгебраическое уравнение (2.83) имеет два корня, но легко убедиться, что только один из них удовлетворяет условию $\varepsilon_{eq}(\beta_{ep}) = 0$, этот корень имеет вид:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{H_0^2 - 4\nu_0 \Psi} - H_0 \right)^2.$$

Заметим, что для случая $n = 1/2$ интеграл $\int \varepsilon_{eq} / \beta \, d\beta$ выражается аналитически с помощью эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода, которые поддерживаются большинством систем компьютерной алгебры.

Для $n = 1/3$ уравнение (2.83) один вещественный корень:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{18} \left(\gamma - 3^{1/3} 2^{2/3} H_0 \gamma^{-1} \right)^3, \quad \gamma = \left(\sqrt{3} \sqrt{27\nu_0^2 \Psi^2 + 4H_0^3} - 9\nu_0 \Psi \right)^{1/3}.$$

В случае $n = 2/3$ единственный вещественный корень уравнения (2.83) записан ниже

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{27} \left(2^{-1/3} \kappa + 2^{1/3} H_0^2 \kappa^{-1} - H_0 \right)^3, \\ \kappa = \left(3\sqrt{3} \sqrt{27\nu_0^2 \Psi^2 + 4\nu_0 \Psi H_0^3} - 27\nu_0 \Psi - 2H_0^3 \right)^{1/3}.$$

Для $n = 1/4$ единственный корень уравнения (2.83), удовлетворяющий условию $\varepsilon_{eq}(\beta_{ep}) = 0$ имеет вид:

$$\varepsilon_{eq} = \left(-\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\sqrt{2H_0\lambda^{-1} - \lambda^2} \right)^4,$$

$$\lambda = \sqrt{4\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} v_0\Psi t^{-1} + \frac{t}{2^{1/3}3^{2/3}}}, \quad t = \left(9H_0^2 + \sqrt{3}\sqrt{27H_0^4 - 256v_0^3\Psi^3} \right)^{1/3}.$$

Если $n = 3/4$, то уравнение (2.83) имеет два вещественных корня, но только один из них удовлетворяет условию $\varepsilon_{eq}(\beta_{ep}) = 0$, этот корень можно представить в виде:

$$\varepsilon_{eq} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\varphi + \frac{H_0^3}{4\chi}} - \frac{1}{2}\chi - \frac{H_0}{4} \right)^4, \quad \chi = \sqrt{\frac{H_0^2}{4} - 4\frac{2^{1/3}(-v_0\Psi)^{2/3}}{3^{1/3}d} + \frac{(-v_0\Psi)^{1/3}}{2^{1/3}3^{2/3}}d},$$

$$\varphi = \frac{H_0^2}{2} + 4\frac{2^{1/3}(-v_0\Psi)^{2/3}}{3^{1/3}d} - \frac{(-v_0\Psi)^{1/3}}{2^{1/3}3^{2/3}}d, \quad d = \left(\sqrt{81H_0^4 - 768v_0\Psi} - 9H_0^2 \right)^{1/3}.$$

Для $n \neq 1/2$ интегралы в (2.78)–(2.80) определяются численно.

2.4.3 Остаточные напряжения

Максимальная скорость вращения и итоговая координата упругопластической границы обозначены Ω_{\max} как и $\hat{\beta}_{ep}$ соответственно. Разгрузка является чисто упругой и параметры материала E, ν имеют те же значения, что и при нагрузке. Тогда распределение остаточных напряжений в момент остановки цилиндра может быть вычислено как разность между напряжениями при $\Omega = \Omega_{\max}$ и напряжениями в фиктивном упругом материале при той же скорости вращения. Тогда из (2.73), (2.75), (2.78) следуют зависимости для остаточных напряжений в цилиндре:

$$\sigma_{rr}^{res} = \begin{cases} \frac{c_3}{\beta^2} - \frac{c_4}{\delta^2} - \frac{1}{1-\nu^2} \int_{\delta}^{\beta} \frac{\hat{\varepsilon}_{eq}}{\beta} d\beta, & (\delta \leq \beta \leq \hat{\beta}_{ep}); \\ \frac{c_3}{\beta^2} - c_4, & (\hat{\beta}_{ep} \leq \beta \leq 1). \end{cases}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{res} = \begin{cases} -\frac{c_3}{\beta^2} - \frac{c_4}{\delta^2} - \frac{1}{1-\nu^2} \left(\int_{\delta}^{\beta} \frac{\hat{\varepsilon}_{eq}}{\beta} d\beta - \hat{\varepsilon}_{eq} \right), & (\delta \leq \beta \leq \hat{\beta}_{ep}); \\ -\frac{c_3}{\beta^2} - c_4, & (\hat{\beta}_{ep} \leq \beta \leq 1). \end{cases} \quad (2.84)$$

В (2.84) используются следующие соотношения и обозначения

$$c_3 = -\frac{\hat{\beta}_{ep}^2}{2} + \frac{(3-2\nu)\delta^2 + (1-2\nu)\hat{\beta}_{ep}^4}{8(1-\nu)} \Omega_{\max}, \quad \hat{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq}(\Omega_{\max}).$$

2.4.4 Границы применимости решения

Решение, найденное в предыдущем подразделе справедливо лишь в том случае, если в ходе нагрузки в пластической области всегда выполняется неравенство

$$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr} \quad (2.85)$$

Справедливость неравенства (2.85) зависит от значений параметров δ, ν, H, n . Нетрудно убедиться в том, что, например, для $\nu \leq 0$ неравенство (2.85) будет нарушаться в окрестности внутренней поверхности цилиндра в силу граничного условия $\sigma_{rr}(\delta) = 0$ и соотношения $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$. С другой для малых значений δ и малых, но положительных значений коэффициента Пуассона ν радиальное напряжение может превысить осевое. Последнее обстоятельство проиллюстрировано на рис. 2.24, где представлено распределение напряжений в цилиндре при $\delta = 0.2, \nu = 0.25, H = 0, \Omega = 3$.

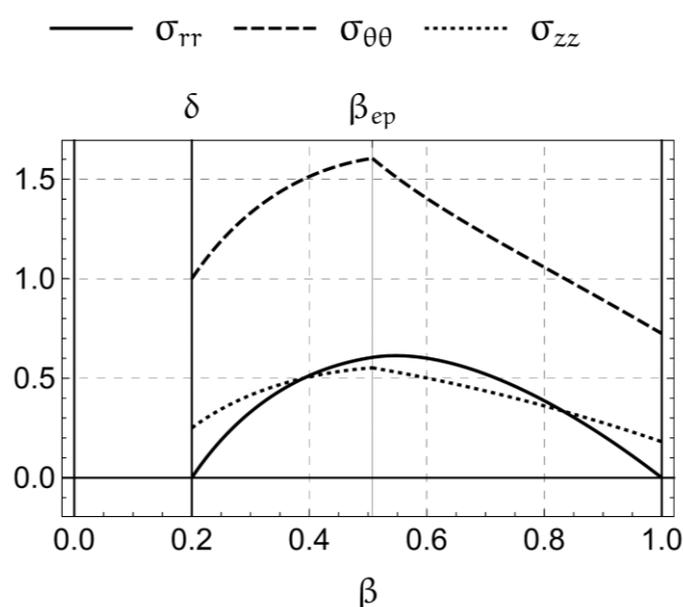


Рис. 2.24 — Нарушение неравенства (2.85) в пластической области ($\delta = 0.2, \nu = 0.25, H = 0, \Omega = 3$).

Важно отметить, что неравенство (2.85) ранее предполагалось многими авторами, которые изучали вращающиеся полые цилиндры с закрепленными торцами [55, 56, 69], однако справедливость этого неравенства до недавнего времени подробно не исследовалась.

Напряженное состояние в пластической области можно представить в следующей форме

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} &= 1 + \Delta, \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}),\end{aligned}\tag{2.86}$$

где $\Delta = H \varepsilon_{eq}^n$, $\Delta \geq 0$. Далее предполагаем, что $\nu > 0$.

Рассмотрим первую часть неравенства (2.85). Из (2.86) следует, что

$$\sigma_{zz} = 2\nu \sigma_{\theta\theta} - \nu(1 + \Delta).$$

Тогда неравенство $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$ можно преобразовать к виду

$$\sigma_{\theta\theta} > -\frac{\nu}{1 - 2\nu}(1 + \Delta).$$

Предыдущее неравенство справедливо, т.к.

$$\sigma_{\theta\theta} > 0, \nu > 0, \nu < 1/2, \Delta > 0.$$

Следствием (2.86) является равенство

$$\sigma_{zz} = 2\nu \sigma_{rr} + \nu(1 + \Delta).$$

Тогда неравенство $\sigma_{zz} > \sigma_{rr}$ сводится к следующей форме

$$\sigma_{rr} < \frac{\nu}{1 - 2\nu} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \Delta.\tag{2.87}$$

Точная оценка величины радиального напряжения и эквивалентной пластической деформации затруднена в силу сложности и нелинейности решения, поэтому рассмотрим более простое неравенство

$$\max \sigma_{rr} < \frac{\nu}{1 - 2\nu}.\tag{2.88}$$

Очевидно, если (2.88) верно, то неравенство (2.87) также верно, а значит верно и неравенство (2.85). Напряжения в цилиндре растут с уменьшением эквивалентной пластической деформации и достигают

максимума при $\varepsilon_{eq} = 0$, что соответствует предельному случаю $H \rightarrow \infty$, когда пластическое решение вырождается в упругое

$$\hat{\sigma}_{rr}^{pl} = \lim_{H \rightarrow \infty} \sigma_{rr}^{pl} = -\frac{c_1}{2\beta^2} + c_2 - \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega \beta^2. \quad (2.89)$$

Зависимость скорости вращения от координаты упругопластической границы следует из (2.79) и имеет вид

$$\Omega(\beta_{ep}) = \frac{4(1-\nu)\beta_{ep}^2}{(1-2\nu)\beta_{ep}^4 + (3-2\nu)\delta^2}. \quad (2.90)$$

Из (2.78), (2.89) и (2.90) следует, что

$$\hat{\sigma}_{rr}^{pl} = \frac{(3-2\nu)\beta_{ep}^2}{2((3-2\nu)\delta^2 + (1-2\nu)\beta_{ep}^4)} \frac{(1-\beta^2)(\beta^2 - \delta^2)}{\beta^2}. \quad (2.91)$$

Нетрудно убедиться, что функция в правой части (2.91) имеет точку максимума $\beta^* = \sqrt{\delta} \in [\delta, 1]$. Рассмотрим производную

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{rr}^{pl}}{\partial \beta_{ep}} = (3-2\nu) \frac{((3-2\nu)\delta^2 \beta_{ep} - (1-2\nu)\beta_{ep}^5)(1-\beta^2)(\beta^2 - \delta^2)}{((3-2\nu)\delta^2 + (1-2\nu)\beta_{ep}^4)^2 \beta^2}.$$

Уравнение $\frac{\partial \hat{\sigma}_{rr}^{pl}}{\partial \beta_{ep}} = 0$ имеет корень $\beta_{ep}^* = \left(\frac{3-2\nu}{1-2\nu}\right)^{1/4} \sqrt{\delta}$. Анализ второй

производной показывает, что β_{ep}^* является точкой максимума. Следовательно максимальное значение радиального напряжения достигается в точке $(\beta = \beta^*, \beta_{ep} = \beta_{ep}^*)$ и максимум равен

$$\max \sigma_{rr}^{pl} = \max \hat{\sigma}_{rr}^{pl} = \hat{\sigma}_{rr}^{pl}(\beta^*, \beta_{ep}^*) = \frac{(1-\delta)^2}{4\delta} \sqrt{\frac{3-2\nu}{1-2\nu}}.$$

Таким образом, неравенство (2.85) справедливо для $H > 0, n > 0, \nu > \nu_t(\delta)$ где

$$\nu_t(\delta) = \frac{3(1-\delta)^2}{2(2-4\delta+2\delta^2 + \sqrt{1-4\delta+18\delta^2-4\delta^3+\delta^4})}. \quad (2.92)$$

Следует отметить, что $\nu_t(0) = 1/2, \nu_t(1) = 0$. Далее рассмотрим случай

идеального упругопластического материала; из (2.78), (2.82) и $H=0$ следует распределение радиального напряжения в пластической области

$$\sigma_{rr}^{pl} = \frac{1}{2}(\delta^2 - \beta^2)\Omega + \log(\beta/\delta). \quad (2.93)$$

Следует отметить, что

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{pl}}{\partial \Omega} = \frac{1}{2}(\delta^2 - \beta^2) \leq 0.$$

Из последнего неравенства следует, что радиальное напряжение уменьшается с увеличением Ω . Следовательно, для каждой точки $\beta \in (\delta, 1]$ радиальное напряжение достигает максимума в тот момент, когда упругопластическая граница достигает этой точки.

Зависимость скорости вращения от координаты упругопластической границы следует из (2.80) и имеет вид

$$\Omega(\beta_{ep}) = \frac{4(1-\nu)(1 + 2\log(\beta_{ep} \delta^{-1}) - \beta_{ep}^2)}{3 - 2\nu - 4(1-\nu)\delta^2 + (1-2\nu)(2 - \beta_{ep}^2)\beta_{ep}^2}. \quad (2.94)$$

Радиальное напряжение на упругопластической границе можно вычислить из (2.93) и (2.94)

$$\hat{\sigma}_{rr}^{pl}(\beta_{ep}) = \log(\beta_{ep} \delta^{-1}) + \frac{1}{2}(\delta^2 - \beta_{ep}^2) \frac{4(1-\nu)(1 + 2\log(\beta_{ep} \delta^{-1}) - \beta_{ep}^2)}{3 - 2\nu - 4(1-\nu)\delta^2 + (1-2\nu)(2 - \beta_{ep}^2)\beta_{ep}^2}.$$

Функция $\hat{\sigma}_{rr}^{pl}(\beta_{ep})$ достигает максимума в некоторой точке $\beta_{ep}^* \in (\delta, 1)$. Следовательно неравенство (2.85) справедливо для $\nu > \nu_t(\delta)$, где значения β_{ep}^* и ν_t могут быть вычислены из решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\sigma}_{rr}^{pl}}{\partial \beta_{ep}}(\beta_{ep}^*) = 0, \\ \hat{\sigma}_{rr}^{pl}(\beta_{ep}^*) = \frac{\nu}{1-2\nu}. \end{cases} \quad (2.95)$$

для любого значения $\delta \in (0, 1)$.

Графики функции для упрочняемого и идеального материала представлены на рис. 2.25. Первый график построен с помощью аналитической зависимости (2.92), а второй — с помощью численного решения системы (2.95). Для $\delta \geq 0.5$ найденное для нелинейно упрочняемого материала решение справедливо, если $\nu > 1/6$, что выполняется для большинства конструкционных материалов. Классическое решение [69] для идеального материала имеет более широкие границы применимости по сравнению с представленным решением. Это особенно заметно для толстостенных цилиндров. С другой стороны, если $\delta \geq 0.9$ то границы применимости обоих решений практически совпадают и покрывают практически все конструкционные материалы ($\nu > 0.0034$).

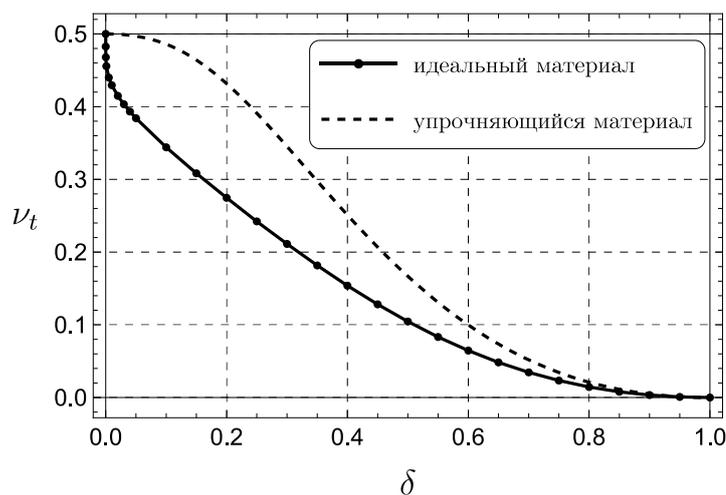


Рис. 2.25 — Зависимость $\nu_t(\delta)$ для идеального и упрочняющегося материалов.

2.4.5 Пример решения

Параметры цилиндра имеют значения $\delta = 0.5, \nu = 0.3$. Эти значения удовлетворяют условиям, которые рассмотрены в предыдущем подразделе (рис. 2.25). Зависимость критической скорости Ω_{fp} от параметров упрочнения n и H представлена на рис. 2.26. Видно, что величина растет с увеличением H и этот эффект более выражен для малых значений n . В частности, если $n = 1$, то увеличение Ω_{fp} в диапазоне $H \in [0, 1]$ составляет $\approx 29\%$. С другой стороны, для $n = 1/4$ увеличение уже $\approx 42\%$.

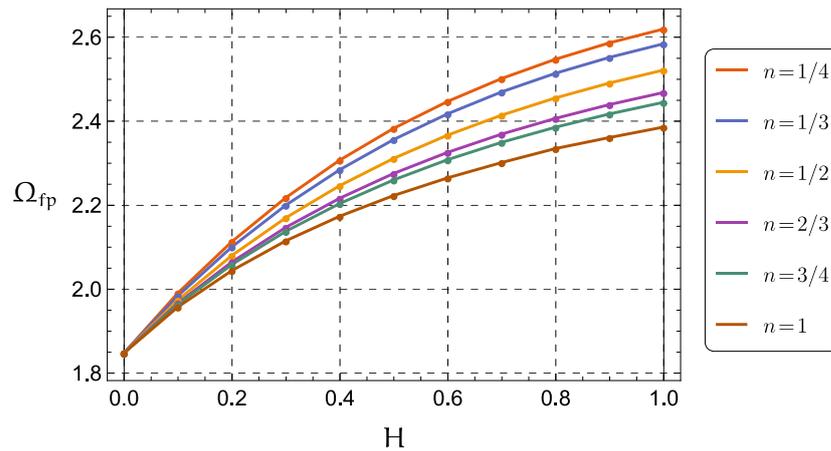


Рис. 2.26 — Зависимость $\Omega_{fp}(H)$ для нескольких значений n .

На рис. 2.27–2.32 показано распределение тангенциального напряжения и эквивалентной пластической деформации в цилиндре для нескольких значений параметров H и n . Все графики на рис. 2.27–2.32 построены для состояния полной пластичности и ограничены только тангенциальной компонентой напряжений, поскольку она в большей степени зависит от параметров H и n по сравнению с другими. Увеличение параметра H приводит к увеличению напряжений и снижению деформаций. В то же время увеличение параметра n имеет обратный эффект. Интересно отметить, что при малых значениях n и больших значениях H в окрестности внешней поверхности цилиндра присутствует область нулевых пластических деформаций (рис. 2.27б и рис. 2.28б).

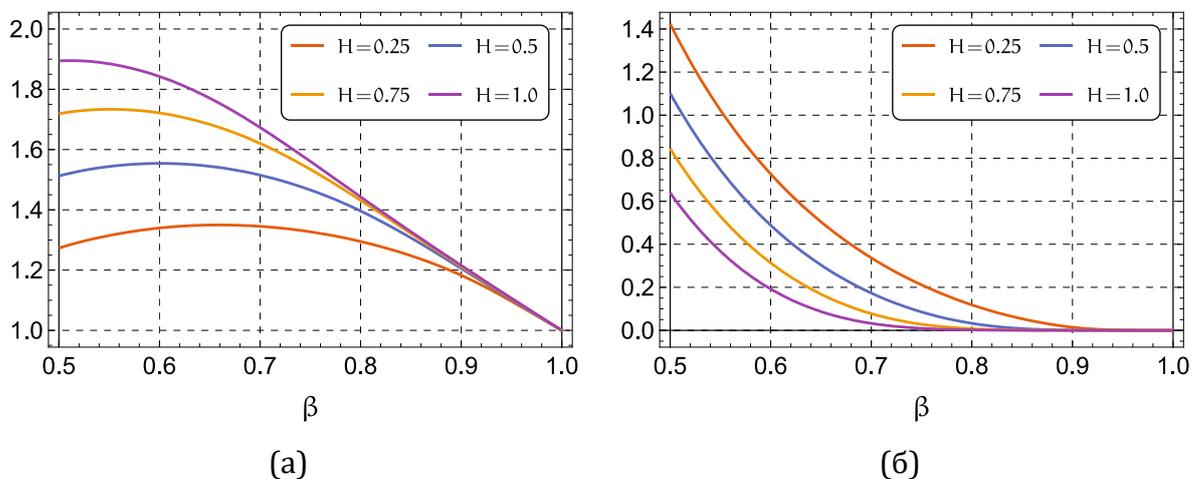


Рис. 2.27 — Распределение (а) тангенциального напряжения и (б) эквивалентной пластической деформации для нескольких значений H при $n = 1/4$.

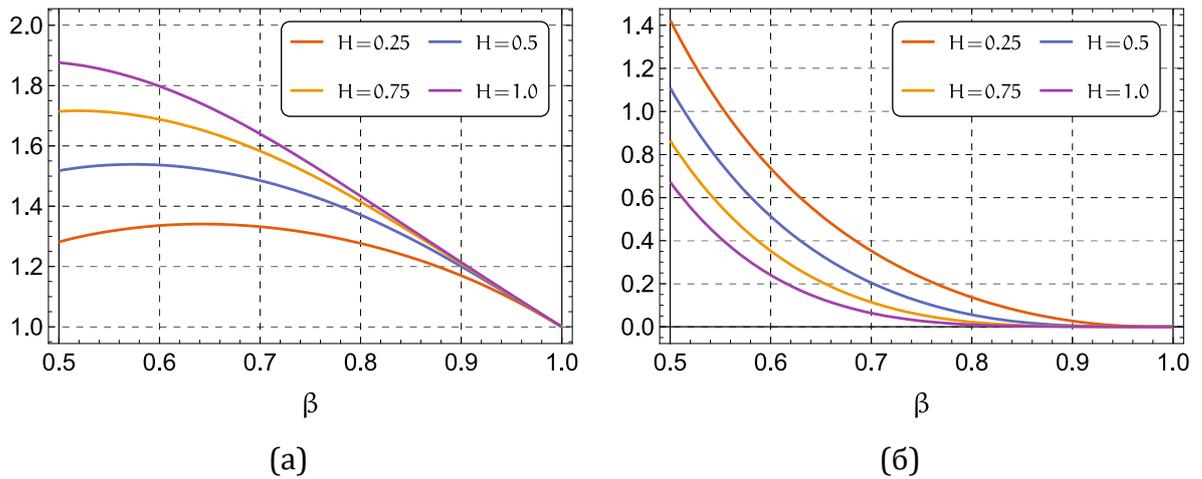


Рис. 2.28 — Распределение (а) тангенциального напряжения и (б) эквивалентной пластической деформации для нескольких значений H при $n = 1/3$.

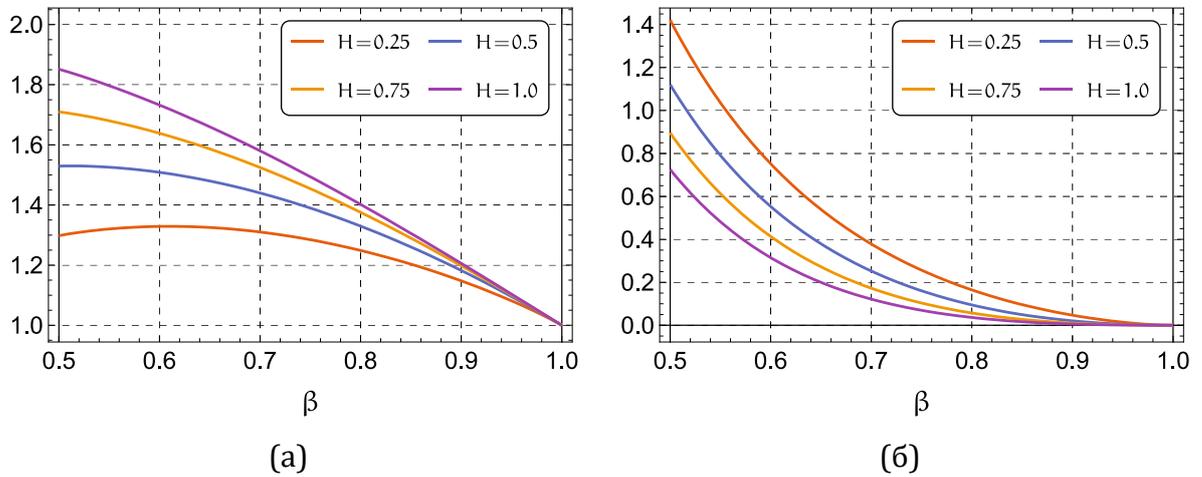


Рис. 2.29 — Распределение (а) тангенциального напряжения и (б) эквивалентной пластической деформации для нескольких значений H при $n = 1/2$.

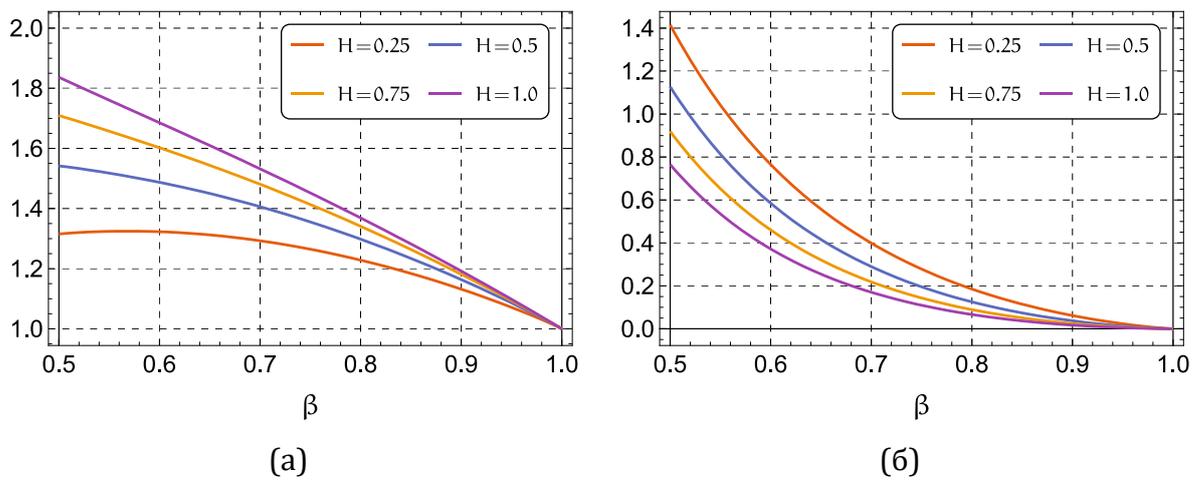


Рис. 2.30 — Распределение (а) тангенциального напряжения и (б) эквивалентной пластической деформации для нескольких значений H при $n = 2/3$.

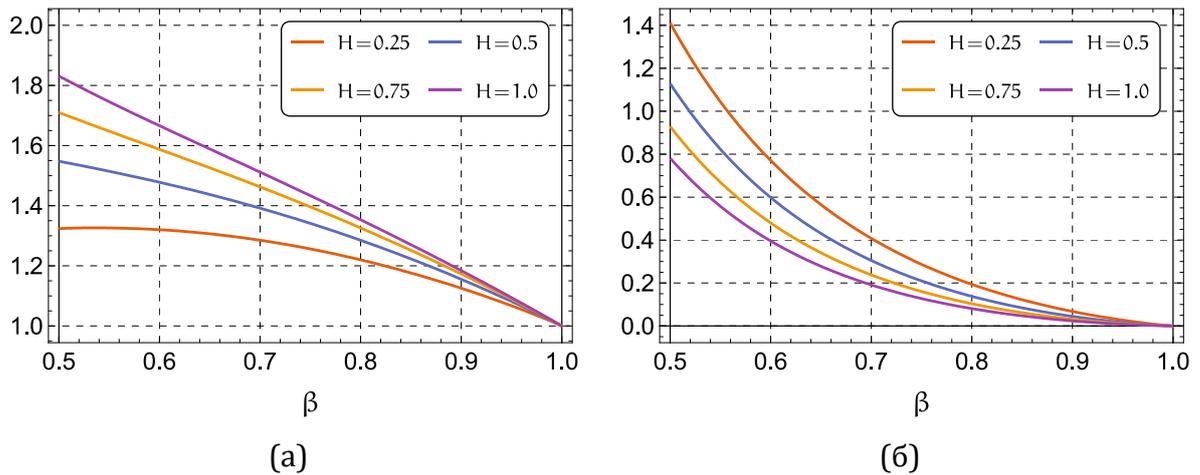


Рис. 2.31 — Распределение (а) тангенциального напряжения и (б) эквивалентной пластической деформации для нескольких значений H при $n = 3/4$.

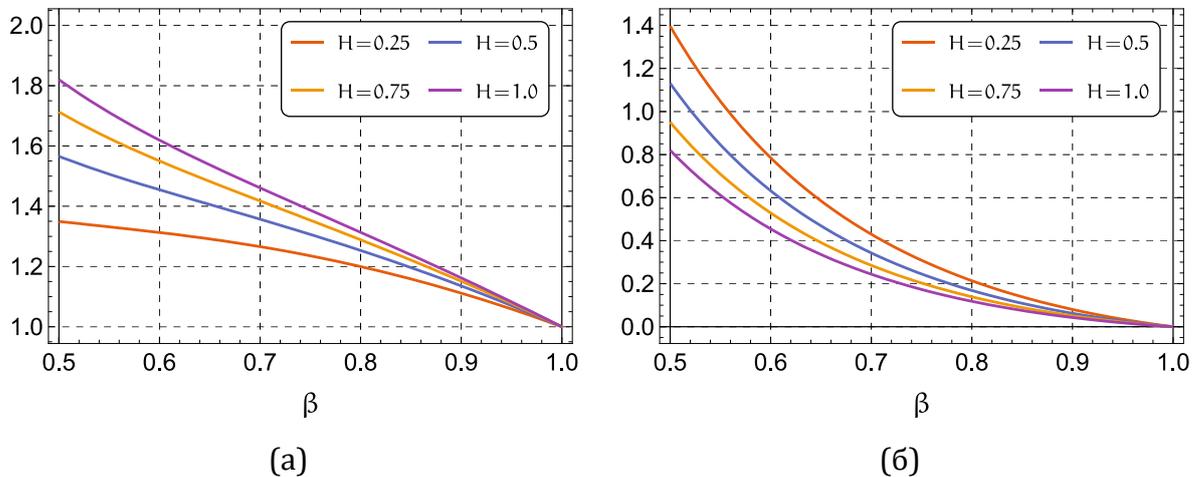


Рис. 2.32 — Распределение (а) тангенциального напряжения и (б) эквивалентной пластической деформации для нескольких значений H при $n = 1$.

Распределение остаточных напряжений в цилиндре рассмотрено на примере алюминия 2024-T3 со следующими значениями параметров [91]

$$\nu = 0.3, \sigma_0 = 200 \text{ МПа}, K/\sigma_0 = 2.8, E/\sigma_0 = 360, n = 0.25. \quad (2.96)$$

Из (2.96) следует, что безразмерный параметр упрочнения $H = 0.6428$. Пластическое течение зарождается в цилиндре при $\Omega_p = 1.12$ и занимает весь цилиндр при $\Omega_{fp} = 2.472$. На рис. 2.33 представлено распределение остаточных тангенциальных напряжений после предварительного вращения для нескольких значений максимальной скорости вращения Ω_{\max} , а именно $\Omega_{\max} = 1.5, 1.8, 2.1, \Omega_{fp}$. Видно, что процесс ротационного автофретирования приводит к формированию в окрестности

внутренней поверхности цилиндра поля остаточных сжимающих напряжений. Величина остаточных напряжений растет с увеличением максимальной скорости вращения. С другой стороны, если скорость Ω_{\max} близка к критической скорости Ω_{fp} , то в окрестности внешней поверхности цилиндра формируется поле растягивающих остаточных напряжений, что является нежелательным эффектом.

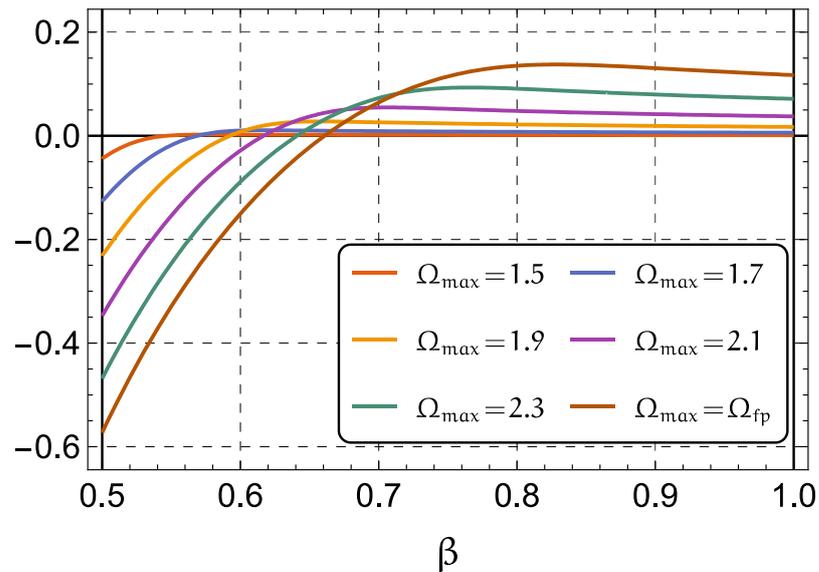


Рис. 2.33 — Распределение остаточных тангенциальных напряжений для нескольких значений Ω_{\max} .

2.5. Влияние переменного модуля Юнга на остаточные напряжения, вызванные ротационным автофретированием полого цилиндра с закрепленными торцами

2.5.1 Постановка задачи

Рассматривается полый цилиндр бесконечной длины, который вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω . Угловое ускорение принимается равным нулю. Предполагается, что в ходе всего процесса цилиндр находится в состоянии плоской деформации и сохраняет осевую симметрию. Для решения вводятся следующие безразмерные величины:

$$\delta = \frac{r_{in}}{r_{out}}, \beta = \frac{r}{r_{out}}, \Omega = \frac{\rho r_{out}^2}{\sigma_0} \omega^2, \bar{u} = \frac{E_0}{\sigma_0} \frac{u_r}{r_{out}}, \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{E_0}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{E_0}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}^e, \bar{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{E_0}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}^p, \quad (2.97)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}, \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_0}, \bar{H} = \frac{H}{E_0}, \bar{\sigma}_\infty = \frac{\sigma_\infty}{\sigma_0}, \bar{\gamma} = \frac{\sigma_0}{E_0} \gamma, \bar{E}_u = \frac{E_u}{E_0}, \bar{E}_\infty = \frac{E_\infty}{E_0}, \bar{\zeta} = \frac{\sigma_0}{E_0} \zeta,$$

H, σ_∞, γ — параметры, характеризующие изотропное упрочнение, E_∞, ζ — параметры, характеризующие изменение модуля Юнга. Видно, что параметры (2.97) в целом аналогичны безразмерным величинам (2.2) за исключением параметров, отвечающих за упрочнение материала и изменение модуля Юнга.

Единственное уравнение равновесия в цилиндре имеет вид (2.7). Боковые поверхности цилиндра $\beta = \delta$ и $\beta = 1$ свободны от нагрузок, следовательно граничные условия задачи имеют вид (2.71).

Предполагается, что максимальная скорость вращения не слишком высока и геометрически-линейная теория справедлива с достаточной степенью точности. Тогда кинематические соотношения имеют вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta}; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{\beta}; \varepsilon_{zz} = 0. \quad (2.98)$$

На первой стадии автофретирования скорость вращения цилиндра Ω возрастает от нуля до некоторого выбранного максимального значения Ω_{\max} . В начале процесса цилиндр деформируется чисто упруго, затем при $\Omega = \Omega_p$ на внутренней поверхности цилиндра возникает область пластического течения, которая при $\Omega = \Omega_{fp}$ распространяется на весь цилиндр. Далее предполагается, что $\Omega_p < \Omega_{\max} \leq \Omega_{fp}$. Максимальная скорость вращения Ω_{\max} является основным технологическим параметром процесса и далее называется скоростью автофретирования.

Полные деформации представляют собой сумму упругих и пластических деформаций (2.3). Напряжения и упругие деформации связаны законом Гука (2.5). В качестве условия пластичности используется условие

Треска (2.69), в котором предел текучести σ_y определяется законом упрочнения Восе [137]

$$\sigma_y = 1 + (\sigma_\infty - 1) \left(1 - e^{-\gamma \varepsilon_{eq}^p} \right), \quad (2.99)$$

где σ_∞ — максимальное значение предела текучести, γ — параметр, характеризующий скорость увеличения предела текучести с ростом пластической деформации, ε_{eq}^p — эквивалентная пластическая деформация. Закон Восе (2.99) подходит для широкого класса материалов, проявляющих ограниченное упрочнение [138]. Малые значения параметра γ (порядка единицы, без учета множителя σ_0/E_0) примерно соответствуют линейно-упрочняемому материалу, а большие (свыше 300) — идеально упругопластическому материалу [139].

Для некоторых материалов лучше подходит более общий, линейно-экспоненциальный закон упрочнения:

$$\sigma_y = 1 + H \varepsilon_{eq}^p + (\sigma_\infty - 1) \left(1 - e^{-\gamma \varepsilon_{eq}^p} \right), \quad (2.100)$$

где H — параметр, отвечающий за линейную составляющую упрочнения. При $H=0$ и $\sigma_\infty=1$ закон (2.100) переходит в закон Восе (2.99) и линейный закон упрочнения соответственно.

Пластическая составляющая деформации вычисляется в соответствии с ассоциированным законом пластического течения (2.15), а эквивалентной пластической деформации $d\varepsilon_{eq}^p$ определяется из закона (2.18).

На стадии разгрузки скорость вращения Ω снижается вплоть до полной остановки цилиндра. В настоящей диссертации предполагается, что разгрузка является чисто упругой, а пластические деформации $\hat{\varepsilon}_{ij}^p$, накопленные при нагрузке, в дальнейшем не меняются. Разделение полных деформаций примет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{rr}^e + \hat{\varepsilon}_{rr}^p; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^p; \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \hat{\varepsilon}_{zz}^p; \\ \hat{\varepsilon}_{rr}^p &= \varepsilon_{rr}^p(\Omega_{\max}); \quad \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p(\Omega_{\max}); \quad \hat{\varepsilon}_{zz}^p = \varepsilon_{zz}^p(\Omega_{\max}). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Упругая разгрузка следует закону Гука в следующей форме

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E_u}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E_u}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\varepsilon_{rr}^e + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{E_u}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + (1-\nu)\varepsilon_{zz}^e \right),\end{aligned}\quad (2.102)$$

здесь E_u — модуль Юнга, связанный с накопленной пластической деформацией законом [140]

$$E_u(\hat{\varepsilon}_{eq}^p) = 1 - (1 - E_\infty) \left(1 - e^{-\zeta \hat{\varepsilon}_{eq}^p} \right), \quad (2.103)$$

где E_∞ — предельное значение модуля Юнга при пластической деформации, стремящейся к бесконечности, ζ — параметр материала, характеризующий скорость уменьшения модуля Юнга с ростом пластической деформации, $\hat{\varepsilon}_{eq}^p$ — эквивалентная пластическая деформация, накопленная на стадии нагрузки ($\hat{\varepsilon}_{eq}^p = \varepsilon_{eq}^p(\Omega_{\max})$). Для сравнения полученных результатов также используется классическая модель с постоянным модулем Юнга ($E_u = 1$).

Закон упругой разгрузки (2.102), (2.103) описывает неоднородный линейно-упругий материал, в котором модуль Юнга E_u является функцией радиальной координаты β . Следует отметить, что у многих материалов участок упругой разгрузки на кривой деформирования несколько отклоняется от линейного закона [141]. Таким образом, закон (2.102), (2.103) является линейной аппроксимацией реального поведения материала, а модуль Юнга E_u также называют хордовым модулем [141]. В последние годы предложен ряд моделей для описания нелинейно-упругого поведения материала при разгрузке [142–144]. Однако расчеты [143, 144] показали, что линейная модель не дает существенной ошибки по сравнению с нелинейными моделями и с учетом своей простоты и

эффективности хорошо подходит для практического применения.

2.5.2 Построение решения

Предполагается, что в ходе нагрузки напряженное состояние в пластической области всегда удовлетворяет неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$, тогда условие пластичности (2.69) запишется в форме (2.104). В диапазоне скоростей $\Omega \in [\Omega_p, \Omega_{fp}]$ цилиндр состоит из внутренней пластической и внешней упругой областей. Далее верхние индексы «el» и «pl» над символами перемещений и напряжений обозначают упругую и пластическую область соответственно. Для координаты упругопластической границы используется символ β_{ep} . Решение поставленной задачи для стадии нагрузки в целом повторяет шаги, приведенные в разделе 2.4.2. Напряженно-деформированное состояние в упругой области определяется соотношениями (2.73) и (2.75), а в пластической — (2.78). Координата упругопластической границы определяется из уравнения (2.79). Скорость вращения, соответствующая полному переходу цилиндра в состояние пластичности вычисляется из нелинейного уравнения (2.80).

Последним шагом решения для пластической области является определение функции эквивалентной пластической деформации $\varepsilon_{eq}^p(\beta)$. Рассмотрим линейно-экспоненциальный закон упрочнения (2.100). Из (2.78), (2.72) и (2.100) следует трансцендентное уравнение:

$$k(\sigma_\infty - 1)e^{-\gamma \varepsilon_{eq}^p} - \varepsilon_{eq}^p = k f(\beta),$$

$$k = \frac{1 - \nu^2}{1 + H - H\nu^2}, \quad f(\beta) = \sigma_\infty - c_1 \beta^{-2} - \frac{(1 - 2\nu)}{4(1 - \nu)} \Omega \beta^2. \quad (2.105)$$

Решение уравнения (2.105) можно представить в форме:

$$\varepsilon_{eq}^p(\beta) = \frac{W((\sigma_\infty - 1)k\gamma e^{k\gamma f(\beta)})}{\gamma} - k f(\beta). \quad (2.106)$$

В (2.106) $W(x)$ — главная ветвь функции Ламберта [145]. $W(x)$ широко используется во многих областях чистой и прикладной

математики [146], в особенности при решении дифференциальных уравнений, содержащих экспоненту или логарифм. Функция $W(x)$ не может быть выражена в элементарных функциях, тем не менее, она реализована в современных системах компьютерной алгебры (Wolfram Mathematica, Maple, Mathcad, SageMath). Заметим, что при $H=0$ решение (2.106) соответствует закону Восе, при $\sigma_\infty = 1$ — линейно-упрочняемому материалу, а одновременное выполнение этих условий соответствует идеальному упругопластическому материалу.

На стадии разгрузки основной интерес представляет распределение остаточных перемещений и напряжений в цилиндре, поэтому далее предполагаем, что $\Omega=0$ (полная остановка цилиндра).

Разделение деформаций (2.3) примет вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{rr}^e - \hat{\varepsilon}_{eq}^p; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^e + \hat{\varepsilon}_{eq}^p.\end{aligned}$$

Из (2.102) с помощью предыдущих соотношений найдем остаточные напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{res} &= \frac{E_u}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu) \frac{\partial u^{res}}{\partial \beta} + \nu \frac{u^{res}}{\beta} + (1-2\nu) \hat{\varepsilon}_{eq}^p \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^{res} &= \frac{E_u}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu \frac{\partial u^{res}}{\partial \beta} + (1-\nu) \frac{u^{res}}{\beta} - (1-2\nu) \hat{\varepsilon}_{eq}^p \right), \\ \sigma_{zz}^{res} &= \nu (\sigma_{rr}^{res} + \sigma_{\theta\theta}^{res}).\end{aligned}\quad (2.107)$$

Уравнение равновесия (2.7) с учетом (2.107) для состояния покоя $\Omega=0$ запишется следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u^{res}}{\partial \beta^2} + k_1 \frac{\partial u^{res}}{\partial \beta} + k_2 u^{res} &= \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left(k_3 \hat{\varepsilon}_{eq}^p + \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{eq}^p}{\partial \beta} \right), \\ M &= \frac{E'_u}{E_u}, \quad k_1 = \beta^{-1} + M,\end{aligned}\quad (2.108)$$

$$k_2 = \frac{\nu}{1-\nu} M \beta^{-1} - \beta^{-2}, \quad k_3 = 2\beta^{-1} + M.$$

В (2.108) штрих означает производную по радиальной координате. Модуль Юнга E_u вычисляется в соответствии с законом (2.103), где накопленная пластическая деформация $\hat{\varepsilon}_{eq}^p$ в свою очередь определяется соотношениями (2.78), (2.105), (2.106). Выражение для модуля Юнга как функции радиальной координаты получается достаточно громоздким и далее не приводится. Уравнение (2.108) решается численно с помощью неявного метода Рунге-Кутты. В частном случае $E_u = 1$ аналитическое решение уравнения (2.108) не вызывает трудностей.

2.5.3 Пример решения

Данный раздел посвящен эффекту снижения модуля Юнга в результате предварительного пластического деформирования и оценке влияния этого эффекта на распределение остаточных напряжений в цилиндре после процедуры ротационного автофретирования. В соответствии с законом (2.103) величина снижения модуля Юнга зависит от механических параметров материала E_∞ и ζ , а также от накопленной пластической деформации $\hat{\varepsilon}_{eq}^p$. В свою очередь, пластические деформации в цилиндре увеличиваются с ростом скорости вращения Ω_{\max} , а также с уменьшением геометрического параметра δ . В силу вышесказанного далее рассматриваются материалы с достаточно выраженным эффектом снижения модуля Юнга: алюминиевый сплав AA6022, сталь DP980 и марганцевая сталь. Механические параметры материалов приведены в таблице (для всех материалов коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$).

Таблица 2.3 — Механические параметры материалов.

	Сплав AA6022 [147]	Сталь DP980 [148]	Марганцевая сталь [149]
σ_0 (МПа)	136	541	490.68
H (МПа)	0	53460	0
\bar{H}	0	0.261	0
σ_∞ (МПа)	352	707.5	1395.42
$\bar{\sigma}_\infty$	2.592	1.308	2.844

	Сплав AA6022 [147]	Сталь DP980 [148]	Марганцевая сталь [149]
γ	9.8	1834	2.65
$\bar{\gamma}$	0.019	4.84	0.006
E_0 (ГПа)	70	205	232
E_∞ (ГПа)	61	160	148
\bar{E}_∞	0.871	0.78	0.638
ζ	120	150	13.76
$\bar{\zeta}$	0.233	0.396	0.029

Вначале рассмотрим цилиндр, изготовленный из марганцевой стали. Падение модуля Юнга у этого материала может превышать 30%, что является наибольшим значением среди исследуемых материалов. С другой стороны, параметр ζ на порядок меньше по сравнению с AA6022 и DP980. В силу этого, эффект снижения модуля Юнга у марганцевой стали проявляется только при достаточно большой предварительной пластической деформации (более 5%). Ротационное автофретирование не приводит к интенсивному пластическому деформированию, поэтому можно предположить, что снижение модуля Юнга будет незначительным и не будет существенно влиять на напряженное состояние в цилиндре из марганцевой стали. Это предположение подтверждается расчетами. При $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$ графики остаточных напряжений для переменного и постоянного модуля Юнга практически сливаются и далее не приведены. Снижение тангенциального остаточного напряжения на внутренней поверхности $\sigma_{\theta\theta}^{res}(\delta)$ для $\delta = 0.3, 0.5, 0.8$ равняется 4%, 1.5% и 0.3% соответственно. Отметим также, что поведение цилиндра в ходе нагрузки близко к идеально-пластическому несмотря на то, что максимальный предел текучести σ_∞ марганцевой стали почти в три раза превосходит начальный σ_0 . В силу малого значения параметра γ эффект изотропного упрочнения также проявляется только для достаточно больших пластических деформаций.

Теперь рассмотрим материалы AA6022 и DP980. Зависимости скорости вращения Ω_{fp} , соответствующей полному переходу в пластическое состояние, от геометрического параметра δ изображены на рис. 2.34. Видим, что цилиндр из материала DP980 способен выдерживать намного более высокие скорости вращения, что объясняется более выраженным изотропным упрочнением этого материала. Отсюда также можно сделать вывод, что цилиндр из DP980 имеет более широкий диапазон возможных скоростей автофретирования Ω_{max} .

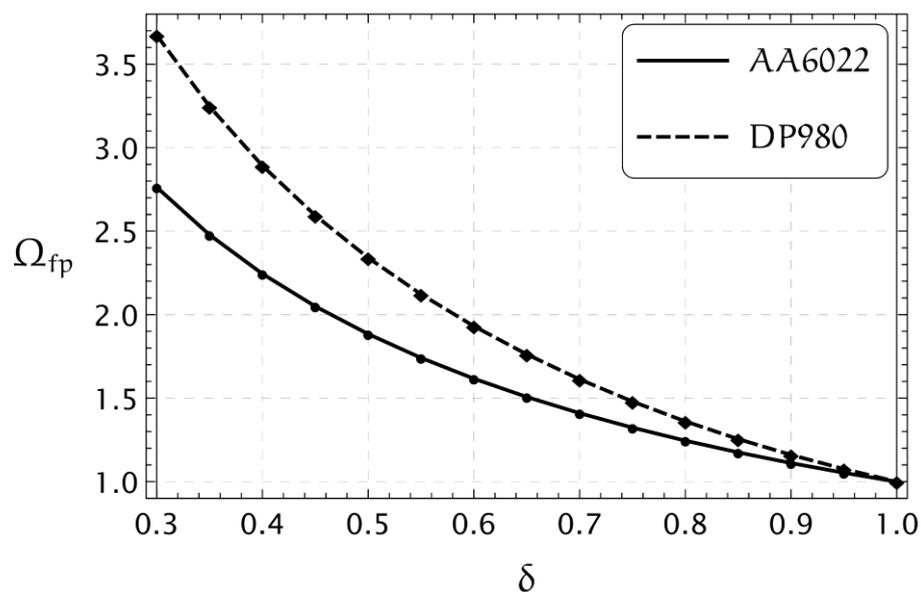


Рис. 2.34 — Предельная скорость вращения цилиндра Ω_{fp}

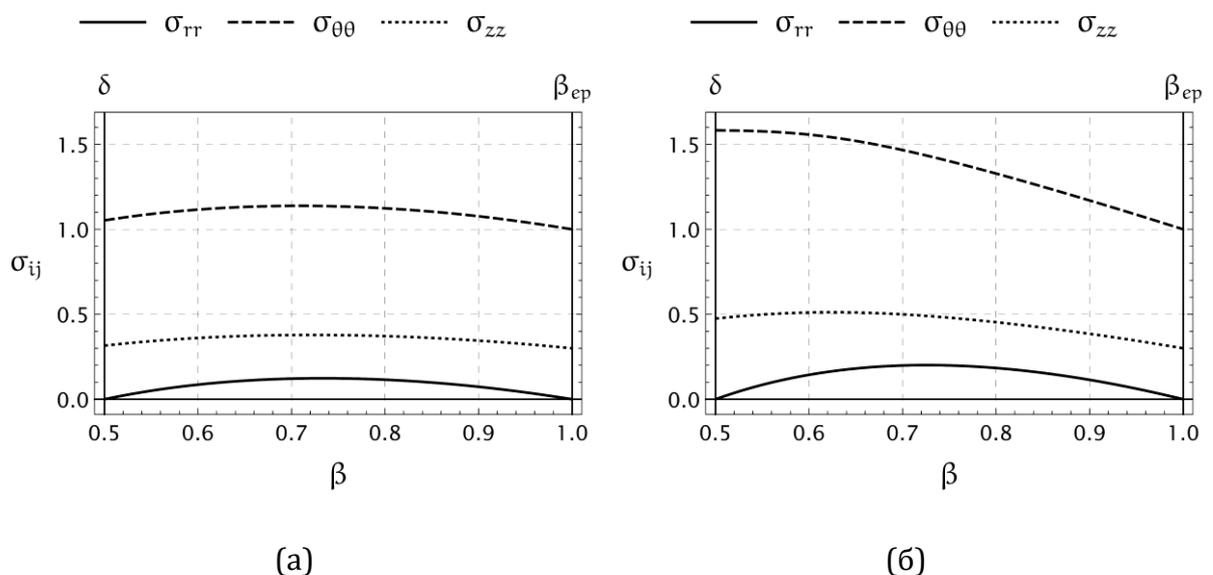


Рис. 2.35 — Распределение напряжений в цилиндре из (а) AA6022, (б) DP980 для $\delta = 0.5$ и скорости вращения $\Omega = \Omega_{fp}$

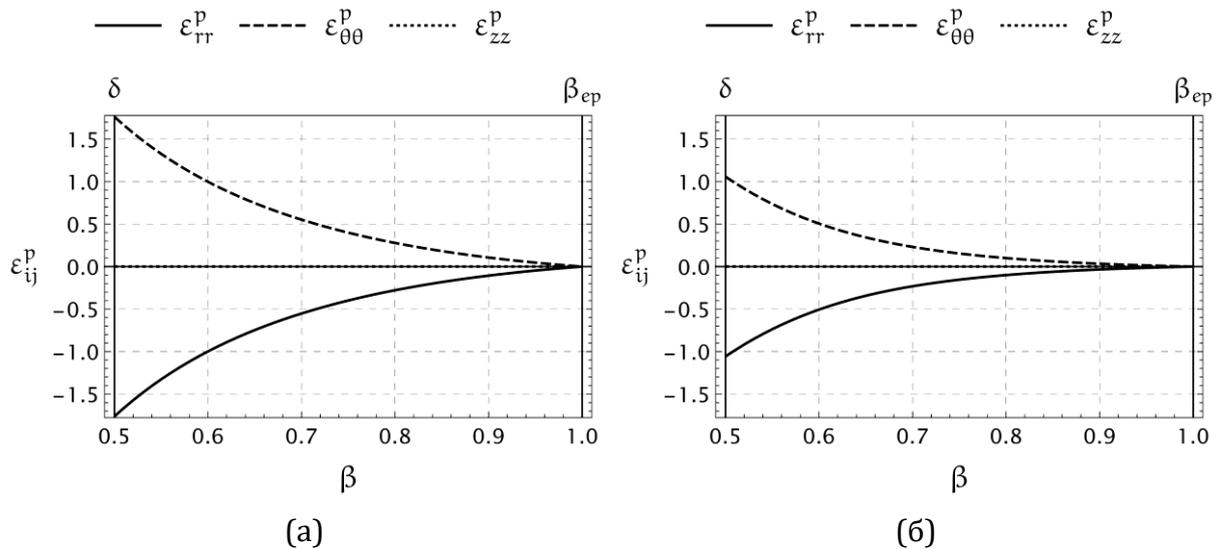


Рис. 2.36 — Распределение пластических деформаций в цилиндре из (а) АА6022, (б) DP980 для $\delta = 0.5$ и скорости вращения $\Omega = \Omega_{fp}$

Решение, полученное для стадии нагрузки, проиллюстрируем с помощью рис. 2.35 и рис. 2.36, на которых представлены графики напряжений и пластических деформаций в цилиндре при $\delta = 0.5$ и $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$. Предельная скорость вращения для АА6022 и DP980 составляет соответственно $\Omega_{fp} = 1.884$ и $\Omega_{fp} = 2.341$. Видим, что вследствие упрочнения величина напряжений в цилиндре из материала DP980 значительно выше, а пластических деформаций наоборот ниже, несмотря на более высокую предельную скорость вращения Ω_{fp} . Распределение остаточных напряжений в цилиндре после его предварительного вращения со скоростью $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$ представлено на рис. 2.37.

После процесса автофретирования вблизи внутренней поверхности цилиндра формируется поле сжимающих тангенциальных напряжений, которое распространяется примерно на половину толщины цилиндра. Здесь также следует отметить, что величина остаточных напряжений для стали DP980 ниже по сравнению со сплавом АА6022. Большой интерес представляет сравнение результатов для закона (2.103) и классической модели постоянного модуля Юнга $E_u = 1$. Для сравнения используется тангенциальное остаточное напряжение, поскольку именно оно является

наибольшим по абсолютной величине (см. рис. 2.37). На рис. 2.38 представлены графики остаточного тангенциального напряжения в цилиндре; сплошные линии соответствуют закону (2.103), а пунктирные — постоянному модулю Юнга. Видим, что эффект снижения модуля Юнга в результате пластической деформации существенно проявляется только вблизи внутренней поверхности цилиндра и приводит к снижению остаточных напряжений.

Результаты расчетов обобщены на рис. 2.39, где представлены зависимости снижения тангенциального остаточного напряжения на внутренней поверхности цилиндра $\beta = \delta$ от геометрического параметра δ после предварительного вращения со скоростью $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$ (которая в свою очередь также зависит от параметра δ , см. рис. 2.34). Видим, что снижение остаточных напряжений более выражено в цилиндре из стали DP980 и может превышать 10%. Также следует отметить, что учет снижения модуля Юнга практически не влияет на остаточные напряжения в тонкостенных цилиндрах ($\delta \geq 0.8$).

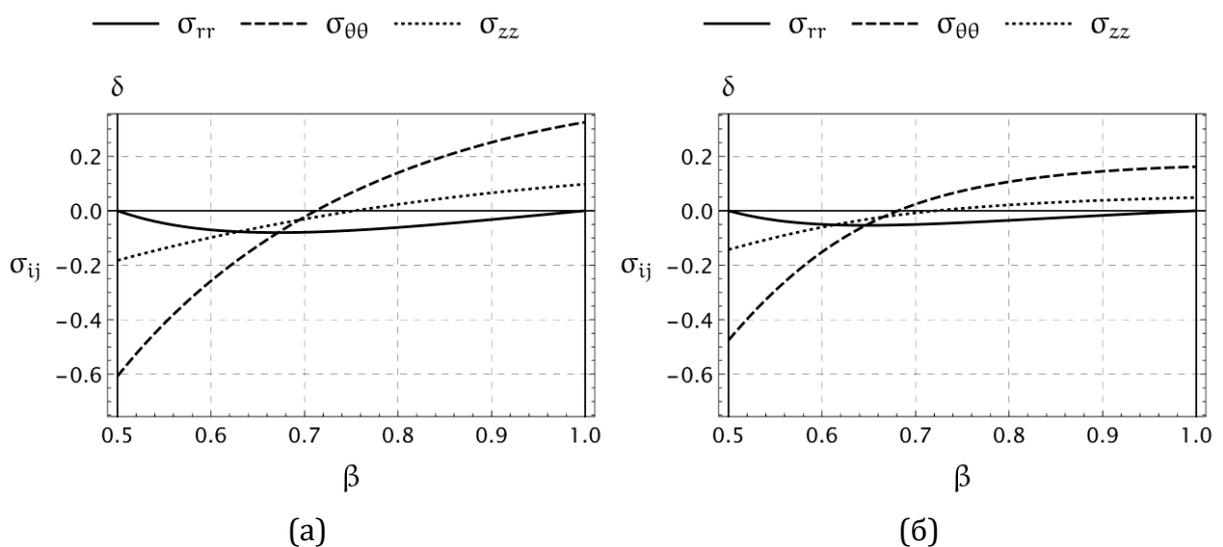


Рис. 2.37 — Распределение остаточных напряжений в цилиндре из (а) AA6022, (б) DP980 для $\delta = 0.5$ и скорости автофретирования $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$

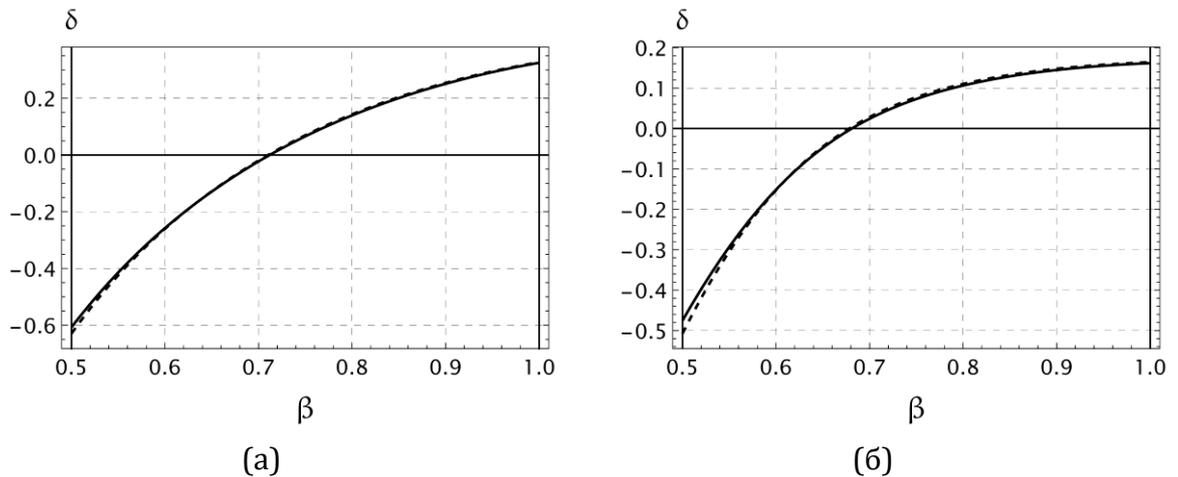


Рис. 2.38 — Тангенциальное остаточное напряжение в цилиндре из (а) AA6022, (б) DP980 для $\delta = 0.5$ и скорости автофретирования $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$

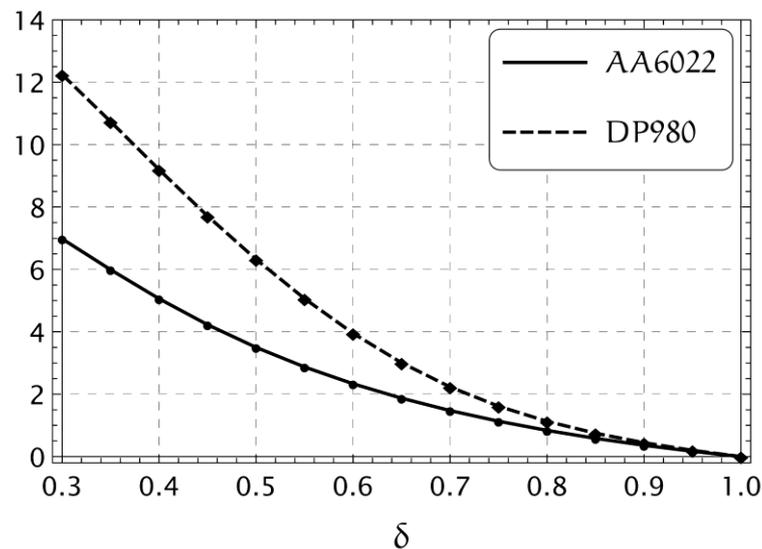


Рис. 2.39 — Снижение (в процентах) тангенциального остаточного напряжения на внутренней поверхности цилиндра при скорости автофретирования $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$

2.6. Выводы

Построено универсальное аналитическое решение упругопластической задачи во вращающемся цилиндре в условиях плоской или обобщенной плоской деформации. Найденное решение основано на общем кусочно-линейном условии пластичности и многие ранее известные решения, полученные в рамках условия Треска, являются его частным случаем. Это решение может использоваться для расчета цилиндров с различными видами граничных и торцевых условий. Кроме того, в построенное решение без особых трудностей можно включить внутреннее/внешнее давление, температурные эффекты, разгрузку и повторное

пластическое течение. В качестве иллюстративного примера рассмотрены сплошной и полый вращающиеся цилиндры с закрепленными и свободными торцами. Установлено, что параметры b (эффект промежуточного главного напряжения) и H (эффект изотропного линейного упрочнения) оказывают значительное влияние на упругопластический отклик и предельную скорость вращения цилиндра. В целом полученные результаты показали, что параметр b , который зависит от соотношения пределов текучести при растяжении и сдвиге, может рассматриваться в качестве механической характеристики материала при проектировании деталей машин, находящихся под действием центробежных нагрузок. Сравнение результатов расчетов при $b = 1/2$ (кусочно-линейная аппроксимация условия Мизеса) с известным численным решением для условия Мизеса показало хорошее совпадение. В частности, разница в предельной скорости вращения цилиндра не превышает 2%. Интересно отметить, что во вращающемся полом цилиндра с закрепленными торцами при определенном соотношении между параметрами материала появляется только одна пластическая область. В этом случае предельная скорость вращения выражается аналитически, и разница при $b = 1/2$ с расчетами для условия Мизеса составляет около 0.5%. Таким образом, в контексте упругопластического анализа вращающихся цилиндров, аналитическое решение для кусочно-линейной аппроксимации условия Мизеса в силу своей простоты может служить альтернативой трудоемким численным алгоритмам, базирующимся на нелинейном условии Мизеса.

Получено точное решение задачи об упругопластическом деформировании вращающегося цилиндра с жестким включением при наличии температурного градиента между внутренней и внешней поверхностями. Установлено, что температурный градиент приводит к значительному снижению скорости начала пластического течения, а само течение может возникнуть внутри цилиндра, а не на внутренней боковой поверхности,

как и в изотермическом случае. Критическая скорость вращения, соответствующая переходу всего цилиндра в пластическое состояние, также заметно снижается с увеличением температурного градиента. Кроме того, наличие градиента температуры приводит к увеличению абсолютной величины напряжений и пластических деформаций в цилиндре.

Решена упругопластическая задача во вращающемся полом цилиндра с закрепленными концами при условии пластичности Треска и степенном законе упрочнения. Для ряда частных случаев степенного параметра в законе упрочнения ($n = 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4$) найдены аналитические решения определяющей системы уравнений. Установлены зависимости предельной скорости вращения цилиндра от параметров упрочнения материала. Кроме того, рассмотрена упругая разгрузка цилиндра после его вращения с заданной максимальной скоростью и установлены закономерности распределения остаточных напряжений. Полученные результаты могут использоваться в проектировании процессов упрочнения на основе ротационного автофретирования.

У многих конструкционных материалов после предварительного пластического деформирования наблюдается снижение модуля Юнга, которое может достигать десятков процентов. Известно, что учет этого эффекта существенно повышает точность расчета итоговой геометрии детали для технологических процессов, связанных с интенсивным пластическим деформированием. В данной главе установлено, что этот эффект может оказывать заметное влияние на величину остаточных напряжений после ротационного автофретирования — процесса, который не связан с накоплением больших деформаций. Обнаружено, что учет падения модуля Юнга особенно важен для расчета толстостенных цилиндров и высоких скоростей автофретирования. Также следует отметить, что вышесказанное справедливо только для материалов с выраженным снижением модуля Юнга после пластического деформирования.

3. Ползучесть и вязкопластическое течение

3.1. Введение

На практике срок эксплуатации вращающихся цилиндров и дисков может составлять десятки лет и на таком временном масштабе проявляются вязкие свойства материала: ползучесть (вязкоупругость) и вязкопластичность. Конструкция может быть спроектирована с большим запасом прочности по отношению к мгновенному действию нагрузок, однако даже при небольшом уровне напряжений в теле неизбежно происходит медленное накопление деформаций ползучести, которое в конечном итоге может привести к потере эксплуатационных свойств конструкции и даже разрушению. Известно, что рост интереса к явлению ползучести в середине 20-го века был связан с необходимостью расчета деталей паровых турбин (дисков и лопаток), находящихся под действием именно центробежных сил и работающих в условиях высокой температуры [2]. Скорость деформации ползучести растет с увеличением температуры и при агрессивном воздействии окружающей среды [2].

Ползучесть материалов проявляет себя также в релаксации напряжений с течением времени при постоянной деформации. Это явление в частности необходимо учитывать при расчете многослойных маховичных накопителей энергии [150]. В таких маховиках для скрепления слоев используется посадка с натягом, в результате чего на межслойных поверхностях контакта формируются поля сжимающих радиальных напряжений. Релаксация напряжений может привести к падению величины натяга до нуля, и как следствие — к потере контакта между слоями.

Серия работа Валя [151–153] посвящена расчету вращающихся дисков постоянной и переменной толщины с помощью условия Треска, ассоциированного закона течения и степенного закона ползучести. Схожая постановка задачи, но с использованием экспоненциального закона ползучести применялась в [154]. Метод расчета неустановившейся

ползучести в равномерном разогретом сплошном диске с учетом упрочнения предложен в [155]. Работа посвящена [156] сравнительному анализу условий текучести Треска и Мизеса применительно к расчету ползучести вращающихся дисков. Степенной закон ползучести использовался в [157] для расчета сплошного диска переменной толщины, находящегося под действием центробежных сил и неоднородного температурного поля. Закон ползучести на основе суммы степенной и экспоненциальной функций применялся для расчета полого вращающегося диска в [158]. Вопросы оптимального проектирования дисков в условиях ползучести рассматривались в [159–162]. Упруговязкопластическое деформирование вращающихся дисков исследовалось в [163–165]. Расчет толстостенного полого цилиндра, находящегося под действием центробежных сил, а также внутреннего и внешнего давлений представлен в [166]. Конечные (логарифмические) деформации ползучести во вращающемся полом цилиндре изучались в [167].

Для многих конструкционных материалов в той или иной степени характерна анизотропия механических свойств, в том числе и ползучести. Для моделирования таких материалов часто используется эквивалентное напряжение по Хиллу [168]. Расчет ползучести ортотропных вращающихся дисков постоянной и переменной толщины представлен в [169, 170]. Деформации ползучести в ортотропных вращающихся цилиндрах исследовались в [171–174].

Одним из возможных способов повышения прочностных свойств конструкций является использование неоднородных (функционально-градиентных) материалов. Расчету деформаций ползучести в неоднородных изотропных вращающихся дисках посвящено большое количество работ [175–192], в которых рассматривались постоянный и переменный профили диска, различные модели ползучести и законы изменения физико-механических свойств. В работах [190, 193]

исследовалась ползучесть вращающихся дисков из анизотропно-неоднородных материалов. Оптимальное проектирование вращающегося диска в условиях ползучести рассматривалось в [194]. Деформации ползучести во вращающихся неоднородных цилиндрах исследовались в [195–199]. Влияние анизотропии на ползучесть вращающегося неоднородного цилиндра изучалось в [200].

В накоплении необратимых деформации можно выделить два физических явления, присущих практически всем материалам: ползучесть и пластическое течение. Накопление деформаций ползучести, как правило, является медленным и происходит при любом значении напряжений. Пластическое течение, с другой стороны, является быстрым процессом и происходит только при достижении телом некоторого предельного напряженного состояния. Смена механизмов накопления необратимых деформаций происходит на упругопластических границах. Данная глава посвящена расчету вязкопластического течения и ползучести во вращающемся цилиндре и диске. Для согласования механизмов накопления необратимых деформаций используется оригинальный подход [12, 13, 26].

3.2. Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра

3.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим длинный полый цилиндр, внешний и внутренний радиус которого равны соответственно r_{in} и r_{out} . Цилиндр вращается с угловой скоростью $\omega(t)$, которая медленно меняется со временем, и поэтому угловым ускорением будем пренебрегать. Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z ось z которой совпадает с образующей цилиндра. Для удобства перейдем к безразмерной радиальной координате:

$$\beta = \frac{r}{r_{out}}, \delta = \frac{r_{in}}{r_{out}}, \delta \leq \beta \leq 1.$$

Предположим, что деформации, возникающие в цилиндре, являются малыми, а напряженное-деформированное состояние одинаково в каждом сечении цилиндра и зависит только от радиальной координаты β . Вектор перемещений имеет две неизвестные компоненты u_r и u_z . В дальнейшем компоненту u_r будем обозначать как u .

Рассмотрим цилиндр, как с закрепленными, так и со свободными концами. Компоненты полных деформаций будем обозначать, как d_{ij} , а их упругие и пластические составляющие e_{ij} и p_{ij} . Кинематические соотношения запишем в следующем виде:

$$d_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta} = e_{rr} + p_{rr}; \quad d_{\theta\theta} = \frac{u}{\beta} = e_{\theta\theta} + p_{\theta\theta}; \quad d_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = e_{zz} + p_{zz}. \quad (3.1)$$

В случае закрепленного цилиндра имеет место плоская деформация: $d_{zz} = 0$, а в случае свободного цилиндра — обобщенная плоская деформация: $d_{zz} \neq 0$ и не зависит от радиуса.

Единственное нетривиальное уравнение равновесия в безразмерном виде примет следующую форму:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\beta} = -\Omega\beta, \quad \Omega = \frac{\rho r_{out}^2}{\sigma_y} \omega^2, \quad (3.2)$$

где ρ — плотность, σ_y — предел текучести при растяжении/сжатии.

Напряжения связаны с упругими деформациями по закону Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)e_{rr} + \nu e_{\theta\theta} + \nu e_{zz}); \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{rr} + (1-\nu)e_{\theta\theta} + \nu e_{zz}); \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{rr} + \nu e_{\theta\theta} + (1-\nu)e_{zz}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

При определенной скорости вращения Ω_p на внутренней поверхности $\beta = \delta$ цилиндра начинается пластическое течение. После этого

цилиндр разделяется на внутреннюю область пластического течения и внешнюю область чисто упругого деформирования. При дальнейшем увеличении скорости вращения упругопластическая граница продвигается по направлению к внешней поверхности $\beta = 1$ цилиндра. В результате чего пластическое течение распространяется на весь цилиндр.

Скорости пластических деформаций ε_{ij}^p определяются ассоциированным законом пластического течения:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial p_{ij}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.4)$$

где λ — положительный множитель, Φ — пластический потенциал.

В качестве условия текучести воспользуемся обобщением условия Мизеса на случай вязкопластического течения:

$$\Phi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \left(s_{ij} - \frac{\eta}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}^p \right) \left(s_{ji} - \frac{\eta}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}^p \right) = \frac{2}{3}, \quad (3.5)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^p \delta_{ij}.$$

где η — вязкость, s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений, ε_{ij}^p — компоненты девиатора тензора скоростей пластических деформаций.

Заметим, что при $\eta = 0$ используемое условие (3.5) сводится к классическому условию Мизеса для идеальной пластичности.

Преобразуем условие текучести к виду:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - Z(\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\theta\theta}^p) \right)^2 + \left(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} - Z(\varepsilon_{\theta\theta}^p - \varepsilon_{zz}^p) \right)^2 + \\ & + \left(\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - Z(\varepsilon_{zz}^p - \varepsilon_{rr}^p) \right)^2 = 2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $Z = \eta / \sigma_y$.

Найдем из (3.6) $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$ с учетом пластической несжимаемости:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rr}} &= 2(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} - 3\eta\varepsilon_{rr}); \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\theta\theta}} &= 2(2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz} - 3\eta\varepsilon_{\theta\theta}); \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}} &= 2(2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - 3\eta\varepsilon_{zz}).\end{aligned}$$

Далее с помощью ассоциированного закона (3.4) найдем выражения для скоростей пластических деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^p &= \frac{\lambda}{(1+3\lambda\eta)}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}); \\ \varepsilon_{\theta\theta}^p &= \frac{\lambda}{(1+3\lambda\eta)}(2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}); \\ \varepsilon_{zz}^p &= \frac{\lambda}{(1+3\lambda\eta)}(2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Подставим найденные выражения (3.7) обратно в условие пластичности (3.6), найдем неизвестный множитель $\frac{\lambda}{(1+3\lambda\eta)}$, и получим:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^p &= \frac{\sigma_y}{\eta} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma}\right) s_{rr}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{\sigma_y}{\eta} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma}\right) s_{\theta\theta}; \quad \varepsilon_{zz}^p = \frac{\sigma_y}{\eta} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma}\right) s_{zz}; \\ \Sigma &= \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Рассмотрим граничные и начальные условия задачи. Внутренняя и внешняя поверхность цилиндра свободны от напряжений:

$$\sigma_{rr}(\delta) = 0, \quad \sigma_{rr}(1) = 0.\tag{3.9}$$

В случае цилиндра со свободными концами требуется дополнительное условие для определения осевой деформации d_{zz} . Суммарная осевая сила, действующая в сечении цилиндра, равняется нулю:

$$2\pi \int_{\delta}^1 \beta \cdot \sigma_{zz} d\beta = 0.\tag{3.10}$$

Начальные условия задачи имеют вид:

$$p_{rr}(t=0) = p_{\theta\theta}(t=0) = p_{zz}(t=0) = 0.\tag{3.11}$$

Записанная система уравнений (3.1)–(3.3), (3.8) с учетом граничных и начальных условий (3.9)–(3.11) описывает упруговязкопластическое деформирование цилиндра, вращающегося с переменной скоростью. Вначале рассмотрим точное решение для двух частных случаев данной системы, а далее перейдем к численному решению для общего случая.

Для этого на внутренней поверхности должно выполняться условие текучести (3.6) в виде $\Sigma=2$, это произойдет, когда:

$$\Omega_p = 4 \frac{(1-\nu)}{(3+\delta^2-2\nu(1+\delta^2))} \sqrt{\frac{1}{(1-\nu+\nu^2)}}. \quad (3.12)$$

В случае свободного цилиндра ($d_{zz} \neq 0$) дополнительно используем условие (3.10) на осевую силу, из которого следует, что:

$$d_{zz} = -\frac{2\nu}{(1-\nu)} \frac{u(1)-\delta \cdot u(\delta)}{(1-\delta^2)}$$

Далее, используя граничные условия (7) найдем c_1, c_2 и получим:

$$u = \frac{1}{8} \frac{\sigma_y}{E} \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \Omega \left((3-2\nu)\delta^2 \frac{1}{\beta} + \frac{(3-5\nu)}{(1+\nu)} (1+\delta^2)\beta - (1-2\nu)\beta^3 \right)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{8} \frac{(3-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega \left(1+\delta^2 - \delta^2 \frac{1}{\beta^2} - \beta^2 \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{8} \frac{(3-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega \left(1+\delta^2 + \delta^2 \frac{1}{\beta^2} - \frac{(1+2\nu)}{(3-2\nu)} \beta^2 \right);$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu} \Omega (1+\delta^2 - 2\beta^2).$$

Заметим, что напряжение σ_{zz} не зависит от типа граничных условий. В частности, для цилиндра с жестким включением, в котором $u(\delta)=0$ и $\sigma_{rr}(1)=0$ напряжение σ_{zz} будет иметь такой же вид.

Аналогично найдем скорость начала пластического течения:

$$\Omega_p = 4(1-\nu) \left((3+\delta^2)^2 + \nu^2(7+6\delta^2+3\delta^4) - \nu(15+14\delta^2+3\delta^4) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

3.2.2 Вязкопластическое решение

Предположим, что цилиндр вращается с постоянной скоростью, которая достаточна для того, чтобы пластическое течение происходило во всем цилиндре. Рассмотрим стационарный случай: напряжения и скорости пластических деформаций постоянны. Тогда полные скорости деформаций среды равны скоростям пластических деформаций:

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{\partial v}{\partial \beta}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{v}{\beta}; \quad \varepsilon_{zz}^p = \varepsilon_{zz}; \quad (3.14)$$

где v — радиальная компонента скорости, ε_{zz} — скорость осевой деформации. В случае плоской деформации: $\varepsilon_{zz} = 0$, в случае обобщенной плоской деформации: $\varepsilon_{zz} \neq 0$ и не зависит от β .

Материал цилиндра пластически несжимаем:

$$\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{zz}^p = 0. \quad (3.15)$$

Решение уравнения несжимаемости (3.15) имеет вид:

$$\varepsilon_{rr}^p = -\frac{\varepsilon_{zz}}{2} - \frac{c}{\beta^2}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = -\frac{\varepsilon_{zz}}{2} + \frac{c}{\beta^2}, \quad (3.16)$$

где c — константа интегрирования.

Рассмотрим случай закрепленного цилиндра $\varepsilon_{zz} = 0$, тогда $\varepsilon_{\theta\theta}^p = -\varepsilon_{rr}^p$ и закон течения (3.8) с учетом решения (3.16) примет вид:

$$\begin{aligned} -\frac{c}{\beta^2} &= \frac{\sigma_y}{\eta} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma} \right) \left(\sigma_{rr} - \frac{1}{3} \sigma \right); \\ \frac{c}{\beta^2} &= \frac{\sigma_y}{\eta} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma} \right) \left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{3} \sigma \right); \\ 0 &= \frac{\sigma_y}{\eta} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma} \right) \left(\sigma_{zz} - \frac{1}{3} \sigma \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из третьего уравнения (3.17) следует, что $\sigma_{zz} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2$.

Используя предыдущее выражение и тот факт, что в цилиндре $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$ первые два уравнения (3.17) можно значительно упростить:

$$\Sigma = \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = -\varepsilon_{rr}^p = \frac{c}{\beta^2} = \frac{Z}{2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})} \right) (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}).$$

Далее найдем разность напряжений $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$:

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{2c}{Z} \beta^{-2} + \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (3.18)$$

Подставляя найденное выражение в уравнение равновесия (3.2) получим уравнение в преобразованном виде:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} = -\Omega \beta + \frac{2c}{Z} \beta^{-3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \beta^{-1}. \quad (3.19)$$

Решение уравнения (3.19):

$$\sigma_{rr} = -\frac{\Omega}{2} \beta^2 - \frac{c}{Z} \beta^{-2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \beta + d. \quad (3.20)$$

где d — константа интегрирования.

Используя граничные условия задачи (3.9) получим систему уравнений для определения неизвестных констант c, d :

$$-\Omega \frac{\delta^2}{2} - \frac{c}{Z} \frac{1}{\delta^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \delta + d = 0; \quad -\frac{\Omega}{2} - \frac{c}{Z} + d = 0. \quad (3.21)$$

Решение системы (3.21) представлено ниже

$$c = Z \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right); \quad d = \frac{\Omega}{2} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right).$$

Подставляя найденные константы в (3.20), а также в (3.18), (3.17) и (3.16) получим выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\Omega}{2} (1 - \beta^2) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right) \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \beta; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\Omega}{2} (1 - \beta^2) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right) \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} (\ln \beta + 1); \\ \sigma_{zz} &= \frac{\Omega}{2} (1 - \beta^2) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \ln \beta + 1); \end{aligned} \quad (3.22)$$

и скоростей деформаций:

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = -\varepsilon_{rr}^p = Z \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1-\delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right) \frac{1}{\beta^2}.$$

Заметим, что от вязкости Z зависят только скорости деформаций.

Полученное решение имеет смысл, когда пластическое течение происходит во всем цилиндре:

$$\Omega \geq \Omega_{fp}$$

где Ω_{fp} — минимальная скорость, при которой условие пластичности выполняется на внешней поверхности цилиндра.

Условие (3.6) на упругопластической границе примет вид:

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 2/\sqrt{3}. \quad (3.23)$$

Используя найденное решение (3.22) в точке $\beta = 1$ найдем:

$$\Omega_{fp} = -\frac{4 \ln \delta}{\sqrt{3}(1-\delta^2)}.$$

Рассмотрим случай обобщенной плоской деформации. Скорости пластических деформаций имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon_{zz}}{2} - \frac{c}{\beta^2} &= Z \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma} \right) \left(\sigma_{rr} - \frac{1}{3} \sigma \right); \\ -\frac{\varepsilon_{zz}}{2} + \frac{c}{\beta^2} &= Z \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma} \right) \left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{3} \sigma \right); \\ \varepsilon_{zz} &= Z \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma} \right) \left(\sigma_{zz} - \frac{1}{3} \sigma \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Введем обозначение $K = Z \left(1 - \sqrt{2} \Sigma^{-1} \right)$ и из последнего выражения найдем осевое напряжение σ_{zz} :

$$\sigma_{zz} = \frac{(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})}{2} + \frac{3 \varepsilon_{zz}}{2 K}.$$

Подставим найденное выражение в два первых уравнения (3.24), а затем вычтем из второго уравнения первое и получим:

$$K = \frac{2c}{\beta^2} \frac{1}{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})}; \quad \sigma_{zz} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon_{zz}}{c} \beta^2 (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}). \quad (3.25)$$

С учетом того, что в свободном цилиндре также $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$ найдем:

$$\Sigma = \sqrt{3(4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4) / 8c^2} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}). \quad (3.26)$$

Подставим выражения (3.25), (3.26) во второе уравнение (3.24):

$$-\frac{\varepsilon_{zz}}{2} + \frac{c}{\beta^2} = Z \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3(4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4) / (8c^2)} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})} \right) \frac{(2c - \varepsilon_{zz} \beta^2) (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})}{4c}$$

Положим, что $c \geq 0$ и после преобразований найдем разность:

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{2c}{Z} \beta^{-2} + \frac{4c}{\sqrt{3(4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4)}}. \quad (3.27)$$

Уравнение равновесия (3.19) с учетом (3.27) запишется в виде:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} = -\Omega \beta + \frac{2c}{Z} \beta^{-3} + \frac{4c}{\beta \sqrt{3(4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4)}}$$

Решение предыдущего уравнения представлено ниже

$$\sigma_{rr} = -\frac{c}{Z} \beta^{-2} - \frac{\Omega}{2} \beta^2 + \frac{\left(\ln \beta^2 - \ln \left(c \left(2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4} \right) \right) \right)}{\sqrt{3}} + d. \quad (3.28)$$

Из граничного условия $\sigma_{rr}(1) = 0$ найдем константу интегрирования d и напряжения с учетом (3.28), (3.27), (3.25) примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\Omega}{2} (1 - \beta^2) + \frac{c}{Z} \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \beta + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2}}{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4}} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\Omega}{2} (1 - \beta^2) + \frac{c}{Z} \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{4c}{\sqrt{3} \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4}} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \beta + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2}}{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4}} \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{\Omega}{2} (1 - \beta^2) + \frac{c}{Z} + \frac{3\varepsilon_{zz}}{2Z} + \frac{2c + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^2}{\sqrt{3} \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \beta + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2}}{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4}} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что полученное решение сводится к решению для случая плоской деформации, если положить $\varepsilon_{zz} = 0$. Для определения константы c и скорости осевой деформации ε_{zz} необходимо использовать граничное условие на внутренней поверхности цилиндра и условие на осевую силу. После преобразований получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\Omega}{2}(1-\delta^2) + \frac{c}{Z}\left(1-\frac{1}{\delta^2}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\delta + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2}}{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2}\delta^4}\right) = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{\sqrt{12c^2 + 9\varepsilon_{zz}^2}}{\varepsilon_{zz}} - \frac{\sqrt{12c^2 + 9\varepsilon_{zz}^2}\delta^4}{\varepsilon_{zz}} + \frac{9\varepsilon_{zz}}{2Z}(1-\delta^2) + \frac{3}{4}\Omega(1-\delta^4) = 0.$$

Видим, что в отличие от плоской деформации, система уравнений (3.29) относительно неизвестных констант является нелинейной и получить ее точное решение затруднительно, поэтому будем использовать численные методы. Для определения скорости вращения Ω_{fp} к системе (3.29) добавится условие пластичности на внешней поверхности.

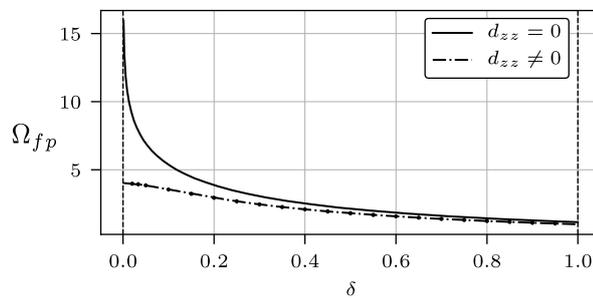


Рис. 3.1 — Зависимости скорости Ω_{fp} от геометрического параметра δ .

Зависимость скорости Ω_{fp} от δ представлена на рис 3.1. Линия, соответствующая случаю обобщенной плоской деформации, построена ($\varepsilon_{zz} = 0$) с помощью интерполяции. Следует отметить, что свободный цилиндр переходит в состояние полной пластичности при меньшей скорости вращения, чем закрепленный. Численные расчеты показали, что, в частности, для $\nu = 0.3, \delta = 0.2$ в свободном цилиндре $\Omega_{fp} = 2.94$, а в закрепленном: $\Omega_{fp} = 3.87$. Полученное вязкопластическое решение при скорости

вращения $\Omega = \Omega_{fp}$ представлено на рис. 3.2 в виде графиков напряжений.

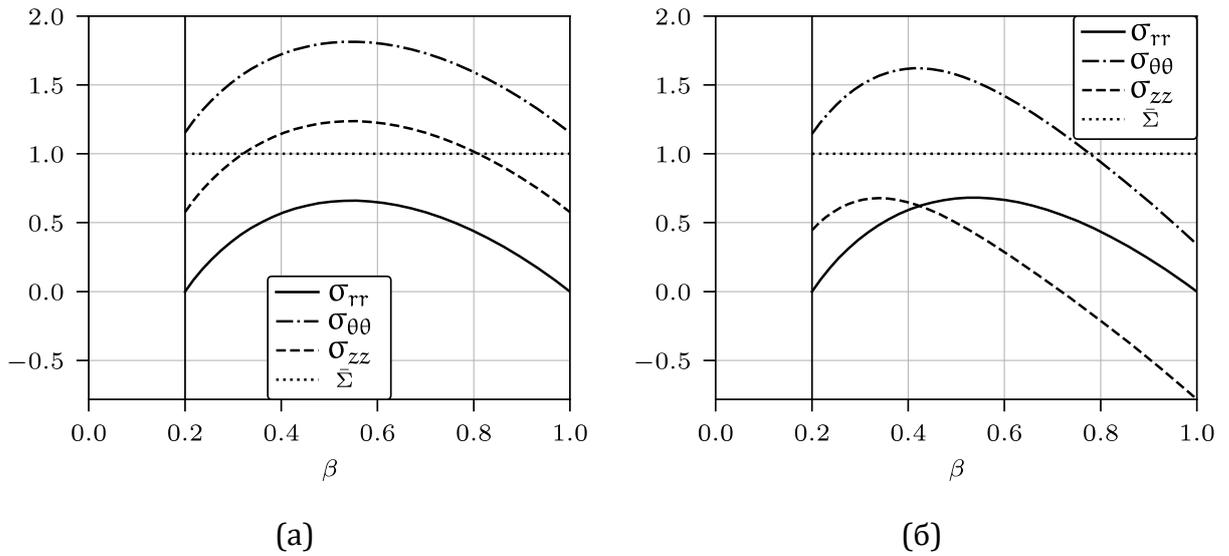


Рис. 3.2 — Напряжения в цилиндре при скорости вращения $\Omega = \Omega_{fp}$: (а) плоская деформация, (б) обобщенная плоская деформация ($\varepsilon_{zz} \neq 0$).

Приведенные рассуждения можно повторить для условия пластичности Треска, которое с учетом вязких свойств материала можно записать в следующей форме:

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 1 + 2 \frac{\eta}{\sigma_y} \max|\varepsilon_i^p - \varepsilon_j^p|$$

При достаточно больших значениях δ в закрепленном цилиндре имеет место неравенство $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$, что позволяет повторить ход решения, рассмотренный выше для условия Мизеса (3.6). При этом все неизвестные функции (скорости деформаций, напряжения, предельная скорость Ω_{fp}) оказываются незначительно меньше, чем при использовании условия Мизеса. В закрепленном цилиндре близком к сплошному, а также в свободном цилиндре появляется область, в которой $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$ и однозначно выразить наибольшее и наименьшее главное напряжение становится невозможным. В этом случае решение задачи усложняется, поскольку необходимо записывать ассоциированный закон отдельно для каждой подобласти и использовать условие непрерывности напряжений на границе между ними.

3.2.3 Численная схема

Рассмотрим решение упруговязкопластической задачи. Перепишем уравнение равновесия (3.19) с помощью Закона Гука (3.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} u = - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{\sigma_y}{E} \Omega \beta + \\ + \frac{\partial p_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial p_{\theta\theta}}{\partial \beta} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\beta} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} (p_{rr} - p_{\theta\theta}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Для численного интегрирования уравнения (3.30) будем использовать метод конечных разностей. Разобьем область деформирования $[\delta, 1]$ на n узлов с координатами $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$. Узел с индексом 0 соответствует левой границе области, а с индексом $n-1$ – правой границе. Шаг сетки обозначим как $\Delta\beta$. Будем использовать равномерную сетку, тогда:

$$\Delta\beta = \frac{1-\delta}{n-1}, \beta_i = \delta + i \cdot \Delta\beta, (i=0, 1, \dots, n-1).$$

Для аппроксимации пространственных производных будем применять центральные шаблоны аппроксимации 2-го порядка точности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} \cong \frac{y^{i-1,j} - 2y^{i,j} + y^{i+1,j}}{(\Delta\beta)^2}, (i=1, 2, \dots, n-2); \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} \cong \frac{y^{i+1,j} - y^{i-1,j}}{2\Delta\beta}, (i=1, 2, \dots, n-2). \end{aligned}$$

В предыдущих выражениях $y^{i,j}$ — значение неизвестной функции y в i -ом узле на j -м временном шаге. В граничных точках $i=0, i=n-1$ используются односторонние шаблоны 2-го порядка точности

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} \cong \frac{-y^{i+2,j} + 4y^{i+1,j} - 3y^{i,j}}{2\Delta\beta}; \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} \cong \frac{y^{i-2,j} - 4y^{i-1,j} + 3y^{i,j}}{2\Delta\beta}.$$

В уравнениях (3.8) от времени t перейдем к переменной τ :

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial \tau} = X \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma} \right) s_{ij}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad X = \frac{\sigma_y T}{\eta}, \quad (3.31)$$

где T — продолжительность процесса.

Весь процесс деформирования разделим на m временных шагов одинаковой продолжительности $\Delta\tau$. Для аппроксимации производной по времени в уравнениях (3.31) будем использовать явную схему:

$$p_{ij}^{k,t} = p_{ij}^{k,t-1} + \Delta\tau \cdot X \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\Sigma^{k,t-1}} \right) s_{ij}^{k,t-1}, \quad (k=0,1,\dots,n-1, t=1,2,\dots,m).$$

Считаем, что на 0-м временном шаге все неизвестные величины равны нулю, тогда 1-ый шаг будет соответствовать упругому решению.

Область пластического течения и положение упругопластической границы n_p определяется с помощью численной аппроксимации условия пластичности. Узел с индексом i относится к области течения, если

$$\Sigma^i \leq \sqrt{2},$$

и к области чисто упругого деформирования в противном случае.

При расчете обобщенной плоской деформации требуется вычисление осевой деформации d_{zz} . Для этого преобразуем условие (3.10) с помощью закона Гука, получим:

$$d_{zz} = \frac{2}{(1-\delta^2)} I(p_{rr}, p_{\theta\theta}, p_{zz}) - \frac{2}{(1-\delta^2)} \frac{\nu}{1-\nu} u^{n-1} + \frac{2\delta}{(1-\delta^2)} \frac{\nu}{1-\nu} u^0,$$

$$I(p_{rr}, p_{\theta\theta}, p_{zz}) = \frac{\nu}{1-\nu} \int_{\delta}^1 \beta \cdot (p_{rr} + p_{\theta\theta}) d\beta + \int_{\delta}^1 \beta \cdot p_{zz} d\beta.$$

Определение деформации d_{zz} требует вычисления определенных интегралов. Для этого можно воспользоваться методом трапеций:

$$\int_{\delta}^1 \beta \cdot (p_{rr} + p_{\theta\theta}) d\beta \cong \Delta\beta \left(\frac{\delta \cdot (p_{rr}^0 + p_{\theta\theta}^0) + p_{rr}^{k-1} + p_{\theta\theta}^{k-1}}{2} + \sum_{i=1}^{k-2} \beta_i (p_{rr}^i + p_{\theta\theta}^i) \right);$$

$$\int_{\delta}^1 \beta \cdot p_{zz} d\beta \cong \Delta\beta \left(\frac{\delta \cdot p_{zz}^0 + p_{zz}^{k-1}}{2} + \sum_{i=1}^{k-2} \beta_i p_{zz}^i \right).$$

3.2.4 Результаты расчетов

Рассмотрим вращение цилиндра по следующему закону (рис. 3.3): сначала происходит увеличение скорости вращения от Ω_p до Ω_{\max} , далее скорость остается постоянной:

$$\Omega(\tau) = \begin{cases} \frac{(\Omega_{max} + \Omega_p)}{2} + (\Omega_{max} - \Omega_p) \sin\left(2\pi\tau - \frac{\pi}{2}\right), & 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ \Omega_{max}, & \frac{1}{2} < \tau \leq 1 \end{cases}$$

Положим, что $\Omega_{max} = 1.05\Omega_{fp}$. При этом Ω_{fp} , разумеется, имеет разные значения для плоской деформации и обобщенной плоской деформации. Для параметров задачи примем значения:

Соотношение между внутренним и внешним радиусом: $\delta = 0.2$.

Предел текучести: $\sigma_y = 2.5 \cdot 10^8$ Па.

Модуль Юнга: $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па.

Предел текучести (безразмерный): $\sigma_y/E \cong 0.00119$

Коэффициент Пуассона: $\nu = 0.3$.

$$X = \frac{\sigma_y T}{\eta} = 0.1.$$

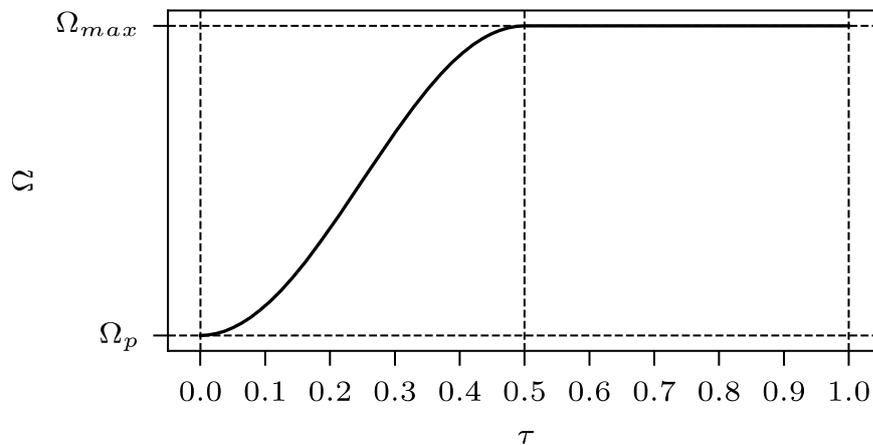


Рис. 3.3 — Зависимость скорости вращения Ω от времени.

Для проведения численных расчетов использовалась сетка, состоящая из 2000 узлов и 5000 шагов по времени. На рис. 3.4 представлен график движения упругопластической границы. При этом положение границы $\beta = \delta$ соответствует случаю, когда пластическое течение еще не началось, а $\beta = 1$ — когда течение происходит во всем цилиндре. Из графика видим, что в свободном цилиндре пластическое течение

распространяется быстрее, чем в закрепленном, и уже к середине процесса занимает цилиндр полностью. Увеличение параметра X приводит к более интенсивному развитию пластического течения в цилиндре. Тем не менее, как показали численные расчеты, если скорость вращения Ω не превосходит критической скорости Ω_{fp} , то упругопластическая граница не достигает внешней границы области даже при больших значениях X .

Рассмотрим развитие напряжений в ходе процесса. Графики напряжений для моментов времени $\tau = 0.0, 0.25, 0.5, 1.0$ представлены на рис. 3.5–3.7. При упруговязкопластическом деформировании напряжения в закрепленном и свободном цилиндре ведут себя в целом схожим образом, при этом абсолютные величины напряжений в свободном цилиндре ниже. Видим, что с развитием пластического течения точка максимума радиальных напряжений σ_{rr} сдвигается в сторону центра области (рис. 3.5). Наибольшими являются напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (рис. 3.6), их величина в закрепленном цилиндре достигает $\approx 2\sigma_y$, а в свободном $\approx 1.7\sigma_y$. Распределение напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ существенным образом меняется в ходе процесса. Вследствие условия (3.10) на осевую силу в свободном цилиндре имеется область отрицательных напряжений (рис. 3.7). Граница этой области незначительно меняется со временем.

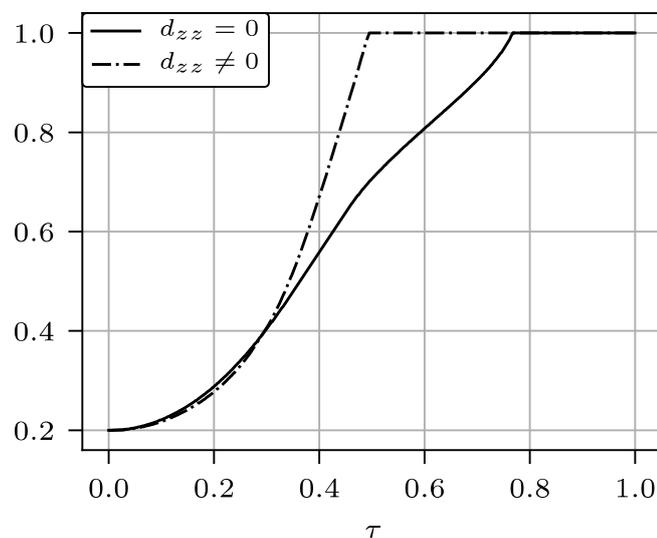
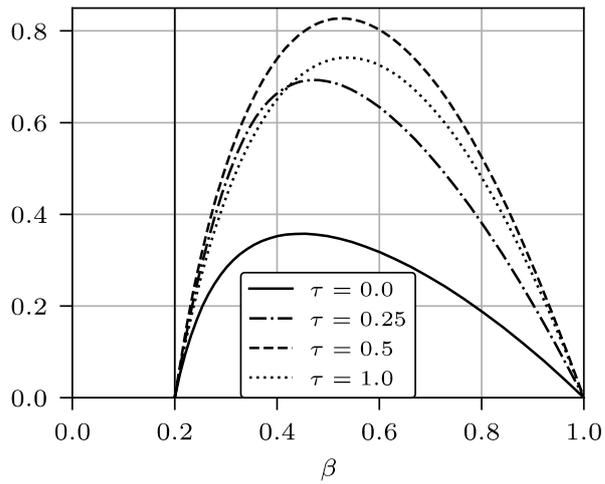
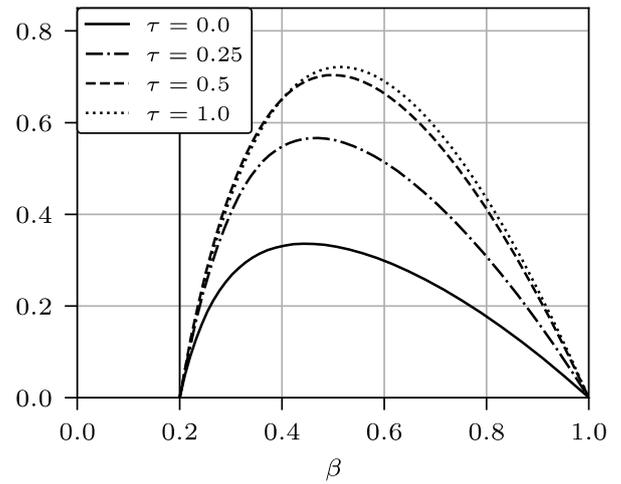


Рис. 3.4 — Эволюция упругопластической границы в цилиндре.

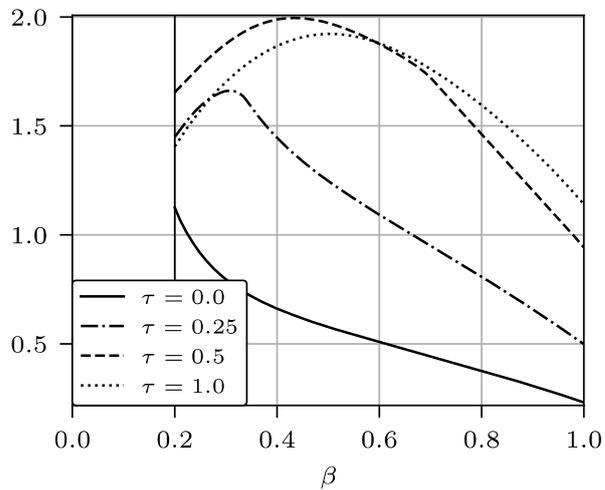


(а)

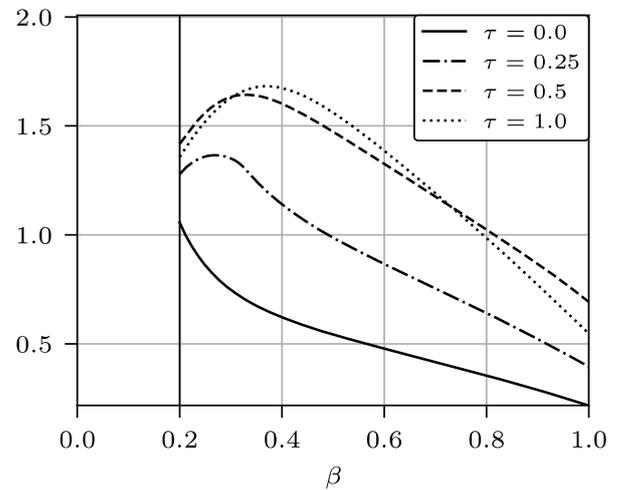


(б)

Рис. 3.5 — Напряжения σ_{rr} в цилиндре в разные моменты времени:
(а) плоская деформация ($\varepsilon_{zz} = 0$), (б) обобщенная плоская деформация ($\varepsilon_{zz} \neq 0$).

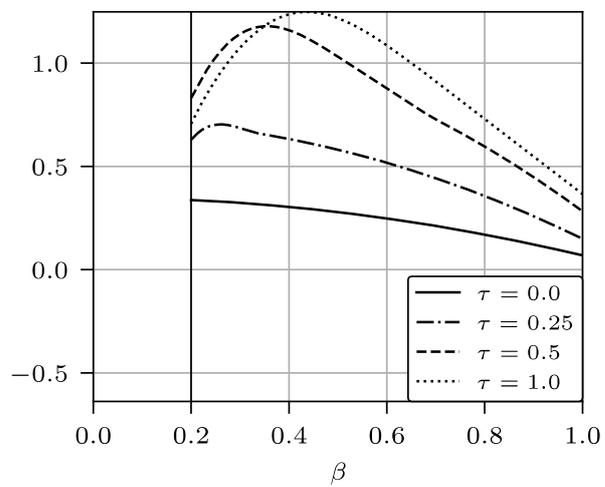


(а)

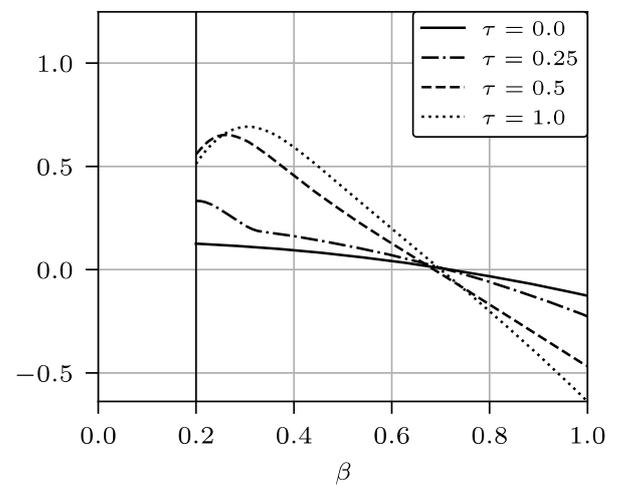


(б)

Рис. 3.6 — Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ в цилиндре в разные моменты времени:
(а) плоская деформация, (б) обобщенная плоская деформация.



(а)



(б)

Рис. 3.7 — Напряжения σ_{zz} в цилиндре в разные моменты времени:
(а) плоская деформация, (б) обобщенная плоская деформация.

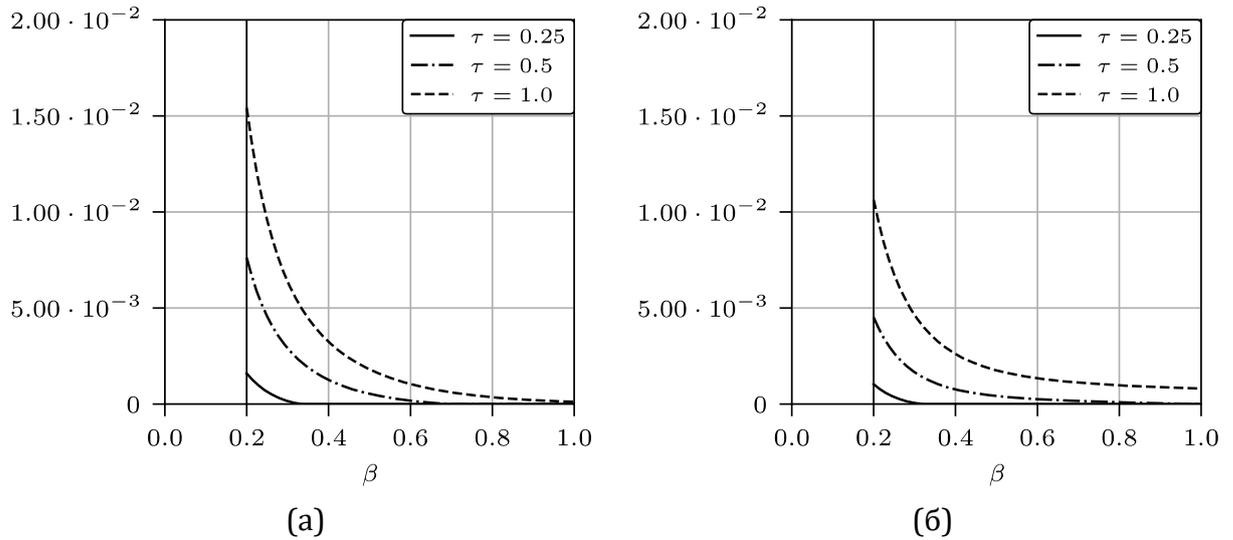


Рис. 3.8 — Деформации $p_{\theta\theta}$ в цилиндре в разные моменты времени: (а) плоская деформация, (б) обобщенная плоская деформация.

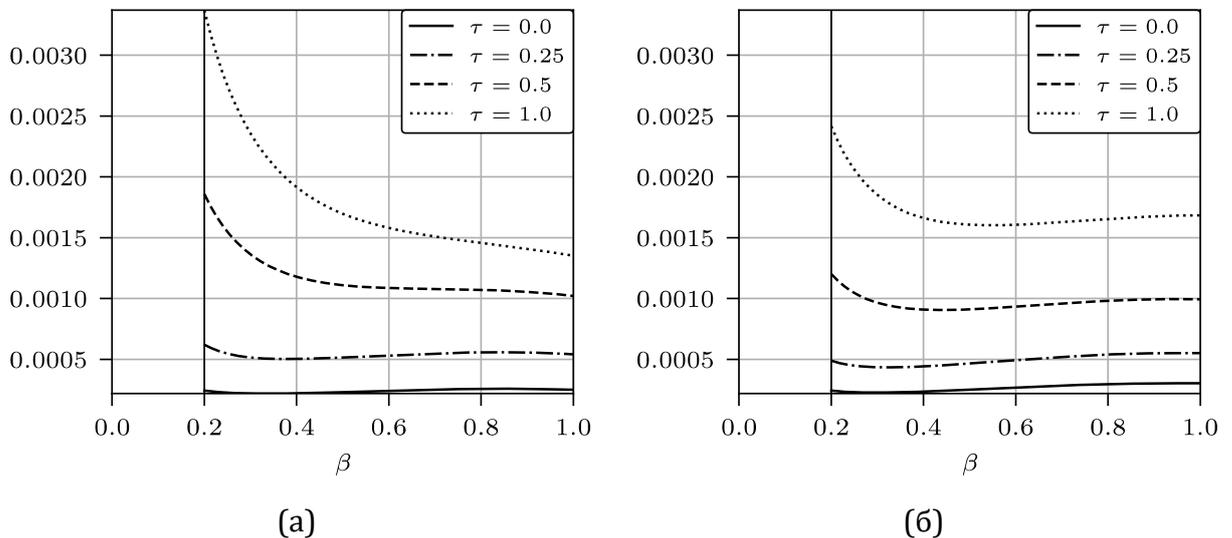


Рис. 3.9 — Перемещения u в цилиндре в разные моменты времени: (а) плоская деформация ($\varepsilon_{zz} = 0$), (б) обобщенная плоская деформация ($\varepsilon_{zz} \neq 0$).

Перейдем к анализу пластических деформаций. Заметим, что в закрепленном цилиндре деформации p_{zz} на два порядка меньше других компонент и $p_{rr} \cong p_{\theta\theta}$. В свободном цилиндре деформации p_{zz} существенно больше по сравнению с закрепленным, но примерно на порядок меньше деформаций p_{rr} и $p_{\theta\theta}$. Ограничимся графиком для деформаций $p_{\theta\theta}$ в моменты времени $\tau = 0.25, 0.5, 1.0$, который представлен на рис. 3.8. Видим, что в закрепленном цилиндре деформации выше, при этом деформированное состояние качественно не отличается. Максимальное значение деформаций достигается на внутренней поверхности.

На рис. 3.9 представлены графики радиальных перемещений в моменты времени $\tau = 0.0, 0.25, 0.5, 1.0$. Максимальные значения перемещений в закрепленном цилиндре имеют место на внутренней поверхности области. При этом в свободном цилиндре распределение перемещений меняется с течением времени. На первых шагах максимум достигается на внешней поверхности цилиндра, а примерно с середины процесса — на внутренней. В среднем перемещения в закрепленном цилиндре выше.

Для проверки корректности используемого численного алгоритма воспользуемся рассмотренными ранее точными решениями: упругим и вязкопластическим. Примем параметр $X = 1$, тогда после $\tau > 0.5$ напряжения и скорости пластических деформаций быстро стабилизируются и далее меняются незначительно. Первый и последний временной шаг представляет собой численное решение упругой и вязкопластической задачи. В обоих случаях имеет место хорошее совпадение с соответствующими точными решениями.

Следует отметить, что дальнейшее увеличение параметра X или скорости вращения Ω может привести к некорректным результатам. Во-первых, с ростом деформаций в цилиндре теория малых упругопластических деформаций становится неприменимой. Во-вторых, напряжения могут превзойти предел прочности. В этом случае для адекватного моделирования упругопластического деформирования во вращающемся цилиндре необходимо использовать теорию больших деформаций [201, 202] и одновременно учитывать эффекты вязкости и упрочнения.

3.3. Ползучесть и вязкопластическое течение во вращающемся диске переменной толщины

3.3.1 Постановка задачи

Считаем, что материал диска обладает как упругими, так и вязкими и пластическими свойствами. Термодинамическими параметрами,

задающими текущее состояние деформируемого тела, считаются обратимые и необратимые деформации. Уравнения их изменения постулируются [203] в форме

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{e}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{z})), \\ \frac{D\mathbf{p}}{Dt} &= \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}.\end{aligned}\quad (3.32)$$

В (3.32) следуя способу задания Эйлера, введены обозначения

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{n}}{Dt} &= \frac{d\mathbf{n}}{dt} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla^T\mathbf{v}); \\ \mathbf{v} &= \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{u}; \quad \mathbf{r} = -\mathbf{r}^T = \mathbf{w} + \mathbf{z}; \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} - \nabla^T\mathbf{v}); \\ \mathbf{z} &= A^{-1}(B^2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + B(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}); \\ A &= 8 - 8J_1 + 3J_1^2 - J_2 - \frac{1}{3}J_1^3 + \frac{1}{3}J_3; \quad J_1 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}; \quad J_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}^2; \quad J_3 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}^3.\end{aligned}\quad (3.33)$$

В (3.33) \mathbf{u}, \mathbf{v} — векторы перемещений и скорости, \mathbf{I} — единичный тензор, \mathbf{n} — произвольный тензор, служащий для конкретизации введенной в (3.32) объективной производной. Только в таком случае уравнения (3.32) являются геометрически непротиворечивыми. При равенстве нулю нелинейной части тензора поворота $\mathbf{r} (\mathbf{z} \equiv 0)$, введенная объективная производная совпадает с производной Яуманна. Когда источник $\boldsymbol{\gamma}$ в уравнении переноса необратимых деформаций равен нулю ($\boldsymbol{\gamma} = 0$), то компоненты \mathbf{p} изменяются также как и при жестком движении тела. Поэтому в [203] тензор \mathbf{p} объявляется тензором необратимых деформаций.

Следствием закона сохранения энергии при уравнениях (3.32) являются аналог формулы Мурнагана и уравнение баланса энтропии s [203]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \rho \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{e}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{e}); \quad \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\text{div}\mathbf{J} - T^{-2}\mathbf{q} \cdot \text{drad}T + T^{-1}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}; \\ \psi(\mathbf{e}, T) &= e(\mathbf{e}, s) - sT; \quad \mathbf{J} = \rho s\mathbf{v} + T^{-1}\mathbf{q}.\end{aligned}\quad (3.34)$$

В (3.34) \mathbf{q}, \mathbf{J} — потоки тепла и энтропии, ρ — плотность, T —

температура, e, ψ — термодинамические потенциалы: плотности распределения внутренней и свободной энергии. Как в большинстве публикаций, посвященных расчетам больших упругопластических деформаций, принимается, что термодинамические потенциалы $e(\mathbf{e}, s)$ или $\psi(\mathbf{e}, T)$ не зависят от необратимых деформаций. Такая гипотеза принимается и в классических моделях типа Прандтля-Рейса. Для замкнутости соотношений математической модели теперь следует записать уравнения равновесия (изотермическое квазистатическое приближение), задать потенциал $\psi(\mathbf{e})$ и определяющий закон $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\sigma})$.

С началом процесса необратимые деформации в теле растут в форме деформаций ползучести. В качестве определяющего закона производства необратимых деформаций \mathbf{p} можно принять следующий вариант степенного закона ползучести Нортона [204]

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \quad V(\Sigma) = B\Sigma^n; \quad (3.35)$$

$$\Sigma = \sqrt{3/2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2}.$$

В (3.35) B, n — постоянные материала, $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ — тензор скоростей деформаций ползучести, σ_i — главные напряжения, $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$.

Когда напряженное состояние в материале достигает поверхности нагружения, диссипативный механизм деформирования меняется, появляется область течения. Связь скоростей пластических деформаций ε_{ij}^p с напряжениями в таких областях согласно принципу максимума Мизеса устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\xi} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \lambda > 0, \quad \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_0^v, \quad (3.36)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{s} - \eta \boldsymbol{\xi})(\mathbf{s} - \eta \boldsymbol{\xi}) - 2k = 0, \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma.$$

В (3.36) k — предел текучести, η — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ — тензор скоростей пластических

деформаций, $\boldsymbol{\varepsilon}_0^v$ — скорость деформаций ползучести при подходе к данной точке материала упругопластической границы, \mathbf{s} — девиатор тензора $\boldsymbol{\sigma}$. Выбор Σ в (3.35) и соответствующего ему обобщенного условия Мизеса [205] связан с упрощениями при выполнении условий непрерывности необратимых деформаций на упругопластических границах.

Следствием (3.32) и (3.33) является следующее разбиение тензора полных деформаций Альманси на составляющие

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{e}^2 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}. \quad (3.37)$$

Заметим, что тензор \mathbf{e} является только главной линейной частью тензора обратимых деформаций. Далее деформации будем считать малыми, для которых

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p}. \quad (3.38)$$

Напряжения связаны с обратимыми деформациями законом Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{I} \cdot \mathbf{e} + 2\mu \mathbf{e}. \quad (3.39)$$

В соотношениях (3.39) λ, μ — коэффициенты Ламе.

3.3.2 Деформирование до начала пластического течения

Рассмотрим вращающийся с угловой скоростью $\omega(t)$ кольцевой диск, внутренний и внешний радиусы которого обозначено $r = r_0$ и $r = R$ соответственно. Считаем, что реализуется плоское напряженное состояние, в случае осевой симметрии отличными от нуля остаются компоненты напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$.

Для диска со свободными внешней и внутренней поверхностью граничные условия запишутся в виде:

$$\sigma_{rr} |_{r=r_0} = \sigma_{rr} |_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\theta} |_{r=R} = 0, \quad (3.40)$$

и для диска с жестким включением

$$u_r |_{r=r_0} = 0, \quad \sigma_{rr} |_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\theta} |_{r=R} = 0. \quad (3.41)$$

В начальный момент времени считаем, что напряжения и

деформации в материале отсутствуют.

Отличными от нуля компонентами полных деформаций являются

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; d_{r\theta} = e_{r\theta} + p_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right); d_{\theta\theta} = e_{\theta\theta} + p_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}. \quad (3.42)$$

Из закона (3.39) следуют соотношения для напряжений

$$\sigma_{rr} = \frac{2\lambda\mu(e_{rr} + e_{\theta\theta})}{\lambda + 2\mu} + 2\mu e_{rr}; \sigma_{\theta\theta} = \frac{2\lambda\mu(e_{rr} + e_{\theta\theta})}{\lambda + 2\mu} + 2\mu e_{\theta\theta}; \sigma_{r\theta} = 2\mu e_{r\theta}. \quad (3.43)$$

Компоненты тензора скоростей обратимых деформаций определяются по формулам

$$\varepsilon_{rr}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{rr} - \lambda\dot{\sigma}_{\theta\theta}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \varepsilon_{\theta\theta}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{\theta\theta} - \lambda\dot{\sigma}_{rr}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \varepsilon_{r\theta}^e = \frac{\dot{\sigma}_{r\theta}}{2\mu}. \quad (3.44)$$

Здесь и далее точкой сверху обозначена производная по времени.

До начала пластического течения считаем, что накопление необратимых деформаций связано с процессом ползучести. Для определения скоростей необратимых деформаций воспользуемся степенным законом ползучести Нортона (3.35):

$$\varepsilon_{rr}^v = \frac{1}{2} Bn(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})Q^{\frac{n}{2}-1}, \varepsilon_{\theta\theta}^v = \frac{1}{2} Bn(2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_{zz}^v = -\frac{1}{2} Bn(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})Q^{\frac{n}{2}-1}, \varepsilon_{r\theta}^v = \frac{3}{2} Bn\sigma_{r\theta}Q^{\frac{n}{2}-1}, Q = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\sigma_{r\theta}^2.$$

При вращении с переменной скоростью на каждую точку диска помимо ускорения $r\omega^2$ будет действовать вращательное ускорение $r d\omega/dt$. Тогда на диск будут действовать две системы инерционных сил, связанные с присутствием центробежного и вращательного ускорений. Тогда уравнения равновесия в диске примут вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\rho r \omega^2, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} = \rho r \frac{d\omega}{dt}. \quad (3.46)$$

Интегрируя второе уравнение равновесия (3.46) при граничном условии (3.40) найдем

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\rho}{4} \frac{d\omega}{dt} \left(r^2 - \frac{R^4}{r^2} \right). \quad (3.47)$$

Используя зависимости для деформаций (3.42), получим

$$r \frac{\partial d_{\theta\theta}}{\partial r} + d_{\theta\theta} - d_{rr} = 0. \quad (3.48)$$

Для скоростей деформаций в этом случае следует соотношение

$$r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^e}{\partial r} + r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^p}{\partial r} + \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p - \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{rr}^p = 0. \quad (3.49)$$

Введение функции напряжений $\varphi(r, t)$ в виде

$$\sigma_{rr} = \frac{\varphi}{r}, \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \rho \omega^2 r^2. \quad (3.50)$$

позволяет удовлетворить первому уравнению равновесия (3.46).

В случае чисто упругого деформирования, используя соотношение и учитывая, что при обратимом деформировании $d_{ij} = e_{ij}$, получим уравнение для определения функции напряжений $\varphi(r, t)$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi(r, t)) \right] = -\frac{7\lambda + 6\mu}{2(\lambda + \mu)} \rho \omega^2(t) r. \quad (3.51)$$

Интегрируя уравнение (3.51) и используя граничные условия (3.40) и (3.41), найдем для полого диска

$$\varphi(r, t) = \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \frac{(r^2 - r_0^2)(R^2 - r^2)}{r} \rho \omega^2$$

и для диска с включением

$$\varphi(r, t) = \left(-\frac{(3r^4 + R^4)(7\lambda + 6\mu)}{16r^2(\lambda + \mu)} + \frac{(r^2 + R^2)(3\lambda + 2\mu)(r_0^4(\lambda + 2\mu) + R^4(7\lambda + 6\mu))}{16r^2(\lambda + \mu)(r_0^2(\lambda + 2\mu) + R^2(3\lambda + 2\mu))} \right) \rho \omega^2.$$

Для вязкоупругого материала, подставляя зависимости (3.50), соотношения (3.44) и (3.45) соответственно в (3.51), получим уравнение относительно функции напряжений $\varphi(r, t)$

$$\begin{aligned}
& \frac{r^3(7\lambda+6\mu)\rho\omega^2 + 2(\lambda+\mu)\left(r\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial t} + r\frac{\partial^3\varphi}{\partial^2 r\partial t}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{2r\mu(3\lambda+2\mu)} + \\
& + \frac{Bn\left(7r^2\rho\omega^2 - \frac{2\varphi}{r} + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)\right)}{2} \left[Q(\varphi(r,t),r,t)\right]^{\frac{n}{2}-1} + \\
& + r\frac{Bn}{2}\left(2\left(r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \frac{\varphi}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(Q(\varphi(r,t),r,t)\right)^{\frac{n}{2}-1}\right] = 0, \quad (3.52) \\
& Q(\varphi(r,t),r,t) = \frac{\varphi^2}{r^2} - \frac{\varphi}{r}\left(r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \\
& + \left(r^2\rho\omega^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + 3\left(\frac{\rho}{4}\frac{\partial\omega}{\partial t}\left(r^2 - \frac{R^2}{r^2}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

Данное уравнение может быть проинтегрировано численно с использованием конечно-разностной схемы при граничных и начальных условиях для диска со свободными внешней и внутренней поверхностью:

$$\varphi(r,0)=0, \quad \varphi(r_0,t)=0, \quad \varphi(R,t)=0, \quad (3.53)$$

для диска с жестким включением:

$$\begin{aligned}
& \varphi(r,0)=0, \quad \varphi(R,t)=0, \\
& 2(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial t}\Big|_{r=r_0} + 2\rho r_0^2\omega(t)\omega'(t)\right) - \frac{\lambda}{r_0}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{r=r_0} + \\
& + \mu(3\lambda+2\mu)Bn\left(2\left(r_0^2\rho\omega^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=r_0}\right) - \frac{\varphi(r_0)}{r_0}\right)\left[Q(\varphi(r_0,t),r_0,t)\right]^{\frac{n}{2}-1} = 0. \quad (3.54)
\end{aligned}$$

По найденной функции $\varphi(r,t)$ находятся напряжения, обратимые и необратимые деформации. Компонента перемещений u_r находится согласно найденным деформациям: $u_r = r(e_{rr} + p_{rr})$. Для определения компоненты перемещений u_θ следует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = 2(e_{r\theta} + p_{r\theta}), \quad e_{r\theta} = \frac{\rho}{8\mu}\frac{d\omega}{dt}\left(r^2 - \frac{R^4}{r^2}\right), \quad p_{r\theta} = \int_0^t \varepsilon_{r\theta}^p dt$$

при граничном условии вида

$$u_\theta|_{r=r_0} = r_0 \sin \phi(t), \quad \phi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau.$$

При расчетах в промежутке времени $0 \leq t \leq t_3$ угловая скорость возрастала, затем при $t_3 \leq t \leq t_4$ оставалась постоянной, а при $t_4 \leq t \leq t_7$ уменьшалась до нуля. Расчеты проводились в безразмерных переменных

$$\tilde{r} = r/R, \quad \tau = t\sqrt{\alpha}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/\mu, \quad u_i = u_i/R$$

при значениях параметров задачи $\lambda = 79.61$ ГПа, $\mu = 119.42$ ГПа, $n = 3$, $B = 3.5 \cdot 10^{-25} \text{ c}^{-1} \text{ Па}^{n-1}$, $\rho = 8000 \text{ кг/м}^3$, $r_0/R = 0.2$, $\alpha = 400 \text{ c}^{-2}$, $\beta = 200 \text{ c}^{-2}$.

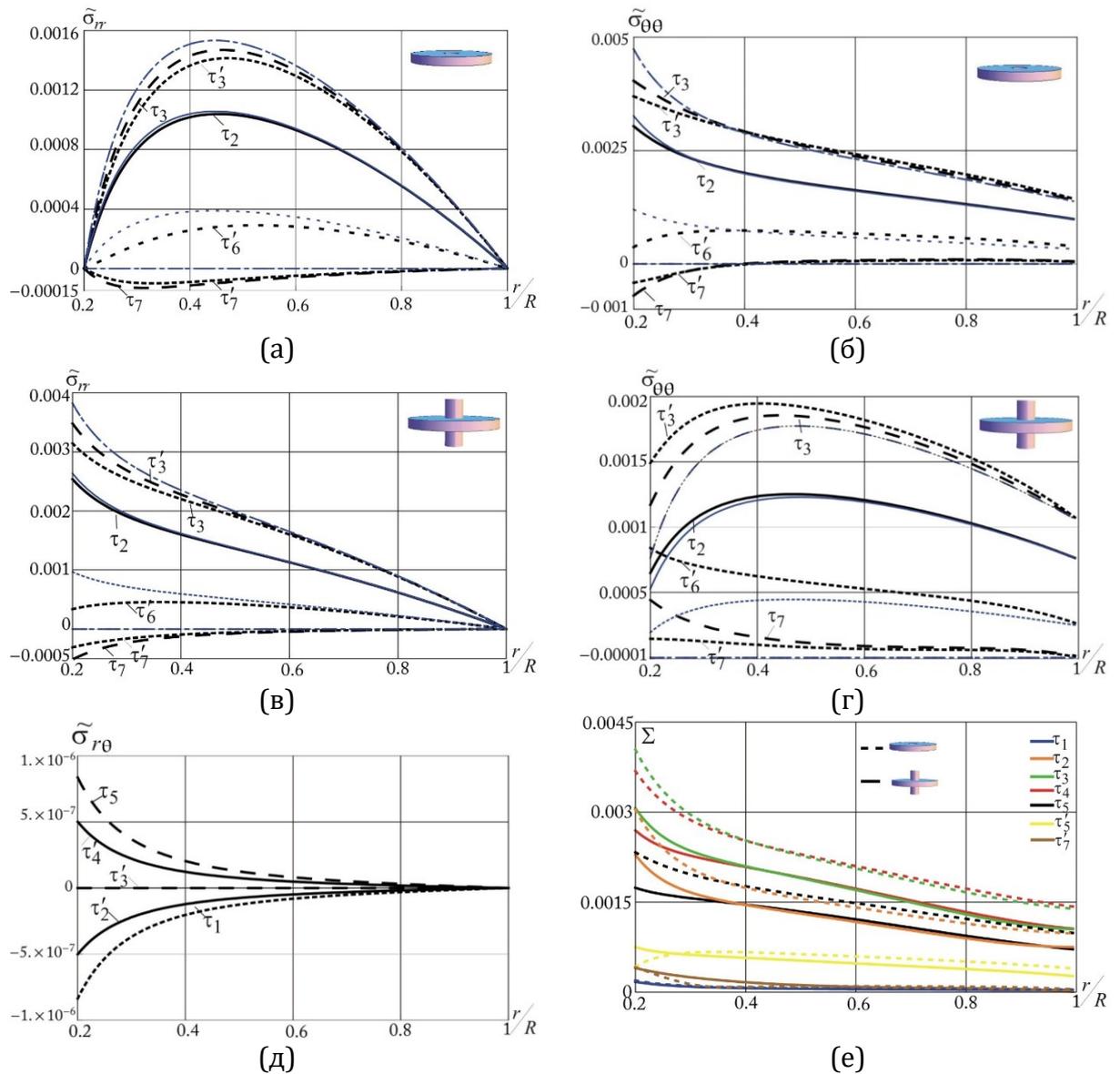


Рис. 3.10 — Распределение напряжений в диске в различные моменты времени: (а), (б) радиальное и тангенциальное напряжения в полном диске; (в), (г) радиальное и тангенциальное напряжения в диске с жестким включением; (д) касательное напряжение; (е) эквивалентное напряжение.

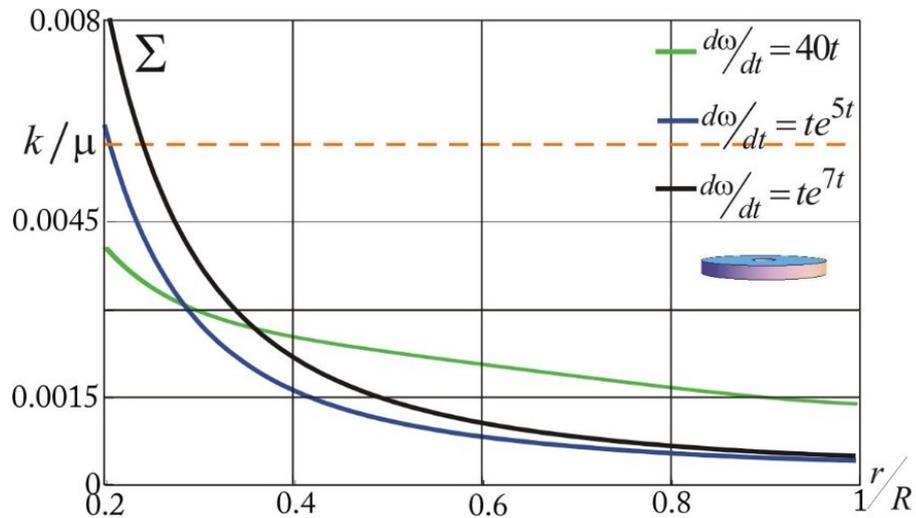


Рис. 3.11 — Распределение Σ для различных режимов нагрузки.

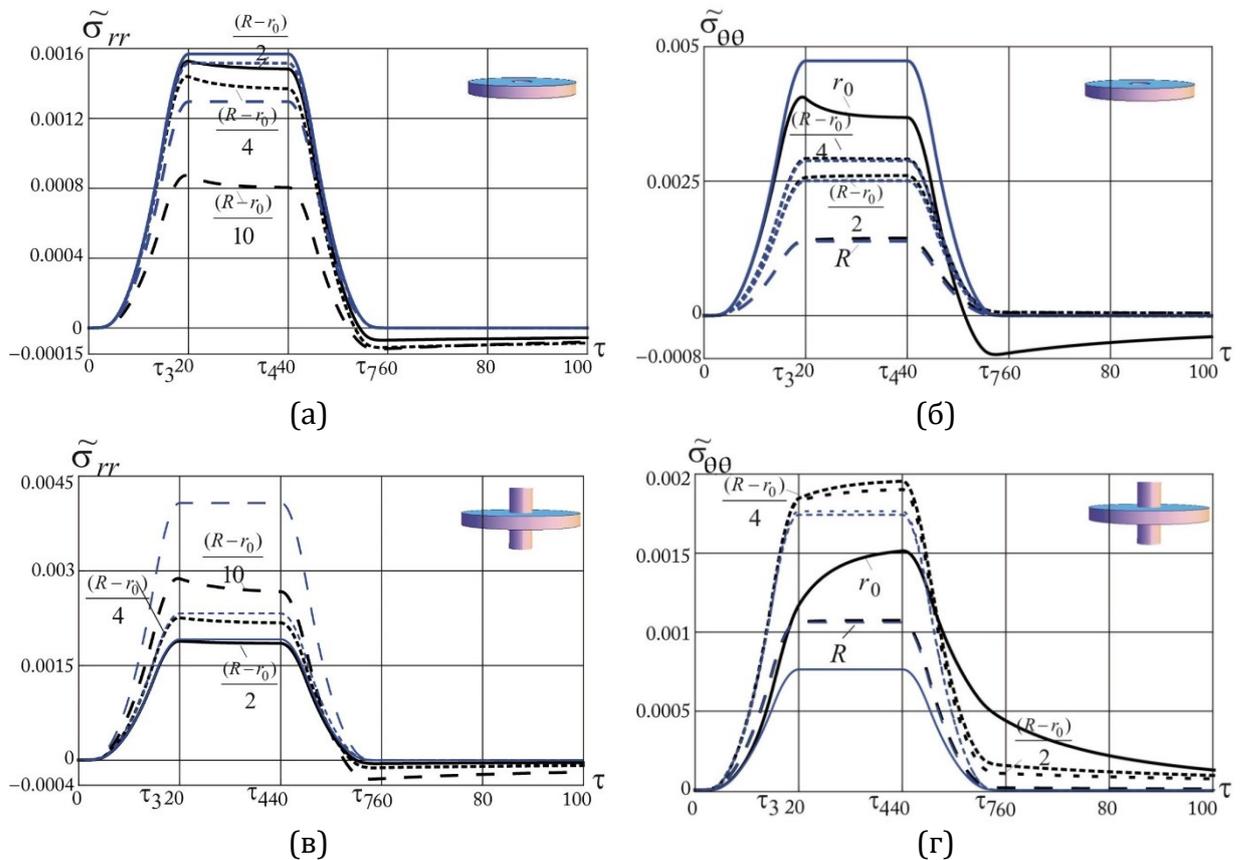


Рис. 3.12 — Распределение напряжений в некоторых точках диска в зависимости от времени: (а), (б) радиальное и тангенциальное напряжения в полном диске; (в), (г) радиальное и тангенциальное напряжения в диске с жестким включением.

На рис. 3.10 показано распределение напряжений в зависимости от радиуса в различные моменты времени, результаты приведены для кусочно-линейного закона изменения углового ускорения. Различие в распределении Σ при различных режимах разгона диска изображено на рис. 3.11, при более резком разгоне Σ может существенно увеличиваться

даже при одинаковых итоговых скоростях вращения. На рис. 3.12 показано изменение напряжений со временем на различных радиусах. Изменение необратимых деформаций с течением времени приведено на рис. 3.13, а распределение полных деформаций — рис. 3.14. Распределение перемещений в различные моменты времени показано на рис. 3.15.

Полученные решения будут справедливы, если режим нагружения выбран таким образом, что в течение всего времени ни в одной точке диска не развивается пластическое течение. Далее рассмотрим случаи, когда в диске зарождается пластическое течение. Исходя из упругих и вязкоупругих решений для кольцевого диска следует, что пластическое течение начинается всегда на внутреннем радиусе $r = r_0$.

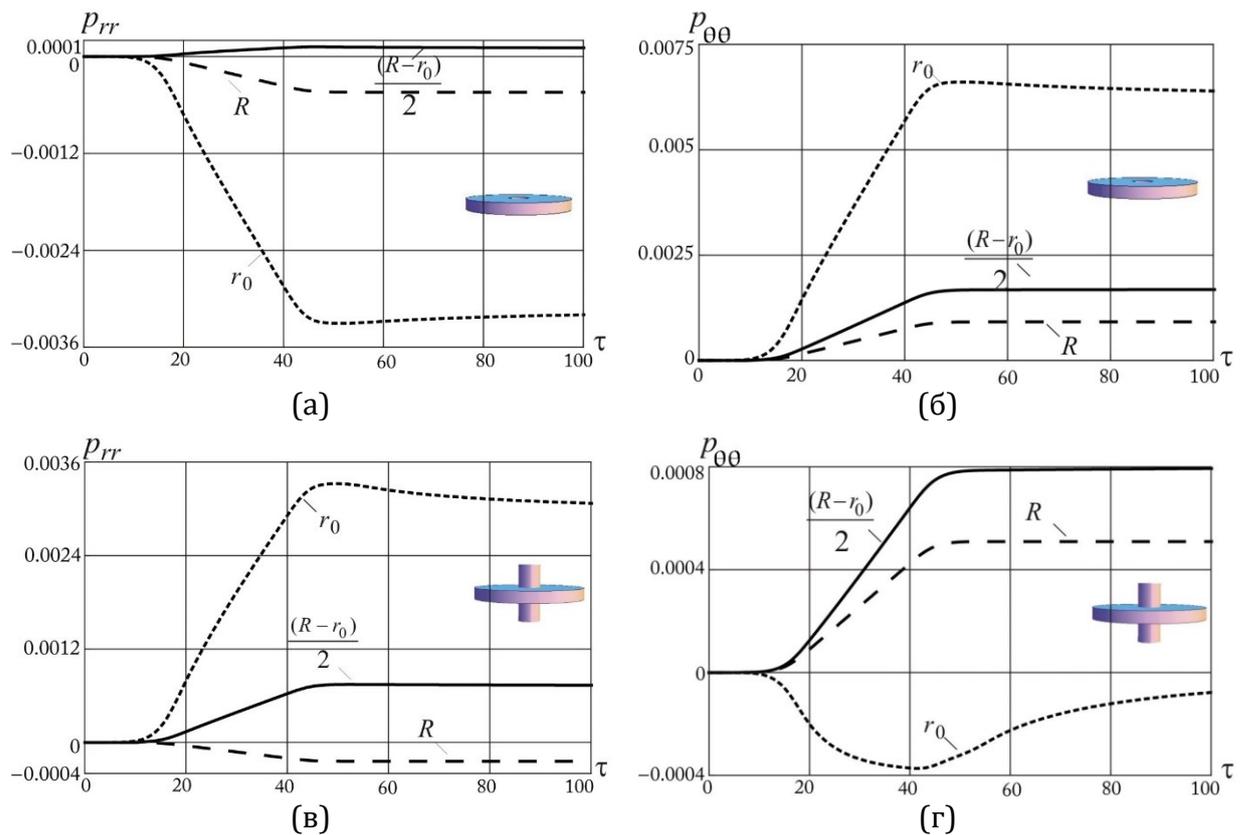


Рис. 3.13 — Эволюция необратимых деформаций p_{rr} , $p_{\theta\theta}$ в некоторых точках дисках от времени: (а), (б) полый диск; (в), (г) диск с жестким включением.

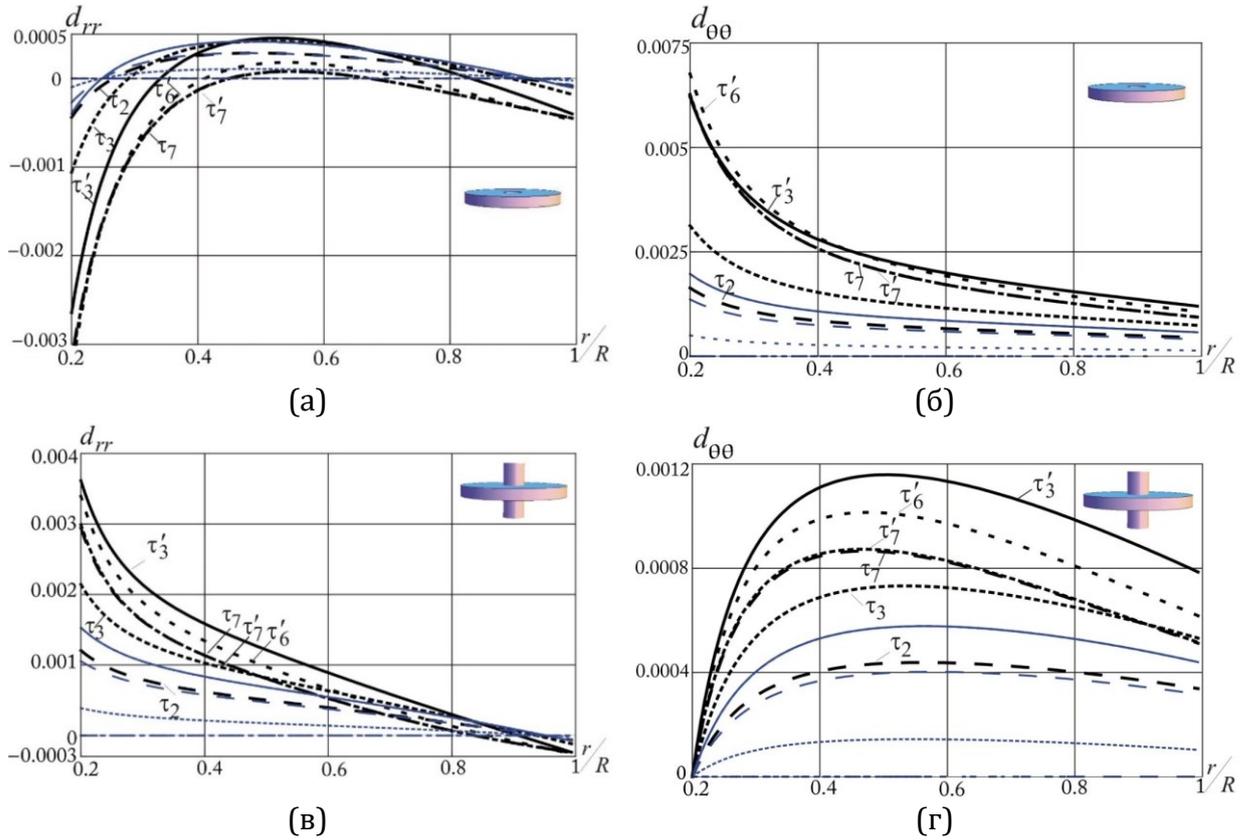


Рис. 3.14 — Эволюция полных деформаций $d_{rr}, d_{\theta\theta}$ в некоторых точках дисках от времени: (а), (б) полый диск; (в), (г) диск с жестким включением.

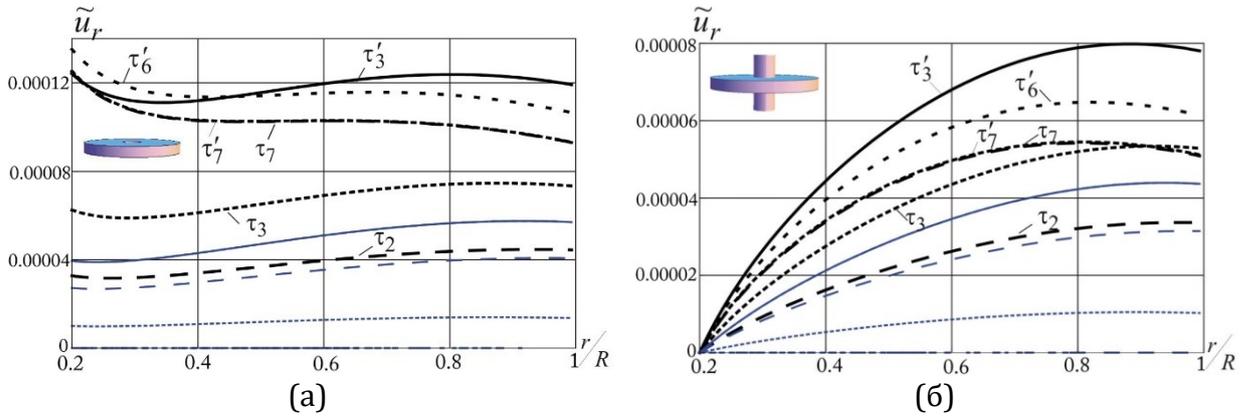


Рис. 3.15 — Эволюция радиального перемещения u_r в некоторых точках дисках от времени: (а) полый диск; (б) диск с жестким включением.

3.3.3 Вязкопластическое течение

Пластическое течение рассмотрим на примере свободного диска. Сначала рассмотрим случай идеальной пластичности. Момент времени $t = t_0$, в который согласно условию (3.36), на внутренней поверхности $r = r_0$ начнется пластическое течение, найдем, решая уравнение

$$\left(\left(\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \left(2R^2 + 2 \frac{\lambda + 2\mu}{(7\lambda + 6\mu)} r_0^2 \right) \rho \omega^2(t_0) \right)^2 + 3 \left(\frac{\rho}{4} \frac{d\omega}{dt} \Big|_{t=t_0} \left(r_0^2 - \frac{R^4}{r_0^2} \right) \right)^2 \right) = k^2$$

Далее в диске развивается пластическое течение, и решение задачи теперь будем искать в двух областях: в упругой области $r_1 \leq r \leq R$, и в области пластического течения $r_0 \leq r \leq r_1$.

В области упругого деформирования, используя граничное условие на внешней поверхности диска, найдем

$$\begin{aligned} \varphi^e(r, t) &= -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \left(r^3 - \frac{R^4}{r} \right) \rho \omega^2(t) + \frac{C_1}{2} \left(r - \frac{R^2}{r} \right), \\ \frac{\partial \varphi^e(r, t)}{\partial r} &= -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \left(3r^2 + \frac{R^4}{r^2} \right) \rho \omega^2(t) + \frac{C_1}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right), \end{aligned}$$

здесь $\varphi^e(r, t)$ — функция напряжений в упругой области, соответственно $\varphi^p(r, t)$ будем обозначать функцию напряжений в области течения. Используя условие пластичности (3.36), для нахождения функции $\varphi^p(r, t)$ в каждый фиксированный момент времени (временной шаг задается согласно требуемой точности) получим уравнение

$$\frac{(\varphi^p)^2}{r^2} - \frac{\varphi^p}{r} \left(r^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi^p}{\partial r} \right) + \left(r^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi^p}{\partial r} \right)^2 + 3 \left(\frac{\rho}{4} \frac{\partial \omega}{\partial t} \left(r^2 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right)^2 = k^2. \quad (3.55)$$

Решение данного уравнения может быть получено численно в каждый фиксированный момент времени при граничном условии на внутренней поверхности диска $r = r_0$. Производная функции напряжений $\frac{\partial \varphi^p}{\partial r}$ в пластической области согласно имеет вид (3.55)

$$\frac{\partial \varphi^p}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\varphi^p}{r} - \rho r^2 \omega^2 + \sqrt{k^2 - \frac{3}{4} \frac{\varphi^{p2}}{r^2} - \frac{3}{16} \left(r^2 - \frac{R^2}{r^2} \right)^2 \rho^2 \omega'^2}$$

Из условия непрерывности напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ на упругопластической границе $r = r_1$, имеем

$$\varphi^p \Big|_{r=r_1} = \varphi^e \Big|_{r=r_1}, \quad \frac{\partial \varphi^p}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \frac{\partial \varphi^e}{\partial r} \Big|_{r=r_1}.$$

Последние соотношения позволяют найти неизвестную функцию C_1 и уравнение, для определения положения упругопластической границы в каждый фиксированный момент времени

$$C_1 = 2 \left(\frac{r_1 \varphi^p \Big|_{r=r_1}}{r_1^2 - R^2} + \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} (r_1^2 + R^2) \rho \omega^2(t) \right),$$

$$\frac{\partial \varphi^p}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = -\frac{7\lambda + 6\mu}{8(\lambda + \mu)} (r_1^2 - R^2) \rho \omega^2(t) + \frac{\varphi^p \Big|_{r=r_1} (r_1^2 + R^2)}{r_1 (r_1^2 - R^2)}.$$

Тогда функция $\varphi^e(r, t)$ и ее производная находится согласно

$$\varphi^e = -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 \left(r^3 - \frac{R^4}{r} \right) + \left(\frac{r_1 \varphi^p \Big|_{r=r_1}}{r_1^2 - R^2} + \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 (r_1^2 + R^2) \right) \left(r - \frac{R^2}{r} \right),$$

$$\frac{\partial \varphi^e}{\partial r} = -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 \left(3r^2 + \frac{R^4}{r^2} \right) + \left(\frac{r_1 \varphi^p \Big|_{r=r_1}}{r_1^2 - R^2} + \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 (r_1^2 + R^2) \right) \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right).$$

Для напряжений получим: в пластической области:

$$\sigma_{rr}^p = \frac{\varphi^p}{r}, \quad \sigma_{\theta\theta}^p = \frac{\partial \varphi^p}{\partial r} + \rho \omega^2 r^2.$$

в упругой области:

$$\sigma_{rr}^e = -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 \left(r^2 - \frac{R^4}{r^2} \right) + \left(\frac{r_1 \varphi^p \Big|_{r=r_1}}{r_1^2 - R^2} + \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 (r_1^2 + R^2) \right) \left(r - \frac{R^2}{r^2} \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta}^e = -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 \left(3r^2 + \frac{R^4}{r^2} \right) + \left(\frac{r_1 \varphi^p \Big|_{r=r_1}}{r_1^2 - R^2} + \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 (r_1^2 + R^2) \right) \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \rho \omega^2 r^2. \quad (3.56)$$

Для определения скоростей и перемещений необходимо определить полные деформации и скорости деформаций в обеих областях. В

упругой области деформации находятся из уравнения (3.56) следуя формулам (3.44). Скорости деформаций в области обратимого деформирования будут вычисляться согласно зависимостям:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^{e1} = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{rr}^e - \lambda\dot{\sigma}_{\theta\theta}^e}{2\mu(3\lambda + 2\mu)},$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^{e1} = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{\theta\theta}^e - \lambda\dot{\sigma}_{rr}^e}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\theta}^e = \frac{\dot{\sigma}_{r\theta}}{2\mu}.$$

В пластической области, используя (3.36) и ассоциированный закон пластического течения, для скоростей деформаций найдем

$$\varepsilon_{rr}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{rr}^p - \lambda\dot{\sigma}_{\theta\theta}^p}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^e = \frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{\theta\theta}^p - \lambda\dot{\sigma}_{rr}^p}{2\mu(3\lambda + 2\mu)},$$

$$\varepsilon_{r\theta}^e = \frac{\dot{\sigma}_{r\theta}}{2\mu}, \quad \varepsilon_{rr}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^p \frac{2\sigma_{rr}^p - \sigma_{\theta\theta}^p}{2\sigma_{\theta\theta}^p - \sigma_{rr}^p}, \quad (3.57)$$

$$r \frac{\partial(\varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p)}{\partial r} + \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p - \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{rr}^p = 0.$$

Для определения скоростей пластических деформаций $\varepsilon_{\varphi\varphi}^p$ следует дифференциальное уравнение вида

$$\frac{2\dot{\sigma}_{\theta\theta}^p - \lambda\dot{\sigma}_{rr}^p}{2\mu} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2(\lambda + \mu)\dot{\sigma}_{\theta\theta}^p - \lambda\dot{\sigma}_{rr}^p}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \right) + r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^p}{\partial r} + 3\varepsilon_{\theta\theta}^p \frac{\sigma_{\theta\theta}^p - \sigma_{rr}^p}{2\sigma_{\theta\theta}^p - \sigma_{rr}^p} = 0.$$

Для расчетов согласно данному уравнению необходимо задать граничное условие $\varepsilon_{\theta\theta}^p|_{r=r_1}$. Воспользуемся условием непрерывности скоростей деформаций на упругопластической границе

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{e1}|_{r=r_1} = \varepsilon_{\theta\theta}^e|_{r=r_1} + \varepsilon_{\theta\theta}^p|_{r=r_1}.$$

Следовательно

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p|_{r=r_1} = \varepsilon_{\theta\theta}^{e1}|_{r=r_1} - \varepsilon_{\theta\theta}^e|_{r=r_1} =$$

$$\frac{2(\lambda + \mu)\left(\dot{\sigma}_{\theta\theta}^e|_{r=r_1} - \dot{\sigma}_{\theta\theta}^p|_{r=r_1}\right) - \lambda\left(\dot{\sigma}_{rr}^e|_{r=r_1} - \dot{\sigma}_{rr}^p|_{r=r_1}\right)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

На упругопластической границе напряжения непрерывны. Тогда

для разрывов производных напряжений на продвигающейся со скоростью $G = dr_1 / dt$ поверхности следуют условия совместности Адамара

$$\begin{aligned} G \left(\frac{d\sigma_{rr}^p}{dr} \Big|_{r=r_1} - \frac{d\sigma_{rr}^e}{dr} \Big|_{r=r_1} \right) &= \frac{d\sigma_{rr}^e}{dt} \Big|_{r=r_1} - \frac{d\sigma_{rr}^p}{dt} \Big|_{r=r_1} ; \\ G \left(\frac{d\sigma_{\theta\theta}^p}{dr} \Big|_{r=r_1} - \frac{d\sigma_{\theta\theta}^e}{dr} \Big|_{r=r_1} \right) &= \frac{d\sigma_{\theta\theta}^e}{dt} \Big|_{r=r_1} - \frac{d\sigma_{\theta\theta}^p}{dt} \Big|_{r=r_1} . \end{aligned} \quad (3.58)$$

Перепишем первое из уравнений равновесия (3.46) в разрывах на упругопластической границе. Угловая скорость $\omega(r, t)$ очевидно непрерывна на поверхности $r = r_1(t)$. Разность $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k$ должна быть постоянной и потому непрерывной. Следовательно, и производная σ_{rr} по r является непрерывной на упругопластической границе функцией

$$\frac{d\sigma_{rr}^p}{dr} \Big|_{r=r_1} - \frac{d\sigma_{rr}^e}{dr} \Big|_{r=r_1} = 0. \quad (3.59)$$

При таком условии из (3.58) и (3.59) следует, что

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^p}{\partial r} \Big|_{r=r_1} - \frac{\partial \sigma_{rr}^e}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \dot{\sigma}_{rr}^p \Big|_{r=r_1} - \dot{\sigma}_{rr}^e \Big|_{r=r_1} = 0.$$

Тогда граничное условие для $\varepsilon_{\theta\theta}^p$ запишется в виде

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p \Big|_{r=r_1} = \frac{(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^p}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \frac{dr_1}{dt} - \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^e}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \frac{dr_1}{dt} \right)}{\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

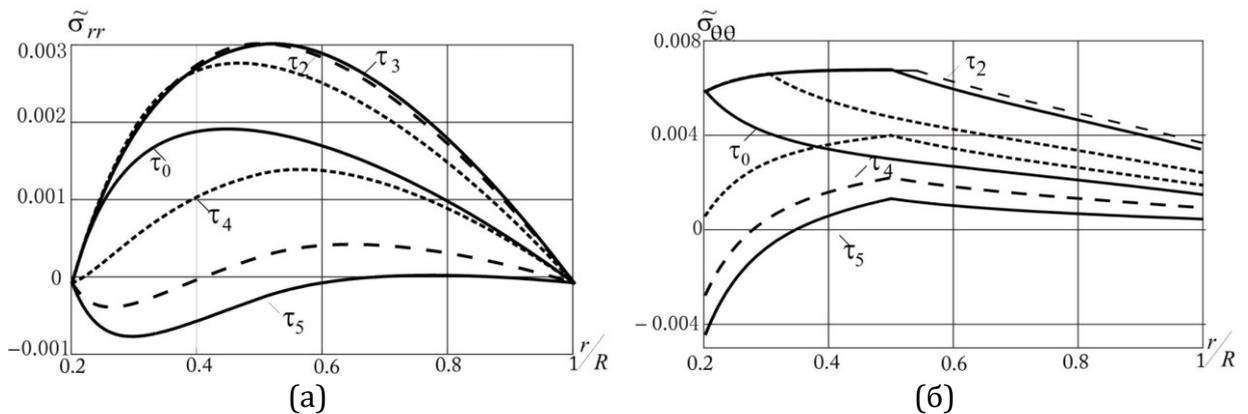


Рис. 3.16 — Распределение напряжений в полем диске в некоторые моменты времени: (а) радиальное напряжение; (б) тангенциальное напряжение.

По найденной $\varepsilon_{\theta\theta}^p$ можно определить ε_{rr}^p согласно (3.57), а затем распределение пластических деформаций $p_{\theta\theta}$ и p_{rr} . Компонента перемещений u_r находится по найденным деформациям: $u_r = r(e_{rr} + p_{rr})$.

На рис. 3.16 показаны распределения напряжений в различные моменты времени. Область пластического течения перестает увеличиваться в момент времени $t = t_3$, когда скорость вращения становится постоянной. При уменьшении скорости вращения диска происходит разгрузка с уменьшением напряжений, компоненты пластических деформаций при этом не изменяются.

3.3.4 Учет вязкого сопротивления пластическому течению. Случаи упруговязкопластического и вязкоупруго-вязкопластического материалов.

Далее рассмотрим вязкопластическое течение материала (в (3.36) $\eta \neq 0$). Согласно условию пластичности (3.36) скорости пластических деформаций находятся по формулам

$$\varepsilon_{rr}^p = \frac{1}{3\eta}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right), \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{1}{3\eta}(2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})\left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right),$$

$$\varepsilon_{zz}^p = -\frac{1}{3\eta}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})\left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right), \quad \varepsilon_{r\theta}^p = \frac{\sigma_{r\theta}}{\eta}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right).$$

Для определения параметров напряженно-деформированного состояния получим систему уравнений

$$r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^e}{\partial r} + r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^p}{\partial r} + \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p - \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{rr}^p = 0,$$

$$\varphi^e = -\frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 \left(r^3 - \frac{R^4}{r} \right) + \left(\frac{r_1 \varphi^p|_{r=r_1}}{r_1^2 - R^2} + \frac{7\lambda + 6\mu}{16(\lambda + \mu)} \rho \omega^2 (r_1^2 + R^2) \right) \left(r - \frac{R^2}{r} \right),$$

$$\frac{(\varphi^p|_{r=r_1})^2}{r_1^2} - \frac{\varphi^p|_{r=r_1}}{r_1} \left(r_1^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi^p}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \right) + \left(r_1^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi^p}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \right)^2 + 3 \left(\frac{\rho}{4} \frac{\partial \omega}{\partial t} \left(r_1^2 - \frac{R^2}{r_1^2} \right) \right)^2 = k^2,$$

которая может быть решена с использованием конечно-разностной

схемы. Для численной реализации вводятся две изменяющиеся во времени сетки по переменной r : в упругой $r = m_{i+1} + h_{i+1}^e j$, $j = \overline{0, N^e - 1}$, $h_{i+1}^e = (1 - m_{i+1}) / N^e$ и пластической области $r = r_0 + h_{i+1}^p j$, $j = \overline{1, N^p}$, $h_{i+1}^p = ((m_{i+1}) - r_0) / N^p$. На каждом временном шаге $t = t_0 + dt(i + 1)$, $i = \overline{0, N}$ сетка меняется из-за изменения упругопластической границы. Значение функции напряжений для новой сетки на предыдущем временном шаге находятся интерполяцией. Далее вычисляются остальные неизвестные функции. Развитие области вязкопластического течения отличается от случая идеальной пластичности (рис. 3.17), в частности при постоянной скорости вращения область вязкопластического течения продолжает увеличиваться и затем выходит на асимптоту.

При уменьшении скорости вращения область деформирования разбивается на три части: область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq r_2$, область $r_2 \leq r \leq r_1$, где пластические деформации перестают изменяться, и область обратимого деформирования $r_1 \leq r \leq R$. Граница $r_2(t)$ движется от $r = r_1(t_5)$ в сторону $r = r_0$, и через некоторое время пластические деформации перестают изменяться везде. Распределение напряжений по радиусу для этого случая показаны на рис. 3.18. Если учитывать вязкость как на стадии, предшествующей течению, так и в ходе него, то для определения функции напряжений используется аналогичная система, где скорости необратимых деформаций складываются из скоростей деформаций ползучести и скоростей пластических деформаций:

$$r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^e}{\partial r} + r \frac{\partial (\varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^v)}{\partial r} + \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^v - \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{rr}^v = 0,$$

$$r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^{e1}}{\partial r} + r \frac{\partial (\varepsilon_{\theta\theta}^{v1})}{\partial r} + \varepsilon_{\theta\theta}^{e1} + \varepsilon_{\theta\theta}^{v1} - \varepsilon_{rr}^e - \varepsilon_{rr}^{v1} = 0,$$

$$\frac{(\varphi^p|_{r=r_1})^2}{r_1^2} - \frac{\varphi^p|_{r=r_1}}{r_1} \left(r_1^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi^p}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \right) + \left(r_1^2 \rho \omega^2 + \frac{\partial \varphi^p}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \right)^2 + 3 \left(\frac{\rho}{4} \frac{\partial \omega}{\partial t} \left(r_1^2 - \frac{R^2}{r_1^2} \right) \right)^2 = k^2.$$

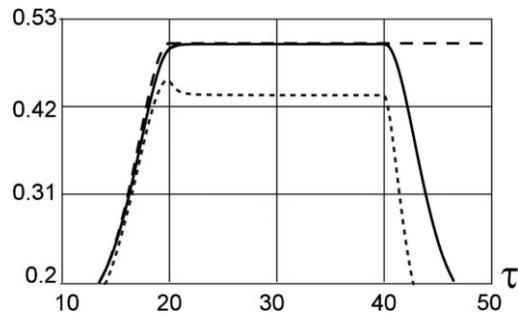


Рис. 3.17 — Эволюция областей идеально пластического (---) и вязкопластического деформирования (— и - - -)

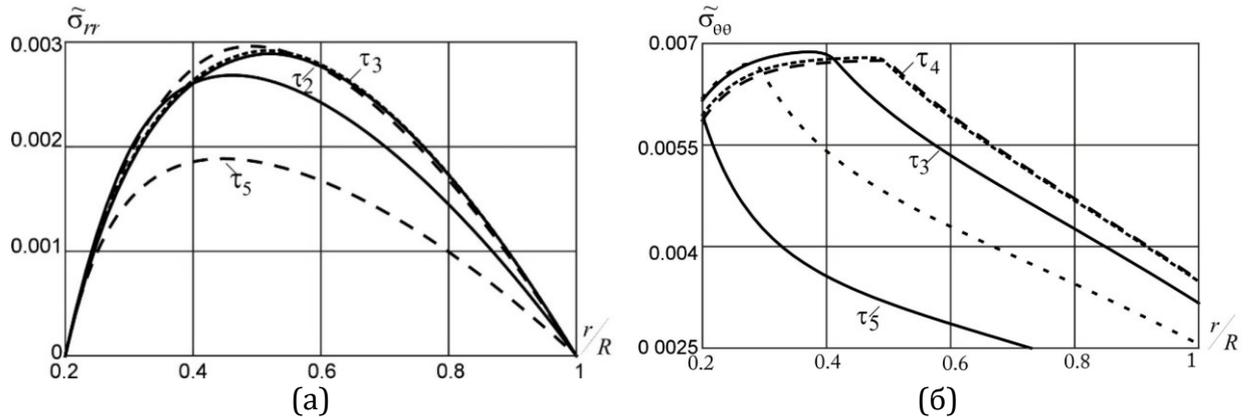


Рис. 3.18 — Распределение напряжений в полном диске в различные моменты времени: (а) радиальное напряжение; (б) тангенциальное напряжение.

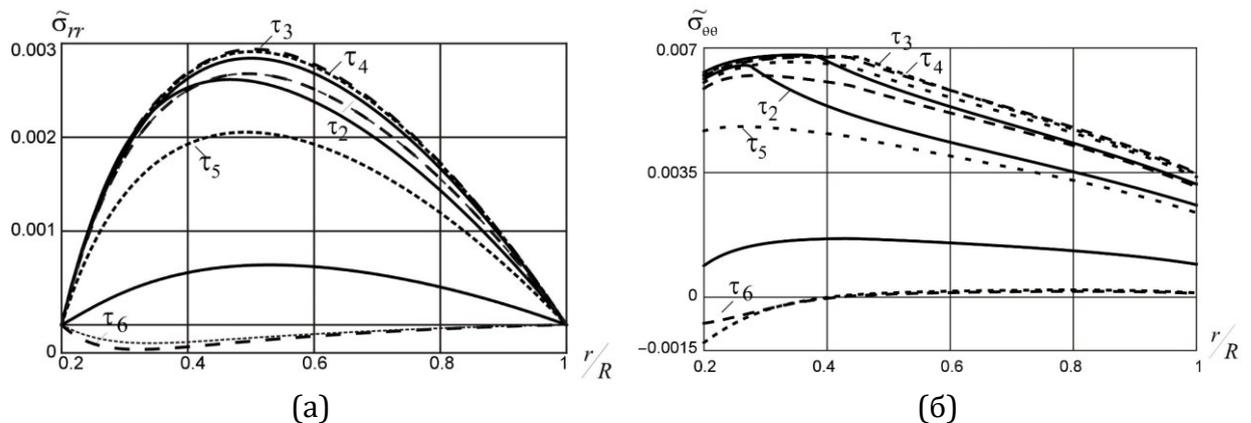


Рис. 3.19 — Распределение напряжений в полном диске в различные моменты времени: (а) радиальное напряжение; (б) тангенциальное напряжение.

Численное решение получено аналогичным образом, что и выше. При постоянной скорости вращения диска область вязкопластического течения уменьшается, затем выходит на асимптоту (рис. 3.17). С уменьшение скорости вращения диска область вязкопластического течения уменьшается, и в момент времени $t = t_0$ пластические деформации перестают изменяться во всем диске. Распределения напряжений по радиусу в различные моменты времени показаны на рис. 3.19.

3.4. Выводы

В данной главе получены новые решения, учитывающие вязкие эффекты материала, а именно: ползучесть и вязкопластичность, на процессы необратимого деформирования во вращающихся цилиндрах и дисках. Найдены аналитические решения для установившегося вязкопластического течения во вращающемся полом цилиндра с закрепленными и свободными торцами, а также построена численная схема для расчета упруговязкопластического деформирования. Сравнение результатов численных и аналитических вычислений показало хорошее совпадение. Получены зависимости критической скорости вращения, соответствующей полному переходу цилиндра в пластическое состояние, от геометрических и механических параметров цилиндра, в случае плоской деформации эта зависимость является аналитической. Обнаружено, что в цилиндре со свободными торцами вязкопластическое течение развивается с более высокой скоростью, а величина перемещений, напряжений и вязкопластических деформаций выше.

Разработаны численные схемы расчета необратимых деформаций во вращающемся диске с граничными условиями различного вида (полый диск и диск с жестким включением) с учетом углового ускорения. Рассматривались модели вязкоупругого (деформации разделяются на упругие и деформации ползучести) и упруго-вязкопластического (деформации разделяются на упругие и вязкопластические) материалов, а также их комбинация (в момент начала течения в точке происходит смена физического механизма накопления необратимых деформации с ползучести на вязкопластичность). Кроме того, рассмотрен случай идеального пластического материала (с нулевой вязкостью). Численные схемы построены с использованием функции напряжений Эйри и условий совместности разрывов Адамара. Изучены закономерности развития области пластического деформирования для каждой из использованных

моделей материала. Установлено, что при постоянной угловой скорости область вязкопластического течения уменьшается, затем стабилизируется и выходит на асимптоту, снижение скорости вращения диска приводит к сокращению области вязкопластического течения, за которым следует ее исчезновение. Проведенные расчеты и анализ напряженно-деформированного состояния диска в различные моменты времени позволяют сделать вывод, что деформирование в режиме ползучести может оказывать существенное влияние на зарождение и эволюцию вязкопластического течения во вращающемся диске.

Следует отметить, что в подавляющем большинстве работ, посвященных упругопластическому анализу вращающихся цилиндров и дисков, рассматривалась только центробежная сила, тогда как угловое ускорение обычно принималось равным нулю. Тем не менее следует отметить работы [206–215], в которых угловое ускорение рассматривалось, однако, постановка задач в них ограничена чисто упругим деформированием. В [209, 211, 213] также анализировалось влияние углового ускорения на зарождение пластического течения, но эволюция самого течения и накопление пластических деформаций не изучались. Расчеты, проведенные в данной главе, показали, что угловое ускорение может приводить к заметному росту эквивалентного напряжения и скоростей пластических деформаций в процессе необратимого деформирования вращающегося диска. Если условия эксплуатации подразумевают постоянное ускорение и торможение диска, как происходит, например, в маховичных накопителях энергии, то в расчетную модель следует включать помимо центробежной силы также и угловое ускорение.

4. Оптимальное проектирование вращающихся цилиндров и дисков

4.1. Введение

Начиная с середины XX-го века оптимальному проектированию тонких дисков, находящихся под действием термомеханических нагрузок, уделяется широкое внимание в научной литературе. Для определения оптимальной конструкции используются различные подходы, среди которых важную роль играет понятие равнопрочности — состояния тела, характеризующегося одинаковым запасом прочности во всех его точках [216]. Известно, что напряженное состояние в диске переменной толщины может существенно отличаться по сравнению с диском прямоугольного профиля. Вследствие этого профиль диска может рассматриваться как один из управляющих параметров при решении обратных и оптимизационных задач.

Классическое решение Ю. Н. Работнова [1, 2] описывает равнопрочный вращающийся диск, в котором напряжения всюду постоянны и равны нагрузке, приложенной к внешней поверхности диска; найденный профиль является функцией экспоненциального вида. Следует отметить, что решение [1, 2] легко обобщается на случай ползучести материала. В [217] профиль равнопрочного вращающегося диска определен из предположения, что напряженное состояние удовлетворяет условию пластичности Мизеса. Алгоритм построения равнопрочного по Мизесу диска при наличии центробежных сил и стационарного температурного градиента разработан в [218]. Решения для диска равной прочности, основанные на условии пластичности Треска, получены в [219, 220]. Методика расчета равнопрочных неоднородных дисков, находящихся под действием внутреннего и внешнего давления, представлена в [221] и позволяет установить профиль диска для произвольных зависимостей модуля Юнга и предела текучести от радиальной координаты. В качестве критерия

прочности в [221] применялось условие Мизеса.

Для достижения желаемого напряженного состояния помимо изменения геометрии диска также применяется управление механическими параметрами материала, которое стало возможным благодаря значительному прогрессу в механике композитов. В [222] установлено, что при определенной конфигурации многослойного композитного маховика потеря прочности во всех его точках происходит примерно при одной и той же скорости вращения. Авторы [223] показали, что специальное распределение модуля Юнга и плотности материала с хорошей степенью точности приводит к нулевому радиальному и постоянному тангенциальному напряжениям во вращающемся диске. В [224] рассмотрен вращающийся анизотропный диск равной прочности из упруго-анизотропного материала и установлено, что равенство напряжений может быть достигнуто определенным распределением в диске параметра анизотропии (отношение модулей Юнга в разных направлениях), а в частном случае изотропного материала — найденными распределениями модуля Юнга и коэффициента Пуассона. Вращающийся диск из неоднородного несжимаемого материала изучался в [225], где установлены зависимости термомеханических параметров, приводящие к постоянному значению в диске произвольной линейной комбинации напряжений. В [226] найдены упругие характеристики ортотропного неоднородного материала, позволяющие достичь во вращающемся диске одного из трех состояний: постоянное тангенциальное или радиальное напряжение, постоянная разность напряжений. Кроме того, в [226] найдены параметры армирования, реализующие полученные зависимости механических параметров.

Равнопрочность является не единственным возможным критерием оптимальности конструкции. Большое значение также имеют эксплуатационные характеристики, к которым в случае вращающегося диска относятся, например, максимальная скорость вращения, вес, объем,

длительная прочность, запасаемая кинетическая энергия и т.д. Различные целевые функции и их комбинации использовались для оптимального проектирования вращающихся дисков и маховичных накопителей энергии в работах [227–243]. Значительное за последние десятилетия увеличение вычислительной мощности компьютерных систем сделало возможным расчет оптимальной формы вращающихся дисков в двумерной и трехмерной постановках на основе метода конечных элементов [233–235, 237–240].

Данная глава посвящена построению равнопрочных цилиндра и диска, находящихся под действием центробежных сил и заданный усилий на внутреннем и внешнем контуре. Для цилиндра искомой функцией является радиальное распределение модуля Юнга, а для диска — радиальное распределение толщины (профиль). Под равнопрочным состоянием в цилиндре понимаются следующие варианты: постоянное тангенциальное напряжение, постоянная разность между тангенциальным и радиальным напряжением, а также постоянная линейная комбинация тангенциального и радиального напряжений. Прочность материала диска характеризуются анизотропией и асимметрией при растяжении/сжатии, а в качестве критерия прочности выбрано квадратичное условие общего вида, которое в частных случаях сводится ко многим известным критериям прочности (Мизеса, Хилла, Друкера-Прагера).

4.2. Расчет профиля равнопрочного вращающегося диска переменной толщины с учетом анизотропии и разной прочности при растяжении и сжатии

4.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим тонкий осесимметричный диск переменной толщины. Внутренний и внешний радиусы диска обозначим r_{in} и r_{out} соответственно. Диск вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω , а

на его боковых поверхностях заданы усилия P_{in} и P_{out} . Введем цилиндрическую систему координат (ρ, θ, z) , ось z которой совпадает с осью симметрии диска. Геометрия диска и схема нагружения изображены на рис. 4.1. Все нагрузки постоянны и не зависят от угловой и осевой координат. Предполагается, что теория малых деформаций и гипотеза о плоском напряженном состоянии справедливы с достаточной степенью точности. При сформулированных выше допущениях сдвиговые напряжения и деформации, а также осевое напряжение равны нулю. Все неизвестные величины зависят только от радиальной координаты.

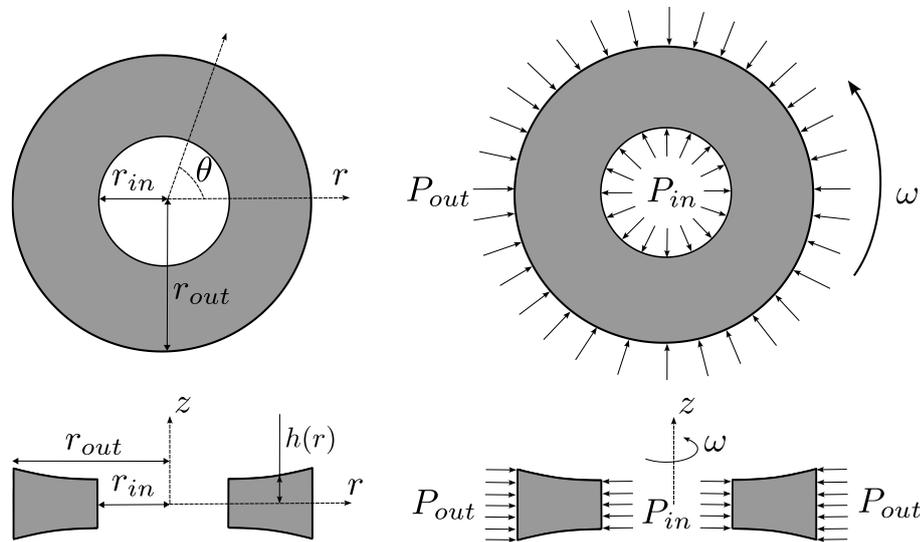


Рис. 4.1 — Геометрия вращающегося диска и схема нагружения.

Кинематические соотношения имеют вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad (4.1)$$

здесь $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}$ — компоненты тензора деформаций, u_r — радиальное перемещение. Следует отметить, что перемещение и деформация в осевом направлении, вообще говоря, не равны нулю.

Поле деформаций должно удовлетворять уравнению совместности

$$\frac{d(r \varepsilon_{\theta\theta})}{dr} - \varepsilon_{rr} = 0. \quad (4.2)$$

Диск изготовлен из однородного и ортотропного упругого

материала, а главные оси анизотропии совпадают с координатными поверхностями. Закон Гука для такого материала можно записать следующим образом

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E_r}(\sigma_{rr} - \nu_{r\theta}\sigma_{\theta\theta}), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E_\theta}(\sigma_{\theta\theta} - \nu_{\theta r}\sigma_{rr}), \quad (4.3)$$

где $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ — компоненты тензора напряжений, E_i — модули Юнга, ν_{ij} — коэффициенты Пуассона. Упругие параметры материала E_i и ν_{ij} удовлетворяют условиям симметрии Максвелла

$$\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}, \quad \frac{\nu_{\theta z}}{E_\theta} = \frac{\nu_{z\theta}}{E_z}, \quad \frac{\nu_{zr}}{E_z} = \frac{\nu_{rz}}{E_r}. \quad (4.4)$$

Закон Гука (4.3) удобно переписать с помощью параметра ортотропии \circledast , определение которого приведено ниже

$$\circledast = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{\nu_{r\theta}}. \quad (4.5)$$

Заметим, что из (4.4) и (4.5) следуют соотношения

$$E_\theta = \circledast E_r, \quad \nu_{\theta r} = \circledast \nu_{r\theta}. \quad (4.6)$$

С учетом (4.6) закон Гука (4.3) преобразуется к следующей форме

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E_\theta}(\circledast \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E_\theta}(\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}), \quad (4.7)$$

В (4.7) для краткости принято, что $\nu = \nu_{\theta r}$.

Единственным нетривиальным уравнением равновесия в диске является уравнение в радиальном направлении, которое имеет вид

$$\frac{d}{dr}(h(r)r\sigma_{rr}) - h(r)\sigma_{\theta\theta} + h(r)\rho\omega^2 r^2 = 0, \quad (4.8)$$

где $h(r)$ — толщина диска (рис. 4.1), ρ — плотность.

Граничные условия задачи сформулированы ниже

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r_{in}) &= -P_{in}, & \sigma_{rr}(r_{out}) &= -P_{out}, \\ h(r_{in}) &= h_{in}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $P_{in} > 0, P_{out} > 0, h_{in}$ — толщина диска на его внутреннем контуре.

Предполагается, что прочностные свойства материала диска проявляют эффекты анизотропии и асимметрии при растяжении и сжатии. Такое поведение наиболее характерно для композитных материалов, а также наблюдается, пусть и в меньшей степени, у ряда металлов и сплавов. Далее в качестве критерия прочности используется общее квадратичное условие

$$A\sigma_{rr}^2 + B\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + C\sigma_{\theta\theta}^2 + D\sigma_{rr} + E\sigma_{\theta\theta} \leq 1, \quad (4.10)$$

где A, B, C, D, E — экспериментально определяемые параметры материала. В (4.10) слагаемые второго порядка характеризуют анизотропию, а линейные — разную прочность при растяжении и сжатии. В качестве единственного ограничения потребуем эллиптичность функции в левой части (4.10), т.е. параметры материала должны удовлетворять условию $B^2 - 4AC < 0$.

Условие (4.10) в частных случаях сводится ко многим известным критериям прочности. Введем обозначения $k_{rt}, k_{\theta t}, k_{zt}$ для пределов прочности при растяжении в радиальном, тангенциальном и осевом направлениях соответственно. Пределы прочности при сжатии по аналогии обозначим как $k_{rc}, k_{\theta c}, k_{zc}$. Критерий (4.10) сводится к критерию прочности Цая-Ву [244] при следующих соотношениях на коэффициенты

$$A = \frac{1}{k_{rc}k_{rt}}, B = -\frac{1}{2\sqrt{k_{rc}k_{rt}k_{\theta c}k_{\theta t}}}, C = \frac{1}{k_{\theta c}k_{\theta t}}, D = \frac{1}{k_{rt}} - \frac{1}{k_{rc}}, E = \frac{1}{k_{\theta t}} - \frac{1}{k_{\theta c}}. \quad (4.11)$$

Критерий Цая-Ву [244] является частным случаем тензорного критерия Гольденבלата-Копнова [245], широко применяется в механике композитов и описывает анизотропию материала, а также его различную прочность при растяжении и сжатии. Вычисление коэффициента B в (4.11) остается предметом дискуссий [246, 247], и в настоящей диссертации используется наиболее распространенный подход $B = -\sqrt{AC}/2$.

Предположим, что материал имеет одинаковую прочность при

растяжении и сжатии $k_r = k_{rt} = k_{rc}$, $k_\theta = k_{\theta t} = k_{\theta c}$, $k_z = k_{zt} = k_{zc}$ и введем коэффициенты в виде

$$A = G + H, \quad B = -2H, \quad C = F + H, \quad D = E = 0, \\ 2F = \left(\frac{1}{k_\theta^2} + \frac{1}{k_z^2} - \frac{1}{k_r^2} \right), \quad 2G = \left(\frac{1}{k_r^2} + \frac{1}{k_z^2} - \frac{1}{k_\theta^2} \right), \quad 2H = \left(\frac{1}{k_r^2} + \frac{1}{k_\theta^2} - \frac{1}{k_z^2} \right), \quad (4.12)$$

тогда критерий (4.10) сводится к условию Хилла [168], которое широко применяется для описания пластической анизотропии в металлах. Следует отметить, что при сильно выраженной ортотропии условие Хилла (4.10), (4.12) может терять свойство эллиптичности [248]. В этом случае для описания анизотропии может использоваться, например, условие Ху-Марина [249], которое следует из (4.10), если ввести коэффициенты как

$$A = k_r^{-2}, \quad B = -(k_r k_\theta)^{-1}, \quad C = k_\theta^{-2}, \quad D = E = 0.$$

Если материал изотропен, то $k = k_r = k_\theta = k_z$ и замена

$$A = -B = C = k^{-2}, \quad D = E = 0 \quad (4.13)$$

переводит критерий (4.10) в условие Мизеса.

В условиях плоского напряженного состояния ($\sigma_{zz} = 0$) и отсутствия сдвиговых напряжений ($\sigma_{ij} = 0 (i \neq j)$) многие другие критерии прочности (условия Друкера-Прагера, Мизеса-Шлейхера, обобщения условия Хилла [250, 251]) также можно привести к виду (4.10). Требование эллиптичности, разумеется, должно выполняться в любом случае.

Для удобства введем безразмерные параметры и переменные

$$\beta = \frac{r}{r_{out}}, \quad \delta = \frac{r_{in}}{r_{out}}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_{in}}, \quad \Omega = \frac{\rho r_{out}^2}{k_{\theta t}} \omega^2, \quad \bar{P}_{in} = \frac{P_{in}}{k_{\theta t}}, \quad \bar{P}_{out} = \frac{P_{out}}{k_{\theta t}}, \\ \bar{u} = \frac{E_\theta}{k_{\theta t}} \frac{u}{r_{out}}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{E_\theta}{k_{\theta t}} \varepsilon_{ij}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{k_{\theta t}}, \quad (4.14) \\ \bar{A} = k_{\theta t}^2 A, \quad \bar{B} = k_{\theta t}^2 B, \quad \bar{C} = k_{\theta t}^2 C, \quad \bar{D} = k_{\theta t} D, \quad \bar{E} = k_{\theta t} E.$$

Далее, если не сказано иное, везде в формулах используются величины (4.14), а знак верхнего подчеркивания для краткости опущен.

Также введем функцию эквивалентного напряжения, соответствующую условию (4.10)

$$\sigma_{eq} = \sqrt{A\sigma_{rr}^2 + B\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + C\sigma_{\theta\theta}^2 + D\sigma_{rr} + E\sigma_{\theta\theta}}. \quad (4.15)$$

Неравенство $\sigma_{eq} < 1$ соответствует упругому деформированию материала, а равенство $\sigma_{eq} = 1$ — разрушению. В равнопрочном диске запас прочности в соответствии с критерием (4.10) один и тот же во всех точках тела, следовательно значение эквивалентного напряжения (4.15) в диске всюду постоянно. Преобразуем уравнение совместности деформаций (4.2) с помощью закона Гука (4.7), полученное уравнение вместе с уравнением равновесия (4.8) и граничными условиями (4.9) составляют краевую задачу (в безразмерном виде) относительно неизвестных функций $\sigma_{rr}(\beta)$, $\sigma_{\theta\theta}(\beta)$ и $h(\beta)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta}(h(\beta)\beta\sigma_{rr}) - h(\beta)\sigma_{\theta\theta} + h(\beta)\Omega\beta^2 &= 0, \\ \frac{d}{d\beta}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) + \frac{(1+\nu)\sigma_{\theta\theta} - (\nu^{-1} + \nu)\sigma_{rr}}{\beta} &= 0, \\ \sigma_{rr}(\delta) &= -P_{in}, \quad \sigma_{rr}(1) = -P_{out}, \quad h(\delta) = 1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Задача построения равнопрочного в соответствии с условием (4.10) диска формулируется следующим образом: найти решение краевой задачи (4.16) такое, что для заданного $\tilde{\sigma}_{eq} \in (0, 1]$ справедливо равенство

$$\sigma_{eq}(\beta) = \tilde{\sigma}_{eq}, \quad \forall \beta \in [\delta, 1]. \quad (4.17)$$

4.2.2 Построение аналитического решения

Условие прочности (4.17) с учетом (4.15) можно переписать следующим образом

$$\sigma_{rr}^2 + N\sigma_{rr}s_{\theta\theta} + s_{\theta\theta}^2 + M\sigma_{rr} + Ls_{\theta\theta} = K,$$

где $s_{\theta\theta} = Y\sigma_{\theta\theta}$, $Y = \frac{C}{A}$, $N = \frac{B}{\sqrt{AC}}$, $M = \frac{D}{A}$, $L = \frac{E}{\sqrt{AC}}$, $K = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2}{A}$.

Предыдущее условие можно удовлетворить с помощью

тригонометрической замены вида

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{1}{\kappa}(\gamma + 2\chi\sin(\varphi(\beta))), \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{1}{\kappa Y}(\psi + \sqrt{\kappa}\chi\cos(\varphi(\beta)) - N\chi\sin(\varphi(\beta))).\end{aligned}\quad (4.18)$$

В (4.18) $\varphi(\beta)$ — неизвестная функция, $\chi = \sqrt{M^2 + L^2 - MLN + K\kappa}$, $\kappa = 4 - N^2$, $\gamma = 2M - LN$, $\psi = 2L - MN$. Заметим, что $\kappa > 0$ в силу эллиптичности условия (4.10).

Граничные условия по напряжениям сводятся к системе уравнений:

$$\sin\varphi_\delta = \frac{\kappa P_{in} - \gamma}{2\chi}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{\kappa P_{out} - \gamma}{2\chi}, \quad (4.19)$$

где $\varphi_\delta = \varphi(\delta)$, $\varphi_1 = \varphi(1)$.

Второе из уравнений (4.16) преобразуем с помощью (4.18), в итоге получим

$$\begin{aligned}(1+\nu)(W - \sqrt{\kappa}\cos(\varphi(\beta)) + V\sin(\varphi(\beta)))\beta^{-1} + \\ + ((N + 2\nu Y)\cos(\varphi(\beta)) + \sqrt{\kappa}\sin(\varphi(\beta)))\varphi'(\beta) = 0, \\ W = (\gamma YZ - \psi)\chi^{-1}, \quad V = N + 2YZ, \quad Z = (1+\nu)^{-1}(\odot - 1) + 1.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) из неизвестных содержит только функцию $\varphi(\beta)$ и может быть решено в неявном виде. φ можно принять в качестве новой независимой переменной, а $\beta(\varphi)$ — в качестве неизвестной функции. Переходя с помощью правила дифференцирования сложной функции от дифференцирования по β к дифференцированию по φ , уравнение (4.20) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}(1+\nu)(W - \sqrt{\kappa}\cos\varphi + V\sin\varphi)\beta'(\varphi) + \\ + ((N + 2\nu Y)\cos\varphi + \sqrt{\kappa}\sin\varphi)\beta(\varphi) = 0.\end{aligned}\quad (4.21)$$

Решение (4.21) должно удовлетворять граничным условиям

$$\beta(\varphi_\delta) = \delta, \quad \beta(\varphi_1) = 1. \quad (4.22)$$

Для восстановления напряженного состояния в диске кроме дифференциального уравнения (4.21), также необходимо решить четыре алгебраических уравнения (4.19) и (4.22). Однако число неизвестных в этих уравнениях равно трем (константа интегрирования, φ_δ и φ_1). Отсюда следует, что для произвольных значений механических параметров материала ν, A, \dots, E , геометрического параметра δ , внешних нагрузок P_{in}, P_{out} и желаемого эквивалентного напряжения $\tilde{\sigma}_{eq}$ построить диск равной прочности невозможно. Какой-либо из этих параметров должен вычисляться через остальные с помощью одного из уравнений (4.19), (4.22). Далее в качестве такого параметра выбран параметр δ .

Решая уравнение (4.21) с учетом второго из граничных условий (4.22), найдем

$$\begin{aligned} \beta(\varphi) = & \exp\left(\frac{\sqrt{\kappa}(N-V+2\nu Y)}{(1+\nu)S_1}(\varphi-\varphi_1)\right) \times \\ & \times \left(\frac{W-\sqrt{\kappa}\cos\varphi_1+V\sin\varphi_1}{W-\sqrt{\kappa}\cos\varphi+V\sin\varphi}\right)^{\frac{NV+\kappa+2\nu YV}{(1+\nu)S_1}} \times \\ & \times \left(\frac{\left(V-S_2+S_3\tan\frac{\varphi_1}{2}\right)\left(V+S_2+S_3\tan\frac{\varphi}{2}\right)}{\left(V+S_2+S_3\tan\frac{\varphi_1}{2}\right)\left(V-S_2+S_3\tan\frac{\varphi}{2}\right)}\right)^{\frac{\sqrt{\kappa}W(N-V+2Y\nu)}{(1+\nu)S_1S_2}}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $S_1 = \kappa + V^2$, $S_2 = \sqrt{\kappa + V^2 - W^2}$, $S_3 = \sqrt{\kappa} + W$. Значение геометрического параметра δ непосредственно следует из (4.23) с учетом первого из граничных условий (4.22) и равно $\beta(\varphi_\delta)$. Разумеется, решение имеет физический смысл только если $\delta \in (0, 1)$. Кроме того, интервал $[\varphi_\delta, \varphi_1]$ (или $[\varphi_1, \varphi_\delta]$) не должен содержать особых точек и точек экстремума функции $\beta(\varphi)$. Эти точки перечислены ниже

$$\begin{aligned}
\varphi_0^1 &= -\arcsin \frac{W \operatorname{sgn} V}{\sqrt{\kappa + V^2}} + \arctan \frac{\sqrt{\kappa}}{V} + 2n\pi, \\
\varphi_0^2 &= \pi + \arcsin \frac{W \operatorname{sgn} V}{\sqrt{\kappa + V^2}} + \arctan \frac{\sqrt{\kappa}}{V} + 2n\pi, \\
\varphi_0^3 &= -\arctan \frac{N + 2\nu Y}{\sqrt{\kappa}} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Каждое из уравнений (4.19) имеет по два решения, которые определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
\varphi_\delta^1 &= \arcsin \frac{\kappa P_{in} - \gamma}{2\chi}, \quad \varphi_\delta^2 = \pi - \arcsin \frac{\kappa P_{in} - \gamma}{2\chi}, \\
\varphi_1^1 &= \arcsin \frac{\kappa P_{out} - \gamma}{2\chi}, \quad \varphi_1^2 = \pi - \arcsin \frac{\kappa P_{out} - \gamma}{2\chi}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Из (4.25) следует, что удовлетворить граничным условиям задачи можно четырьмя различными способами. Однако некоторые из этих способов (и даже все) могут не иметь физического смысла.

Следующим шагом решения является определение профиля диска $h(\beta)$. Для удобства введем замену

$$h(\beta) = \exp(t(\beta)). \tag{4.26}$$

Используя (4.18) и (4.26), первое из уравнений (4.16) примет вид

$$\begin{aligned}
&\chi(N + 2Y) \sin(\varphi(\beta)) - \sqrt{\kappa} \chi \cos(\varphi(\beta)) + \\
&\quad + Y(\gamma + 2\chi \sin(\varphi(\beta))) \beta t'(\beta) + \\
&\quad + 2\chi Y \cos(\varphi(\beta)) \beta \varphi'(\beta) = \kappa Y \Omega \beta^2 + \psi - Y\gamma
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Применим к (4.27) правило дифференцирования $t'(\beta) = t'(\varphi) \varphi'(\beta)$, далее в полученное уравнение поставим выражение для производной $\varphi'(\beta)$, найденное с помощью (4.20). В завершении перейдем к неизвестной переменной φ и разрешим уравнение относительно $t'(\varphi)$. В результате этих преобразований уравнение (4.27) примет вид

$$\begin{aligned}
t'(\varphi) = & \frac{1}{(1+\nu)} \left(\frac{\chi(2\sqrt{\kappa}(2Y - N\cos(2\varphi)) + (N^2 - 4Y^2 - \kappa)\sin(2\varphi))}{2Y(W - \sqrt{\kappa}\cos\varphi + V\sin\varphi)(\gamma + 2\chi\sin\varphi)} - \right. \\
& - \frac{2Y(\odot - 1)\cos\varphi}{W - \sqrt{\kappa}\cos\varphi + V\sin\varphi} + \frac{(Y\gamma - \psi)((N - 2Y)\cos\varphi + \sqrt{\kappa}\sin\varphi)}{Y(W - \sqrt{\kappa}\cos\varphi + V\sin\varphi)(\gamma + 2\chi\sin\varphi)} - \\
& \left. - \kappa\Omega \frac{((N + 2\nu Y)\cos\varphi + \sqrt{\kappa}\sin\varphi)}{(W - \sqrt{\kappa}\cos\varphi + V\sin\varphi)(\gamma + 2\chi\sin\varphi)} \beta(\varphi)^2 \right). \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Общий ход решения выглядит следующим образом. С помощью (4.25) вычисляются граничные значения φ_δ и φ_1 , для каждой возможной пары значений проверяется выполнение условия $\delta \in (0, 1)$, а также отсутствие точек (4.24) в интервале $[\varphi_\delta, \varphi_1]$ (или $[\varphi_1, \varphi_\delta]$). Пары граничных значений φ_δ и φ_1 , удовлетворяющие этим требованиям, используются для восстановления напряженного состояния с помощью (4.18), (4.23) и далее для расчета профиля диска из (4.28) с учетом замены (4.26) и последнего из уравнений (4.16). Первые три слагаемых в правой части (4.28) могут быть проинтегрированы в замкнутом виде, однако получаемые выражения являются достаточно громоздкими и далее не приводятся. Поля перемещений и деформаций можно вычислить с помощью (4.7) и (4.1). В завершении проверяется справедливость гипотезы о плоском напряженном состоянии в диске. Для этого толщина диска должна меняться достаточно плавно, откуда следует условие вида

$$\left| \frac{dh}{dr} \right| \leq \Delta \quad \text{или} \quad \left| \frac{d\bar{h}}{d\beta} \right| \leq \frac{r_{out}}{h_{in}} \Delta. \quad (4.29)$$

В левом из неравенств (4.29) используются размерные величины, а в правом — безразмерные; Δ — некоторое заданное число. Какие-либо достоверные оценки для Δ в литературе отсутствуют, и величина этого параметра выбирается достаточно произвольно [221]. Из представленного решения не составляет труда определить производную $d\bar{h}/d\beta$.

Справедливость неравенства (4.29) проверяется в каждой точке диска. В спорных случаях необходимо применять конечно-элементный анализ на основе двумерной модели диска.

Содержание данного раздела позволяет рассчитать профиль равнопрочного диска и восстановить напряженное состояние в нем. Важно отметить, что решение может не существовать, а также может быть неединственным. Большое число параметров задачи затрудняет качественный анализ условий существования решения в общем случае. Построение и проверка решения для заданных значений параметров не вызывает трудностей.

Рассмотрим некоторые частные случаи критерия (4.10). Условие Хилла [168] в безразмерных переменных (4.14) имеет вид

$$(G+H)\sigma_{rr}^2 - 2H\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 \leq 1.$$

Из предыдущего условия и (4.18) следует распределение

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\tilde{\sigma}_{eq} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{Q}}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\tilde{\sigma}_{eq} \left(\cos\varphi + \frac{H\sin\varphi}{\sqrt{Q}} \right),\end{aligned}$$

где $Q = G + (1-H)H$.

Величины φ_δ и φ_1 определяются следующим образом

$$\begin{aligned}\varphi_\delta^1 &= \arcsin\left(\sqrt{Q} \frac{P_{in}}{\tilde{\sigma}_{eq}}\right), & \varphi_\delta^2 &= \pi - \arcsin\left(\sqrt{Q} \frac{P_{in}}{\tilde{\sigma}_{eq}}\right), \\ \varphi_1^1 &= \arcsin\left(\sqrt{Q} \frac{P_{out}}{\tilde{\sigma}_{eq}}\right), & \varphi_1^2 &= \pi - \arcsin\left(\sqrt{Q} \frac{P_{out}}{\tilde{\sigma}_{eq}}\right).\end{aligned}$$

Введем обозначение $T = H + Z$. Тогда искомые функции $\beta(\varphi)$ и $h(\varphi)$ примут вид

$$\beta(\varphi) = \exp\left(\frac{\sqrt{Q}(\mathbb{O} - \nu^2)(\varphi_1 - \varphi)}{(1+\nu)^2(Q+T^2)}\right) \left(\frac{T\sin\varphi_1 - \sqrt{Q}\cos\varphi_1}{T\sin\varphi - \sqrt{Q}\cos\varphi}\right)^{\frac{(Q-(H-\nu)T)}{(1+\nu)(Q+T^2)}},$$

$$h(\varphi) = \left(\frac{\sin \varphi_\delta}{\sin \varphi} \right)^{\frac{1+H}{1+\nu}} \left(\frac{\sqrt{Q} \cos \varphi_\delta - T \sin \varphi_\delta}{\sqrt{Q} \cos \varphi - T \sin \varphi} \right)^{(\mathbb{O}-1) \frac{(Q-(H-\nu)T)}{(1+\nu)^2(Q+T^2)}} \times$$

$$\times \exp \left(\frac{\sqrt{Q}}{(1+\nu)} \left(\frac{(Q+\mathbb{O}-(2T+H)H)}{(Q+T^2)} (\varphi - \varphi_\delta) + \frac{\Omega}{\tilde{\sigma}_{eq}} J(\varphi) \right) \right),$$

$$J(\varphi) = \int_{\varphi_\delta}^{\varphi} \frac{(\sqrt{Q} \sin z - (H-\nu) \cos z)}{\sin z (\sqrt{Q} \cos z - T \sin z)} \beta(z)^2 dz.$$

Рассмотрим материал, который изотропен в отношении упругих и прочностных свойств, и не проявляет асимметрии при растяжении и сжатии. В этом случае $\mathbb{O} = 1$, а условие (4.10) переходит в условие Мизеса

$$\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr} \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 \leq 1,$$

которое удовлетворяется тригонометрической заменой (4.18) в виде

$$\sigma_{rr} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \tilde{\sigma}_{eq} \sin \varphi, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\tilde{\sigma}_{eq} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi + \cos \varphi \right).$$

Из граничных условий задачи следует

$$\varphi_\delta^1 = \arcsin \left(\frac{\sqrt{3} P_{in}}{2 \tilde{\sigma}_{eq}} \right), \quad \varphi_\delta^2 = \pi - \arcsin \left(\frac{\sqrt{3} P_{in}}{2 \tilde{\sigma}_{eq}} \right),$$

$$\varphi_1^1 = \arcsin \left(\frac{\sqrt{3} P_{out}}{2 \tilde{\sigma}_{eq}} \right), \quad \varphi_1^2 = \pi - \arcsin \left(\frac{\sqrt{3} P_{out}}{2 \tilde{\sigma}_{eq}} \right).$$

Функции $\beta(\varphi)$ и $h(\varphi)$ принимают вид

$$\beta(\varphi) = \exp \left(\frac{\sqrt{3}(1-\nu)(\varphi_1 - \varphi)}{2(1+\nu)} \right) \sqrt{\frac{\sin \varphi_1 - \sqrt{3} \cos \varphi_1}{\sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi}},$$

$$h(\varphi) = \left(\frac{\sin \varphi_\delta}{\sin \varphi} \right)^{\frac{3}{2(1+\nu)}} \exp \left(\frac{\sqrt{3}}{2(1+\nu)} \left(\varphi - \varphi_\delta + \frac{\Omega}{\tilde{\sigma}_{eq}} J(\varphi) \right) \right),$$

$$J(\varphi) = \int_{\varphi_\delta}^{\varphi} \frac{\sqrt{3} \sin z - (1-2\nu) \cos z}{\sin z (\sqrt{3} \cos z - \sin z)} \beta(z)^2 dz.$$

Представленное выше решение для условия Мизеса, разумеется, совпадает с известным решением [217].

4.2.3 Специальное решение

Рассмотрим случай $\varphi'(\beta) = 0$, который соответствует первым двум точкам (4.24). Тогда напряжения в диске всюду постоянны, а давления на внутреннем и внешнем контурах совпадают $P_{in} = P_{out}$.

Из второго уравнения (4.16) следует, что

$$\sigma_{\theta\theta} = Z\sigma_{rr}. \quad (4.30)$$

Радиальное напряжение определяется с помощью (4.17), (4.30) как

$$\sigma_{rr} = -\frac{D + ZE \pm \sqrt{(D + ZE)^2 + 4\tilde{\sigma}_{eq}^2 (A + ZB + Z^2C)}}{2(A + ZB + Z^2C)}. \quad (4.31)$$

В (4.31) имеют смысл только отрицательные напряжения в силу предположения, что $P_{in} > 0$ и $P_{out} > 0$. Решая первое из уравнений (4.16) с учетом (4.30), найдем профиль диска

$$h(\beta) = \exp\left(\frac{\Omega}{2\sigma_{rr}}(\delta^2 - \beta^2)\right)\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^{\frac{\nu-1}{1+\nu}}. \quad (4.32)$$

Если пренебречь свойствами анизотропии и асимметрии, то $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\tilde{\sigma}_{eq}$, а решение (4.32) сводится к решению Ю.Н. Работнова [1, 2].

4.2.4 Примеры решения

Проиллюстрируем найденное решение на примере композитного материала [252] со следующими значениями прочности в различных направлениях $k_{rt} = 644.7$ МПа, $k_{\theta t} = 689.5$ МПа, $k_{rc} = 513.7$ МПа, $k_{\theta c} = 455.1$ МПа. Отметим, что в рассматриваемом материале эффекты анизотропии и разной прочности при растяжении и сжатии выражены достаточно умеренно. В качестве критерия прочности будем использовать условие Цая-Ву (4.10), (4.11), тогда безразмерные параметры материала (4.14) примут значения $A = 1.435, B = -1.475, C = 1.515, D = -0.273, E = -0.515$. Нагрузки на боковых поверхностях диска выберем равными $P_{in} = 0.25, P_{out} = 0.4$. Из (4.22) несложно получить минимально возможно значение

эквивалентного напряжения (4.15) в диске: для указанных выше параметров оно составляет $\min(\tilde{\sigma}_{eq}) \cong 0.581$, а соответствующее ему значение геометрического параметра $\delta \cong 0.571$. С другой стороны, для условия Мизеса $\min(\tilde{\sigma}_{eq}) \cong 0.346$ и соответствующее значение геометрического параметра $\delta \cong 0.468$. При $\tilde{\sigma}_{eq} < \min(\tilde{\sigma}_{eq})$ решение не существует.

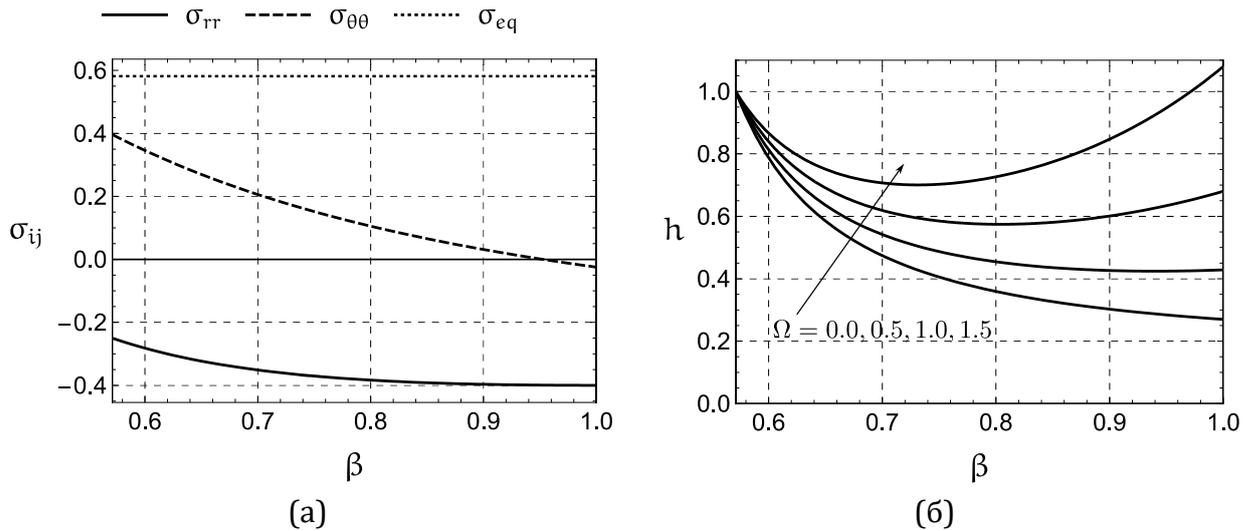


Рис. 4.2 — Распределение напряжений в равнопрочном диске (а) и профили равнопрочного диска (б) для различных значений скорости вращения ($\Omega = 0.0, 0.5, 1.0, 1.5$) при использовании условия Цая-Ву.

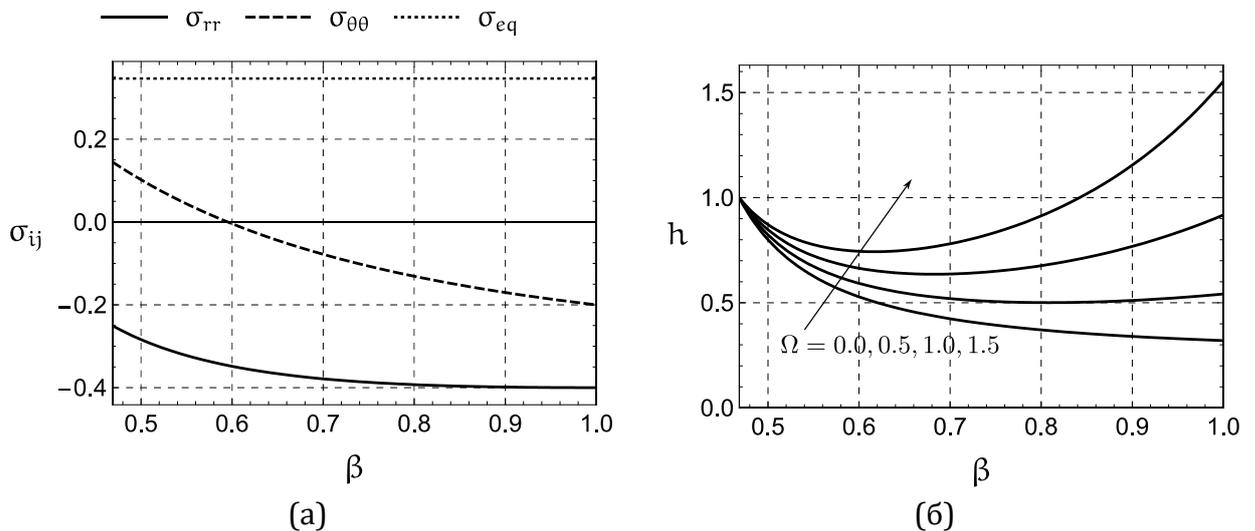


Рис. 4.3 — Распределение напряжений в равнопрочном диске (а) и профили равнопрочного диска (б) для различных значений скорости вращения ($\Omega = 0.0, 0.5, 1.0, 1.5$) при использовании условия Мизеса.

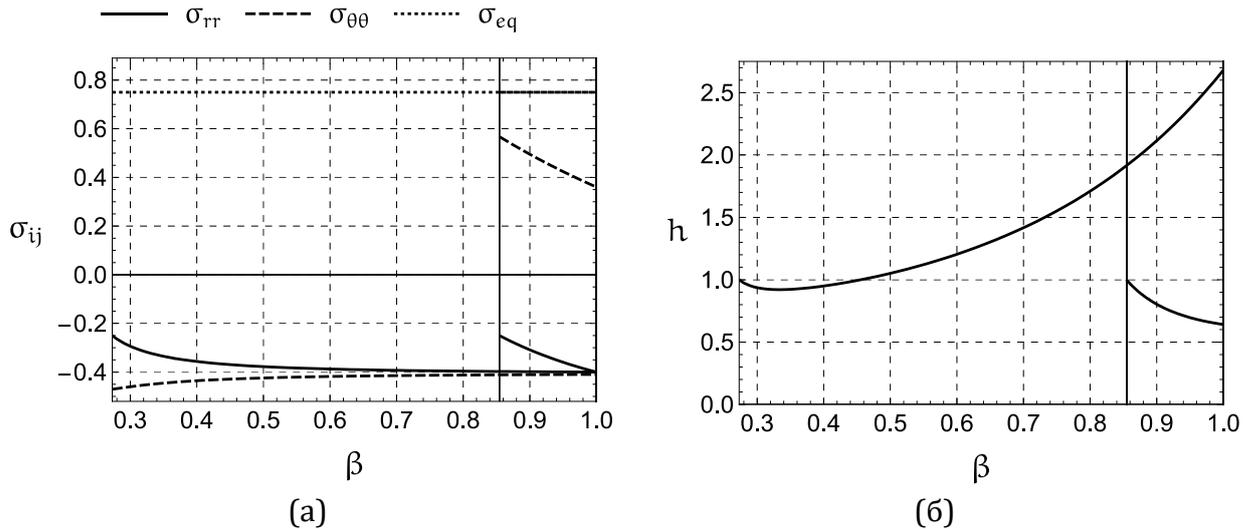


Рис. 4.4 — Распределение напряжений в равнопрочном диске (а) и профили равнопрочного диска (б) для $\tilde{\sigma}_{eq} = 0.75, \Omega = 1.0$ при использовании условия Цая-Ву.

На рис. 4.2 представлено распределение напряжений в диске равнопрочном по условию Цая-Ву (4.10), (4.11), а также профили такого диска для нескольких значений скорости вращения. Аналогичные графики для условия Мизеса (4.10), (4.13) показаны на рис. 4.3. Из рис. 4.2 и 4.3 видно, что эффекты анизотропии и асимметрии оказывают существенное влияние на геометрию равнопрочного вращающегося и напряженного состояния в нем. В найденном решении скорость вращения Ω влияет только на профиль диска и не влияет на распределение напряжений в нем. Увеличение скорости вращения требует усиления диска в окрестности его внешнего контура (рис. 4.2 и 4.3). Значительное увеличение угловой скорости приводит к выходу решения за границы применимости (4.29).

Как уже было сказано ранее, граничным условиям задачи можно удовлетворить четырьмя разными способами (4.25) и в некоторых случаях решение задачи будет неединственным. Рассмотрим желаемую величину эквивалентного напряжения $\tilde{\sigma}_{eq} = 0.75$ в равнопрочном диске. Из (4.22) следует, что $(\varphi_\delta, \varphi_1) = (\varphi_\delta^1, \varphi_1^1) \cong (0.675, 0.953)$ и $\delta \cong 0.273$. Однако существует и второе решение, для которого $(\varphi_\delta, \varphi_1) = (\varphi_\delta^2, \varphi_1^2) \cong (2.466, 2.188)$ и $\delta \cong 0.855$. Эти решения проиллюстрированы на рис. 4.4 где изображены

графики напряжений и профили диска при скорости вращения $\Omega = 1.0$. Видим, что полученные решения отличаются принципиальным образом: в первом решении оба напряжения отрицательны, а во втором — радиальное и тангенциальное напряжения имеют разный знак. Для проверки справедливости гипотезы о плоском напряженном состоянии предполагалось [221], что в (4.29) $(r_{out} / h_{in}) \Delta = 10$. Установлено, что во всех представленных выше расчетах (рис. 4.2–4.4) полученные профили диска удовлетворяют условию (4.29).

4.3. Проектирование равнопрочных вращающихся цилиндров из неоднородного материала

4.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим полый цилиндр, внутренний и внешний радиусы которого равны r_{in} и r_{out} соответственно. Цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω , а угловое ускорение равно нулю. Предполагается, что цилиндр находится в состоянии плоской или обобщенной плоской деформации и сохраняет осевую симметрию в процессе деформирования. Исходя из перечисленных допущений радиальное перемещение u_r является единственной ненулевой компонентой вектора перемещений. Для решения задачи используется цилиндрическая система координат (r, θ, z) , а также следующие безразмерные величины:

$$\delta = \frac{r_{in}}{r_{out}}, \beta = \frac{r}{r_{out}}, \Omega = \frac{\rho r_{out}^2}{\sigma_y} \omega^2, \bar{E} = \frac{E}{E_\delta},$$

$$\bar{u} = \frac{E_\delta}{\sigma_y} \frac{u_r}{r_{out}}, \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{E_\delta}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}, \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_y},$$
(4.33)

где ρ — плотность, σ_y — предел текучести при одноосном растяжении-сжатии, E_δ — модуль Юнга на внутренней поверхности цилиндра $\beta = \delta$, $E = E(\beta)$ — модуль Юнга, u_r — радиальное перемещение, ε_{ij} — компоненты тензора малых деформаций, σ_{ij} — компоненты тензора

напряжений. Далее, если не сказано иное, все формулы записаны с использованием безразмерных переменных (4.33), а знак верхнего подчеркивания для краткости опущен. Параметр Ω для удобства называется скоростью вращения.

Предполагается, что теория малых деформаций справедлива с необходимой степенью точности. Тогда кинематические соотношения запишутся следующим образом:

$$\varepsilon_{rr} = u'; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = u\beta^{-1}, \quad (4.34)$$

здесь и далее штрих обозначает производную по координате β .

Деформации в цилиндре должны удовлетворять уравнению совместности

$$\varepsilon'_{\theta\theta} + (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr})\beta^{-1} = 0. \quad (4.35)$$

Напряжения и деформации связаны законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-2\nu)\varepsilon_{ij} + \nu\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \right), \quad (4.36)$$

здесь ν — коэффициент Пуассона, в дальнейших рассуждениях ограничимся значениями $0 < \nu < 1/2$, δ_{ij} — символ Кронекера. Сдвиговые деформации и касательные напряжения всюду в цилиндре равны нулю $\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} = 0 (i \neq j)$.

Соотношения, обратные к (4.36) имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left((1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij} \right). \quad (4.37)$$

Единственное нетривиальное уравнение равновесия в цилиндре — это уравнение в радиальном направлении

$$\sigma'_{rr} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\beta^{-1} = -\Omega\beta. \quad (4.38)$$

Боковые поверхности цилиндра $\beta = \delta$ и $\beta = 1$ считаются свободными от нагрузок, следовательно граничные условия задачи примут вид:

$$\sigma_{rr}(\delta) = 0, \quad \sigma_{rr}(1) = 0. \quad (4.39)$$

В случае плоского деформированного состояния осевая деформация отсутствует

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}). \quad (4.40)$$

При условии обобщенной плоской деформации осевая деформация $\varepsilon_{zz} = const$, а суммарное осевое усилие равно нулю

$$\int_{\delta}^1 \beta \sigma_{zz} d\beta = 0, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + \varepsilon_{zz}. \quad (4.41)$$

Материал цилиндра считается неоднородным в отношении модуля Юнга, остальные физико-механические параметры: плотность, коэффициент Пуассона и предел текучести приняты постоянными. Целью настоящего подраздела является определение функции распределения модуля Юнга $E(\beta)$, которая бы приводила к желаемому напряженному состоянию во вращающемся цилиндре. Под таким состоянием понимается: а) постоянство тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta} = const$; б) постоянство разности тангенциального и радиального напряжений $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = const$; в) постоянство линейной комбинации тангенциального и радиального напряжений $\sigma_{\theta\theta} + k\sigma_{rr} = const$ ($k \neq -1$). Как будет показано далее, во всех трех случаях искомое распределение модуля Юнга не зависит от Ω .

4.3.2 Постоянное тангенциальное напряжение

Предположим, что тангенциальное напряжение в цилиндре не зависит от радиальной координаты. Следует отметить, что во вращающемся сплошном и полом цилиндре со свободными боковыми поверхностями тангенциальное напряжение является наибольшим главным напряжением [63, 70]. Поэтому цилиндр с постоянным тангенциальным напряжением является равнопрочным в соответствии с критерием максимального главного напряжения.

Вначале рассмотрим случай плоской деформации. Распределение радиального напряжения следует из решения уравнения равновесия (4.38) с учетом условия $\sigma_{\theta\theta} = c_1$. Далее с помощью второго из соотношений

(4.40) определяется осевое напряжение. Итоговое распределение напряжений в цилиндре имеет вид:

$$\sigma_{rr} = c_1 + \frac{c_2}{\beta} - \frac{\Omega}{3} \beta^2; \quad \sigma_{\theta\theta} = c_1; \quad \sigma_{zz} = 2\nu c_1 + \frac{\nu c_2}{\beta} - \frac{\nu}{3} \Omega \beta^2, \quad (4.42)$$

где константы c_1, c_2 определяются с помощью граничных условий (4.39):

$$c_1 = \frac{1}{3}(1 + \delta + \delta^2)\Omega, \quad c_2 = -\frac{1}{3}(\delta + \delta^2)\Omega. \quad (4.43)$$

Распределение деформаций следует из (4.37), (4.42) и (4.43)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{(1+\nu)\Omega}{3E} \left((1+\delta+\delta^2)(1-2\nu) - (1-\nu)\beta^2 - \frac{\delta(1+\delta)(1-\nu)}{\beta} \right); \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{(1+\nu)\Omega}{3E} \left((1+\delta+\delta^2)(1-2\nu) + \nu\beta^2 + \frac{\delta(1+\delta)\nu}{\beta} \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Уравнение совместности деформаций (4.35) с учетом предыдущих соотношений преобразуется к уравнению относительно неизвестного модуля Юнга

$$\frac{E'}{E} = \frac{tm + (3+m)\beta^3}{t\beta + n\beta^2 + \beta^4}, \quad (4.45)$$

где $t = \delta(1+\delta)$, $w = \nu^{-1} - 2$, $m = (1+w)$, $n = (1+t)w$.

Общее решение уравнения (4.45) запишется следующим образом

$$E(\beta) = \exp \int \frac{tm + (3+m)\beta^3}{\beta^4 + n\beta^2 + t\beta} d\beta. \quad (4.46)$$

Найдем в (4.46) интеграл под знаком экспоненты и получим:

$$\begin{aligned} E(\beta) &= \exp(c_0 + J(\beta)), \quad c_0 = -J(\delta), \\ J(\beta) &= \ln(\beta^m (\beta^3 + n\beta + t)) + \\ &+ \frac{2^{1/2} d^{2/3} (1+m)ns}{gh} \arctan\left(\frac{s + 12d^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/2} h} \beta\right) + \frac{d^{2/3} (1+m)n}{g} \times \\ &\times \left(\ln(2d^{2/3} (n + 3\beta^2) + d^{1/3} s \beta + 2^{1/3} d^{4/3} + 2^{5/3} n^2) - 2 \ln(6d^{1/3} \beta - s) \right), \\ d &= 3^{3/2} t - \sqrt{4n^3 + 27t^2}, \quad s = 2^{2/3} 3^{1/2} (2^{2/3} n - d^{2/3}), \\ g &= 2^{1/3} d^{4/3} - 2d^{2/3} n + 2^{5/3} n^2, \quad h = \sqrt{2^{1/3} d^{4/3} + 4d^{2/3} n + 2^{5/3} n^2}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

константа c_0 в (4.47) определена из условия $E(\delta)=1$.

В случае обобщенной плоской деформации решение определяется схожим образом, а для вычисления осевого напряжения и осевой деформации используются соотношения (4.41). В итоге распределение напряжений в цилиндре примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_1 + \frac{c_2}{\beta} - \frac{\Omega}{3} \beta^2, \quad \sigma_{\theta\theta} = c_1, \quad \sigma_{zz} = d + 2\nu c_1 + \frac{\nu c_2}{\beta} - \frac{\nu}{3} \Omega \beta^2, \\ c_1 &= \frac{1}{3}(1 + \delta + \delta^2)\Omega, \quad c_2 = -\frac{1}{3}(\delta + \delta^2)\Omega, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{2}(1 + \delta^2)\nu\Omega. \end{aligned} \quad (4.48)$$

С учетом (4.48) и (4.37) уравнение совместности деформаций (4.35) запишется в виде (4.45), за исключением того, что константа n в знаменателе вычисляется по формуле

$$n = \frac{(2(1 + \delta(1 + \delta))(1 - \nu) - (1 + \delta(4 + \delta))\nu^2)}{2\nu(1 + \nu)}. \quad (4.49)$$

Разумеется, решение (4.46), (4.47) остается справедливым, но константа n определяется с помощью соотношения (4.49).

В случае сплошного цилиндра $\delta=0$. Константы примут значения $c_1 = \Omega/3, c_2 = 0, \varepsilon_{zz} = -\nu\Omega/2$. Повторяя вышеприведенные рассуждения найдем распределение модуля Юнга для случая плоской деформации:

$$E(\beta) = \left(1 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \beta^2\right)^{(1+2\nu)/2\nu},$$

и для случая обобщенной плоской деформации

$$E(\beta) = \left(1 + \frac{2\nu(1 + \nu)}{2 - \nu(2 + \nu)} \beta^2\right)^{(1+2\nu)/2\nu}.$$

4.3.3 Постоянная разность между тангенциальным и радиальным напряжением

Предположим, что напряженное состояние в цилиндре удовлетворяет равенству $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = c_1$. Известно, что за исключением малых

значений δ во вращающемся полом цилиндре с закрепленными торцами нормальные напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$ [33, 69, 71]. Поэтому цилиндр, в котором разность напряжений $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ постоянна, является равнопрочным в соответствии с критерием пластичности Треска.

Вначале рассмотрим плоское деформированное состояние. Радиальное напряжение определяется из решения уравнения равновесия (4.38), а осевое из (4.41). Распределение напряжений имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_2 + c_1 \ln \beta - \frac{\Omega}{2} \beta^2, & \sigma_{\theta\theta} &= c_2 + c_1 (\ln \beta + 1) - \frac{\Omega}{2} \beta^2, \\ \sigma_{zz} &= \nu(c_1 + 2c_2) + 2\nu c_1 \ln \beta - \nu \Omega \beta^2,\end{aligned}\quad (4.50)$$

где константы c_1, c_2 вычисляются из граничных условий (4.39):

$$c_1 = -\frac{1 - \delta^2}{2 \ln \delta} \Omega, \quad c_2 = \frac{\Omega}{2}.\quad (4.51)$$

Уравнение совместности деформаций (4.35) с учетом (4.50) и (4.51) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{E'}{E} &= \frac{2(\nu + b \beta^2)}{b \beta^3 + c \beta \ln \beta + (\nu - b) \beta}, \\ c &= (1 - \delta^2)(1 - 2\nu), \quad \nu = (1 - \delta^2)(1 - \nu), \quad b = \ln \delta (1 - 2\nu).\end{aligned}\quad (4.52)$$

Из решения уравнения (4.52) следует распределение модуля Юнга в цилиндре

$$E(\beta) = \exp\left(2 \int_{\delta}^{\beta} \frac{\nu + b x^2}{b x^3 + c x \ln x + (\nu - b) x} dx\right),\quad (4.53)$$

Интеграл в (4.53) определяется с помощью численных методов.

Повторяя вычисления для случая обобщенной плоской деформаций, найдем распределение напряжений в цилиндре

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_2 + c_1 \ln \beta - \frac{\Omega}{2} \beta^2, \sigma_{\theta\theta} = c_2 + c_1 (\ln \beta + 1) - \frac{\Omega}{2} \beta^2, \\ \sigma_{zz} &= \varepsilon_{zz} + \nu(c_1 + 2c_2) + 2\nu c_1 \ln \beta - \nu \Omega \beta^2, \\ c_1 &= -\frac{1-\delta^2}{2 \ln \delta} \Omega, \quad c_2 = \frac{\Omega}{2}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{2} \nu (1 + \delta^2) \Omega.\end{aligned}\quad (4.54)$$

Распределение модуля Юнга следует из решения уравнения (4.35) с учетом (4.54) и имеет следующий вид

$$E(\beta) = \exp\left(2 \int_{\delta}^{\beta} \frac{\nu + bx^2}{bx^3 + cx \ln x + qx} dx\right), \quad q = \nu - \frac{1-\nu - (1-\delta^2)\nu^2}{1+\nu} \ln \delta. \quad (4.55)$$

Следует отметить, что в центре $\beta = 0$ сплошного вращающегося цилиндра всегда справедливо равенство $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr}$ [63, 70], поэтому достижение напряженного состояния $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = c_1$ ($c_1 \neq 0$) во всем цилиндре является невозможным. Это замечание справедливо как для плоской, так и обобщенной плоской деформации.

4.3.4 Постоянная линейная комбинация тангенциального и радиального напряжений

Предположим, что напряженное состояние в цилиндре удовлетворяет равенству $\sigma_{\theta\theta} + k\sigma_{rr} = c_1$ ($k \neq -1$). Напряженное состояние в условиях плоской деформации определяется с помощью (4.38) и (4.40) как

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{c_1}{1+k} + c_2 \beta^{-1-k} - \frac{\Omega}{3+k} \beta^2; \quad \sigma_{\theta\theta} = \left(1 + \frac{k}{1+k}\right) c_1 + k c_2 \beta^{-1-k} - \frac{k\Omega}{3+k} \beta^2; \\ \sigma_{zz} &= 2\nu c_1 + (1+k)\nu c_2 \beta^{-1-k} - \frac{(1+k)\nu \Omega}{3+k} \beta^2; \\ c_1 &= \frac{(1+k)(1-\delta^{3+k})}{(3+k)(1-\delta^{1+k})} \Omega; \quad c_2 = -\frac{\delta^{1+k}(1-\delta^2)}{(3+k)(1-\delta^{1+k})} \Omega\end{aligned}\quad (4.56)$$

Решая уравнение совместности (4.35) с учетом (4.56), найдем модуль Юнга

$$E(\beta) = \exp \int_{\delta}^{\beta} \frac{(1+3k+2(1-k)\nu)(1-\delta^{k+1})x^{3+k} + (1-k^2)\delta^{1+k}(1-\delta^2)(1-\nu)}{\left(\left((k(1-\nu)+\nu)\left((1-\delta^{1+k})x^{4+k} + \delta^{1+k}(1-\delta^2)x\right) + (1-2\nu)(1-\delta^{k+3})x^{2+k}\right)\right)} dx. \quad (4.57)$$

Для обобщенной плоской деформации напряжения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{c_1}{1+k} + c_2 \beta^{-1-k} - \frac{\Omega}{3+k} \beta^2; \quad \sigma_{\theta\theta} = \left(1 + \frac{k}{1+k}\right) c_1 + k c_2 \beta^{-1-k} - \frac{k\Omega}{3+k} \beta^2; \\ \sigma_{zz} &= 2\nu c_1 + (1+k)\nu c_2 \beta^{-1-k} - \frac{(1+k)\nu\Omega}{3+k} \beta^2; \\ c_1 &= \frac{(1+k)(1-\delta^{3+k})}{(3+k)(1-\delta^{1+k})} \Omega; \quad c_2 = -\frac{\delta^{1+k}(1-\delta^2)}{(3+k)(1-\delta^{1+k})} \Omega; \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{2}\nu(1+\delta^2)\Omega.\end{aligned}\tag{4.58}$$

Распределение модуля Юнга определяется из уравнения (4.35) как

$$\begin{aligned}E(\beta) &= \exp\left(\int_{\delta}^{\beta} \frac{\left((1-k^2)\delta^{1+k}(1-\delta^2)(1-\nu) + (1-\delta^{1+k})(1+3k+2(1-k)\nu)x^{3+k}\right)}{\left((k(1-\nu)+\nu)\left((1-\delta^{1+k})x^{4+k} + \delta^{1+k}(1-\delta^2)x\right) + px^{2+k}\right)} dx\right), \\ p &= \frac{\nu^2(3+k)(\delta^2 - \delta^{1+k}) + (2-\nu(2+(1-k)\nu))(1-\delta^{3+k})}{2(1+\nu)}.\end{aligned}\tag{4.59}$$

Для сплошного цилиндра $c_1 = \frac{1+k}{3+k}\Omega$; $c_2 = 0$; $\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{2}\Omega$. Откуда найдем

модуль Юнга для плоской деформации

$$E(\beta) = \left(1 + \frac{(k(1-\nu)+\nu)}{1-2\nu} \beta^2\right)^{\frac{1+2\nu+k(3-2\nu)}{2(\nu+k(1-\nu))}}\tag{4.60}$$

и обобщенной плоской деформации

$$E(\beta) = \left(1 + \frac{2(\nu+k(1-\nu))(1+\nu)}{2-\nu(2+(1-k)\nu)} \beta^2\right)^{\frac{1+2\nu+k(3-2\nu)}{2(\nu+k(1-\nu))}}.\tag{4.61}$$

Рассмотрим частный случай $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = const$, который соответствует

$k = -\frac{\nu}{1-\nu}$ в условии $\sigma_{\theta\theta} + k\sigma_{rr} = const$. После раскрытия неопределенностей вида 0^∞ в (4.60) и (4.61) найдем распределение модуля Юнга для

сплошного цилиндра в условиях плоской

$$E(\beta) = \exp\left(\frac{\beta^2}{2-2\nu}\right)\tag{4.62}$$

и обобщенной плоской деформации

$$E(\beta) = \exp\left(\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2-4\nu+\nu^2}\beta^2\right). \quad (4.63)$$

Интересно отметить, что в сплошном цилиндре со свободными торцами для $\nu > 0$ напряженное состояние удовлетворяет неравенству $\sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$ [70], поэтому решение (4.63) соответствует цилиндру, равнопрочному по условию пластичности Треска.

4.3.5 Примеры решения

Найденные в предыдущем подразделе решения проиллюстрированы на рис. 4.5–4.7, где изображены графики распределения модуля Юнга в цилиндре. Принято, что коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. На всех графиках по оси абсцисс отложена безразмерная радиальная координата $\beta = r/r_{out}$, а по оси ординат – безразмерный модуль Юнга $E = E(\beta)/E_s$. На рис. 4.5 представлены зависимости модуля Юнга, необходимые для реализации в цилиндре постоянного тангенциального напряжения. Графики на рис. 4.5а получены с помощью (4.47), а графики на рис. 4.5б построены на основе (4.47), (4.49).

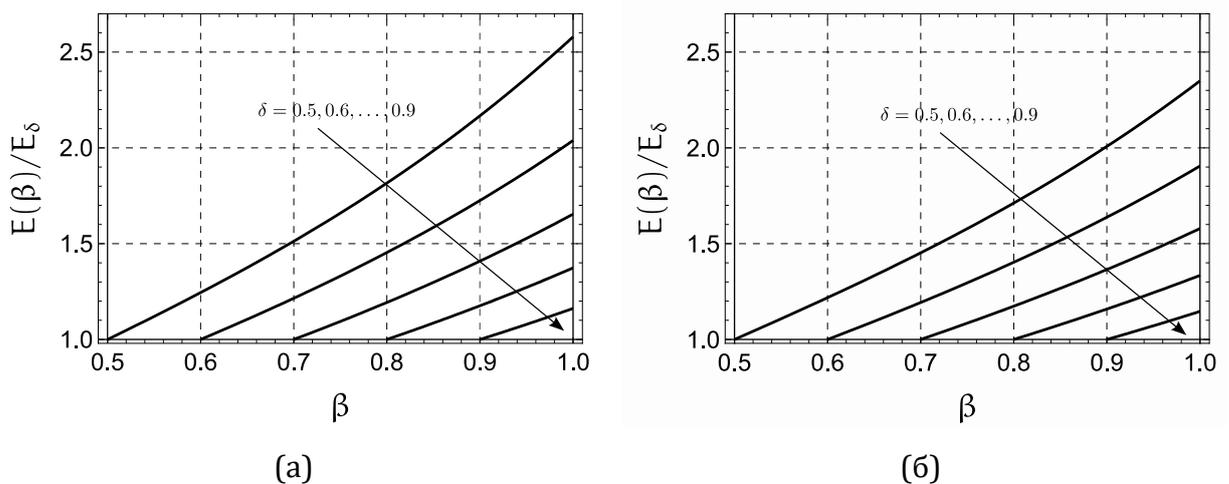


Рис. 4.5 — Распределение модуля Юнга в цилиндре с постоянным тангенциальным напряжением для нескольких значений δ : (а) плоская деформация, (б) обобщенная плоская деформация.

На рис. 4.6 представлены решения, необходимые для достижения в цилиндре постоянной разности между тангенциальным и радиальным напряжениями. Графики на рис. 4.6а иллюстрируют решение (4.53), а графики на рис. 4.6б — решение (4.54). Из рис. 4.5 и 4.6 можно увидеть, что зависимость модуля Юнга является возрастающей функцией радиальной координаты. Решения для плоской и обобщенной плоской деформации являются достаточно близкими, однако в последнем случае величина модуля Юнга несколько меньше.

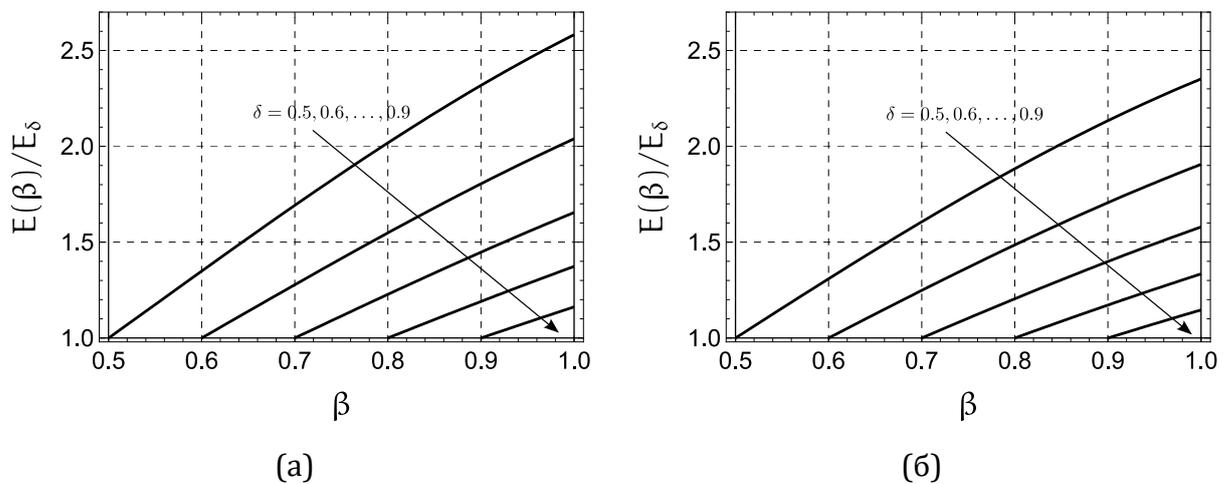


Рис. 4.6 — Распределение модуля Юнга в цилиндре с постоянной разностью между тангенциальным и радиальным напряжением для нескольких значений δ : (а) плоская деформация, (б) обобщенная плоская деформация.

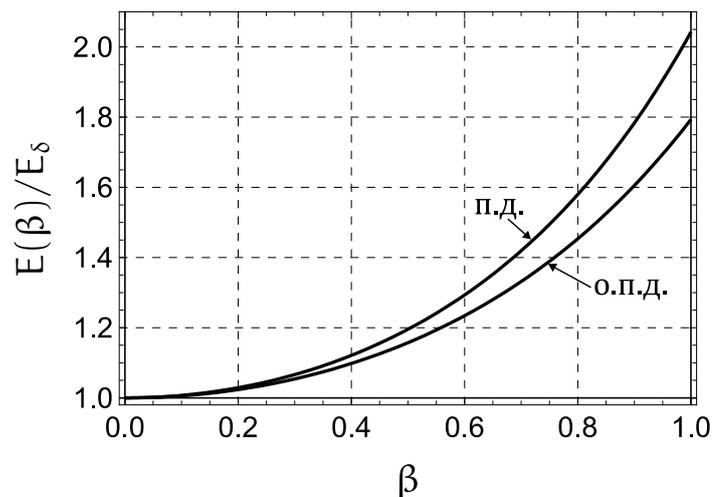


Рис. 4.7 — Распределение модуля Юнга в сплошном цилиндре с постоянной разностью между тангенциальным и осевым напряжением.

Сравнивая рис. 4.5а и 4.6а, можно увидеть, что для больших значений δ решения практически совпадают. Этот факт объясняется тем, что в тонких цилиндрах $\sigma_{\theta\theta} \gg \sigma_{rr} \approx 0$, поэтому условие $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = c_1$ мало отличается от условия $\sigma_{\theta\theta} = c_1$. Аналогичную картину можно заметить и в случае обобщенной плоской деформации. На рис. 4.7 представлены графики модуля Юнга, реализующие в цилиндре постоянную разность между тангенциальным и осевым напряжением для плоской (п.д.) и обобщенной плоской (о.п.д.) деформацией. Данные графики получены на основе (4.62) и (4.63) соответственно. Видно, что в этом случае модуль Юнга также является возрастающей функцией радиальной координаты.

4.4. Выводы

В данном разделе получены зависимости модуля Юнга от радиальной координаты, при которых в сплошном и полом цилиндре достигается состояние равнопрочности. Полученные зависимости могут быть реализованы на практике с помощью композитных материалов. Также найдено аналитическое решение, позволяющее для заданных нагрузок на внешнем и внутреннем контуре диска и скорости вращения построить геометрию диска равной прочности. В качестве критерия прочности применялось общее эллиптическое условие, которое описывает анизотропию материала, а также его асимметрию при растяжении и сжатии. Установлено, что профиль равнопрочного диска может не существовать и может быть не единственным. Для примера рассмотрен критерий прочности Цая-Ву, широко используемый для композитных материалов. Сравнение с решением для условия Мизеса показало, что указанные эффекты оказывают существенное влияние на геометрию равнопрочного диска и напряженное состояние в нем. Найденное решение в частных случаях сводится к решениям для многих известных критериев прочности, а также к классическому решению Ю.Н. Работнова.

Заключение

1. В рамках условий текучести Треска и Ишлинского-Ивлева получены новые аналитические решения, описывающие напряженно-деформированное состояние вращающихся цилиндров из идеального упругопластического материала на стадиях нагрузки и разгрузки, включая повторное пластическое течение.

2. Построено универсальное аналитическое решение упругопластической задачи во вращающемся линейно-упрочняемом цилиндре в условиях плоской или обобщенной плоской деформации. Найденное решение основано на общем кусочно-линейном условии пластичности, учитывает влияние промежуточного главного напряжения на развитие пластического течения и подходит для расчета цилиндров с различными видами граничных/торцевых условий и широкого класса материалов.

3. На основе условия Треска получено точное решение задачи об упругопластическом деформировании вращающегося линейно-упрочняемого цилиндра с жестким включением при наличии стационарного температурного градиента между внутренней и внешней поверхностями.

4. Решена упругопластическая задача во вращающемся полом цилиндра с закрепленными концами при условии пластичности Треска и нелинейных законах изотропного упрочнения. Точные аналитические решения найдены для линейно-экспоненциального закона упрочнения, а также для нескольких частных случаев степенного параметра в степенном законе упрочнения. Вычисление остаточных напряжений в цилиндре после предварительного вращения с заданной максимальной скоростью проводилось с помощью численных методов.

5. Проведен анализ влияния эффекта снижения модуля Юнга после предварительного пластического деформирования на процесс ротационного автофретирования полого цилиндра с закрепленными торцами.

Установлено, что данный эффект может оказывать заметное влияние на величину остаточных напряжений после ротационного автофретирования. Обнаружено, что учет падения модуля Юнга особенно важен для расчета толстостенных цилиндров и высоких скоростей автофретирования.

6. Получены новые решения, учитывающие вязкие эффекты материал (ползучесть и вязкопластичность) на процессы необратимого деформирования в цилиндре и диске при наличии центробежных сил. Найдены аналитические решения для установившегося вязкопластического течения во вращающемся полом цилиндре с закрепленными и свободными торцами, а также разработан численный алгоритм для расчета упруговязкопластического деформирования. Разработаны численные схемы расчета необратимых деформаций во вращающемся диске с граничными условиями различного вида (полый диск и диск с жестким включением) с учетом углового ускорения. Показано, что угловое ускорение может приводить к росту эквивалентного напряжения и скоростей пластических деформаций. Если условия эксплуатации подразумевают постоянное ускорение и торможение диска, то в расчетную модель следует включать помимо центробежной силы также и угловое ускорение.

7. Найдены новые аналитические решения, позволяющие для заданных нагрузок на внешней и внутренней поверхностях построить вращающийся цилиндр/диск равной прочности. Для цилиндра в качестве управляющего параметра использовалась зависимость модуля Юнга от радиуса, а для диска — его профиль. Проанализировано влияние анизотропии и асимметрии при растяжении и сжатии на профиль равнопрочного вращающегося диска. Установлено, что равнопрочный профиль диска может не существовать и может быть не единственным.

Список литературы

1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Timoshenko S. Theory of elasticity. 3rd ed., New York: McGraw Hill, 2010. 567 p.
4. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 512 с.
5. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
6. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. 2-е изд., перераб. и доп.-е, М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
7. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Москва: Издательство иностранной литературы, 1954. 647 с.
8. Демьянушко И. В., Биргер И. А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
9. Левин А. В., Боришанский К. Н., Консон Е. Д. Прочность и вибрация лопаток и дисков паровых турбин. Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1981. 710 с.
10. Костюк А. Г. Динамика и прочность турбомашин: учебник для вузов. 3-е изд., М.: Издательский дом МЭИ, 2007. 476 с.
11. Alexandrov S. Elastic/Plastic Discs Under Plane Stress Conditions. Cham: Springer International Publishing, 2015. 113 p.
12. Белых С. В., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Прокудин А. Н. Об учете вязких свойств материалов в теории больших упругопластических деформаций // Чебышевский Сборник. 2017. Т. 18, № 3 (63). С. 108–130. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-3-109-130>
13. Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L., Prokudin A. N. On the Irreversible Deformations Growth in the Material with Elastic, Viscous, and Plastic Properties and Additional Requirements to Yield Criteria // Mechanics for Materials and Technologies. Advanced Structured Materials, vol. 46 / edited by H. Altenbach, R. V. Goldstein, E. Murashkin. Cham: Springer International Publishing, 2017. P. 133–151. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56050-2_6
14. Фирсов С. В., Прокудин А. Н. Необратимое деформирование цилиндра, вращающегося с переменной скоростью // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении. Материалы V Дальневосточной конференции с международным участием / под ред. А. И. Евстегнеева. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 2018. С. 107–111.
15. Фирсов С. В., Прокудин А. Н. Обобщённая плоская деформация вращающегося цилиндра // Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций. Материалы докладов III дальневосточной школы-семинара / под ред. А. И. Евстегнеева. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 2018. С. 77–81.

16. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра // ДВМЖ. 2018. Т. 18, № 2. С. 242–260.
17. Прокудин А. Н. Вязкопластическое течение во вращающемся диске // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3 (37). С. 91–99.
18. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Расчет ползучести вращающегося цилиндра со свободными концами // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 1 (35). С. 63–73.
19. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Упругопластическое деформирование вращающегося полого цилиндра с жестким покрытием на внутренней и внешней стенках // Вестник Инженерной Школы ДВФУ. 2019. № 4 (41). С. 12–28. <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2019-4-2>
20. Прокудин А. Н. Упругопластические деформации во вращающемся цилиндре с жестким включением // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах. Уфа: Башкирский государственный университет, 2019. С. 356–358.
21. Фирсов С. В., Прокудин А. Н. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся полом цилиндре // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 4 (42). С. 45–55. <https://doi.org/10.26293/chgru.2019.42.4.005>
22. Фирсов С. В., Прокудин А. Н., Буренин А. А. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся цилиндре с жестким включением // Сибирский Журнал Индустриальной Математики. 2019. Т. 22, № 4 (80). С. 121–133. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2019.22.412>
23. Prokudin A. N., Firsov S. V. Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid casing // PNRPU Mechanics Bulletin. 2019. no. 4. P. 120–135. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.12>
24. Прокудин А. Н. Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра при условии максимальных приведенных напряжений // Вестник СамГТУ. Серия «Физико-математические науки». 2020. Т. 24, № 1. С. 74–94. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1737>
25. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // ZAMM. 2020. Vol. 100, no. 3. P. e201900213. <https://doi.org/10.1002/zamm.201900213>
26. Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Прокудин А. Н. О последовательной сменяемости в механизмах производства больших необратимых деформаций // ПММ. 2021. Т. 85, № 1. С. 106–120. <https://doi.org/10.31857/S003282352006003X>
27. Прокудин А. Н., Буренин А. А. Упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра из линейно-упрочняющегося материала // ПММ. 2021. Т. 85, № 2. С. 172–192. <https://doi.org/10.31857/S0032823521020077>
28. Прокудин А. Н., Буренин А. А. Анализ упругопластического деформирования вращающегося сплошного цилиндра при общем кусочно-линейном условии пластичности // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 5 (369). С. 68–79. <https://doi.org/10.15372/PMTF20210507>

29. Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. Irreversible deformation of a rotating disk having angular acceleration // *Acta Mech.* 2021. Vol. 232, no. 5. P. 1917–1931. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-02942-5>
30. Prokudin A. Schmidt-Ishlinskii Yield Criterion and a Rotating Cylinder with a Rigid Inclusion // *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. Vol. 7, no. 2. P. 858–869. <https://doi.org/10.22055/jacm.2020.35648.2704>
31. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Упругопластические деформации во вращающемся полом цилиндре с жёстким внешним покрытием при условии максимальных приведённых напряжений // *Сибирский журнал индустриальной математики.* 2022. Т. 25, № 2. С. 58–82. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.25.205>
32. Прокудин А. Н. Влияние переменного модуля Юнга на остаточные напряжения, вызванные ротационным автофретированием полого цилиндра с закрепленными торцами // *Вестник ПНИПУ. Механика.* 2023. № 6. С. 91–103. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.6.09>
33. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating hollow cylinder made of power-law hardening material // *Mater. Phys. Mech.* 2023. Vol. 51, no. 2. P. 96–111. https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_9
34. Прокудин А. Н. Расчет профиля равнопрочного вращающегося диска переменной толщины с учетом анизотропии и разной прочности при растяжении и сжатии // *Вестник СамГТУ. Серия «Физико-математические науки».* 2024. Т. 28, № 4. С. 701–720. <https://doi.org/10.14498/vsgtu2108>
35. Прокудин А. Н. Упругопластический анализ вращающегося полого цилиндра, жестко посаженного на вал, при наличии температурного градиента // *Вестник СамГТУ. Серия «Физико-математические науки».* 2024. Т. 28, № 3. С. 462–488. <https://doi.org/10.14498/vsgtu2050>
36. Prokudin A. N., Burenin A. A. Design of Equi-Strength Nonhomogeneous Rotating Shafts // *Mech. Solids.* 2024. Vol. 59, no. 7. P. 3704–3711. <https://doi.org/10.1134/S0025654424606232>
37. Prokudin A. N. Elastoplastic analysis of linearly hardening rotating hollow and solid cylinders with respect to unified yield criterion // *Iran. J. Sci. Technol. - Trans. Mech. Eng.* 2025.
38. Sadd M. H. *Elasticity: theory, applications, and numerics.* 3rd ed., Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2014. 582 p.
39. Akis T., Eraslan A. N. The stress response and onset of yield of rotating FGM hollow shafts // *Acta Mech.* 2006. Vol. 187, no. 1. P. 169–187. <https://doi.org/10.1007/s00707-006-0374-z>
40. Eraslan A. N., Akis T. On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems // *Acta Mech.* 2006. Vol. 181, no. 1. P. 43–63. <https://doi.org/10.1007/s00707-005-0276-5>
41. Fatehi P., Nejad M. Z. Effects of material gradients on onset of yield in fgm rotating thick cylindrical shells // *Int. J. Appl. Mechanics.* 2014. Vol. 6, no. 4. P. 1450038. <https://doi.org/10.1142/S1758825114500380>
42. Zenkour A. M. Rotating Variable-thickness Orthotropic Cylinder Containing a Solid Core of Uniform-thickness // *Arch. Appl. Mech.* 2006. Vol. 76, no. 1–2. P. 89–102. <https://doi.org/10.1007/s00419-006-0007-y>

43. Wang H. M. Effect of material inhomogeneity on the rotating functionality of a graded orthotropic hollow cylinder // *J. Mech. Sci. Technol.* 2010. Vol. 24, no. 9. P. 1839–1844. <https://doi.org/10.1007/s12206-010-0615-x>
44. Abd-Alla A. M., Mahmoud S. R., AL-Shehri N. A. Effect of the rotation on a non-homogeneous infinite cylinder of orthotropic material // *Appl. Math. Comput.* 2011. Vol. 217, no. 22. P. 8914–8922. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.03.077>
45. Seth B. R. Finite strain in a rotating shaft // *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*. 1941. Vol. 14, no. 6. P. 648–651. <https://doi.org/10.1007/BF03049139>
46. Chadwick P., Creasy C. F. M., Hart V. G. The deformation of rubber cylinders and tubes by rotation // *ANZIAM J.* 1977. Vol. 20, no. 1. P. 62–96. <https://doi.org/10.1017/S0334270000001454>
47. Haughton D. M., Ogden R. W. Bifurcation of rotating thick-walled elastic tubes // *J. Mech. Phys. Solids*. 1980. Vol. 28, no. 1. P. 59–74. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(80\)90012-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(80)90012-5)
48. Horgan C. O., Saccomandi G. Large Deformations of a Rotating Solid Cylinder for Non-Gaussian Isotropic, Incompressible Hyperelastic Materials // *J. Appl. Mech.* 2000. Vol. 68, no. 1. P. 115–117. <https://doi.org/10.1115/1.1349418>
49. Anani Y., Rahimi G. H. Stress analysis of rotating cylindrical shell composed of functionally graded incompressible hyperelastic materials // *Int. J. Mech. Sci.* 2016. Vol. 108–109, no. Supplement C. P. 122–128. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.02.003>
50. Bagheri A., Taghizadeh D., Darijani H. On the behavior of rotating thick-walled cylinders made of hyperelastic materials // *Meccanica*. 2016. Vol. 51, no. 3. P. 673–692. <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0233-x>
51. Sadeghi H., Baghani M., Naghdabadi R. Strain gradient elasticity solution for functionally graded micro-cylinders // *Int. J. Eng. Sci.* 2012. Vol. 50, no. 1. P. 22–30. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.09.006>
52. Danesh V., Asghari M. Analysis of micro-rotating disks based on the strain gradient elasticity // *Acta Mech.* 2014. Vol. 225, no. 7. P. 1955–1965. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-1031-y>
53. Chu L., Dui G. Exact solutions for functionally graded micro-cylinders in first gradient elasticity // *Int. J. Mech. Sci.* 2018. Vol. 148. P. 366–373. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.09.011>
54. Bagheri E., Asghari M., Danesh V. Analytical study of micro-rotating disks with angular acceleration on the basis of the strain gradient elasticity // *Acta Mech.* 2019. Vol. 230, no. 9. P. 3259–3278. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02461-4>
55. Zare H. R., Darijani H. A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders // *Mater. Des.* 2016. Vol. 105. P. 366–374. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2016.05.062>
56. Zare H. R., Darijani H. Strengthening and design of the linear hardening thick-walled cylinders using the new method of rotational autofrettage // *Int. J. Mech. Sci.* 2017. Vol. 124–125. P. 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.02.015>
57. Aziz F., Kamal S. M., Perl M., Chetry A. Increasing the load carrying capacity of hollow rotating disks by applying rotational autofrettage // *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2024. Vol. 105. P. 105231. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2024.105231>

58. Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume One. 2nd ed., New York: McGraw Hill, 1950. 572 p.
59. Davis E. A., Connelly F. M. Stress Distribution and Plastic Deformation in Rotating Cylinders of Strain-Hardening Material // J. Appl. Mech. 1959. Vol. 26, no. 1. P. 25–30. <https://doi.org/10.1115/1.4011918>
60. Rimrott F. P. J. On the Plastic Behavior of Rotating Cylinders // J. Appl. Mech. 1960. Vol. 27, no. 2. P. 309–315. <https://doi.org/10.1115/1.3643957>
61. Hodge P. G., Balaban M. Elastic—plastic analysis of a rotating cylinder // Int. J. Mech. Sci. 1962. Vol. 4, no. 6. P. 465–476. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(62\)80008-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(62)80008-3)
62. Gamer U. On the applicability of Tresca's yield condition to the rotating solid shaft // Revue roumaine des sciences techniques. Serie de mecanique appliquee. 1984. Vol. 29, no. 1. P. 27–30.
63. Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // Int. J. Eng. Sci. 1997. Vol. 35, no. 3. P. 253–267. [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7)
64. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // Z. angew. Math. Phys. 1984. Vol. 35, no. 5. P. 601–617. <https://doi.org/10.1007/BF00952107>
65. Lindner T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // ZAMM. 1998. Vol. 78, no. 2. P. 75–86. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4001\(199802\)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V)
66. Kamal S. M., Perl M., Bharali D. Generalized plane strain study of rotational autofrettage of thick-walled cylinders-Part I: Theoretical analysis // J. Press. Vessel Technol. Trans. ASME. 2019. Vol. 141, no. 5. P. 051201. <https://doi.org/10.1115/1.4043591>
67. Kamal S. M., Aziz F. Estimation of the Stresses in Rotational Autofrettage of Thick-Walled Pressure Vessels Using von Mises Yield Criterion // Proceedings of ASME 2021 Pressure Vessels & Piping Conference. Volume 2: Computer Technology and Bolted Joints; Design and Analysis. ASME Digital Collection, 2021. P. PVP2021-61888. <https://doi.org/10.1115/PVP2021-61888>
68. Shufen R., Dixit U. S. A Review of Theoretical and Experimental Research on Various Autofrettage Processes // J. Press. Vessel Technol. Trans. ASME. 2018. Vol. 140, no. 5. P. 050802. <https://doi.org/10.1115/1.4039206>
69. Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // Acta Mech. 1983. Vol. 50, no. 1–2. P. 1–8. <https://doi.org/10.1007/BF01170437>
70. Mack W. The rotating elastic–plastic solid shaft with free ends // Tech. Mech. 1991. no. 12. P. 119–124.
71. Mack W. Rotating elastic-plastic tube with free ends // Int. J. Solids Struct. 1991. Vol. 27, no. 11. P. 1461–1476. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90042-E](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90042-E)
72. Kamal S. M., Perl M. Generalized plane strain study of rotational autofrettage of thick-walled cylinders-Part II: Numerical evaluation // J. Press. Vessel Technol. Trans. ASME. 2019. Vol. 141, no. 5. P. 051202. <https://doi.org/10.1115/1.4044173>
73. Lenard J. G., Fenton R. G., Rimrott F. P. J. On the State of Plastic Equilibrium of a Rotating Hollow Cylinder of Finite Length // Trans. Can. Soc. Mech. Eng. 1972. Vol. 1, no. 2. P. 107–113. <https://doi.org/10.1139/tcsme-1972-0016>

74. Guven U. The fully plastic rotating disk with rigid inclusion // ZAMM. 1997. Vol. 77, no. 9. P. 714–716. <https://doi.org/10.1002/zamm.19970770912>
75. Güven U. Elastic-Plastic Rotating Disk with Rigid Inclusion // Mechanics of Structures and Machines. 1999. Vol. 27, no. 1. P. 117–128. <https://doi.org/10.1080/08905459908915691>
76. Parmaksizoğlu C., Güven U. Plastic Stress Distribution in a Rotating Disk with Rigid Inclusion Under a Radial Temperature Gradient // Mechanics of Structures and Machines. 1998. Vol. 26, no. 1. P. 9–20. <https://doi.org/10.1080/08905459808945417>
77. Güven U. Elastic-plastic stress distribution in a rotating hyperbolic disk with rigid inclusion // Int. J. Mech. Sci. 1998. Vol. 40, no. 1. P. 97–109.
78. Eraslan A. N. Von mises yield criterion and nonlinearly hardening variable thickness rotating annular disks with rigid inclusion // Mech. Res. Commun. 2002. Vol. 29, no. 5. P. 339–350. [https://doi.org/10.1016/S0093-6413\(02\)00282-3](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(02)00282-3)
79. Alexandrova N. N., Alexandrov S., Vila R. P. M. M. Analysis of stress and strain in a rotating disk mounted on a rigid shaft // Theor. Appl. Mech. 2006. Vol. 33, no. 1. P. 65–90. <https://doi.org/10.2298/TAM0601065A>
80. Güven U., Parmaksizoğlu C., Altay O. Elastic-Plastic Rotating Annular Disk with Rigid Casing // ZAMM. 1999. Vol. 79, no. 7. P. 499–503. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4001\(199907\)79:7%3c499::AID-ZAMM499%3e3.0.CO;2-C](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4001(199907)79:7%3c499::AID-ZAMM499%3e3.0.CO;2-C)
81. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003. 704 с.
82. Cai Q., Pang M., Zhang Y.-Q., Liu X. Elastic-plastic stress distribution of rotating annular disc based on twin-shear stress yield criterion // J. Zhejiang Univ. Eng. Sci. 2008. Vol. 42, no. 9. P. 1540–1544. <https://doi.org/10.3785/j.issn.1008-973X.2008.09.013>
83. Zhao D. -w., Xie Y. -j., Liu X. -h., Wang G. -d. Three-Dimensional Analysis of Rolling by Twin Shear Stress Yield Criterion // J. Iron Steel Res. Int. 2006. Vol. 13, no. 6. P. 21–26. [https://doi.org/10.1016/S1006-706X\(06\)60104-0](https://doi.org/10.1016/S1006-706X(06)60104-0)
84. Zhu X., Pang M., Zhang Y. Estimation of burst pressure of pipeline using twin-shear stress yield criterion // Ying Yong Li Xue Xue Bao/Chin. J. Appl. Mech. 2011. Vol. 28, no. 2. P. 135–138.
85. Ишлинский А. Ю. Гипотеза прочности формоизменения // Ученые записки МГУ. 1940. № 46. С. 104–114.
86. Eraslan A. N. Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts // Acta Mech. 2004. Vol. 168, no. 3–4. P. 129–144. <https://doi.org/10.1007/s00707-004-0088-z>
87. Kolupaev V. A., Yu M.-H., Altenbach H. Fitting of the strength hypotheses // Acta Mech. 2016. Vol. 227, no. 6. P. 1533–1556. <https://doi.org/10.1007/s00707-016-1566-9>
88. Eraslan A. N. On the linearly hardening rotating solid shaft // Eur. J. Mech. A/Solids. 2003. Vol. 22, no. 2. P. 295–307. [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(02\)00002-5](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(02)00002-5)
89. Eraslan A. N., Mack W. A computational procedure for estimating residual stresses and secondary plastic flow limits in nonlinearly strain hardening rotating shafts // Forsch. Ingenieurwes. 2005. Vol. 69, no. 2. P. 65–75. <https://doi.org/10.1007/s10010-004-0138-7>

90. Gamer U. The expansion of the elastic-plastic spherical shell with nonlinear hardening // *Int. J. Mech. Sci.* 1988. Vol. 30, no. 6. P. 415–426. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(88\)90015-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(88)90015-X)
91. Megahed M. M. Elastic-plastic behaviour of a thick-walled tube with general nonlinear hardening properties // *Int. J. Mech. Sci.* 1990. Vol. 32, no. 7. P. 551–563. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(90\)90101-N](https://doi.org/10.1016/0020-7403(90)90101-N)
92. Gamer V. On the Quasi-Analytical Solutions of Elastic-Plastic Problems with Nonlinear Hardening // *Advances in Continuum Mechanics: 39 Papers from International Experts Dedicated to Horst Lippmann* / edited by O. S. Brüller, V. Mannl, J. Najar. Berlin, Heidelberg: Springer, 1991. P. 168–177. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48890-0_13
93. Megahed M. M. Elastic-plastic behaviour of spherical shells with non-linear hardening properties // *Int. J. Solids Struct.* 1991. Vol. 27, no. 12. P. 1499–1514. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90074-P](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90074-P)
94. Megahed M. M., Abdel-Kader M. S. Elastoplastic analysis of rotating shrink-fitted discs with nonlinear hardening characteristics // *Int. J. Solids Struct.* 1993. Vol. 30, no. 6. P. 751–765. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90038-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90038-9)
95. Molaie M., Darijani H., Bahreman M., Hosseini S. M. Autofrettage of nonlinear strain-hardening cylinders using the proposed analytical solution for stresses // *Int. J. Mech. Sci.* 2018. Vol. 141. P. 450–460. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.04.019>
96. Akhavanfar S., Darijani H., Darijani F. Constitutive modeling of high strength steels; application to the analytically strengthening of thick-walled tubes using the rotational autofrettage // *Eng. Struct.* 2023. Vol. 278. P. 115516. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115516>
97. Eraslan A. N., Arslan E., Mack W. The strain hardening rotating hollow shaft subject to a positive temperature gradient // *Acta Mech.* 2007. Vol. 194, no. 1–4. P. 191–211. <https://doi.org/10.1007/s00707-007-0456-6>
98. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. The rotating elastic-plastic hollow shaft conveying a hot medium // *Forsch. Ingenieurwes.* 2010. Vol. 74, no. 1. P. 27–39. <https://doi.org/10.1007/s10010-010-0113-4>
99. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. Effect of a temperature cycle on a rotating elastic-plastic shaft // *Acta Mech.* 2008. Vol. 195, no. 1. P. 129–140. <https://doi.org/10.1007/s00707-007-0549-2>
100. Shufen R., Singh N. P., Dixit U. S. Thermally Assisted Rotational Autofrettage of Long Cylinders With Free Ends // *J. Press. Vessel Technol.* 2023. Vol. 145, no. 5. P. 051303. <https://doi.org/10.1115/1.4063095>
101. Akis T., Eraslan A. N. Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress // *Arch. Appl. Mech.* 2007. Vol. 77, no. 10. P. 745–765. <https://doi.org/10.1007/s00419-007-0123-3>
102. Eraslan A. N., Akis T. The Stress Response of Partially Plastic Rotating FGM Hollow Shafts: Analytical Treatment for Axially Constrained Ends // *Mech. Based Des. Struct. Mach.* 2006. Vol. 34, no. 3. P. 241–260. <https://doi.org/10.1080/15397730600779285>

103. Nejad M. Z., Fatehi P. Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials // *Int. J. Eng. Sci.* 2015. Vol. 86, no. Supplement C. P. 26–43. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.10.002>
104. Argeso H., Eraslan A. N. A Computational Study on Functionally Graded Rotating Solid Shafts // *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.* 2007. Vol. 8, no. 6. P. 391–399. <https://doi.org/10.1080/15502280701577842>
105. Varmazyari S., Shokrollahi H. Analytical Solution for Strain Gradient Plasticity of Rotating Functionally Graded Thick Cylinders // *Int. J. Appl. Mechanics.* 2020. Vol. 12, no. 07. P. 2050082. <https://doi.org/10.1142/S1758825120500829>
106. Leu S.-Y., Chen J. T. Sequential limit analysis of rotating hollow cylinders of nonlinear isotropic hardening // *CMES - Comput. Model. Eng. Sci.* 2006. Vol. 14, no. 2. P. 129–140. <https://doi.org/10.3970/cmesc.2006.014.129>
107. Leu S.-Y. Investigation of rotating hollow cylinders of strain-hardening viscoplastic materials by sequential limit analysis // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2008. Vol. 197, no. 51. P. 4858–4865. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.07.006>
108. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // *Int. J. Mech. Sci.* 2010. Vol. 52, no. 12. P. 1579–1587. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006>
109. Yu M.-H. *Unified Strength Theory and Its Applications*. 2nd ed., Springer Singapore, 2018. 463 p.
110. Ma G., Hao H., Miyamoto Y. Limit angular velocity of rotating disc with unified yield criterion // *Int. J. Mech. Sci.* 2001. Vol. 43, no. 5. P. 1137–1153. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00065-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00065-5)
111. Prokudin A. N., Burenin A. A. Unified Yield Criterion and Elastoplastic Analysis of a Rotating Solid Cylinder // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2021. Vol. 62, no. 5. P. 760–770. <https://doi.org/10.1134/S0021894421050072>
112. Zhao J.-H., Zhai Y., Ji L., Wei X.-Y. Unified solutions to the limit load of thick-walled vessels // *J. Press. Vessel Technol. Trans. ASME.* 2007. Vol. 129, no. 4. P. 670–675. <https://doi.org/10.1115/1.2767356>
113. Wang L., Zhang Y. Plastic collapse analysis of thin-walled pipes based on unified yield criterion // *Int. J. Mech. Sci.* 2011. Vol. 53, no. 5. P. 348–354. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.02.004>
114. Güven U. Effects of different limit strength on plastic strains of thick walled pressure vessels // *Int. J. Press. Vessel. Pip.* 2013. Vol. 104. P. 37–42. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2013.01.007>
115. Li Y., Zhao J. H., Zhu Q., Cao X. Y. Unified Solution of Burst Pressure for Defect-Free Thin Walled Elbows // *J. Press. Vessel Technol. Trans. ASME.* 2015. Vol. 137, no. 2. <https://doi.org/10.1115/1.4028068>
116. Lin Y., Deng K., Sun Y., Zeng D., Xia T. Through-wall yield collapse pressure of casing based on unified strength theory // *Pet. Explor. Dev.* 2016. Vol. 43, no. 3. P. 506–513. [https://doi.org/10.1016/S1876-3804\(16\)30059-3](https://doi.org/10.1016/S1876-3804(16)30059-3)
117. Wang H., Pang M., Zhang Y. Effects of strength difference and intermediate principal stress on plane strain elastic-plastic bending of a curved beam // *Acta Mech.* 2016. Vol. 227, no. 12. P. 3351–3366. <https://doi.org/10.1007/s00707-016-1681-7>

118. Wang S., Zhu Q., Zhao J. H., Yue X. P., Jiang Y. J. Elastoplastic Assessment of Limiting Internal Pressure in Thick-Walled Cylinders with Different Tension-Compressive Response // *Strength Mater.* 2019. Vol. 51, no. 4. P. 508–519. <https://doi.org/10.1007/s11223-019-00096-3>
119. Zhu Q., Wang S., Zhang D. F., Jiang Y. J., Yue X. Elastoplastic Analysis of Ultimate Bearing Capacity for Multilayered Thick-Walled Cylinders Under Internal Pressure // *Strength Mater.* 2020. Vol. 52, no. 4. P. 521–531. <https://doi.org/10.1007/s11223-020-00203-9>
120. Guowei M., Iwasaki S., Miyamoto Y., Deto H. Plastic limit analyses of circular plates with respect to unified yield criterion // *Int. J. Mech. Sci.* 1998. Vol. 40, no. 10. P. 963–976. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(97\)00140-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(97)00140-9)
121. Ma G., Hao H., Iwasaki S. Unified Plastic Limit Analyses of Circular Plates Under Arbitrary Load // *J. Appl. Mech.* 1999. Vol. 66, no. 2. P. 568–570. <https://doi.org/10.1115/1.2791089>
122. Xie X., Wang L., Zhang Y. Unified solution of a borehole problem with size effect // *Acta Mech.* 2014. Vol. 225, no. 6. P. 1769–1778. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-1022-z>
123. Zhang C., Wang J., Zhao J. Unified solutions for stresses and displacements around circular tunnels using the Unified Strength Theory // *Sci. China Technol. Sci.* 2010. Vol. 53, no. 6. P. 1694–1699. <https://doi.org/10.1007/s11431-010-3224-0>
124. Zhang C., Zhao J., Zhang Q., Hu X. A new closed-form solution for circular openings modeled by the Unified Strength Theory and radius-dependent Young's modulus // *Comput. Geotech.* 2012. Vol. 42. P. 118–128. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2012.01.005>
125. Liu H. A mechanical model for the circular tunnel considering the interaction between the surrounding rock and support structure based on the unified strength criterion // *Arab. J. Geosci.* 2021. Vol. 14, no. 9. P. 753. <https://doi.org/10.1007/s12517-021-07110-6>
126. Zou Z., Yang J., Wang Z., Liu H. The Plastic Zone of Tunnel Surrounding Rock under Unequal Stress in Two Directions Based on the Unified Strength Theory // *Math. Probl. Eng.* 2021. Vol. 2021. P. e8842153. <https://doi.org/10.1155/2021/8842153>
127. Yu M.-H., Yang S.-Y., Fan S. C., Ma G.-W. Unified elasto-plastic associated and non-associated constitutive model and its engineering applications // *Comput. Struct.* 1999. Vol. 71, no. 6. P. 627–636. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00306-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00306-X)
128. Yu M.-H., Li J.-C. Implementation of the Unified Strength Theory into FEM Codes // *Computational Plasticity: With Emphasis on the Application of the Unified Strength Theory. Advanced Topics in Science and Technology in China* / edited by M.-H. Yu, J.-C. Li. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. P. 163–182. https://doi.org/10.1007/978-3-642-24590-9_6
129. Ma Z., Liao H., Dang F. Unified elastoplastic finite difference and its application // *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.* 2013. Vol. 34, no. 4. P. 457–474. <https://doi.org/10.1007/s10483-013-1683-7>
130. Ivlev D. D. On the development of a theory of ideal plasticity // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1958. Vol. 22, no. 6. P. 1221–1230. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(58\)90050-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(58)90050-9)

131. Naghdi P. M. Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity // *Plasticity. Proceedings of the Second Symposium on Naval Structural Mechanics* / edited by E. H. Lee, P. S. Symonds. Pergamon, 1960. P. 121–169. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-009459-5.50011-9>
132. Haythornthwaite R. M. Range of Yield Conditions in Ideal Plasticity // *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1961. Vol. 87, no. 6. P. 117–134. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000264>
133. Kolupaev V. A., Yu M.-H., Altenbach H. Visualization of the Unified Strength Theory // *Arch. Appl. Mech.* 2013. Vol. 83, no. 7. P. 1061–1085. <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0735-8>
134. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
135. Koiter W. T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface // *Q. Appl. Math.* 1953. Vol. 11, no. 3. P. 350–354.
136. Meng Q., Zhao J., Mu Z., Zhai R., Yu G. Springback prediction of multiple reciprocating bending based on different hardening models // *J. Manuf. Process.* 2022. Vol. 76. P. 251–263. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2022.01.070>
137. Voce E. The relationship between stress and strain for homogeneous deformation // *Journal of the Institute of Metals*. 1948. Vol. 74. P. 537–562.
138. Zhang C., Wang B. Identification of the hardening behavior of solids described by three-parameter Voce law using spherical indentation // *J. Mater. Res.* 2012. Vol. 27, no. 20. P. 2624–2629. <https://doi.org/10.1557/jmr.2012.253>
139. Meng L., Breitkopf P., Raghavan B., Mauvoisin G., Bartier O. et al. On the study of mystical materials identified by indentation on power law and Voce hardening solids // *Int. J. Mater. Form.* 2019. Vol. 12, no. 4. P. 587–602. <https://doi.org/10.1007/s12289-018-1436-1>
140. Yoshida F., Uemori T., Fujiwara K. Elastic–plastic behavior of steel sheets under in-plane cyclic tension–compression at large strain // *Int. J. Plast.* 2002. Vol. 18, no. 5. P. 633–659. [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(01\)00049-3](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(01)00049-3)
141. Wagoner R. H., Lim H., Lee M.-G. Advanced Issues in springback // *Int. J. Plast.* 2013. Vol. 45. P. 3–20. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.08.006>
142. Sun L., Wagoner R. H. Complex unloading behavior: Nature of the deformation and its consistent constitutive representation // *Int. J. Plast.* 2011. Vol. 27, no. 7. P. 1126–1144. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.12.003>
143. Yoshida F., Amaishi T. Model for description of nonlinear unloading-reloading stress-strain response with special reference to plastic-strain dependent chord modulus // *Int. J. Plast.* 2020. Vol. 130. P. 102708. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2020.102708>
144. Yoshida F. Description of elastic–plastic stress–strain transition in cyclic plasticity and its effect on springback prediction // *Int. J. Mater. Form.* 2022. Vol. 15, no. 2. P. 12. <https://doi.org/10.1007/s12289-022-01651-1>
145. Olver F. W., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. 1st ed., Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 966 p.

146. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E. On the LambertW function // *Adv. Comput. Math.* 1996. Vol. 5, no. 1. P. 329–359. <https://doi.org/10.1007/BF02124750>
147. Ghaei A., Green D. E. Numerical implementation of Yoshida–Uemori two-surface plasticity model using a fully implicit integration scheme // *Comput. Mater. Sci.* 2010. Vol. 48, no. 1. P. 195–205. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2009.12.028>
148. Meng Q., Zhai R., Zhang Y., Fu P., Zhao J. Analysis of springback for multiple bending considering nonlinear unloading-reloading behavior, stress inheritance and Bauschinger effect // *J. Mater. Process. Technol.* 2022. Vol. 307. P. 117657. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2022.117657>
149. Chang Y., Wang N., Wang B. T., Li X. D., Wang C. Y. et al. Prediction of bending springback of the medium-Mn steel considering elastic modulus attenuation // *J. Manuf. Process.* 2021. Vol. 67. P. 345–355. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2021.04.074>
150. Li X., Mittelstedt C., Binder A. A review of critical issues in the design of lightweight flywheel rotors with composite materials // *Elektrotech. Inftech.* 2022. Vol. 139, no. 2. P. 204–221. <https://doi.org/10.1007/s00502-022-01005-4>
151. Wahl A. M. Analysis of Creep in Rotating Disks Based on the Tresca Criterion and Associated Flow Rule // *J. Appl. Mech.* 1956. Vol. 23, no. 2. P. 231–238. <https://doi.org/10.1115/1.4011292>
152. Wahl A. M. Stress Distributions in Rotating Disks Subjected to Creep at Elevated Temperature // *J. Appl. Mech.* 1957. Vol. 24, no. 2. P. 299–305. <https://doi.org/10.1115/1.4011513>
153. Wahl A. M. Further Studies of Stress Distribution in Rotating Disks and Cylinders Under Elevated-Temperature Creep Conditions // *J. Appl. Mech.* 1958. Vol. 25, no. 2. P. 243–250. <https://doi.org/10.1115/1.4011752>
154. Ma B. M. A further creep analysis for rotating solid disks of variable thickness // *J. Frankl. Inst.* 1960. Vol. 269, no. 5. P. 408–419. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(60\)90174-5](https://doi.org/10.1016/0016-0032(60)90174-5)
155. Соснин О. В. Перераспределение напряжений в сплошном вращающемся диске в первой стадии ползучести // *ПМТФ.* 1960. № 2. С. 152–156.
156. Wahl A. M. A Comparison of Flow Criteria Applied to Elevated Temperature Creep of Rotating Disks with Consideration of the Transient Condition // *Creep in Structures. IUTAM Symposia / edited by N. J. Hoff. Berlin, Heidelberg: Springer, 1962. P. 195–214.* https://doi.org/10.1007/978-3-642-86014-0_11
157. Ma B. M. A power-function creep analysis for rotating solid disks having variable thickness and temperature // *J. Frankl. Inst.* 1964. Vol. 277, no. 6. P. 593–612. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(64\)90377-1](https://doi.org/10.1016/0016-0032(64)90377-1)
158. Ozerov V. I. Nonlinear creep of disks // *Soviet Applied Mechanics.* 1971. Vol. 7, no. 7. P. 800–803. <https://doi.org/10.1007/BF00888611>
159. Ganczarski A., Skrzypek J. Optimal shape of prestressed disks against brittle-rupture under unsteady creep conditions // *Struct. Optim.* 1992. Vol. 4, no. 1. P. 47–54. <https://doi.org/10.1007/BF01894080>
160. Gunneskov O. Optimal Design of Rotating Disks in Creep // *J. Struct. Mech.* 1976. Vol. 4, no. 2. P. 141–160. <https://doi.org/10.1080/03601217608907285>

161. Szuwalski K. Optimal design of disks with respect to ductile creep rupture time // *Struct. Optim.* 1995. Vol. 10, no. 1. P. 54–60. <https://doi.org/10.1007/BF01743695>
162. Ustrzycka A., Szuwalski K., Kowalewski Z. L. Optimal Design of Disks Under Large Creep Deformation // *Advances in Mechanics of Materials and Structural Analysis: In Honor of Reinhold Kienzler. Advanced Structured Materials*, vol. 80 / edited by H. Altenbach, F. Jablonski, W. H. Müller, K. Naumenko, P. Schneider. Cham: Springer International Publishing, 2018. P. 387–417. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70563-7_18
163. Kollmann F. G. Viscoplastic deformation of rotating thin-walled disks 1989. Vol. 114, no. 3. P. 405–413. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(89\)90118-0](https://doi.org/10.1016/0029-5493(89)90118-0)
164. Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H. et al. Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks – Part I: Analytical and numerical stability analyses // *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2009. Vol. 28, no. 1. P. 36–44. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.07.008>
165. Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H. et al. Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks: Part II – Burst of a superalloy turbine disk // *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2009. Vol. 28, no. 3. P. 428–432. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.10.002>
166. Sim R. G., Penny R. K. Plane strain creep behaviour of thick-walled cylinders // *Int. J. Mech. Sci.* 1971. Vol. 13, no. 12. P. 987–1009. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(71\)90023-3](https://doi.org/10.1016/0020-7403(71)90023-3)
167. Rimrott F. P. J., Luke J. R. Large Strain Creep of Rotating Cylinders // *ZAMM*. 1961. Vol. 41, no. 12. P. 485–500. <https://doi.org/10.1002/zamm.19610411203>
168. Hill R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1948. Vol. 193, no. 1033. P. 281–297. <https://doi.org/10.1098/rspa.1948.0045>
169. Arya V. K., Bhatnagar N. S. Creep analysis of rotating orthotropic disks // *Nucl. Eng. Des.* 1979. Vol. 55, no. 3. P. 323–330. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(79\)90111-0](https://doi.org/10.1016/0029-5493(79)90111-0)
170. Bhatnagar N. S., Kulkarni M. P. S., Arya V. K. Steady-state creep of orthotropic rotating disks of variable thickness // *Nucl. Eng. Des.* 1986. Vol. 91, no. 2. P. 121–141. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(86\)90200-1](https://doi.org/10.1016/0029-5493(86)90200-1)
171. Bhatnagar N. S., Arya V. K., Debnath K. K. Creep Analysis of Orthotropic Rotating Cylinder // *J. Press. Vessel Technol. Trans. ASME*. 1980. Vol. 102, no. 4. P. 371–377. <https://doi.org/10.1115/1.3263347>
172. Bhatnagar N. S., Kulkarni P., Arya V. K. Analysis of an orthotropic thick-walled cylinder under primary creep conditions // *Int. J. Press. Vessel. Pip.* 1986. Vol. 23, no. 3. P. 165–185. [https://doi.org/10.1016/0308-0161\(86\)90018-9](https://doi.org/10.1016/0308-0161(86)90018-9)
173. Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Creep analysis of an internally pressurised orthotropic rotating cylinder // *Nucl. Eng. Des.* 1984. Vol. 83, no. 3. P. 379–388. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(84\)90130-4](https://doi.org/10.1016/0029-5493(84)90130-4)
174. Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Creep analysis of orthotropic rotating cylinders considering finite strains // *Int. J. Non-Linear Mech.* 1986. Vol. 21, no. 1. P. 61–71. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(86\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0020-7462(86)90013-2)

175. Bose T., Rattan M. Modeling Creep Behavior of Thermally Graded Rotating Disc of Functionally Graded Material // *Differ. Equ. Dyn. Syst.* 2017. P. 1–14. <https://doi.org/10.1007/s12591-017-0350-1>
176. Bose T., Rattan M. Effect of thermal gradation on steady state creep of functionally graded rotating disc // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2018. Vol. 67, no. Supplement C. P. 169–176. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.09.014>
177. Daghigh V., Daghigh H., Loghman A., Simoneau A. Time-dependent creep analysis of rotating ferritic steel disk using Taylor series and Prandtl–Reuss relation // *Int. J. Mech. Sci.* 2013. Vol. 77, no. Supplement C. P. 40–46. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.09.005>
178. Ekhteraei-Toussi H. Z. and H. Non-Steady Creep Analysis of FGM Rotating Disc Using GDQ Method // *Adv. Appl. Math. Mech.* 2019. Vol. 11, no. 2. P. 452–466. <https://doi.org/10.4208/aamm.OA-2017-0343>
179. Garg M., Salaria B. S., Gupta V. K. Effect of Thermal Gradient on Steady State Creep in a Rotating Disc of Variable Thickness // *Procedia Eng.* 2013. Vol. 55. P. 542–547. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.03.292>
180. Ghorbani M. T. A semi-analytical solution for time-variant thermoelastic creep analysis of functionally graded rotating disks with variable thickness and properties. // *Int. J. Adv. Des. Manuf. Technol.* 2012. Vol. 5, no. 2. P. 41–50.
181. Gupta V. K., Chandrawat H. N., Singh S. B., Ray S. Creep behavior of a rotating functionally graded composite disc operating under thermal gradient // *Metall. Mater. Trans. A.* 2004. Vol. 35, no. 4. P. 1381–1391. <https://doi.org/10.1007/s11661-004-0313-3>
182. Hosseini Kordkheili S. A., Livani M. Thermoelastic creep analysis of a functionally graded various thickness rotating disk with temperature-dependent material properties // *Int. J. Press. Vessel. Pip.* 2013. Vol. 111–112, no. Supplement C. P. 63–74. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2013.05.001>
183. Khanna K., Gupta V. K., Nigam S. P. Modelling and Analysis of Creep in a Variable Thickness Rotating FGM Disc Using Tresca and von Mises Criteria // *Iran. J. Sci. Technol. - Trans. Mech. Eng.* 2017. Vol. 41, no. 2. P. 109–119. <https://doi.org/10.1007/s40997-016-0051-3>
184. Loghman A., Arani A. G., Shajari A. R., Amir S. Time-dependent thermoelastic creep analysis of rotating disk made of Al–SiC composite // *Arch. Appl. Mech.* 2011. Vol. 81, no. 12. P. 1853–1864. <https://doi.org/10.1007/s00419-011-0522-3>
185. Loghman A., Azami M. A novel analytical-numerical solution for nonlinear time-dependent electro-thermo-mechanical creep behavior of rotating disk made of piezoelectric polymer // *Appl. Math. Model.* 2016. Vol. 40, no. 7. P. 4795–4811. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.12.008>
186. Rattan M., Kaushik A., Chamoli N., Bose T. Steady state creep behavior of thermally graded isotropic rotating disc of composite taking into account the thermal residual stress // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2016. Vol. 60, no. Supplement C. P. 315–326. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.08.007>
187. Saadatfar M., Babazadeh M. A., Babaelahi M. Creep analysis in a rotating variable thickness functionally graded disc with convection heat transfer and heat source // *Mech. Time-Depend. Mater.* 2024. Vol. 28, no. 1. P. 19–41. <https://doi.org/10.1007/s11043-023-09613-z>

188. Saadatfar M., Babazadeh M. A., Babaelahi M. Effect of Convection, Internal Heat Source, and Solar Radiation on the Stress Analysis of a Rotating Functionally Graded Smart Disk // *Iran. J. Sci. Technol. - Trans. Mech. Eng.* 2024. Vol. 48, no. 3. P. 1041–1061. <https://doi.org/10.1007/s40997-023-00725-y>
189. Singh R., Saxena R. K., Khanna K., Gupta V. K. Finite element modeling to analyze creep behavior of functionally graded rotating discs with exponential reinforcement and thickness profiles // *Arch. Appl. Mech.* 2024. Vol. 94, no. 7. P. 2039–2058. <https://doi.org/10.1007/s00419-024-02626-1>
190. Temesgen A. G., Singh S. B., Pankaj T. Modeling of creep deformation of a transversely isotropic rotating disc with a shaft having variable density and subjected to a thermal gradient // *Therm. Sci. Eng. Prog.* 2020. Vol. 20. P. 100745. <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2020.100745>
191. Zharfi H. Creep relaxation in FGM rotating disc with nonlinear axisymmetric distribution of heterogeneity // *Theor. Appl. Mech. Lett.* 2019. Vol. 9, no. 6. P. 382–390. <https://doi.org/10.1016/j.taml.2019.05.005>
192. Zharfi H., Toussi H. E. Numerical creep analysis of FGM rotating disc with GDQ method // *J. Theor. Appl. Mech.* 2017. Vol. 55, no. 1. P. 331–341. <https://doi.org/10.15632/jtam-pl.55.1.331>
193. Gupta V., Singh S. B. Effect of anisotropy on creep behavior in a functionally graded material disc of variable thickness // *Int. J. Comp. Mat. Sci. Eng.* 2014. Vol. 03, no. 03. P. 1450017. <https://doi.org/10.1142/S2047684114500171>
194. Farshi B., Bidabadi J. Optimum design of inhomogeneous rotating discs under secondary creep // *Int. J. Press. Vessel. Pip.* 2008. Vol. 85, no. 7. P. 507–515. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2008.01.008>
195. Gulial P., Thakur P. Investigating the effects of material density on strain rates in pressurized rotational cylinders // *ZAMM.* 2025. Vol. 105, no. 2. P. e202401011. <https://doi.org/10.1002/zamm.202401011>
196. Mangal S. K., Kapoor N., Singh T. Steady-State Creep Analysis of Functionally Graded Rotating Cylinder // *Strain.* 2013. Vol. 49, no. 6. P. 457–466. <https://doi.org/10.1111/str.12052>
197. Nejad M. Z., Hoseini Z., Niknejad A., Ghannad M. Steady-State Creep Deformations and Stresses in FGM Rotating Thick Cylindrical Pressure Vessels // *J. Mech.* 2015. Vol. 31, no. 1. P. 1–6. <https://doi.org/10.1017/jmech.2014.70>
198. Nejad M. Z., Kashkoli M. D. Time-dependent thermo-creep analysis of rotating FGM thick-walled cylindrical pressure vessels under heat flux // *Int. J. Eng. Sci.* 2014. Vol. 82, no. Supplement C. P. 222–237. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.06.006>
199. Saadatfar M. Analytical Solution for the Creep Problem of a Rotating Functionally Graded Magneto–Electro–Elastic Hollow Cylinder in Thermal Environment // *Int. J. Appl. Mechanics.* 2019. Vol. 11, no. 06. P. 1950053. <https://doi.org/10.1142/S1758825119500534>
200. Singh T., Gupta V. K. Effect of anisotropy on steady state creep in functionally graded cylinder // *Compos. Struct.* 2011. Vol. 93, no. 2. P. 747–758. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.08.005>
201. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.

202. Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A. Elastoplasticity beyond small deformations // *Acta Mech.* 2006. Vol. 182, no. 1–2. P. 31–111. <https://doi.org/10.1007/s00707-005-0282-7>
203. Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // *Доклады Академии Наук.* 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
204. Norton F. H. *The creep of steel at high temperatures.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1929. 90 p.
205. Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Lemza A. O. On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // *Arch. Appl. Mech.* 2020. Vol. 90, no. 4. P. 829–845. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01641-x>
206. Tang S. Note on acceleration stress in a rotating disk // *Int. J. Mech. Sci.* 1970. Vol. 12, no. 2. P. 205–207. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(70\)90020-2](https://doi.org/10.1016/0020-7403(70)90020-2)
207. Phillips J. W., Schrock M. Note on shear stresses in accelerating disks of variable thickness // *Int. J. Mech. Sci.* 1971. Vol. 13, no. 5. P. 445–449. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(71\)90091-9](https://doi.org/10.1016/0020-7403(71)90091-9)
208. Gurushankar G. V., Srinath H. Note on displacements in accelerating disks of variable thickness // *Int. J. Mech. Sci.* 1972. Vol. 14, no. 7. P. 427–430. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90100-2](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90100-2)
209. Reid S. R. On the influence of acceleration stresses on the yielding of disks of uniform thickness // *Int. J. Mech. Sci.* 1972. Vol. 14, no. 11. P. 755–763. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90013-6](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90013-6)
210. Reddy T. Y., Lakshminarayana H. V., Srinath H. Elastic Stresses in an Accelerating Circular Disk // *J. Appl. Mech.* 1974. Vol. 41, no. 3. P. 817–819. <https://doi.org/10.1115/1.3423402>
211. Reddy T. Y., Srinath H. Effect of acceleration stresses on the yielding of rotating disks // *Int. J. Mech. Sci.* 1974. Vol. 16, no. 8. P. 593–596. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(74\)90025-3](https://doi.org/10.1016/0020-7403(74)90025-3)
212. Deresiewicz H. Acceleration stresses in disks of variable thickness // *J. Appl. Mech.* 1975. Vol. 42, no. 3. P. 727–729. <https://doi.org/10.1115/1.3423670>
213. Gurushankar G. V. A note on the yielding of an accelerating, non-homogeneous disc of varying thickness and density with radial loading // *J. Strain Anal. Eng. Des.* 1978. Vol. 13, no. 1. P. 59–63. <https://doi.org/10.1243/03093247V131059>
214. Genta G., Gola M., Gugliotta A. Stress field in orthotropic accelerating disks // *J. Appl. Mech.* 1982. Vol. 49, no. 3. P. 658–661. <https://doi.org/10.1115/1.3162550>
215. Salehian M., Shahriari B., Yousefi M. Investigating the effect of angular acceleration of the rotating disk having variable thickness and density function on shear stress and tangential displacement // *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* 2019. Vol. 41, no. 1. <https://doi.org/10.1007/s40430-018-1523-8>
216. Cherepanov G. P. Optimum Shapes of Elastic Bodies: Equistrong Wings of Aircrafts and Equistrong Underground Tunnels // *Phys. Mesomech.* 2015. Vol. 18, no. 4. P. 391–401. <https://doi.org/10.1134/S1029959915040116>

217. Gontarovskii V. P., Chebaevskii B. P. Profile design of uniform-strength disk by the mises strength rule // *Strength Mater.* 1973. Vol. 5, no. 10. P. 1257–1259. <https://doi.org/10.1007/BF01129410>
218. Kai-yuan Y., Ping L. Equi-strength design of nonhomogeneous variable thickness high speed rotating disk under steady temperature field // *Appl. Math. Mech.* 1986. Vol. 7, no. 9. P. 825–834. <https://doi.org/10.1007/BF01898124>
219. Hein K., Heinloo M. The design of nonhomogeneous equi-strength annular discs of variable thickness under internal and external pressures // *Int. J. Solids Struct.* 1990. Vol. 26, no. 5. P. 617–630. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(90\)90033-R](https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90033-R)
220. Gau C.-Y., Manoochchri S. Optimal Design of a Nonhomogeneous Annular Disk Under Pressure Loadings // *J. Mech. Des.* 1994. Vol. 116, no. 4. P. 989–996. <https://doi.org/10.1115/1.2919509>
221. Alexandrov S., Rynkovskaya M., Jeng Y.-R. Design of equi-strength annular disks made of functionally graded materials // *Mech. Based Des. Struct. Mach.* 2023. P. 1–18. <https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2297241>
222. Danfelt E. L., Hewes S. A., Chou T.-W. Optimization of composite flywheel design // *Int. J. Mech. Sci.* 1977. Vol. 19, no. 2. P. 69–78. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(77\)90001-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(77)90001-7)
223. Pardoen G. C., Nudenberg R. D., Swartout B. E. Achieving desirable stress states in thick rim rotating disks // *Int. J. Mech. Sci.* 1981. Vol. 23, no. 6. P. 367–382. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(81\)90066-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(81)90066-7)
224. Jain R., Ramachandra K., Simha K. R. Y. Rotating anisotropic disc of uniform strength // *Int. J. Mech. Sci.* 1999. Vol. 41, no. 6. P. 639–648. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00041-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00041-1)
225. Nie G. J., Batra R. C. Stress analysis and material tailoring in isotropic linear thermoelastic incompressible functionally graded rotating disks of variable thickness // *Compos. Struct.* 2010. Vol. 92, no. 3. P. 720–729. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.052>
226. Nie G. J., Zhong Z., Batra R. C. Material tailoring for orthotropic elastic rotating disks // *Compos. Sci. Technol.* 2011. Vol. 71, no. 3. P. 406–414. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2010.12.010>
227. Bhavikatti S. S., Ramakrishnan C. V. Optimum shape design of rotating disks // *Comput. Struct.* 1980. Vol. 11, no. 5. P. 397–401. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(80\)90105-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(80)90105-4)
228. Sandgren E., Ragsdell K. M. Optimal Flywheel Design With a General Thickness Form Representation // *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design.* 1983. Vol. 105, no. 3. P. 425–433. <https://doi.org/10.1115/1.3267377>
229. Genta G., Bassani D. Use of genetic algorithms for the design of rotors // *Meccanica.* 1995. Vol. 30, no. 6. P. 707–717. <https://doi.org/10.1007/BF00986575>
230. Arslan M. A. Flywheel geometry design for improved energy storage using finite element analysis // *Mater. Des.* 2008. Vol. 29, no. 2. P. 514–518. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2007.01.020>
231. Dems K., Turant J. Two approaches to the optimal design of composite flywheels // *Eng. Optim.* 2009. Vol. 41, no. 4. P. 351–363. <https://doi.org/10.1080/03052150802506521>

232. Ghotbi E., Dhingra A. K. A bilevel game theoretic approach to optimum design of flywheels // *Eng. Optim.* 2012. Vol. 44, no. 11. P. 1337–1350. <https://doi.org/10.1080/0305215X.2011.637557>
233. Hiroshima N., Hatta H., Koyama M., Goto K., Kogo Y. Optimization of flywheel rotor made of three-dimensional composites // *Compos. Struct.* 2015. Vol. 131. P. 304–311. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.041>
234. Jiang L., Zhang W., Ma G. J., Wu C. W. Shape optimization of energy storage flywheel rotor // *Struct. Multidisc. Optim.* 2017. Vol. 55, no. 2. P. 739–750. <https://doi.org/10.1007/s00158-016-1516-0>
235. Singh P., Chaudhary H. Optimal shape synthesis of a metallic flywheel using non-dominated sorting Jaya algorithm // *Soft. Comput.* 2020. Vol. 24, no. 9. P. 6623–6634. <https://doi.org/10.1007/s00500-019-04302-x>
236. Yildırım V. The best grading pattern selection for the axisymmetric elastic response of pressurized inhomogeneous annular structures (sphere/cylinder/annulus) including rotation // *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* 2020. Vol. 42, no. 2. P. 109. <https://doi.org/10.1007/s40430-020-2193-x>
237. Kale V., Thomas M., Secanell M. On determining the optimal shape, speed, and size of metal flywheel rotors with maximum kinetic energy // *Struct. Multidisc. Optim.* 2021. Vol. 64, no. 3. P. 1481–1499. <https://doi.org/10.1007/s00158-021-02935-x>
238. Kale V., Aage N., Secanell M. Augmented Lagrangian approach for multi-objective topology optimization of energy storage flywheels with local stress constraints // *Struct. Multidisc. Optim.* 2023. Vol. 66, no. 11. P. 231. <https://doi.org/10.1007/s00158-023-03693-8>
239. Kale V., Aage N., Secanell M. Stress constrained topology optimization of energy storage flywheels using a specific energy formulation // *J. Energy Storage.* 2023. Vol. 61. P. 106733. <https://doi.org/10.1016/j.est.2023.106733>
240. Yan C., Liu C., Du H., Wang C., Yin Z. Topology optimization of turbine disk considering maximum stress prediction and constraints // *Chin. J. Aeronaut.* 2023. Vol. 36, no. 8. P. 182–206. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2023.03.019>
241. Madan R., Bhowmick S. Optimum FG Rotating Disk of Constant Mass: Lightweight and Economical alternatives Based on Limit Angular Speed // *Iran. J. Sci. Technol. - Trans. Mech. Eng.* 2023. Vol. 47, no. 3. P. 1019–1033. <https://doi.org/10.1007/s40997-022-00553-6>
242. Rahman S., Ali Md. A. A novel approach to optimize material distributions of rotating functionally graded circular disk under minimum and prescribed stresses // *Mater. Today Commun.* 2023. Vol. 36. P. 106620. <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2023.106620>
243. Abdalla H. M. A., Boussaa D., Sburlati R., Casagrande D. On the best volume fraction distributions for functionally graded cylinders, spheres and disks – A pseudospectral approach // *Compos. Struct.* 2023. Vol. 311. P. 116784. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.116784>
244. Tsai S. W., Wu E. M. A General Theory of Strength for Anisotropic Materials // *J. Compos. Mater.* 1971. Vol. 5, no. 1. P. 58–80. <https://doi.org/10.1177/002199837100500106>

245. Gol'denblat I. I., Kopnov V. A. Strength of glass-reinforced plastics in the complex stress state // *Polymer Mechanics*. 1965. Vol. 1, no. 2. P. 54–59. <https://doi.org/10.1007/BF00860685>
246. Li S., Sitnikova E., Liang Y., Kaddour A.-S. The Tsai-Wu failure criterion rationalised in the context of UD composites // *Compos. A: Appl. Sci. Manuf.* 2017. Vol. 102. P. 207–217. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2017.08.007>
247. Chen X., Sun X., Chen P., Wang B., Gu J. et al. Rationalized improvement of Tsai–Wu failure criterion considering different failure modes of composite materials // *Compos. Struct.* 2021. Vol. 256. P. 113120. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113120>
248. Ganczarski A. W., Skrzypek J. J. Constraints on the applicability range of Hill's criterion: strong orthotropy or transverse isotropy // *Acta Mech.* 2014. Vol. 225, no. 9. P. 2563–2582. <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1089-1>
249. Hu L. W., Marin J. Anisotropic Loading Functions for Combined Stresses in the Plastic Range // *J. Appl. Mech.* 1955. Vol. 22, no. 1. P. 77–85. <https://doi.org/10.1115/1.4010973>
250. Caddell R. M., Raghava R. S., Atkins A. G. A yield criterion for anisotropic and pressure dependent solids such as oriented polymers // *J. Mater. Sci.* 1973. Vol. 8, no. 11. P. 1641–1646. <https://doi.org/10.1007/BF00754900>
251. Chen L., Wen W., Cui H. Generalization of Hill's yield criterion to tension-compression asymmetry materials // *Sci. China Technol. Sci.* 2013. Vol. 56, no. 1. P. 89–97. <https://doi.org/10.1007/s11431-012-5037-9>
252. Kim J. H., Lee M.-G., Chung K., Youn J. R., Kang T. J. Anisotropic-asymmetric yield criterion and anisotropic hardening law for composite materials: Theory and formulations // *Fiber. Polym.* 2006. Vol. 7, no. 1. P. 42–50. <https://doi.org/10.1007/BF02933601>