

ОТЗЫВ

официального оппонента Стрекаловского Александра Сергеевича
на диссертационную работу Цоя Георгия Ильича
«Модифицированные методы двойственности для решения вариационных и
квазивариационных неравенств механики»,
представленную на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ»

Диссертационная работа Г.И. Цоя посвящена исследованию и численному решению задач механики контактного взаимодействия упругих тел с краевыми условиями типа неравенства. Как известно, такого сорта задачи чаще всего сводятся к решению вариационных (VI) или даже квазивариационных (QVI) неравенств. Эти математические объекты, тесно связанные с задачами оптимизации и управления, возникают в большинстве прикладных задач механики и экономики, взаимодействия различных физических и химических сред, техническом проектировании и т.д.

Замечательная теория вариационных неравенств, построенная во второй половине XX века, инициировала целые поколения исследователей плодотворно трудится на этом благодатном сегменте современного Вариационного Анализа. Достаточно вспомнить такие великие имена как Жан-Луи Лионс, Guido Stampacchia, а также их учеников и последователей Р. Гловински, Р. Тремольера, А. Бенсусана и т.д. Однако количество и разнообразие прикладных задач механики, их специфические свойства и особенности не позволяют сделать заключение о том, что теоретический фундамент Теории вариационных неравенств полностью построен. Основная же трудность состоит в разработке численных методов решения вариационных неравенств для таких новых задач.

Именно эти вопросы исследуются в диссертации Г.И. Цоя, состоящей из введения, трех глав, заключения, приложения, списка сокращений и обозначений, списка литературы из 120 наименований, списка иллюстративного материала, включающего 26 рисунков и 6 таблиц численных результатов. Работа изложена на 108 страницах.

Во введении на основе краткого исторического и литературного обзоров, обоснована актуальность исследований, указаны цели, задачи и направления проводимых исследований. Кроме того, обращено внимание на практическую значимость, а также опубликованность полученных в работе результатов.

В главе I рассматривается квазивариационное неравенство (QVI) Синьорини, возникающее в задаче о контакте упругого тела с абсолютно твёрдой опорой при кулоновском трении. Обратим внимание на главную трудность при решении QVI Синьорини, заключающуюся в зависимости силы трения от искомого решения этого же QVI.

После постановки краевой задачи формулируются вспомогательная вариационная задача с фиксированным трением, которая возникает при применении метода последовательных приближений. Далее вводятся так называемые классический и модифицированный функционалы Лагранжа, для которых затем отыскиваются седловые точки посредством известного метода Эрроу-Удзавы.

Дополнительно к двум проведенным регуляризациям используется известная прох-регуляризация, обеспечивающая сильную выпуклость минимизируемых функционалов. Для дискретизации задачи используется метод конечных элементов (МКЭ) (триангуляции). Приведены результаты численного эксперимента.

В главе II рассматриваются нестандартные задачи о равновесии упругого тела с трещиной, причем изучаются нелинейные неклассические модели, в которых на берегах трещины выполнены дополнительные условия в виде неравенств, что обеспечивает условие взаимного непроникания берегов "трещины".

Вначале рассматривается 2D задача с трещиной внутри упругого тела, а также задача с трещиной, выходящей на внешнюю границу под ненулевым углом. Как и в главе I конструируется и обосновывается общая схема двойственности, при этом доказано основное равенство двойственности. Для решения конечномерной задачи минимизации кусочно-квадратичного функционала (получаемого после дискретизации исходной задачи посредством МКЭ), применяются метод покоординатного спуска и обобщенный метод Ньютона. Приведены результаты численного решения и их сравнительный анализ.

Далее рассматривается интересное 3D обобщение упругой задачи с "трещиной", которое представляется одним из ярких моментов диссертационной работы Г.И. Цоя. Во-первых, здесь приведено сравнение предложенного (модифицированного) метода двойственности с его классическим аналогом, при этом если в модифицированном методе был применен градиентный метод, то в классическом алгоритме двойственности используется метод проекции градиента. По-видимому, это обстоятельство обеспечивает, в частности, быструю сходимость модифицированного метода по отношению к классическому. Во-вторых, необходимо отметить очень большие размерности информации, используемой во время численной симуляции. Так, например, область Ω_γ была разбита на 1749882 тетраэдров, при этом количество узлов было равно $N=310636$. Более того, в трехмерном случае использовалась матрица размерности $3N \times 3N$ (!!!), обращение которой весьма и весьма затруднительно. Вместо этого было осуществлено решение СЛАУ с помощью метода сопряженных градиентов с предобуславливанием (регуляризацией). Вычислительный эксперимент при этом выглядит достаточно убедительным по рисункам и таблицам.

В главе III изучается контактная задача теории упругости с отслоившимся жёстким включением.

После подробной постановки краевой задачи предложен итеративный метод ее решения, заключающийся в возмущении задачи посредством возмущения тензора модулей упругости $C = \{c_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$ в области ω жесткого отслоения. Это позволяет рассматривать задачу с жестким отслоением как предельную для семейства задач о равновесии упругих тел с трещиной. Кроме того, для задачи с фиксированным $\lambda > 0$ применяется схема двойственности из главы II.

Наконец, приведены результаты численного решения основной задачи главы III с использованием метода Ньютона.

В заключении научно-квалификационной работы сформулированы основные результаты работы и некоторые возможности дальнейших исследований.

В приложении приведен исходный код программы для решения задачи с трещиной с использованием библиотеки cuBLAS для вычислений на GPU.

Далее дадим оценку научно-квалификационной работы Г.И. Цоя по различным критериям.

1. Достоверность и степень обоснованности научных результатов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью постановок рассматриваемых задач и математических методов их исследования, а также вычислительными экспериментами и сравнением полученных результатов при решении задач различными методами. Результаты оказываются сравнимыми с результатами, полученными другими авторами, причем, чаще всего, в лучшую сторону.

Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 6 - в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Автором получено два свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ. Диссертационная работа также была апробирована на всероссийских и международных конференциях.

2. Научная новизна.

1. Для решения полукоэрцитивных вспомогательных задач с заданным трением предложен и обоснован новый метод решения, комбинирующий известную процедуру Эрроу-Удзавы и итеративную прох-регуляризацию модифицированного функционала Лагранжа.

2. Для решения многомерных задач теории упругости с трещиной и с условиями непроникания берегов трещины друг в друга предложена и теоретически обоснована новая схема двойственности, основанная на новых модификациях функционала Лагранжа. Доказано новое соотношение двойственности.

3. Для задачи о равновесии 3D упругого тела с плоской трещиной на основе метода конечных элементов разработан новый численный метод решения, доказавший свою высокую эффективность, несмотря на большую размерность (около 10^6) конечномерной задачи.

4. Для задачи с отслоившимся жёстким включением исследован и применён метод решения с параметром λ позволяющий рассматривать данную задачу как предельную для семейства задач о равновесии упругих тел с трещиной.

5. Для рассмотренных задач разработаны алгоритмы на основе метода конечных элементов и программное обеспечение для численного решения. Проведены обширные численные эксперименты, подтверждающие эффективность модифицированных методов двойственности.

3. Практическая и теоретическая значимость работы.

Теоретическая значимость работы заключается в эффективности модифицированных методов двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики. Предложенные схемы двойственности, основанные на модифицированных функционалах Лагранжа, обладают рядом преимуществ по сравнению с классическими аналогами, что продемонстрировано результатами вычислительного эксперимента, и позволяют конструировать подобные вычислительные методы для решения различных как коэрцитивных, так и полукоэрцитивных задач механики упругих тел.

Практическая значимость результатов заключается в создании программного обеспечения с использованием технологий параллельного программирования на GPU, которое продемонстрировало свою эффективность на высокоразмерных задачах с трещиной и поэтому может быть использовано при решении прикладных задач большой размерности.

4. По работе возникли следующие замечания.

1) Во введении (стр. 10) указано, что диссертация содержит два приложения, в то время как нам удалось обнаружить лишь одно (Приложение А, Программный код).

2) Итеративный метод решения квазивариационного неравенства (1.3), предложенный в [5, 39] Главачеком И. и др. (1986), а также Kuruchi N. соответственно, и заключающийся в последовательном решении вариационного неравенства (1.5) (или эквивалентной задачи минимизации (1.6)), нуждается, на наш взгляд, в дополнительном исследовании, поскольку сходимость его не доказана.

Отметим, что указанные выше публикации достаточно давние, а статья [116] от 2009 г. почему-то не использована.

К тому же, для вариационных неравенств есть возможность использования и других подходов и методов из очень известных монографий:

I. Коннов И.В. Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. Казань, Казанский университет, 2013. 508 с.

II. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Volumes I, II. – Springer-Verlag, New York, 2003.

Интересно было бы сравнить разные подходы и методы (для которых сходимость доказана) с используемыми в диссертации Цоя Г.И.

3) В целом хотелось бы отметить ненужную краткость изложения весьма интересного материала работы. Например, не объяснена идеология появления модифицированного функционала $M(v, l)$ вместо $L(v, l)$, в частности, штрафной функции вида

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} \{[(l + rv_n)^+]^2 - l^2\} d\Gamma$$

вместо

$$\int_{\Gamma_2} lv_n d\Gamma.$$

К тому же, не объяснена уже вторая регуляризация функционала $J(v)$ в (1.8), а затем и третья регуляризация, проведенная сначала в (1.11), а затем в формулах для $M(v, w, l_1, l_2)$ и $F(v_r)$. Не уводит ли эта тройная регуляризация далеко от исходной краевой задачи (1.1)-(1.2) и VI (1.3)?

С другой стороны, как использовать критерий (1.7), если неизвестно точное решение (1.8)?

4) В работе проведен довольно обширный вычислительный эксперимент, демонстрирующий эффективность разработанного подхода и методов. Тем не менее, анализ большой вычислительной работы, представленный в диссертации явно недостаточен и временами не доказателен.

5) Из замечания 3 видно, что для ясности изложения в математическом тексте крайне необходимы пояснения на хорошем русском языке с сохранением математической строгости. В тексте работы можно обнаружить некоторые «бесмыслицы». Например, на стр. 22 (определение задачи, заменяющей (1.8)) формула (1.15) не является задачей оптимизации – это определение элемента w^{m+1} как решения соответствующей задачи. Второй пример на стр. 27 после (1.22) «Аппроксимируем» (чего и чем?) и дальше формула!

Далее, я бы советовал соискателю не использовать выражения "Легко видеть". Может быть "Нетрудно показать"? К тому же слова "сперва" я ни разу не встречал в математических текстах, а в диссертации Г.И. Цоя видел довольно часто.

6) Глава III диссертации выглядит очень краткой, в то время как задача, рассмотренная в ней, едва ли не самая интересная в работе. Более подробного изложения заслуживают все этапы исследования от сведения к последовательности задач с трещиной, до вычислительного эксперимента, анализ которого совершенно недостаточен в то время как результаты очень неплохи.

7) Для решения задач конечномерной оптимизации в работе используются лишь методы покоординатного спуска, Ньютона и градиентные, в то время как известно, что эти методы страдают определенными недостатками. В то же время более современные методы математического программирования и пакеты прикладных программ

(CPLEX, OptiPRESS, Gurobi etc) не применяются. Возможно, что это бы повлияло на результаты вычислительного эксперимента.

8) В работе можно обнаружить определенное количество опечаток (см. стр. 39, формула (2.6), стр. 71, 10я строка снизу, стр. 76, формула (3.5), стр. 21, стоит точка).

Вышеперечисленные замечания не меняют общего положительного впечатления от диссертационного исследования. Считаю, что диссертация Цоя Георгия Ильича «Модифицированные методы двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики» представляет собой законченную научно-квалификационную работу на актуальную тему, в которой предложены и обоснованы новые модифицированные методы двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики.

Тематика и результаты выполненных в диссертации исследований соответствуют паспорту специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». В целом представленная диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ «О порядке присуждения ученых степеней» от 24 сентября 2013 г. № 842, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор, Цой Георгий Ильич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

**Официальный
оппонент**

Стрекаловский Александр Сергеевич

3 февраля 2020 г.

Стрекаловский Александр Сергеевич, заведующий отделением Методов невыпуклой и комбинаторной оптимизации, главный научный сотрудник, доктор физико-математических наук, профессор.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН.
664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134,
тел. +7(3952)453031,
e-mail: strekal@icc.ru.