

## **ОТЗЫВ**

официального оппонента Алексеева Геннадия Валентиновича на диссертацию Самусенко Александра Марковича «Проекционные методы решения нестационарных уравнений переноса», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 - «Математическое моделирование численные методы и комплексы программ»

Большое число разнообразных процессов, в которых присутствует перенос вещества, описываются с помощью математических моделей, имеющих вид начально-краевых задач для нестационарных дифференциальных уравнений. Среди многообразия таких процессов можно выделить процессы конвекции в различных средах, процессы загрязнения атмосферы, движения газовых фракций в лёгких, океанические течения и ряд других процессов. Одним из важнейших вопросов при исследовании возникающих начально-краевых задач является вопрос существования и единственности решения. Однако, даже в том случае, если доказаны теоремы существования и единственности, крайне редко удается найти точное решение задачи в явном виде. По этой причине широкое распространение получили численные методы решения задач математической физики. Кроме того, следует отметить тот факт, что в настоящее время активно продолжает развиваться и наращивать свои мощности вычислительная техника, в связи с чем роль приближенных методов, и без того не малая, выросла. При разработке алгоритмов приближенного решения возникают широко известные проблемы, на которые указал Л. В. Канторович в работе "Функциональный анализ и прикладная математика", а именно: установление сходимости алгоритма, исследование скорости сходимости и поиск эффективных оценок погрешности. В связи с вышеуказанным исследования в данной области и, в том числе, работа автора являются актуальными.

Диссертационная работа А. М. Самусенко посвящена исследованию начально-краевых задач для некоторых нестационарных моделей, возникающих при моделировании процессов распространения вещества.

Текст диссертации изложен на 94 страницах машинописного текста и состоит из введения, трёх глав, состоящих из параграфов, заключения и списка литературы из 123 наименований.

Во введении обоснована актуальность и степень разработанности темы исследования, сформулированы цели и задачи исследования, указана научная новизна, результаты, выносимые на защиту, теоретическая и практическая значимость, представлено краткое содержание исследования.

В первой главе диссертации исследуются начально-краевые задачи для двух нестационарных уравнений высокого порядка: параболического

уравнения высокого порядка и дифференциально-операторного уравнения третьего порядка по времени с главным самосопряженным оператором и подчинённым ему нелинейным монотонным оператором. Уравнения такого вида возникают при моделировании движения газовых фракций в лёгких человека, исследовании процессов образования снега и при моделировании других процессов. Для первой начально-краевой задачи (для параболического уравнения порядка  $2m$ ) доказывается сходимость приближенных решений к точному и устанавливаются оценки скорости сходимости приближенных решений, построенных по методу Петрова-Галёркина, к точному. Для второй начально-краевой задачи (для нелинейного дифференциально-операторного уравнения третьего порядка по времени), с использованием метода Галёркина с базисом специального вида, доказано существование и единственность сильного решения, получены оценки скорости сходимости приближенного решения. На основании построенного численного алгоритма начально-краевой задачи для параболического уравнения четвёртого порядка разработана программа численного решения и проведено тестирование метода.

Во второй главе исследуются параболические уравнения высокого порядка в нецилиндрической области. Задачи такого рода возникают при моделировании различных процессов в медицине, экологии и других областях. Приведена постановка начально-краевой задачи для параболических уравнений высших порядков в нецилиндрической области. По методу Петрова-Галёркина построено приближенное решение исследуемой задачи, установлена его сходимость и установлены оценки скорости сходимости. На основе построенного численного алгоритма решения начально-краевой задачи для параболического уравнения четвёртого порядка в нецилиндрической области разработана программа численного решения.

В третьей главе диссертационной работы исследуется начально-краевая задача для нестационарного модельного уравнения конвекции-диффузии-реакции, рассматриваемого в квадратной области. К необходимости исследования такого типа задач приводит математическое моделирование процессов загрязнения окружающей среды, процессов переноса кислорода и других химических элементов в организме и ряда других процессов. Приведены постановка задачи и некоторые вспомогательные утверждения. Разработан проекционно-разностный метод решения данной задачи, установлена сходимость построенных приближенных решений к точным и установлены оценки скорости сходимости. Проведена численная реализация разработанного проекционно-разностного метода решения рассматриваемой задачи.

В заключении работы приведены основные результаты исследования.

В диссертации получены следующие новые основные результаты:

- на основе метода Галёркина-Петрова разработан алгоритм нахождения приближенного решения начально-краевой задачи для параболического уравнения высокого порядка в цилиндрической и нецилиндрической областях. Доказана сходимость и найдены оценки скорости сходимости построенного приближенного решения к точному;
- на основе метода Галёркина для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка с главным самосопряженным оператором и подчиненным ему нелинейным монотонным оператором установлены оценки скорости сходимости приближенных решений, кроме того, доказаны существование и единственность сильного решения;
- для начально-краевой задачи со смешанными граничными условиями для двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции построено приближенное решение на основе проекционно-разностного метода; доказана сходимость приближенного решения и получены новые оценки скорости сходимости;
- реализованы и оформлены в виде комплекса программ алгоритмы численного решения ряда задач и, в частности, начально-краевой задачи для параболического уравнения четвёртого порядка с аддитивным возмущением в цилиндрической и нецилиндрической областях, начально-краевой задачи со смешанными граничными условиями для модели конвекции-диффузии-реакции. Проведено тестирование разработанных численных алгоритмов.

Достоверность результатов и степень их обоснованности следует из строгих теоретических доказательств всех представленных в работе результатов. Кроме этого, автор провёл тестирование разработанных методов, результаты которого согласуются с теоретическими оценками погрешности. Основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми и вносят вклад в развитие методов решения начально-краевых задач, возникающих при моделировании различных процессов распространения вещества, что и определяет теоретическую значимость работы. В практическом смысле результатом работы автора является комплекс программ численного решения начально-краевых задач для рассматриваемых математических моделей.

Изложение диссертации имеет строгий научный стиль, исследование оформлено в соответствии с требованиями, предъявляемыми ВАК. Основные результаты диссертации изложены в 13 публикациях, в том числе в трёх российских рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК. Автор имеет 3 свидетельства регистрации программ для ЭВМ. Автореферат полно и точно отражает основные результаты исследования.

Отметим некоторые замечания к работе:

- на странице 25 автор ссылается на краевые условия 1.2, правильным будет ссылаться на краевые условия 1.2.2;
  - в утверждении теоремы 1.2.1 содержится функция  $g(n)$ ; в доказательстве данной теоремы вводится функция с таким же обозначением, что создаёт путаницу;
  - при доказательстве лемм 1.2.1–1.2.3 и теоремы 1.2.1 автор неоднократно использует неравенства Юнга, Фридрихса, Коши-Буняковского, однако промежуточные выкладки часто опускаются; в некоторых случаях этого не стоило бы делать по причине того, что чтение доказательства лемм и теоремы становится затруднительным;
  - автор неоднократно пользуется понятием подчинённости операторов, однако в работе не представлено точное определение этого термина и нет соответствующей ссылки на источник;
  - в третьей главе при исследовании рассматриваемой задачи автор делает переход к операторному уравнению, в чем, на мой взгляд, нет необходимости;
  - во втором параграфе третьей главы исследуется метод Петрова-Галёркина для решения нестационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции, причем название данного метода содержится в названии параграфа. Однако в самом параграфе (например, на стр. 68), автор использует термин «метод моментов», при этом комментарии по этому поводу отсутствуют;
  - в некоторых формулах, например, в (2.2.1), автор указывает аргументы у некоторых функций, а у других функций нет, что нарушает стиль изложения. В частности, на стр. 15 автореферата он использует обозначение  $u$  для скорости, но  $k(x,y,t)$  для коэффициента распада,  $\varphi(x,t)$  – для концентрации и  $z$  для вспомогательной функции  $z$ , заданной в области  $\Omega$ .
  - работа содержит ряд опечаток (см., например, стр. 55, 60, 70, 71, 93, 94);
- Кроме того, приведём некоторые пожелания к диссертации:
- при разработке программ численного решения исследуемых в работе начально-краевых задач автор в качестве полной ортогональной системы элементов использовал тригонометрические функции; интересным было бы провести численный эксперимент при другом выборе базисных функций;
  - также представляет интерес исследование задач (1.2.1)–(1.2.3) в случае когда функция  $a(t)$  зависит еще и от  $x$ .

Данные замечания и пожелания не снижают общей положительной оценки работы.

Диссертационное исследование представляет собой завершенную научно-квалификационную работу на актуальную тему. Работа соответствует паспорту специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и удовлетворяет требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней», предъявляемым к кандидатским диссертациям, а автор исследования Самусенко Александр Маркович заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Официальный оппонент:  
заведующий лабораторией вычислительной  
аэрогидродинамики Института прикладной  
математики ДВО РАН, доктор  
физико-математических наук,  
профессор

Алексеев Геннадий Валентинович

*25*  
марта 2016 г.

Адрес организации: 690041, Россия, Приморский край, г. Владивосток, ул.  
Радио 7, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской  
академии наук, лаборатория вычислительной аэрогидродинамики.

Телефон: +7(423)231-13-97  
e-mail: alekseev@iam.dvo.ru

Подпись Алексеева Геннадия Валентиновича  
заверяю