На правах рукописи

Савостьянова Ирина Леонидовна

МЕТОДЫ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ НОВЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Специальность 1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела»

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Комсомольск-на-Амуре – 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева»

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных экономических систем ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университете науки и технологий им. академика М.Ф. Решетнева», г. Красноярск
Сенашов Сергей Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией функционально-градиентных и композиционных материалов ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет», г. Ростов-на-Дону
Айзикович Сергей Михайлович

доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник ФГБУН «Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН», г. Новосибирск
Кургузов Владимир Дмитриевич

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика и естественные науки» ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», г. Москва
Максимова Людмила Анатольевна

Ведущая организация: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

Защита состоится «18» февраля 2025 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета 24.2.316.03 в ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет» по адресу 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, проспект Ленина, 27, факс (4217) 5361-50, diss@knastu.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Комсомольского-на-Амуре государственного университета» и на сайте https://sovet.knastu.ru/

Автореферат разослан «____» ________ 202___

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент Григорьева А.Л.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. Работа посвящена решению краевых задач теории упругости, теории пластичности, теории упруго-пластичности и механики композиционных материалов. Все основные положения перечисленных теорий написаны на языке дифференциальных уравнений, поэтому решение систем дифференциальных уравнений механики деформируемого твердого тела является актуальной задачей.

В теориях упругости, пластичности и упруго-пластичности – классических разделах механики деформируемого твердого тела, изучающих напряженно-деформируемое состояние твердых тел – существует ряд проблем, решение которых носит важное теоретическое и прикладное значение.

В теории упругости имеется много частных решений, которые широко используются для решения задач для бесконечных областей, и практически нет решений, описывающих напряженно-деформированное состояние в конечных областях.

В теории пластичности, в силу сложности и нелинейности уравнений, одна из важных проблем – построение точных решений, описывающих реальные физические процессы. Основные задачи теории пластичности, на наш взгляд, – построение решений трехмерных уравнений и расширение исследований краевых задач двумерных уравнений пластичности.

Ряд сложностей возникает при решении упруго-пластических задач. Основные проблемы связаны с отысканием неизвестной упруго-пластической границы.

Мировой тенденцией настоящего времени является использование материалов нового уровня эксплуатационных свойств, в числе которых ведущую роль играют композиционные материалы. При этом, существующие в настоящее время методы оценки прочностных и деформационных характеристик данных материалов имеют ограничения, и не отвечают на запросы определения надежности изделий из композиционных материалов. Данные противоречия порождают проблему получения фундаментальных результатов в области изучения деформирования изделий из композиционных материалов.

Интенсивное развитие вычислительной техники и расширение границ применимости методов численного моделирования привели к значительным успехам в решении перечисленных выше проблем. Однако, обоснование численных расчетов остается «ахиллесовой пятой» этих методов. Точные решения в этом случае позволяют сделать априорные оценки протекающих процессов, а также являются тестовыми. Как показывает практика численных решений, наличие теста полезно не только при выборе приближенного метода, но и на других этапах технологической цепочки при решении задач приближенными методами. Интерес к выделению классов аналитических решений, зависящих от произвольных параметров и функций, возрастает так же в связи с появлением большого численного материала, нуждающегося в интерпретации.

Под точным, или аналитическим, решением мы понимаем решение, представляемое явно формулой, или решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых имеются очень точные методы вычислений, или же решение, в которое входят явно произвольные функции.

Поэтому актуальной задачей является разработка новых методов решения краевых задач МДТТ. В настоящей диссертации таковыми являются методы группового анализа дифференциальных уравнений и законы сохранения.

Степень разработанности проблемы. Большой вклад в решение и исследование задач механики деформируемого твердого тела внесли работы Б.Д. Аннина, Л.А. Галина, Д.Д. Ивлева, А.А. Ильюшина, Л.М. Качанова, А.В. Манжирова, В.П. Мясникова, Б.Е. Победри, Ю.Н. Работнова, Л.А. Толоконникова, А.Д. Чернышева. Концепции и положения работ данных исследователей были развиты в дальнейшем А.А. Бурениным, Г.И. Быковцевым, Д.В. Георгиевским, И.Ю. Горячевой, М.А. Гузевым, Л.В. Ковтанюк, Е.В. Ломакиным, С.Т. Милейко, Р.И. Непершиным, Н.И. Остросаблиным, Ю.Н. Радаевым, Г.П. Черепановым и другими.

Активно работают в этой области С.М. Айзикович, М.А. Артемов, А.В. Ковалев, В.Д. Кургузов, О.Н. Любимова, Л.А. Максимова, А.Н. Спорыхин, А.И. Хромов, К.А. Чехонин и другие.

Уравнения упругости и пластичности уже более 50 лет изучаются с помощью симметрий. Начало им положено работами Б.Д. Аннина, Ю.В. Чиркунова, С.И. Сенашова. Использование метода группового анализа позволило построить ряд точных решений и изучить некоторые качественные свойства этих уравнений. Были попытки с помощью симметрий решать краевые задачи, но хороших результатов здесь достичь не удалось, что объясняется локальной природой симметрий.

Законы сохранения, применительно к дифференциальным уравнениям, появились в литературе более 100 лет назад в статье Э. Нетер. Она установила общий принцип, связывающий группы симметрий и законы сохранения для дифференциальных уравнений, выведенных из вариационного принципа. Более 70 лет все результаты в этом направлении основывались на исследовании Э. Нетер. Достаточно долгое время законы сохранения фигурировали в литературе как чисто математический результат, далекий от приложений. Более общие концепции, позволяющие вычислять законы сохранения для произвольных систем дифференциальных уравнений, появились в 90-ые годы XX века. Найденные законы сохранения оказались более подходящими для решения краевых задач уравнений механики. Впервые законы сохранения были использованы для решения краевых задач для двумерных уравнений пластичности С.И. Сенашовым, его соавторами и учениками. Возможности применения законов сохранения для решения таких задач объясняется тем, что симметрии по своей природе являются локальными, в отличие от законов сохранения – глобальных по своей сути. В последующий период было показано, как законы сохранения можно использовать для решения задач Коши и Римана, а также построить точные решения этих задач. Позднее членами данного коллектива техника законов сохранения была использована для решения задач с неизвестной границей: упруго-пластических задач.

Цель работы: установить особенности использования методов группового анализа ряда систем дифференциальных уравнений механики деформируемого твердого тела для построения новых аналитических решений краевых задач теории.

Это с неизбежностью приводит к необходимости развития ряда внутренних специфических методов группового анализа для разных систем дифференциальных уравнений

Задачами работы, таким образом, выступают:

1. Построить законы сохранения для уравнений теорий упругости, теории пластического течения, упруго-пластической деформации.

2. Найти законы сохранения для систем уравнений сложной структуры, описывающих деформацию композиционных материалов.

3. Используя законы сохранения, построить аналитические решения ряда новых задач теории упругости, пластичности, упруго-пластичности и механики композиционных материалов.

Научная новизна работы. Выполненная работа представляет собой комплексное исследование применения группового анализа и законов сохранения для решения задач механики деформируемого твердого тела. Полученные новые результаты заключаются в:

1. развитии метода построения законов сохранения для уравнений упругости, пластичности, упруго-пластичности и механики композиционных материалов;

2. полученных аналитических решениях новых краевых задач для основных уравнений механики деформируемого твердого тела;

3. использовании законов сохранения для отыскания неизвестных границ между упругой и пластической областями при решении задач упруго-пластичности и механики композиционных материалов;

4. построении новых частных решений уравнений механики деформируемого твердого тела.

Положения, выносимые на защиту.

1. Методика построения законов сохранения, позволяющих решать краевые задачи для уравнений упругости, пластичности и механики композиционных материалов.

2. Методика построения законов сохранения, позволяющих найти границы между упругими и пластическими зонами в скручиваемых стержнях, изгибаемых балках и деформируемых пластинах.

3. Методика построения законов сохранения для определения напряженно-деформированного состояния многослойных и композиционных материалов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Решения и законы сохранения, найденные в работе для уравнений упругости, пластичности и композиционных материалов, обладают большой теоретической значимостью. Они имеют ценность сами по себе, поскольку позволяют описывать конкретные физические и технологические процессы. На точных решениях можно проверять различные предположения, которые выдвигаются механиками в процессе решения конкретных производственных и технологических задач. Использование законов сохранения позволяет получить как дополнительные уравнения, совместные с исходными уравнениями, так и построить интегральные соотношения, пригодные для априорных оценок, которые часто требуются при доказательстве теорем существования и единственности. Формулы, полученные в диссертации, сводят решение краевых задач к вычислению интегралов по границам изучаемого деформируемого тела. При этом не требуется доказательств сходимости или устойчивости метода, отсутствует необходимость в особой гладкости поверхностей, по которым проводится интегрирование. Так же минимизируются затруднения, возникающие при вычислении в угловых точках границы.

С точки зрения практической значимости, полученные точные решения могут служить тестовыми для программных продуктов, решающих системы уравнений механики деформируемого твердого тела. Приведенные в диссертации методы решения краевых задач представляют собой хороший инструмент для решения широкого класса уравнений механики. Автор надеется, что приведенные в диссертации методика найдет широкое применение при решении задач, возникающих в научных исследованиях и практической работе инженеров и научных работников.

Методология и методы исследования. В работе были использованы уравнения и положения механики деформируемого твердого тела, методы группового анализа и законы сохранения дифференциальных уравнений, аналитические методы теории дифференциальных уравнений.

Достоверность научных положений и выводов определяется применением строгих математических методов, математическими доказательствами полученных формул, совпадением их для частных случаев с известными формулами, а также физической интерпретацией полученных закономерностей.

Апробация работы. Соискателем доложены основные результаты работы на следующих конференциях: XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (21 – 25 августа 2023 г., г. Санкт-Петербург), XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, (19 – 24 августа 2019 г., г. Уфа), Всероссийская конференция «Математические проблемы механики сплошных сред», посвященная 105-летию со дня рождения академика Л.В. Овсянникова (13 – 17 мая 2024 г., г. Новосибирск), Symmetry 2024 Conference Proceedings (22 – 26 января 2024 г., Таиланд), 28-ая Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (10 – 15 июля, 2023 г. г. Красноярск), Международная конференция Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, посвященная академику М. А. Лаврентьеву (2015 г., 2020 г., г. Новосибирск), VIII международная конференция по математическому моделированию (04 – 08 июля 2017 г., г. Якутск), Решетневские чтения: международная научно-практическая конференция, посвященная памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева (2016 – 2023 г., г. Красноярск), и на семинарах «Механика деформируемого твердого тела» под руководством профессора С.И. Сенашова, СибГУ им. М.Ф. Решетнева (2014 – 2024 г.) и др.

Личный вклад. Основные результаты, включенные в диссертацию, принадлежат автору.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 20 статьях в журналах, включенных в перечень ВАК (из них 13 входят в базы данных Web of Science и Scopus), в 1 монографии, 2 учебных пособиях, и в 3 зарегистрированных программах для ЭВМ.

Структура и объем диссертации.

Работа состоит из 5 глав, списка литературы, введения и заключения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** указаны цель исследования, его научная новизна, основные результаты, выносимые на защиту, теоретическая и практическая значимость работы, приведен обзор работ по теме диссертации, дана общая характеристика работы.

В **Главе 1** вводятся основные определения и формулы, которые используются в дальнейшем. Приведены основные сведения об уравнениях упругости и пластичности, упруго-пластичности, композиционных материалов. Приведены основные положения группового анализа и законов сохранения, допускаемых системами дифференциальных уравнений, используемые в диссертации.

Определение законов сохранения.

Пусть

$$F_i\left(\bar{x},\bar{u},\bar{u}_\sigma\right)=0,\ i=1,\dots,m \tag{1}$$

система дифференциальных уравнений, где

$\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$ – независимые переменные;

$\bar{u}=(u,\dots,u_m)$ – зависимые переменные;

$\bar{u}_\sigma$ – совокупность всех частных производных.

Тогда $\partial_{x_1} A_1 + \partial_{x_2} A_2 + \ldots + \partial_{x_n} A_n = \square_1 F_1 + \ldots + \square_m F_m$ называется *законом сохранения системы* (1), где $(A_1, \ldots, A_n)$ – сохраняющийся ток, $\square_i$ – линейные дифференциальные операторы, не все тождественно равные нулю.

В **Главе 2** строятся законы сохранения и точные решения уравнений теории упругости.

В § 2.1 найдены симметрии и законы сохранения двумерных уравнений теории упругости.

В § 2.2 эти законы сохранения используются для решения первой краевой задачи для уравнений двумерной теории упругости.

Система дифференциальных уравнений, которую можно использовать для описания реальных физических процессов, – асимметричная теория упругости – является предметом § 2.3. Эта система может быть использована для материалов, имеющих малый модуль Юнга, а также для материалов, которые работают при нагрузках близких к критическим. В параграфе изучаются уравнения асимметричной теории упругости на основе их группового расслоения: разложения системы на автоморфную и разрешающую системы, которые являются системами дифференциальных уравнений первого порядка. Построены бесконечные серии законов сохранения для разрешающей системы уравнений и автоморфной системы. Эти законы позволили решить краевую задачу Дирихле для асимметричной теории упругости в двумерном случае. Решения построены в виде квадратур, которые вычисляются по контуру исследуемой области.

Предлагается следующая связь тензоров напряжений и тензора деформаций

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + 2\mu_0\varepsilon_{12} + \lambda\varepsilon_{22}, \\
\sigma_{12} &= \mu_0\varepsilon_{11} + 2\mu\varepsilon_{12} + \mu_0\varepsilon_{22}, \\
\sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} - 2\mu_0\varepsilon_{12} + \lambda\varepsilon_{11},
\end{aligned} \tag{2}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, $\lambda > 0, \mu > 0$ – постоянные Ламе, μ_0 – произвольное вещественное число; если $\mu_0 = 0$, то (2) есть классический закон Гука для изотропного, однородного случая.

Законы сохранения и решения первой краевой задачи для двумерных и трехмерных уравнений теории упругости рассмотрены в § 2.4. Известно, что если система дифференциальных уравнений допускает группу непрерывных преобразований, то в ряде случаев, система может быть представлена в виде совокупности двух систем дифференциальных уравнений. Как правило, эти системы имеют меньший порядок, чем исходная система. Выше сказанное относится к линейным уравнениям теории упругости. Первая система – автоморфная, характеризуется тем, что все ее решения получаются из одного решения с помощью преобразований этой группы. Вторая система – разрешающая, ее решения под действием группы переходят сами в себя. Разрешающая система несет основную информацию об исходной системе. В параграфе изучаются автоморфная и разрешающая системы двумерных и трехмерных стационарных уравнения упругости, которые являются системами дифференциальных уравнений первого порядка. Построены бесконечные серии законы сохранения для разрешающих систем уравнений и автоморфных систем. Поскольку рассматриваемые системы уравнений упругости линейны, то таких законов имеется бесконечно много. В параграфе построена бесконечная серия законов сохранения, линейных по первым производным. Именно эти законы позволили решить первую краевую задачи для уравнений теории упругости в двумерном и трехмерном случае. Решения построены в виде квадратур, которые вычисляются по границе исследуемых областей.

В § 2.5 рассмотрены уравнения упругости в плоском динамическом случае. Эта система заменена равносильной системой дифференциальных уравнений первого порядка. Равносильная система есть групповое расслоением исходной системы уравнений, она является объединением разрешающей и автоморфных систем. Для разрешающей системы уравнений найдены специальные классы законов сохранения, которые позволили найти решение исходных уравнений в виде поверхностных интегралов по границе упругого тела.

В § 2.6 рассматривается кручение параллелепипеда вокруг трех осей.

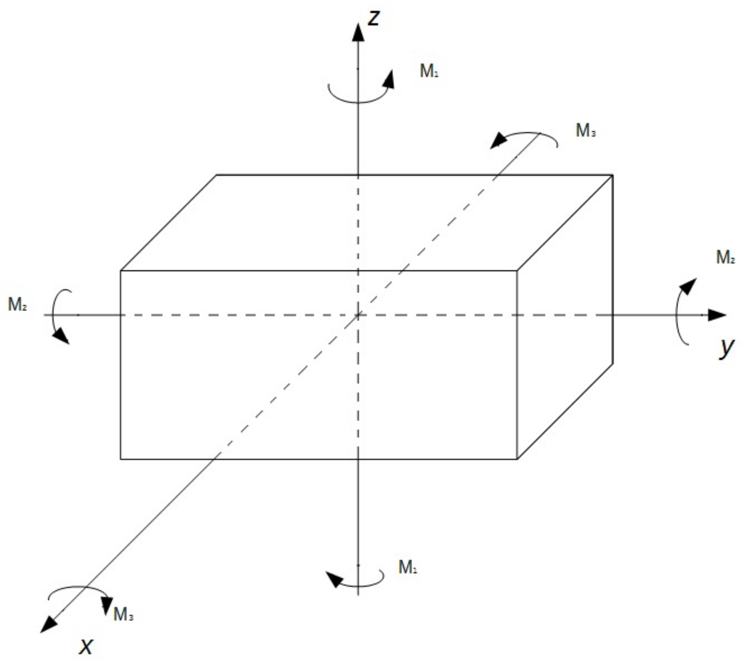

Рисунок 1. – Кручение параллелепипеда вокруг трех осей

Теория предельного состояния имеет дело со статически определимым состоянием твердых тел. В этом случае система замкнута за счет предельных условий и такие свойства материи как вязкость, упругость и т.п. на предельное состояние влиять не могут. Другими словами, при достижении предельного состояния характер связи между напряжениями и деформациями не оказывает влияния на предельное состояние. Исследование таких систем последовательно проводил Д.Д. Ивлева и его соавторы. К уравнениям равновесия они присоединяли два или уравнения, связывающие компоненты тензора напряжений. Это приводило к замкнутости системы уравнений равновесия. В теории пластичности хорошо изучены уравнения, которые замыкаются одним пределом текучести. К наиболее известным системам, описывающим предельное состояние деформируемых тел, относятся хорошо исследованные уравнения, описывающие кручение пластических тел, двумерные задачи стационарной теории пластичности. В параграфе рассмотрены некоторые другие системы уравнений, которые замыкаются только одним уравнениям текучести, что соответствует классической теории пластичности. Предполагается, что компоненты вектора скоростей зависят только от двух пространственных координат. При этом для компонент вектора скорости деформаций выполняются тождественно условия совместности деформаций. Построенные системы могут быть использованы для описания кручения параллелепипеда вокруг трех ортогональных осей. Для построенной системы уравнений найдены точечные группы симметрий, законы сохранения. Показано, что система допускает восьмимерную алгебру Ли. На основе группы симметрий построены некоторые классы инвариантных решения ранга 1. Они зависят от произвольных функций одной переменной. Показано, что эти решения можно использовать для описания пластического кручения параллелепипеда вокруг трех ортогональных осей. Показано, что система допускает бесконечную серию законов сохранения. В заключительном пункте описано построение упругого решения поставленной задачи. Показано, что оно сводится к нахождению трех гармонических функций.

Использование законов сохранения для решения краевых задач системы Моисила–Теодореску рассмотрено в § 2.7. Система Моисила–Теодореску является трехмерным аналогом системы уравнений Коши–Римана, и связана с пространственными статическими уравнениями Ламе. Исследованию этих уравнений посвящено множество работ, в которых получены аналоги многих результатов, известных для уравнений Коши–Римана. Решения системы Моисила–Теодореску сохраняют многие свойства аналитических функций комплексного переменного.

Система Моисила–Теодореску имеет вид

$$\begin{gathered} F_1 = \partial_x p + \partial_y w - \partial_z v = 0, \quad F_2 = \partial_y p + \partial_x w - \partial_z u = 0, \\ F_3 = \partial_z p + \partial_x v - \partial_y u = 0, \quad F_4 = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где p, u, v, w – есть искомые функции от x, y, z.

В операторном виде система уравнений (3) запишется

$$L\begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_y & \partial_z & 0 & -\partial_x \\ \partial_z & -\partial_y & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0 \tag{4}$$

Законом сохранения для системы уравнений (3) назовем выражение вида

$$\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = \omega_i F_i, \quad i = 1,2,3,4 \tag{5}$$

где A, B, C, ω_i – функции от x, y, z, p, u, v, w; предполагается, что функции ω_i не равны одновременно тождественно нулю. Функции A, B, C называются сохраняющимся током. При выполнении этих условий, закон сохранения (5) будет нетривиальным.

В параграфе построены некоторые точные решения этой системы и приведена бесконечная серия новых законов сохранения для уравнений системы Моисила–Теодореску. Эти законы линейны по производным. Построенные законы использованы для решения краевых задач системы Моисила–Теодореску.

В **Главе 3** строятся законы сохранения и точные решения уравнений теории пластичности.

В § 3.1 рассмотрено предельное состояние анизотропных пластических тел. Теория предельного состояния имеет дело со статически определимым состоянием твердых тел. В этом случае система замкнута за счет предельных условий. Рассмотрена система уравнений, в которой содержатся три касательных компоненты тензора напряжений, а диагональные компоненты равны между собой. В этом случае удается подобрать такое поле скоростей, что система также является статически определимой. Показано, что эта система может быть рассмотрена и в терминах компонент тензора скоростей деформации. При этом количество уравнений не увеличивается, поскольку условия совместности выполняется тождественно. Для этой системы найдена группа точечных симметрий и законы сохранения, рассмотрены некоторые точные решения, которые могут быть использованы для описания пластического кручения вокруг трех ортогональных осей.

В § 3.2 найдены новые трехмерные пластические течения, соответствующие однородному напряженному состоянию. В работе В. Прагера 1954 г. было показано, что однородному напряженному состоянию соответствует только поле скоростей, имеющее вид полиномов второй степени. В параграфе показано, что существуют и другие поля скоростей, которые имеют функциональный произвол.

В § 3.3 рассмотрены уравнения анизотропной теории пластического течения в пространственном случае. На основе группы непрерывных преобразований, допускаемой системой, построено инвариантное решение. В случае однородного напряженного состояния найдено новое поле скоростей. Это поле имеет функциональный произвол.

В § 3.4 рассмотрены динамические задачи анизотропной теории пластичности. Динамические задачи – это наименее изученная область теории пластичности. Динамические задачи возникают в самых разных областях техники и науки, но сложность исходных дифференциальных уравнений не позволяет строить точные решения и корректно численно решать краевые задачи. Это еще в большей степени касается динамических уравнений анизотропной пластичности. Анизотропия уменьшает группу симметрий, допускаемую уравнениями, а, следовательно, и сужает количество инвариантных решений. На текущий момент неплохо исследованы одномерные динамические задачи пластичности, но уже двумерные задачи вызывают непреодолимые математические сложности, из-за нелинейности основных уравнений, даже в изотропном случае. Изучение симметрий уравнений пластичности позволило построить некоторые точные решения. Наиболее известное решение построил Б.Д. Аннин, описывающее сжатие жесткими плитами пластического слоя из изотропного материала. Решение Аннина линейно по двум пространственным переменным, и в него входят произвольные функции времени. В параграфе также используются симметрии. Впервые вычислены точечные симметрии для динамических уравнений пластичности в анизотропном случае. Алгебра Ли, порождаемая найденными симметриями, оказалась бесконечномерной. Это обстоятельство дало возможность применить методику построения новых классов нестационарных решений. Симметрии позволяют преобразовать точные решения стационарных динамических уравнений в нестационарные решения. В построенные решения входят произвольные функции и произвольные постоянные. По методике Ли–Овсяннникова вычисляется группа точечных симметрий, допускаемая уравнениями анизотропной пластичности. Строятся два класса новых стационарных инвариантных решений. Эти стационарные решения, с помощью преобразований, порождаемых точечными симметриями, преобразуются в новые нестационарные решения. В заключение построено новое автомодельное решение нестационарных уравнений анизотропной пластичности, а решение Аннина обобщено на анизотропный случай. Приведенные решения можно использовать для описания сжатия пластического материала между жесткими плитами, а также для тестирования программных продуктов, предназначенных для исследования анизотропных пластических задач.

Для построения решений в § 3.4 используются точечные симметрии, допускаемые уравнениями пластичности в динамическом случае. Эти симметрии позволяют преобразовать точные решения стационарных динамических уравнений в нестационарные решения. В построенные таким образом решения входят произвольные функции времени. Приведенное решение позволяет описать пластическое течение между плитами, которые меняют свою форму под действием динамических нагрузок. Так же в параграфе приведено новое пространственное автомодельное решение.

В § 3.5 рассмотрены законы сохранения специального вида для систем дифференциальных уравнений первого порядка, зависящие от двух зависимых и независимых переменных. Показано как законы сохранения могут быть использованы для решения систем уравнений гиперболического и эллиптического типов, которые встречаются в теории пластичности. Приведены примеры эффективного применения описанной методики. С помощью законов сохранения найдена упруго-пластическая граница в задаче о напряженно деформированном состоянии пластины с отверстиями произвольной формы.

В § 3.6 рассматриваются уравнения пластичности в двумерном случае и строятся линии разрыва напряжений. Построение линий разрыва напряжений основывается на факте: они находятся в точке пересечения линий одного семейства (характеристик) и направлены по биссектрисе угла образованными этими характеристиками. Поэтому для нахождения этих линий построены характеристики. Подобная задача проще решается в случае пластического кручения, тогда характеристика только одна, и она направлена по нормали к внешнему контуру, и найти линии скольжения и их точки пересечения достаточно просто. Поэтому большинство работ, посвященных построению линий разрыва напряжений, решает задачу именно пластического кручения для изотропных и анизотропных сред. Для задач плоской деформации пластического материала этот метод не достаточно развит, это объясняется сложностью построения линий скольжения для таких задач и наличием двух семейств линий скольжения. В параграфе построена гомотопия двух известных точных решений: Прандтля и Надаи, т.е. непрерывная трансформация одного решения в другое. При этом можно наблюдать эволюцию характеристик, которые зависят от группового параметра a. При $a=1$ получаются характеристики решения Прандтля. При $a=0$ – характеристики решения Надаи. При $a=0,5$ характеристики одного семейства начинают пересекаться и возникают линии разрыва напряжений. В параграфе построены эти линии.

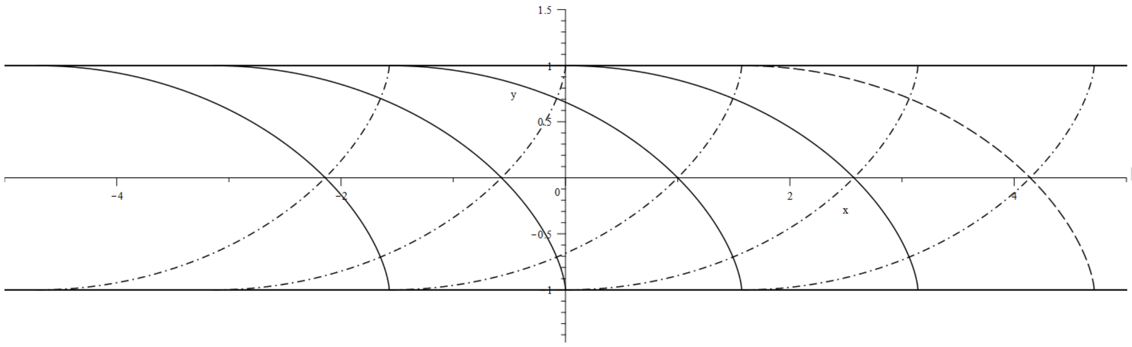

Рисунок 2. – Преобразованные линии скольжения. $h=1,\ p1=p2,\ a=1$

При a=0 характеристики решения Надаи (рис.3).

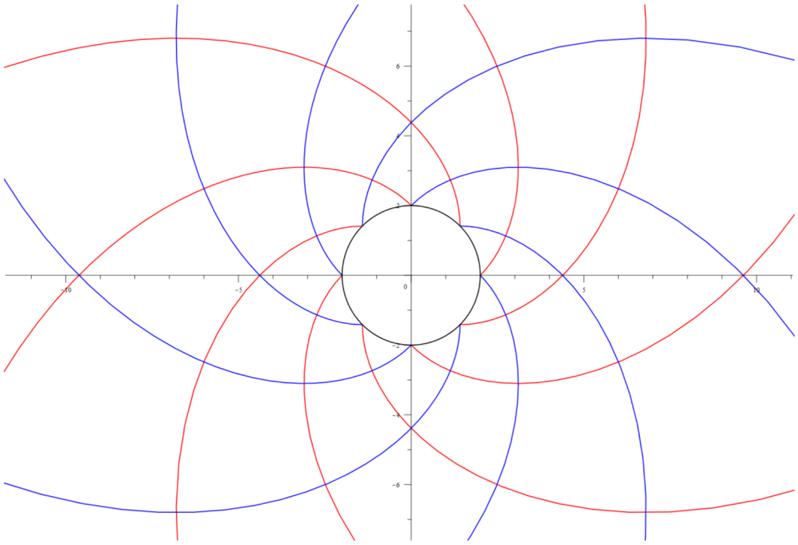

Рисунок 3. – Преобразованные линии скольжения. *a*=0

При *a* =0,5 характеристики одного семейства начинают пересекаться и возникают линии разрыва напряжений (рис.4)

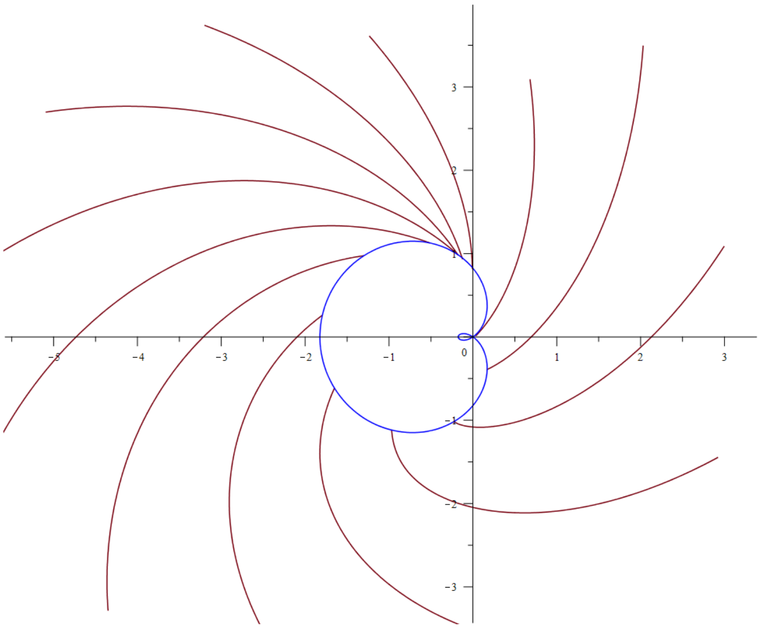

Рисунок 4. – Пересечение линий скольжения для отверстия в виде улитки Паскаля. *a*=0,5

Линия разрыва напряжений проходит по биссектрисе угла, образованного пересекающимися характеристиками, и выходит из точки их пересечения в координатах [-0,183;0,991] (рис.5 4).

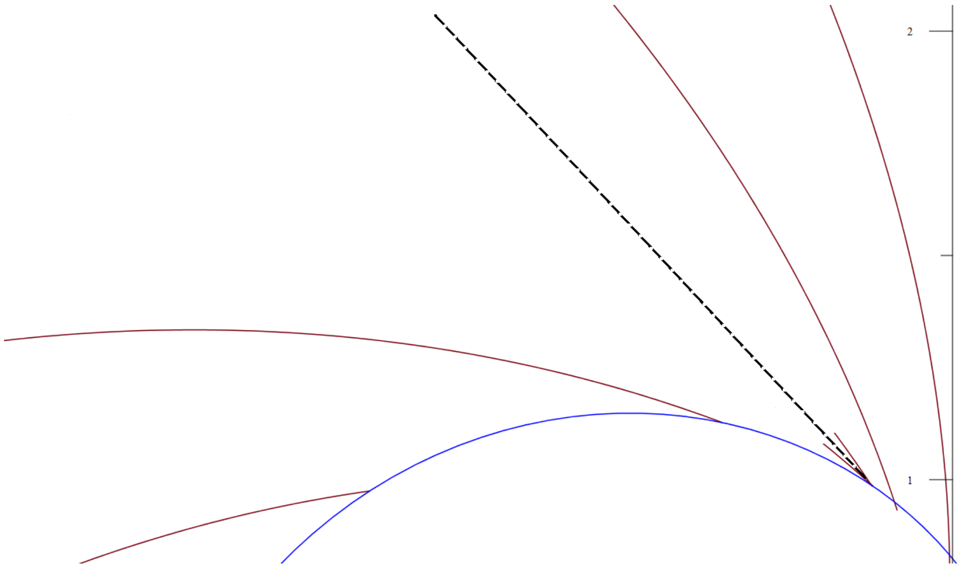

Рисунок 5. – Линия разрыва напряжений

Глава 4 посвящена использованию законов сохранения для решения задач упруго-пластичности.

В § 4.1 рассматривается упруго-пластический изгиб бруса поперечной силой.

С помощью законов сохранения построена упруго-пластическая граница для бруса, изгибаемого поперечной силой, когда точка приложения силы не лежит в центре тяжести поперечного сечения. В этом случае в стержне возникают изгибающие и крутящие моменты. Построена бесконечная система законов сохранения, которая позволяет свести задачу вычисления упруго-пластическая границы к нескольким квадратурам, по внешнему контуру поперечного сечения.

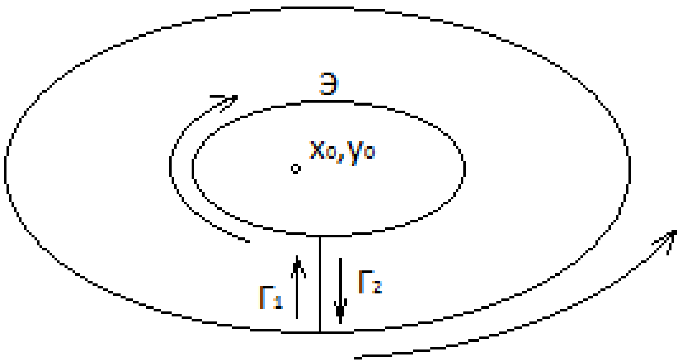

Рисунок 6. – Обход по контурам совершается так, что особая точка остается вне области, охватываемой контурами

При этом контур может быть произвольным кусочно-гладким. Предполагается, что боковая поверхность бруса свободна от напряжений и находится в пластическом состоянии.

В § 4.2 решена плоская упругопластическая задача о напряженном состоянии в условиях сложного сдвига в теле, ослабленном отверстием, и ограниченном кусочно гладким контуром. Напряженное состояние сложного сдвига возникает в цилиндрическом теле бесконечной длины под действием нагрузок, направленных по образующим цилиндра и постоянным вдоль образующих. При этом при достаточно большой нагрузке в теле возникают как упругие, так и пластические зоны. Как и в любой задаче подобного рода возникает необходимость в нахождении заранее неизвестной границы, разделяющей упругую и пластическую зоны. Отыскание такой границы не простая задача, но специфика упругопластических задач о сложном сдвиге состоит в том, что решение подобных задач проще, чем решение аналогичных упругих задач. По-видимому, впервые этот факт отметил Г.П.Черепанов. Во всех источниках, в которых решаются задачи о сложном сдвиге, существенно используют представление напряжений и смещений в упругой зоне в комплексном виде. В параграфе решены задачи о сложном сдвиге с помощью законов сохранения. При этом предполагается, что предел текучести является функцией от координат точки, в которой исследуется напряженное состояние. Известно, что упругие свойства конструкционных материалов могут быть однородными и изотропными, а при этом их предел текучести и прочности – неоднородными. Такая ситуация наблюдается, например, при нейтронной бомбардировке конструкционных материалов. В параграфе рассмотрена именно такая ситуация. Приведены законы сохранения для уравнений, описывающих сложный сдвиг. При этом предполагалось, что компоненты сохраняющегося тока зависят от компонент тензора напряжений и координат. Компоненты тензора напряжений входят в них линейно. Задача о нахождении компонент сохраняющегося тока свелась к системе Коши–Римана. Решение этой системы позволили свести вычисления компонент тензора напряжений к криволинейному интегралу по контуру отверстия, и тем самым найти границу между упругой и пластической областями.

В § 4.3 рассмотрено кручение призматических ортотропных упруго-пластических стержней. Предполагается, что сохраняющийся ток зависит линейно от компонент тензора напряжений. В параграфе найдена бесконечная серия законов сохранения, которая позволяет найти упругопластическую границу, возникающую при кручении ортотропного стержня.

Аналогично в § 4.4. описано кручение упруго-пластических стержней прокатного профиля, а в § 4.5 найдено новое решение плоской упруго-пластической задачи.

Для выдвижения антенн на космических аппаратах используются полые стержни коробчатого сечения большой длины. Эти стержни изготавливаются из многослойных композитных материалов. Под действием солнечного излучения в стержнях возникают напряжения, которые существенно влияют на функции приборов, находящихся на выдвигаемой конструкции. В § 4.6 рассмотрен упруго-пластический коробчатый стержень, который изгибается поперечной силой. Предполагается, что деформации в стержне упруго-пластические и боковая поверхность его свободна от напряжений. Центр тяжести поперечного сечения не совпадает с точкой приложения силы. Построено точное решение с помощью законов сохранения описывающее напряженное состояние этой конструкции. Напряженное состояние вычисляется в каждой точке рассмотренной фигуры, с помощью интегралов по внешним контурам поперечного сечения.

В § 4.7 решена анизотропная антиплоская упругопластическая задача о напряженном состоянии в теле, ослабленном отверстием, и ограниченном кусочно гладким контуром. Приведены законы сохранения, которые позволили свести вычисления компонент тензора напряжений к криволинейному интегралу по контуру отверстия. Законы сохранения позволили найти границу между упругой и пластической областями.

Использование законов сохранения для решения задачи о волне нагрузки в упругопластическом стержне показано в § 4.8. Рассмотрен процесс распространения пластических деформаций в полубесконечном упруго-пластическом стержне. Пластические деформации вызваны приложенной к концу стержня динамической нагрузки, неубывающей во времени. Уравнения записаны в лагранжевой системе координат. Предполагается, что в процессе деформации не происходит бокового выпучивания стержня, и что влияние поперечных деформаций стержня на процесс распространения продольных волн пренебрежимо мало. В начальный момент стержень находится в деформированном состоянии и состоянии покоя. Рассмотрены малые деформации стержня. Плотность стержня в процессе деформирования не изменяется. Единственной отличной от нуля составляющей тензора напряжений будет компонента вдоль оси *OX*, отличными от нуля составляющими тензора деформаций будут компоненты вдоль осей *OX, OY*. В результате построена система двух квазилинейных однородных уравнения первого порядка. Уравнения являются гиперболическими. Для них построены характеристики и соотношения на них. Далее уравнения записаны в терминах инвариантов Римана. Для построенных уравнений найдены законы сохранения, в случае, когда сохраняющийся ток зависит только от искомых функций. В результате получена система линейных уравнений с коэффициентами, зависящими только от искомых функций. Построение законов сохранения сведено к решению краевой задачи для известных уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу. Эта задача решена с помощью функций Римана. Законы сохранения позволили найти координаты точек пересечения характеристик, а значит, и решить поставленную задачу. В заключение рассмотрен случай, когда одна из характеристик пересекает линию, на которой заданы начальные условия. В этом случае, как известно, задача Коши решена быть не может. Это приводит к процедуре, которая с помощью законов сохранения, позволяет выяснить вопрос о разрешимости задачи Коши. Она сводится к решению несложного интегрального уравнения методом последовательных приближений.

ГЛАВА 5 содержит решение уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние многослойных и композиционных материалов.

В § 5.1 рассмотрено упругое состояние двухслойного стержня коробчатого сечения под действием крутящего момента. Контакт между двумя упругими слоями из различных материалов предполагается жестким. С помощью построенных законов сохранения вычислено напряженное состояние в каждой точке этой конструкции.

В § 5.2 построено решение, описывающее напряженно деформированное состояние нелинейно упругой двухслойной среды, находящейся между двумя жесткими плитами, сближающимися с постоянным ускорением вдоль оси OY. Подобное решение может быть построено и для среды, законы упругости которой имеют вид

$$\sigma_x = \lambda_1(I_2)u_x,\ \sigma_y = \lambda_2(I_2)v_y,\ \tau - \lambda_3(I_2)(v_x + u_y),$$

где λ_i – некоторые гладкие функции, зависящие от второго инварианта тензора деформаций I_2.

В § 5.3 изучается упруго-пластическое кручение двухслойного стержня под действием крутящего момента. Предполагается, что стержень состоит из двух слоев. Каждый слой обладает своими упругими свойствами, но пластические свойства у обоих слоев одинаковые. Граница контакта слоев расположена вдоль оси OX. Боковая граница стержня свободна от напряжений, на границе раздела непрерывны перемещения и напряжения. Компоненты тензора напряжений в точке вычисляется с помощью контурных интегралов, полученных из законов сохранения, вычисленных по боковой границе. Далее второй инвариант тензора напряжений сравнивается с пределом текучести. В тех точках, где достигается предел текучести реализуется пластическое состояние, в остальных – упругое. Это позволяет построить границу между пластической и упругой областями. Данная методика дает способ вычислить упруго-пластические границы для основных прокатных профилей стержней.

В § 5.4 исследуется упруго-пластическое кручение многослойного стержня. Рассматриваемый стержень состоит из нескольких слоев. Упругие свойства слоев различны, но коэффициент пластичности у всех слоев одинаков. Для простоты изложения рассмотрен стержень, состоящий из трех слоев, где границы контакта слоев параллельны. Боковая граница стержня свободна от напряжений, на границах раздела слоев непрерывны напряжения и перемещения. Построены законы сохранения, которые позволили вычислить компоненты тензора напряжений с помощью контурных интегралов по границе слоев. Во всех точках второй инвариант тензора напряжений сравнивается с пределом текучести. В тех точках, где достигается предел текучести при чистом сдвиге, реализуется пластическое состояние, в остальных – упругое. В результате решения задачи можно построить границу между пластической и упругой областями.

§ 5.5 посвящен изучению упруго-пластического кручения многосвязного двухслойного призматического стержня, под действием пары сил с заданным моментом. Предполагается, что стержень состоит из двух слоев. Каждый слой обладает своими упругими свойствами, но пластические характеристики у обоих слоев одинаковые. Граница контакта слоев расположена вдоль оси *OX*. Боковая граница стержня свободна от напряжений, на границе раздела непрерывны перемещения и напряжения. Компоненты тензора напряжений в точке вычисляется с помощью контурных интегралов, полученных из законов сохранения, вычисленных по боковой границе и границам отверстий. Аналогично предыдущим выводам, в тех точках стержня, где достигается предел текучести, реализуется пластическое состояние, в остальных – упругое. Это позволяет построить границу между пластической и упругой областями.

В § 5.6 рассмотрено напряженное состояние композитной консоли.

Консоль изготовлена из упруго-пластического материала и армирована упругими n волокнами. Один конец консоли закреплен в точке $x=0$, на втором конце консоли при $x=l$ подвешен груз весом P. (см. рис. 7)

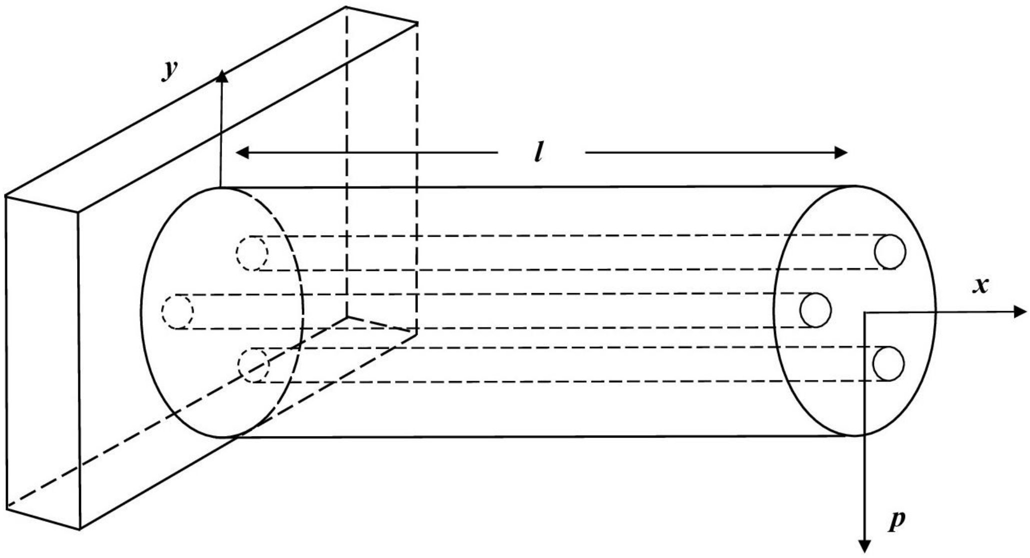

Рисунок 7. – Консоль из композиционного материала

Матрица консоли имеет модуль упругости G и предел текучести при чистом сдвиге k. Волокна расположены вдоль консоли в произвольном порядке параллельно оси x. Каждое волокно имеет круглое сечение, центр располагается в точке с координатами (x_i, y_i), радиус волокна равен R, модуль упругости G_i. Пределы текучести волокон превосходят предел текучести матрицы. Касательное напряжение между волокном и матрицей равно $\tau < k$.

Вычисление напряженного состояния в точке (x_0, y_0) (см. рис 8) сводится к нахождению интегралов.

$$\iint_S (A_x + B_y)dxdy = \oint_{\Gamma_0} Ady - Bdx - \sum_{i=1}^{n} \oint_{\Gamma_i} Ady - Bdx - \oint_{\varepsilon} Ady - Bdx = 0.$$

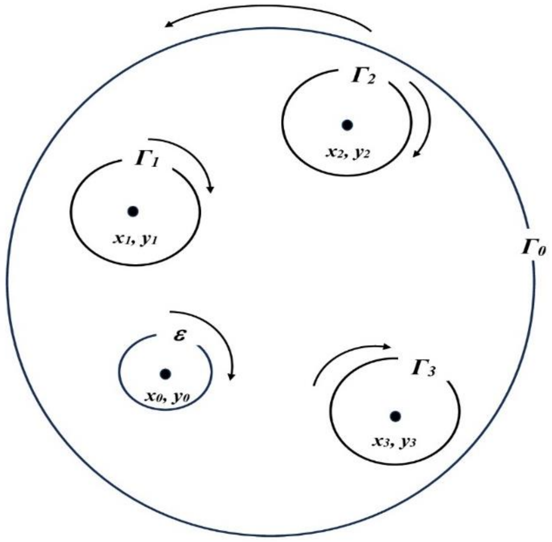

Рисунок 8. – Нахождение напряженного состояния в точке (сечение консоли)

Таким образом можно вычислить напряженное состояние в любой точке связующего материала. Те точки, где $\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2=k^2$, будут находиться в пластическом состоянии, остальные точки среды, а также волокна, будут оставаться упругими. Предложенный метод решения позволяет построить упруго-пластическую границу в композитной консоли и тем самым оценить ее несущую способность.

В **заключении** приведены основные результаты выполненной работы.

Для уравнений теории упругости. Построены законы сохранения для разрешающей и автоморфной систем уравнений упругости, позволяющих решить первую краевую задачи для уравнений теории упругости в двумерном и трехмерном случаях, а также асимметричном случае. Найдены решения, описывающие напряженное состояние, возникающее при кручении параллелепипеда вокруг трех ортогональных осей. При этом параллелепипед может находиться как в упругом, так и в пластическом состоянии.

Для уравнений теории идеальной пластичности. Найдены точные решения для описания пластического кручения стрежня вокруг трех ортогональных осей, новые решения, соответствующее однородному напряженному трехмерному пластическому состоянию, содержащее произвольную гладкую функцию. Найдены пространственные решения, описывающие динамические решения, которые можно для описания сжатия между жесткими плитами пластического изотропного и анизотропного материалов.

Для уравнений, описывающих упруго-пластическое состояние. Построена бесконечная система законов сохранения, которая позволяет свести задачу вычисления упруго-пластическая границы к нескольким квадратурам, по внешнему контуру поперечного сечения. Это позволяет построить упруго-пластическую границу в следующих случаях: для бруса, изгибаемого поперечной силой; для плоской задачи о напряженном состоянии в условиях сложного сдвига в теле, ослабленном отверстием; для скручиваемых стрежней прокатного профиля; в задаче о напряженно деформированном состоянии пластины с отверстиями произвольной формы и в задаче, описывающей кручение прямолинейного ортотропного стержня. Использована гомотопия двух известных точных решений: Прандтля и Надаи, позволяющая построить линии разрыва напряжений для двумерной пластической области. Построено точное решение, описывающее напряженное состояние бруса коробчатого сечения, изгибаемого подвешенным грузом. Построено решение, описывающее распространении волны нагрузки в одномерном упругопластическом стержне.

Для композиционных и слоистых материалов. Построена бесконечная система законов сохранения, которая: позволила найти точное решение, определяющее напряженное состояние в каждой точке двуслойного стержня коробчатого сечения; позволила построить решение, описывающее напряженно деформированное состояние нелинейно упругой двухслойной среды, находящейся между двумя жесткими плитами, сближающимися с постоянным ускорением вдоль оси OY; позволила найти границу между упругими и пластическими областями при кручении многослойного стержня и двухслойного стержня, ослабленного отверстиями; позволила решить задачу о напряженном состоянии упруго-пластической консоли, армированной упругими волокнами.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук

1. Савостьянова, И. Л. Законы сохранения и решения первой краевой задачи для двумерных и трехмерных уравнений теории упругости / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Сибирский журнал индустриальной математики. 2024. Т. 27. № 1, С. 100 – 111.

   Senashov S.I., Savostyanova I.L. Conservation laws and solutions of the first boundary value problem for the equations of two- and three-dimensional elasticity // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2024. T. 18. № 2. C. 333 - 343.

2. Савостьянова, И.Л. Напряженное состояние композитной консоли / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Композиты и наноструктуры. 2024. С. 56 – 61.

3. Савостьянова, И.Л. Упругое кручение двухслойного стержня с коробчатым сечением / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова, А.Ю. Власов // Прикладная механика и техническая физика. 2024 Т. 65. № 3 (385). С. 161 – 168. DOI: 10.15372/PMTF202315404

4. Савостьянова И.Л. Решение задачи о сжатии двухслойного нелинейного материала / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т 64. № 4 (380) С. 184 – 187.

Senashov S.I., Savostyanova I.L. Solution of the problem of compression of a two-layer nonlinear material // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics 64(4):712-714, DOI: 10.1134/S002189442304017X October 2023

5. Savostyanova, I.L. Elasto-plastic twisting of a two-layer rod weakened by holes / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova, O.N. Cherepanova // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2023. Т. 16. № 5. С. 591 – 597.

6. Савостьянова, И.Л. Использование законов сохранения для решения краевых задач системы Моисила–Теодореску / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Сибирский журнал индустриальной математики. 2022. Т. 25. № 2 (90). С. 101 – 109.

Senashov S.I., Savostyanova I.L. Using Conservation Laws to Solve Boundary Value Problems for the Moisil–Theodoresco System // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 2, pp. 349 – 355. ISSN 1990-4789

7. Савостьянова, И.Л. Об упругом кручении вокруг трёх осей / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24. № 1 (85). С. 120 – 125.

Senashov S.I., Savostyanova I.L. About Elastic Torsion around Three Axes // Journal of Applied and Industrial Mathematics 15(1), pp. 141 – 145.

8. Savostyanova, I.L. The exact solutions of the equation describing antiplanet plastic flow // S.I. Senashov, I.L. Savostyanova // Lobachevsky Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 15. pp. 3741 – 3746.

9. Savostyanova, I.L. Anisotropic antiplane elastoplastic problem / S.I. Senashov, I.L. Savostyanova, O.N. Cherepanova // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2020. Т. 13. № 2. pp. 213 – 217.

10. Савостьянова, И.Л. Новые трехмерные пластические течения, соответствующие однородному напряженному состоянию / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22. № 3 (79). С. 114 – 117.

Senashov S.I., Savostyanova I.L. New Three-Dimensional Plastic Flows Corresponding to a Homogeneous Stress State // Journal of Applied and Industrial Mathematics. vol.13, 2019, pp. 536 – 538.

11. Savostyanova, I.L. Elastoplastic Bending of the Console with Transverse Force // S.I. Senashov, I.L. Savostyanova, O.N. Cherepanova // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019,12(5), pp. 637 – 643.

12. Савостьянова, И.Л. Новые решения динамических уравнений идеальной пластичности / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22. № 4 (80). С. 89 – 94.

Senashov S. I., Savostyanova I. L. New Solutions of Dynamical Equations of Ideal Plasticity // Journal of Applied and Industrial Mathematics, Volume 13, Issue 4, 2019, pp. 1 – 7.

13. Savostyanova, I.L Solution of Boundary Value Problems of Plasticity with the Use of Conservation Laws / Senashov S.I., Cherepanova O.N., I.L. Savostyanova // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2018. Т. 11, № 3, pp. 356 – 363.

14. Савостьянова, И.Л. Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. №1(59). С. 107 – 114. DOI: 1037972/chgpu.2024.59.1.006 EDN: EBWYKU

15. Савостьянова, И.Л. Упруго-пластическое кручение многослойного стержня // С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 2 (56). С. 28 – 35.

16. Савостьянова, И.Л. Решения задачи Дирихле для уравнений асимметричной теории упругости / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. №2 (52). С. 36 – 41. DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.004

17. Савостьянова, И.Л. Упругопластическая задача в условиях сложного сдвига / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1 (43). С. 66 – 72.

18. Савостьянова, И.Л. Точные решения уравнений анизотропной теории пластичности / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 1 (39). С. 32 – 35.

19. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. О предельном состоянии анизотропных деформируемых тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева серия: Механика предельного состояния. 2017. №4(34) С. 87 – 96.

20. Савостьянова, И.Л. Упругое состояние пластины с отверстиями произвольной формы / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Вестник

Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 128 – 133.

Публикации в других изданиях

21. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л., Черепанова О.В., Лукьянов С.В. Один класс решений уравнений идеальной пластичности // Сибирский аэрокосмический журнал. 2024. Т. 25. № 2. С. 182 – 188.

22. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Яхно А. Н. Изгиб композитного бруса // Сибирский аэрокосмический журнал. 2024. Т. 25, № 1. С. 25 – 32. DOI: 10.31772/2712-8970-2024-25-1-25-32.

23. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л., Лукьянов С.В. Упруго-пластическое кручение двухслойного стержня // Сибирский аэрокосмический журнал. 2023. Т. 24. № 1. С. 35 – 41.

24. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Законы сохранения и решения первой краевой задачи для уравнений двумерной теории упругости // Сибирский аэрокосмический журнал, 2022, том 23, №3, С. 417 - 422. DOI 10.31772/2712-8970-2022-23-417-422

25. Евтихов Д.О., Яхно А.Н., Савостьянова И.Л. О построении линий разрыва напряжений для двумерной пластической области // Сибирский аэрокосмический журнал, 2022. том 23, №3, С. 364 – 371.

26. Буренин А.А., Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Кручение призматических ортотропных упругопластических стержней // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т. 22. № 1. С. 8 – 17. DOI: 10.31772/2712-8970-2021-22-1-8-17

27. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л., Черепанова О.Н. Упругопластическая задача в случае неоднородной пластичности условиях сложного сдвига // Сибирский журнал науки и технологий. 2020. Т. 21. № 2. С. 201 – 205. DOI: 10.31772/2587-6066-2020-21-2-201-205

28. Senashov S.I., Savostyanova I.L., Cherepanova O.N. System analysis of dynamic problems of anisotropic plasticity theory // Сибирский журнал науки и технологий. 2019. Т. 20. № 3. С. 320 – 326. DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-3-320-326

29. Senashov S.I., Savostyanova I.L., Filyushina E.V. Use of conservation laws to solve the problem of load wave in an elastoplastic rod // Сибирский журнал науки и технологий. 2018. Т. 19. № 2. С. 272 – 232.

30. Senashov S.I., Savostyanova I.L., Filyushina E.V. About torsion of parallelepiped around three axis // Сибирский журнал науки и технологий. 2017. Т. 18. № 3. С. 545 - 550.

31. Senashov S.I., Gomonova O.V., Savostyanova I.L. Using conservation laws to solving the boundary value problems of deformable solid mechanics // Symmetry 2024 Conference Proceedings. (22-26 января 2024 г., Таиланд) 2024 (в печати)

32. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Напряженно-деформированное состояние неоднородной консоли // Решетневские чтения. Материалы XXVII Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. В 2-х частях. Красноярск, 2023. С. 641 – 642.

33. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. О решении задачи Коши для уравнений упругости в динамическом случае // Решетневские чтения. Материалы XXVII Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. В 2-х частях. Красноярск, 2023. С. 643 – 645.

34. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Упруго-пластическое кручение многослойного стержня // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. сборник тезисов докладов: в 4 т. Министерство науки и высшего образования РФ; Российская академия наук; Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. (21 – 25 августа 2023 г., г. Санкт-Петербург). С. 301 – 303.

35. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Новые решения, описывающее предельное состояние деформируемых тел // 28-ая Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, Красноярск, 10 - 15 июля, 2023 г. https://ptep.icm.krasn.ru/public/#/archive?pub_id=111

36. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л., Черепанова О.Н. Об упруго-пластическом кручении двухслойного стержня // 28-ая Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, Красноярск, 10 - 15 июля, 2023 г. https://ptep.icm.krasn.ru/public/#/archive?pub_id=112

37. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. О законах сохранения для решения задач механики деформируемого твердого тела // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. Минск, 2022. С. 163 – 167.

38. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Использование законов сохранения для решения задачи Коши уравнений динамической теории упругости // Решетневские чтения. Материалы XXVI Международной

научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева. Красноярск, 2022. С. 696 – 698.

39. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л., Черепанова О.Н. Групповые свойства уравнения, описывающего кручение упрочняющихся стержней // Решетневские чтения. Материалы XXV Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. В 2-х частях. Под общей редакцией Ю.Ю. Логинова. Красноярск, 2021. С. 619 – 622.

40. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Групповые свойства уравнений, описывающих упругое кручение круглых валов переменного диаметра // Решетневские чтения. Материалы XXV Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. В 2-х частях. Под общей редакцией Ю.Ю. Логинова. Красноярск, 2021. С. 617 – 618.

41. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. О построении трехмерных решений уравнений идеальной пластичности // Решетневские чтения: материалы XXIII междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева (10–13 нояб. 2020, г. Красноярск) / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; СибГУ им. М.Ф. Решетнева, Т.2. С. 513 – 514.

42. Савостьянова И.Л., Сенашов В.С. О построении линий разрыва напряжений при пластическом кручении стержня // Решетневские чтения: материалы XXIII междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева (10 – 13 нояб. 2020, г. Красноярск) / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; СибГУ им. М.Ф. Решетнева, Т.2. С. 512.

43. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л., Черепанова О.Н. Антиплоская упругопластическая задача для анизотропной и неоднородной среды // IX международная конференция лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, посвященная 120-летию академика М. А. Лаврентьева, (7 – 11 сентября 2020 г. Новосибирск), С. 215.

44. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Использование законов сохранения для решения задачи о течении вязкопластической жидкости // Решетневские чтения: материалы XXII междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева (11 – 15 нояб. 2019, г. Красноярск) / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; СибГУ им. М.Ф. Решетнева. С . 616.

45. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Метод решения динамических уравнений идеальной пластичности // Решетневские чтения: материалы XXII междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева (11 – 15 нояб. 2019, г. Красноярск) / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; СибГУ им. М.Ф. Решетнева. С 617 – 618.

46. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л., Гомонова О.В. Построение упругопластической границы в задаче о растяжении пластинки, ослабленной отверстиями с условием текучести общего вида // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (19-24 августа 2019 года г. Уфа). С. 373 – 375.

47. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Трехмерные пластические течения, соответствующие однородному напряженному состоянию // Решетневские чтения: материалы XXII междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева (12 – 16 нояб. 2018, г. Красноярск) / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова; СибГУ им. М.Ф. Решетнева Ч.1 С. 581 - 582.

48. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. О предельном состоянии деформируемых тел // VIII международная конференция по математическому моделированию. Тезисы докладов. Якутск, 04 – 08 июля 2017 г. С. 154.

49. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л., Филюшина Е.В. Точные решения уравнений идеальной пластичности в случае плоского напряженного состояния // Материалы XXI Международной научной конференции «Решетневские чтения», посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева. 2017. № 21 – 2. С. 31 - 32.

50. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Упругое состояние пластины с отверстиями произвольной формы // Материалы XX юбилейной Международной научной конференции «Решетневские чтения», посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева. 2016. Т. 2. № 20. С. 146 – 148.

51. Сенашов С.И., Филюшина Е.В., Савостьянова И.Л. Построение упруго – пластической границы для плоской упруго-пластической задачи с помощью законов сохранения // VIII международная конференция лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, посвященная 115-летию академика М. А. Лаврентьева, (7 – 11 сентября 2015 г. Новосибирск), С. 234.

52. Senashov S., Savostyanova I., Cherepanova O. Longitudinal shear waves in an elastic parallelepiped // Reshetnev Readings 2019. IOP Conf. Series:

Materials Science and Engineering 1230 (2022) 012017 IOP Publishing DOI:10.1088/1757-899X/1230/1/012017

53. Senashov S.I., Savostyanova I.L., Gomonova O.V., Cherepanova O.N. Symmetries and conservation laws in the theory of plasticity // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Reshetnev Readings 2018. 2020. С. 012030. DOI: 10.1088/1757-899X/822/1/012030

54. Senashov S.I., Savostyanova I.L. Hook's law as Lie group // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Reshetnev Readings 2018. 2020. С. 012031. DOI: 10.1088/1757-899X/822/1/012031

55. Senashov S., Savostyanova I. About the limit state of deformable bodies // 21st International scientific conference Reshetnev Reading-2017 IOP Pablishing / IOP Conf. Series Math. Science and Engineering 467 (2019) 012006 DOI: 10.1088/1757-899x/467/1/012006.

Моногорафии

56. Упруго-пластичность и законы сохранения. Монография / С.И. Сенашов, И.Л. Савостьянова. – СибГУ им. М.Ф. Решетнева, 2022. – 192 с. ISBN 978-5-86433-926-8.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

57. Евтихов Д.О., Савостьянова И.Л. Построение упруго-пластической границы для стержня, армируемого волокнами, под действием касательных напряжений. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024682116, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 18.09.2024.

58. Евтихов Д.О., Савостьянова И.Л. Построение характеристик задачи Коши для идеальной пластичности. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024612683, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 02.02.2024.

59. Кондрин А.В., Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Построение упруго-пластической границы при изгибе консоли прямоугольного сечения. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016660878, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 22.09.2016.

Подписано в печать ____________ Формат 60×90 1/16

Бумага _______. Печать _________. Гарнитура Times

Объем ____ усл. печ.л. Тираж ____ экз. Заказ № _____

Редакционно-издательский отдел СибГУ им. М. Ф. Решетнева.

660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31.

E-mail: rio@mail.sibsau.ru. Тел. (391) 291-90-96