

## **ОТЗЫВ**

официального оппонента Илларионова Андрея Анатольевича  
на диссертационную работу Цоя Георгия Ильича  
«Модифицированные методы двойственности для решения вариационных и  
квазивариационных неравенств механики»,  
представленную на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

### **1. Актуальность работы.**

Работа посвящена исследованию вариационных и квазивариационных неравенств эллиптического типа. Рассматриваются следующие задачи теории упругости: контактная задача с трением между упругим телом и абсолютно твёрдой опорой, задача с трещиной и условиями непроникания берегов трещины друг в друга, а также задача о равновесии упругого тела с отслоившимся жёстким включением. Эти задачи содержат ограничения-неравенства на искомое решение и допускают три эквивалентные математические постановки: 1) краевая задача для дифференциальных уравнений в частных производных, 2) задача условной минимизации функционала потенциальной энергии; 3) вариационное неравенство. Первые исследования по теории вариационных неравенств появились во второй половине XX века в работах Фикеры Г., Стампаки Г., Лионса Ж.Л. и их учеников. Среди отечественных учёных, внёсших вклад в развитие данного направления, можно отметить таких исследователей как: Мосолов П.П., Мясников В.П., Бердичевский В.Л., Уральцева Н.Н., Хлуднев А.М., Аннин Б.Д., Садовский В.М., Черепанов Г.П. и многих других. В настоящее время теория вариационных неравенств находится в стадии активного развития и представляет интерес как с практической, так и теоретической точки зрения.

Актуальность представленной диссертационной работы заключается в построении и исследовании новых схем двойственности, основанных на использовании модифицированных функционалов Лагранжа, для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики. В работе показывается, что предложенные модифицированные методы двойственности обладают рядом преимуществ по сравнению с их классическими аналогами. Они позволяют решать, как коэрцитивные, так и полукоэрцитивные вариационные неравенства. Для модифицированных методов удается доказать сходимость к седловой точке итерационного процесса по прямой и двойственным переменным. Кроме того, в ряде случаев модифицированные методы двойственности являются более эффективными с вычислительной точки зрения, нежели их классические аналоги.

### **2. Структура и содержание диссертации.**

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы из 120 наименований, списка иллюстративного материала, включающего 26 рисунков и 6 таблиц, приложения. Объем работы составляет 108 страниц машинописного текста.

Во введении\_приводится обзор литературы, указываются цели и задачи исследования, а также описывается структура диссертации.

Первая глава посвящена исследованию квазивариационного неравенства Синьорини, описывающего задачу о контакте между упругим телом и абсолютно твёрдой опорой с трением, заданным по закону Кулона. Для решения неравенства используется метод последовательных приближений. Приводится алгоритм поиска седловой точки модифицированного функционала Лагранжа, основанный на комбинации алгоритма Удзавы и итеративной прох-регуляризации, обеспечивающей сильную выпуклость минимизируемых функционалов во вспомогательных задачах. В конце главы даётся описание алгоритма численного решения задачи (на основе МКЭ) и приводятся результаты численного счёта.

Во второй главе рассматривается нелинейная задача о равновесии упругого тела с трещиной, в которой на берегах трещины ставятся условия вида неравенств, обеспечивающие требование взаимного непроникания берегов (трещины). Сначала исследуется двумерная краевые задачи с трещиной внутри упругого тела, а также с трещиной, выходящей на внешнюю границу под ненулевым углом. Строится и обосновывается общая схема двойственности. Доказывается основное равенство двойственности. Для решения задачи минимизации кусочно-квадратичного функционала, получаемого после дискретизации задачи с помощью МКЭ, используются метод покоординатного спуска и обобщенный метод Ньютона. Приводятся результаты численного счёта и сравнение методов. Далее рассматривается трехмерная задача. На ее примере сравнивается предложенный в работе модифицированный метод двойственности и его классический аналог. Если в модифицированном методе двойственности реализуется чисто градиентный метод, то в классическом алгоритме применяется метод проекции градиента. Указанное обстоятельство обеспечивает лучшую сходимость модифицированного метода по сравнению с классическим.

В третьей главе исследуется контактная задача теории упругости с отслоившимся жёстким включением. Приводится итеративный метод решения с малым параметром, позволяющий рассматривать задачу с отслоившимся жёстким включением как предельную для семейства задач о равновесии упругих тел с трещиной. Для решения задачи с фиксированным малым параметром применяется схема двойственности, рассмотренная ранее в главе 1. Приводятся результаты численного решения задачи.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы.

В приложении приводится код программы для решения задачи с трещиной.

### **3. Достоверность и степень обоснованности научных результатов**

Основные результаты по теме диссертации представлены в 14 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 6 - в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Автором получено два свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ. Диссертационная работа также была апробирована на всероссийских и международных конференциях.

#### **4. Оценка научной новизны.**

Уровень научных результатов диссертации является достаточно высоким. В работе впервые применены модифицированные функционалы Лагранжа для решения вариационных неравенств механики. Предложена и теоретически обоснована схема двойственности, основанная на модифицированных функционалах Лагранжа, для решения задач теории упругости с трещиной и с условиями взаимного непроникания берегов трещины. Исследована и решена упругая задача с отслоившимся жёстким объёмным включением. Построены и обоснованы численные методы и комплексы программ для решения исследованных в работе задач. Приведен численный анализ результатов.

#### **5. Практическая и теоретическая значимость работы.**

Теоретическая значимость работы заключается в построении и развитии новых методов двойственности для решения вариационных и квазивариационных задач механики. Схемы двойственности, предложенные в работе, позволяют конструировать устойчивые методы поиска седловых точек функционала Лагранжа.

Практическая значимость результатов заключается в создании комплекса программ с использованием технологий параллельного программирования на GPU, которое может быть использовано при решении прикладных задач.

#### **6. Оценка изложения материалов диссертации и автореферата.**

Диссертация хорошо оформлена. Автореферат достаточно полно отражает содержание диссертации.

#### **7. Замечания по диссертации.**

1. Существование решения квазивариационного неравенства можно доказать только при малых коэффициентах трения и обоснование существования решения существенно опирается на слабую форму теоремы Шаудера о неподвижной точке. Однако в диссертации используется только алгоритм поиска неподвижной точки без обсуждения самой теоремы.

2. В пункте 1.5 рассматривается модифицированный функционал Лагранжа с двумя множителями, позволяющий сгладить недифференцируемое слагаемое целевого функционала задачи. Однако обоснование сглаживания дано слишком кратко и требует более детального описания.

3. В работе имеется ряд орфографических ошибок, например, на стр. 76 в слове «пооординатного».

4. Работа содержит одно приложение, содержащее исходный код программы, а не два, как указано во введении.

#### **8. Заключение.**

Диссертация Цоя Г.И. «Модифицированные методы двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики» является законченной научно-исследовательской работой, в которой построены устойчивые

методы поиска седловых точек функционала Лагранжа в вариационных неравенствах механики.

Тематика и результаты выполненных в диссертации исследований соответствуют паспорту специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Представленная диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ «О порядке присуждения ученых степеней» от 24 сентября 2013 г. № 842, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор, Цой Георгий Ильич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Официальный оппонент  Илларионов Андрей Анатольевич

«11» 10 2019 г.

Илларионов Андрей Анатольевич, главный научный сотрудник, доктор физико-математических наук.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН».

680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54,

тел. +7 (4212) 32-46-76

e-mail: [illar\\_a@list.ru](mailto:illar_a@list.ru).

