

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КОМСОМОЛЬСКИЙ-НА-АМУРЕ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

КАНАШИН Илья Валерьевич

**ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЛЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ С
УЧЕТОМ НАЛИЧИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ЛИНИЙ РАЗРЫВА
СКОРОСТЕЙ**

1.1.8. – механика деформируемого твёрдого тела

Д и с с е р т а ц и я

На соискание ученой степени

Кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

к. ф.–м. н., доцент А. Л. Григорьева

Консультант

д. ф.–м. н., профессор А. И. Хромов

Комсомольск-на-Амуре

2025

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1 Основные положения теории жесткопластического тела.....	16
1.1 Деформационно-энергетический подход к описанию малоцикловой усталости материалов	16
1.2 Уравнения плоской деформации.....	23
1.3 Уравнения плоского напряжённого состояния.....	29
1.4 Деформационные состояния сжимаемых жесткопластических тел.....	36
Глава 2 Задачи о растяжении и разрушении полосы в условиях плоской деформации	42
2.1 Растяжение и сжатие полосы.....	42
2.2 Накопление деформаций в полосе при последовательном растяжении-сжатии в условиях плоской деформации	54
2.3 Растяжение плоского образца с разрывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации с учётом сжимаемости материала	61
2.3.1 Решение Оната-Прагера	61
2.3.2 Определение поля деформаций в окрестности поверхности разрыва скоростей.....	64
2.3.3 Неединственность решения задачи о растяжении полосы с разрывным полем скоростей перемещений.....	69
2.3.4 Растяжение полосы с разрушением	80
2.3.5 Определение констант разрушения на основе испытаний плоских образцов	84
Глава 3 Задачи о растяжении полосы в условиях плоского напряженного состояния	91

3.1 Растяжение полосы в условиях плоского напряжённого состояния	92
3.2 Сжатие полосы в условиях плоского напряжённого состояния	102
3.3 Накопление деформаций в полосе при последовательном растяжении-сжатии в условиях плоского напряжённого состояния	108
Глава 4 Задачи о внедрении жёстких штампов.....	115
4.1 Вдавливание клина в выпуклое тело	115
4.2 Сжатие выпуклого тела плоским штампом.....	132
4.3 Вдавливание клина с ограниченной поверхностью контакта	145
4.4 Контактная задача	154
Заключение	163
Список литературы	165
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	176
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	184

Введение

Актуальность темы. Работа посвящена жесткопластическому анализу полей деформаций в ряде контактных и бесконтактных задач. Задачи об одноосном деформировании плоского образца связаны с малоцикловой усталостью, в связи с чем при их решении используется условие сжимаемости материала. Основной задачей исследований малоцикловой усталости является изучение поведения материалов при возникновении в них под действием экстремальных переменных механических и тепловых нагрузок местных циклических пластических деформаций, приводящих к накоплению повреждений, при малоцикловом нагружении с числом циклов, варьирующимся в диапазоне от 1 до $5 \cdot 10^4$. Нагрузки такого рода испытывают материалы в энергоустановках, летательных аппаратах (в частности в авиационных двигателях), турбомашинах, сосудах давления, сварных конструкциях, узлах разъёмных соединений. Определение поведения материалов в реальных условиях эксплуатации под воздействием переменных нагрузок значительной интенсивности при напряжениях, которые могут превышать предел текучести, является одной из основных задач в обеспечении прочности и долговечности современных машин, механизмов и конструкций.

Задачи о внедрении жестких штампов, решённые с учётом коэффициента трения, связаны с процессами обработки материалов давлением. Это – комплекс технологических процессов, применяемых для формоизменения металлических заготовок в результате их пластической деформации без нарушения сплошности. Современные технологические процессы обработки металлов давлением применяются на металлургических и машиностроительных предприятиях в качестве окончательной операции при изготовлении различных деталей, а также для изготовления поковок, штамповок, профилей, труб, прутков, проволоки.

Одна из основных задач механики деформируемого твёрдого тела заключается в построении моделей и алгоритмов расчёта конструкций и технологических процессов при больших пластических деформациях с учётом

разрушения. Для этого применяются различные подходы, один из которых включает использование теории пластического течения.

Теория пластического течения является одним из фундаментальных направлений механики деформируемого твёрдого тела. Основные положения теории позволяют описывать поведение материалов при различных напряжённых состояниях в условиях пластического деформирования с учётом изменения геометрии деформируемого тела. В качестве меры деформаций при этом возможно использование тензоров конечных деформаций. Среди моделей пластических тел, используемых для описания поведения реальных материалов, могут быть выделены модели: упругопластического тела (упругие и пластические деформации полагаются одного порядка); упрочняющегося жёсткопластического тела (учитывается повышение предела текучести при повторном нагружении); идеального жёсткопластического тела (не учитывает упругие деформации в виду их малости по сравнению с пластическими). Модель идеального жёсткопластического тела является предельной по отношению по отношению к другим более сложным моделям деформируемых сред [58].

Степень разработки темы. Фундаментальные соотношения теории пластического течения и пластические аспекты механики разрушения разрабатывались и развивались А. Надаи [46], Ю. Работновым [59, 60], Р. Хиллом [72], Л. М. Качановым [31, 32], А. Ю. Ишлинским [29], Д. Д. Ивлевым [27, 28, 30, 57], В. В. Соколовским [68], Г. И. Быковцевым [8], А. И. Хромовым [73, 88], Ю. Н. Радаевым [61, 62], Р. И. Непершиным [22], Ю. В. Немировским [47], Б. Д. Анниным [2], Г. П. Черепановым [3, 92], С. И. Сенашовым [16, 66], Дж. Райсом [63], Ф. Мак-Клинтоком [39], Дж. Ф. Ноттом [48], Д. Броеком [6], Е. М. Морозовым [49 – 51], Ю. Г. Матвиенко [40], Н. Ф. Морозовым [45], Р. В. Гольдштейном [15], В. Г. Зубчаниновым [25, 26], Б. Полем [58, 64], К. Хелланом [70].

Основное направление исследований в механике разрушения – процессы распространения трещин. Данное направление включает линейную и квазилинейную механику разрушения (теория Гриффитса и теория,

учитывающая поправку Ирвина на пластические деформации), а также изложенные в большом количестве работ [3, 6, 10, 40, 48, 50, 51, 70, 92, 95] нелинейные процессы распространения трещин (критерий раскрытия трещины, инвариантный интеграл Черепанова – Райса). При достаточно больших размерах пластической области в случае нарушения соотношений линейной механики разрушения может использоваться нелинейная модель Леонова – Панасюка – Дагдейла для плоского напряжённого состояния или инвариантный J – интеграл.

В соответствие с гипотезой С. В. Серенсена [56, 67] зарождение трещины связано с исчерпанием пластичности и достижением материалом предельного состояния, при котором пластическое течение невозможно без нарушения сплошности. Способы описания предельного состояния рассматривались в работах [14, 52, 53, 55]. Возможность описания предельных состояний угловыми точками поверхности нагружения рассматривается в работах Д. Д. Ивлева и его коллег [8, 27, 28, 30, 57, 61]. В работах Г. С. Писаренко, И. И. Гольденבלата, Г. А. Гениева [12, 14, 52, 53] предельное состояние описывается замкнутым криволинейным треугольником с тремя осями симметрии в девиаторной плоскости пространства главных напряжений.

Существуют аналитические решения задач об одноосном растяжении-сжатии плоских и цилиндрических образцов [73, 88], полученные в рамках модели идеального жёсткопластического тела, одним из основных положений которой является условие несжимаемости материала

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

Однако для возможности описания предельных состояний, упрочняющихся жёсткопластических тел необходимо введение поверхности деформационных состояний [38], для которой для которой необходим учёт изменения плотности материала с течением времени. Этим обуславливается то, что в работе при решении задач об одноосном растяжении-сжатии плоских образцов использовалось условие сжимаемости материала.

Цель и задачи диссертационного исследования. Целью диссертационной работы является математическое моделирование полей

тензоров деформаций в пластических течениях в контактных и бесконтактных задачах в условиях однократного и многократного нагружения в рамках модели жесткопластического тела.

Для достижения указанной цели поставлены следующие **задачи**:

- изучение теоретического материала в области теории пластического течения;
- аналитическое решение задач о растяжении и разрушении полосы при условии сжимаемости материала в условиях плоской деформации: задачи о растяжении-сжатии полосы с непрерывным полем скоростей перемещений, задачи о растяжении и разрушении полосы с разрывным полем скоростей перемещений;
- аналитическое решение задачи о растяжении-сжатии полосы с непрерывным полем скоростей перемещений при условии сжимаемости материала в условиях плоского напряжённого состояния;
- решение задач о внедрении жёстких штампов с учётом коэффициента трения: задачи о вдавливании клина в выпуклое тело, задачи о сжатии выпуклого тела плоским штампом, задачи о вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта в выпуклое тело, задачи о сжатии двух симметричных выпуклых жёсткопластических тел;
- создание программного продукта для определения количества полуциклов нагружения до зарождения в материале трещины и определения основных параметров процесса малоциклового нагружения образца в условиях плоской деформации;
- создание программного продукта для вычисления констант разрушения и параметров образца при его растяжении в условиях плоской деформации.

Для решения поставленных задач использовались следующие методы исследования: эмпирические (изучение литературы), аналитические (решение задач о: растяжении, сжатии и последовательном растяжении-сжатии полосы, о вдавливании клина в выпуклое тело, о сжатии выпуклого тела плоским штампом, о вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта, о сжатии двух

симметричных выпуклых жёсткопластических тел), численные (определение размеров полосы в момент образования макротрещины, вычисление длительности полуцикла при малоцикловом нагружении с одинаковым размахом деформаций, решение систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в задачах о внедрении жёстких штампов).

Научная новизна работы заключается в следующем:

- исследованы поля тензоров деформаций в задачах о растяжении, сжатии и последовательном растяжении-сжатии полосы с непрерывным полем скоростей перемещений с учётом сжимаемости материала в условиях плоской деформации и плоского напряжённого состояния;
- исследованы поля тензоров деформаций в задаче о растяжении полосы с разрывным полем скоростей перемещений с учётом сжимаемости материала в условиях плоской деформации;
- создан программный продукт для определения количества полуциклов нагружения до зарождения в материале трещины и вычисления основных параметров процесса малоциклового деформирования полосы с использованием средств C# 10.0;
- создан программный продукт для нахождения констант разрушения и параметров образца при его растяжении в условиях плоской деформации с использованием средств C# 10.0;
- получены аналитические и численные решения задач о внедрении жёстких штампов с учётом коэффициента трения: задачи о вдавливании клина в выпуклое тело, задачи о сжатии выпуклого тела плоским штампом, задачи о вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта в выпуклое тело, задачи о сжатии двух симметричных выпуклых жёсткопластических тел.

Основные положения, выносимые на защиту:

- соотношения для определения пластических деформаций в задачах об одноосном деформировании плоского образца с непрерывным полем скоростей перемещений с учётом сжимаемости материала в условиях плоской деформации и плоского напряжённого состояния;

- соотношения для определения пластических деформаций в задаче о растяжении полосы с разрывным полем скоростей перемещений с учётом сжимаемости материала в условиях плоской деформации;
- результаты решения задач об одноосном деформировании плоского образца с непрерывным полем скоростей перемещений и определения констант разрушения и параметров полосы при её растяжении в условиях плоской деформации с использованием созданных программных продуктов;
- соотношения для построения пластической области, формы деформированной поверхности, определения необходимой нагрузки и деформаций в окрестностях особенностей поля линий скольжения в задачах о внедрении жёстких штампов с учётом коэффициента трения: о вдавливании клина в выпуклое тело, о сжатии выпуклого тела плоским штампом, о вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта, о сжатии двух симметричных выпуклых жёсткопластических тел.

Теоретическая значимость результатов диссертационной работы. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для дальнейших исследований полей деформаций в задачах об одноосном деформировании образцов с учётом условия сжимаемости материала.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования полученных в ходе исследования результатов при построении математических моделей поведения реальных элементов конструкций в задачах современного машиностроения и строительства; при расчетах, связанных с определением несущих способностей конструкций различного назначения; при проектировании оборудования используемого в процессах обработки материалов давлением.

Достоверность полученных результатов основана на классических подходах механики сплошных сред и строгих математических выкладках. Достоверность аналитического решения задач подтверждается результатами экспериментов, проведённых с помощью разработанного программного продукта.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на:

- II Всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований», Комсомольск-на-Амуре, 2019 г;
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 2019 г;
- III Всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований», Комсомольск-на-Амуре, 2020 г;
- I Международной научно-практической конференции молодых учёных «Актуальные проблемы информационно-телекоммуникационных технологий и математического моделирования в современной науке и промышленности», Комсомольск-на-Амуре, 2021 г;
- Международной научно-практической конференции «Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению», 2022 г;
- V Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных «Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований», 2022 г;
- II Международной научно-практической конференции молодых учёных «Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению», 2022 г;
- VI Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных «Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований», 2023 г;
- Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных «Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению», 2023 г;
- VII Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных «Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований», 2024 г;

- III научной конференции с международным участием «Вычислительные технологии и прикладная математика», 2024 г;
- III Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных «Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению», 2024 г;
- VIII Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных «Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований», 2025 г.

Получены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:

- «Определение основных параметров малоциклового нагружения металлических материалов» №RU2022662149, 2022;
- «Определение параметров малоциклового нагружения плоских образцов из металлических материалов» №RU2024661090, 2024;
- «Определение констант разрушения на основе испытаний плоских образцов» №RU2024661413, 2024.

Публикации. Основные результаты исследования и содержание диссертационной работы опубликованы в 7 печатных работах, из них 7 рекомендованы ВАК РФ для публикации основных научных результатов диссертаций, 1 – в изданиях, индексируемых в Web of Science и Scopus.

Личный вклад автора. Все аналитические выкладки и численные результаты, составившие предмет диссертации, получены автором лично. Научным руководителем (А. Л. Григорьева) была определена тема диссертации. Соавторы публикаций (А. И. Хромов, А. Л. Григорьева) участвовали в постановке решаемых задач и обсуждении полученных автором результатов. Автор выражает благодарность соавторам своих публикаций за внимание к работе, ценные советы и замечания.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы, содержащего 104 источника, одного приложения. Объём работы составляет 184 страницы. В работе содержится 78 рисунков.

Во введении раскрывается актуальность темы, обосновывается необходимость проведения работы, определяются цели, задачи, объект и предмет исследования, указываются научная новизна, практическая значимость, достоверность и обоснованность результатов исследования.

В первой главе приводятся основные сведения о малоцикловом нагружении, описываются положения деформационно-энергетического подхода к малоцикловой усталости материалов; рассматриваются основные соотношения пластической деформации и плоского напряжённого состояния, используемые для решения поставленных задач; описывается определение поверхностей деформационных состояний для сжимаемых жёсткопластических тел.

Во второй главе приводится аналитическое решение задач о растяжении, сжатии и последовательном растяжении-сжатии полосы с непрерывным полем скоростей перемещений с учётом сжимаемости материала в условиях плоской деформации. Описывается нахождение полей скоростей, инвариантов и главных значений тензора конечных деформаций Альманси, изменения ширины полосы с течением времени, а также необходимого для её деформирования усилия. В задаче о последовательном растяжении-сжатии полосы находятся траектории частиц материала, на основе чего предлагается использовать объёмную плотность диссипации энергии в качестве критерия изменения структуры материала.

Также приводится аналитическое решение задачи о растяжении полосы с разрывным полем скоростей перемещений с учётом сжимаемости материала в условиях плоской деформации. Рассматривается решение Оната – Прагера при учёте сжимаемости материала. Описывается определение поля деформаций в окрестности разрыва скоростей, находится изменение градиентов деформаций при пересечении линии разрыва скоростей, инварианты и главные значения тензора деформаций Альманси, угол между первым главным направлением тензора Альманси и касательной к линии разрыва. Рассматриваются возможные несимметричные течения, растяжение полосы с разрушением, определяется скорость движения вершины трещины и усилие, необходимое для

деформирования полосы. Приводятся упрощённая и полная схемы определения констант разрушения при растяжении полосы, находится изменение градиентов деформаций при пересечении линии разрыва скоростей если материал до этого деформировался.

В третьей главе приводится аналитическое решение задач о растяжении, сжатии и последовательном растяжении-сжатии полосы с непрерывным полем скоростей перемещений с учётом сжимаемости материала в условиях плоского напряжённого состояния. Также, как и в задачах в условиях плоской деформации описывается нахождение полей скоростей, инвариантов и главных значений тензора конечных деформаций Альманси, изменения ширины полосы с течением времени и необходимого для её деформирования усилия. В задаче о последовательном растяжении-сжатии полосы находятся траектории частиц материала, в качестве критерия изменения структуры материала также предлагается использовать объёмную плотность диссипации энергии.

В четвёртой главе приводится аналитическое решение задачи о вдавливании клина с углом раствора 2θ в выпуклую заготовку криволинейной формы с учётом трения. Выводятся: система уравнений, позволяющая определить параметры, необходимые для построения жёсткопластической области и расчёта необходимого для внедрения клина усилия; соотношения для расчёта деформаций на линии разрыва скоростей перемещений и в окрестности центра веера характеристик. Также приводятся результаты решения задач о внедрении клина $y = |x|\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{6})$ в клин $y = -|x|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{8})$ с коэффициентом трения 0.20 и вдавливании клина $y = |x|\operatorname{ctg}(\theta)$ с углом раствора $22^{\circ}31'2''$ в гиперболический цилиндр $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$ с коэффициентом трения 0.12. Приводится аналитическое решение задачи о сжатии выпуклого тела плоским штампом по схеме Хилла и схеме Прандтля с учётом трения. Представлены результаты численного решения задачи о сжатии гиперболического цилиндра $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$ по схемам Хилла и Прандтля. Рассматривается аналитическое решение задачи о вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта с

учётом трения. Представлены результаты решения задачи о деформации полупространства при внедрении клина шириной $h = 1$, с углом раствора $\theta = \frac{\pi}{6}$ и коэффициентом трения 0.20, вдавливании клина с углом раствора $22^\circ 31' 2''$ и шириной $h = 0.2$ в гиперболический цилиндр $y = \sqrt{2 - \sqrt{x^2 + 2}}$. Рассматривается аналитическое решение первого этапа задачи о сжатии двух симметричных выпуклых жёсткопластических тел. Приводится численное решение задачи о деформации жёсткопластического полупространства при внедрении в него абсолютно шероховатого цилиндра радиуса $r = 1$.

В заключении подводятся итоги исследования.

Публикации по теме исследования:

– Канашин, И. В. Растяжение сжимаемой полосы с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации / И. В. Канашин, А. Л. Григорьева, А. И. Хромов, Я. Ю. Григорьев, В. А. Машевский // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2021. – № III-1(51). – С. 39-41;

– Григорьева, А. Л. Моделирование деформационных процессов элементов сложных конструкций в условиях малоциклового деформации / А. Л. Григорьева, Я. Ю. Григорьев, А. И. Хромов, И. В. Канашин // Морские интеллектуальные технологии. – 2021. – Т. 2 № 2(52). – С. 123-128;

– Григорьев, Я. Ю. Математическая модель процесса деформирования элементов, изготовленных из конструкционных материалов с использованием машинного обучения / Я. Ю. Григорьев, А. Л. Григорьева, И. В. Канашин, А. Н. Петрова, А. И. Хромов // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2022. – № I-1(57). – С. 15-23;

– Канашин, И. В. Растяжение полосы сжимаемого материала с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации / И. В. Канашин, А. Л. Григорьева, А. И. Хромов, Я. Ю. Григорьев // Труды МАИ. – 2022. – № 124;

– Канашин, И. В. Моделирование процесса деформирования экспериментального образца при условии малоциклового нагружения / И. В. Канашин, А. И. Хромов, Я. Ю. Григорьев, А. Л. Григорьева // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2022. – № V-1(61). – С. 26-31;

– Канашин, И. В. Малоцикловое нагружение плоского образца с непрерывным полем скоростей перемещений при учёте условия сжимаемости материала / И. В. Канашин, А. Л. Григорьева, А. И. Хромов, Я. Ю. Григорьев // Труды МАИ. – 2023. – № 130;

– Григорьев, Я. Ю. Математическая модель задачи о вдавливании клина в выпуклую заготовку / Я. Ю. Григорьев, А. Л. Григорьева, И. В. Канашин // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2025. – № III(83). – С. 117-126.

В работе принята тройная нумерация формул: первая цифра – номер главы, вторая – номер пункта; двойная нумерация рисунков: первая цифра – номер главы.

Глава 1 Основные положения теории жесткопластического тела

1.1 Деформационно-энергетический подход к описанию малоциклового усталости материалов

Деформационно-энергетический подход является обобщением на общие пространственные процессы деформирования (в том числе деформирование с произвольной формой цикла) классического подхода, используемого при оценке малоциклового усталости материалов.

Малоцикловая усталость описывается формулой Коффина-Мэнсона [54, 94, 100]:

$$\varepsilon_p N^m = M, \quad (1.1.1)$$

где ε_p – ширина петли гистерезиса; N – число циклов нагружения; m , M – константы материала. С. Фелтнером и Дж. Морроу [96] была предложена следующая интерпретация формулы (1.1.1): критерием разрушения является достижение суммарной энергией, рассеиваемой в единице объема материала определенной критической величины, что происходит вследствие наличия необратимых пластических деформаций,

$$\sum_{N=1}^{N_p} W_N = W_c. \quad (1.1.2)$$

Здесь N_p – число циклов до разрушения; W_N – энергия, рассеиваемая в единице объема материала в N -м цикле нагружения; W_c – критическая величина энергии, которая равна энергии разрушения при статическом разрыве.

Согласно работе [54] суммарную энергию в единице объёма материала нельзя принимать в качестве критерия разрушения при многократном упругопластическом деформировании.

Позднее Д. Мартином [101] было выдвинуто предположение, что мерой усталостных повреждений является только та часть энергии, которая связана с процессами упрочнения. На рисунке 1.1 ей соответствуют заштрихованные площади, обозначающие энергию W_N^h .

Работа, затраченная на повреждение материала в цикле [54] определяется зависимостью от угла наклона линии упрочнения α :

$$W_N = tg\alpha\Delta\varepsilon_p^2. \quad (1.1.3)$$

Тогда работу за N циклов можно найти по формуле:

$$\sum_1^N W_N = tg\alpha\Delta\varepsilon_p^2 N. \quad (1.1.4)$$

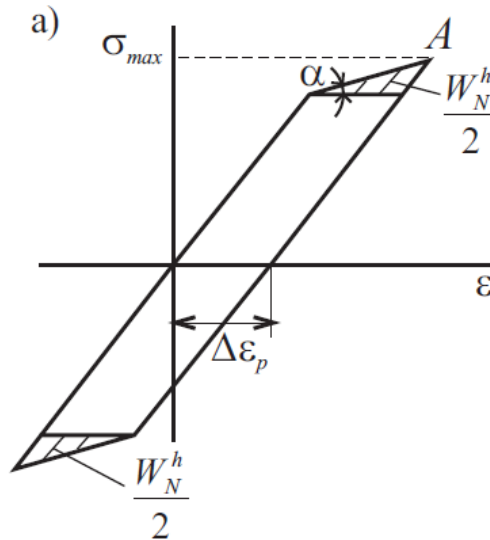


Рисунок 1.1 – Энергия пластической деформации, связанная с процессами упрочнения (заштрихованные области) в цикле

Вследствие того, что разрушение наступает при некотором критическом значении величины повреждений, из формулы (1.1.4) можно определить циклическую долговечность материала:

$$tg\alpha\Delta\varepsilon_p^2 N_p = W_{**}, \quad (1.1.5)$$

где N_p – число циклов, необходимых для зарождения трещины.

В соответствии с трактовкой Фелтнера – Морроу – Мартина:

$$W_c^h = W_{**}$$

и формула (1.1.5) может выступать в качестве энергетического критерия достижения материалом предельного состояния.

В предположении равенства работы при статическом разрушении и полной работы повреждения, когда

$$N_p = 0,5, \Delta\varepsilon_p = \varepsilon_B, W_{**} = 0,5tg\alpha\delta_B^2,$$

что формула для определения долговечности материала, в соответствии с (1.1.5), примет вид

$$N_p^{0,5}\Delta\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_B}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{tg\alpha}W_{**}. \quad (1.1.6)$$

При нелинейном законе формула принимает общий вид:

$$\Delta\varepsilon_p N^m = M(W_{**}). \quad (1.1.7)$$

Согласно соотношению (1.1.2) процесс доведения до критического состояния материала образца при его нагружении в жёстком циклическом режиме имеет следующую трактовку (рис. 1.2): в каждом следующем цикле нагружения точка, соответствующая предельному состоянию точка (B') согласно энергии гистерезиса смещается по диаграмме $\sigma - \varepsilon$ левее относительно положения в предшествующем цикле (точка B). Материал достигает предельного состояния (состояния предразрушения) при достижении определённого деформированного состояния в цикле, которому на рис. 1.2 соответствует точка A . На девиаторной плоскости (рис. 1.3) предельному состоянию материала соответствует множество точек определённой линии m_* .

В соотношении (1.1.2) величиной W_c определяется только предельное состояние материала, и его разрушение, не рассматривается. Для разрушения материала, то есть образования новых свободных поверхностей необходимо сообщить дополнительную энергию W_* (совершить «долом» материала).

Разрушение материала [54], происходящее после определённого числа циклов нагружения связано с предельным деформационным упрочнением, то есть с исчерпанием пластичности вследствие накопления деформаций. Поэтому предельное состояние связывается с предельным упрочнением материала, а также с соответствующим положением поверхности нагружения.

В соотношении (1.1.2) нет упругих констант и, следовательно, при расчете критической величины рассеяния энергии W_c можно ограничиться

рассмотрением упрочняющегося жёсткопластического тела. Считается [44], что учитывать упругую деформацию обязательно при долговечностях больших $1 \cdot 10^5$, в интервале долговечностей меньших $1 \cdot 10^3$ циклов упругую деформацию оправданно не учитывать. Процессы деформирования и разрушения плоских и цилиндрических образцов в этой постановке изложены в работах [79, 88].

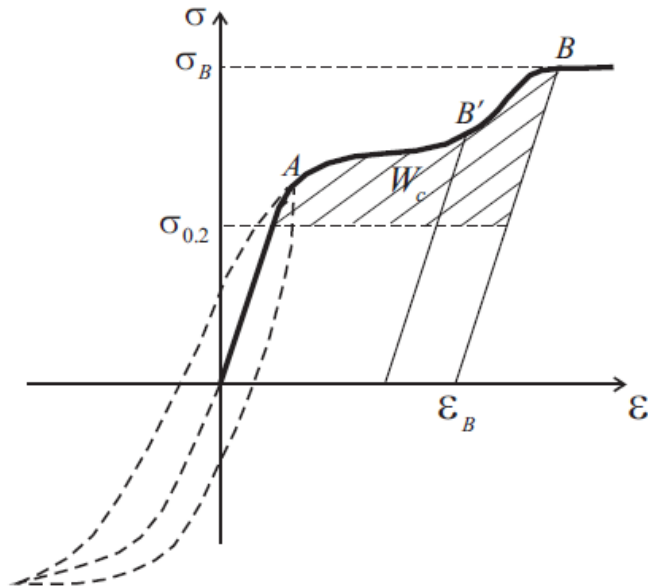


Рисунок 1.2 – Энергия пластической деформации, связанная с процессом упрочнения материала и вызывающая его повреждение

Так как реальные процессы деформирования материала в элементах конструкций зачастую могут иметь более сложную форму и значительно отличаться от одноосного деформирования, то соотношение (1.1.2) должно обобщаться на пространственные процессы деформирования. При этом необходимо:

- учитывать эффект Баушингера, проявляющийся при знакопеременном нагружении, поскольку повреждение материала осуществляется за счет энергии гистерезиса на пластических деформациях, связанных с упрочнением материала;
- в качестве меры деформаций следует использовать тензоры конечных деформаций, так как диапазон пластического деформирования материала значительно превышает диапазон малых деформаций.

В работах [7, 34, 89, 90] рассмотрена поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности Σ деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела (рис. 1.3,а). Связь между предельным состоянием материала и поверхностью нагружения определяется гипотезой С. В. Серенсена [54, 67], утверждающей, что предельным считается состояние предельного упрочнения материала, то есть состояние истощения материалом его пластических свойств. Следовательно, при определённом уровне деформирования условие пластичности будет определяться формой линии уровня, размер которой соответствует диаграмме нагружения конкретного материала.

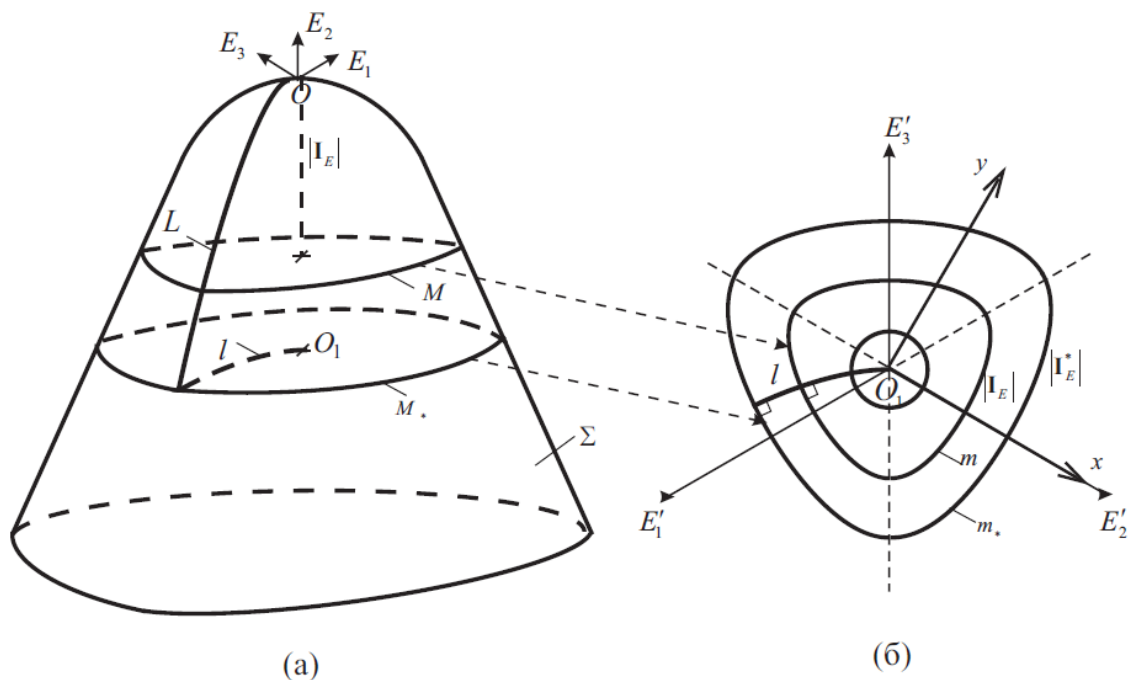


Рисунок 1.3 – Поверхность деформационных состояний (а) и линии уровня (б)

Поверхность деформационных состояний Σ и поверхность нагружения Ω связываются путём использования гипотезы единой кривой, построенной в виде зависимости текущего значения предела текучести σ_s от модуля первого инварианта тензора конечных деформаций Альманси $|I_E|$; σ_s определяется значением параметра упрочнения, совпадающего с модулем первого инварианта

тензора Альманси $|I_E|$. При этом точке A на диаграмме нагружения (рис. 1.2) на предельной поверхности соответствует линия M , а на девиаторной плоскости – m (рис. 1.3). Если материал монотонно однократно деформировался, то предельная линия будет максимально удалена от точки O . Если же материал подвергался сложному либо циклическому нагружению (с произвольной формой циклов), то линия предельного состояния будет находиться ближе к недеформированному состоянию [35].

Поверхность Σ задается следующими соотношениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 &= 0; \\ C_1 C_2 C_3 &= 1, C_i > 0 (i = 1, 2, 3); \\ (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) &= 1;\end{aligned}\tag{1.1.3}$$

где ε_i , C_i , E_i – главные значения тензоров скоростей деформаций ε_{ij} , Коши C_{ij} и Альманси E_{ij} :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).\tag{1.1.4}$$

Здесь X_i , x_i – эйлеровы и лагранжевы переменные, u_i – вектор перемещения, δ_{ij} – символ Кронекера.

На рисунке 1.3,б показаны проекции на девиаторную плоскость линий пересечения поверхности Σ с плоскостями, параллельными девиаторной плоскости. Эти проекции называются линиями уровня, так как они определяются расстояниями $|I_E|$ от точки недеформированного состояния O . Эти линии связываются с поверхностью нагружения с помощью кривой деформирования в координатах $\sigma - \varepsilon$.

Уравнение поверхности нагружения в координатах главных значений тензора напряжения имеет вид

$$\begin{aligned}& 6\sqrt{6}(\sigma_1 - \sigma_2)^2(\sigma_2 - \sigma_3) - 4\sqrt{6}(\sigma_1 - \sigma_2)^3 + \\& + 6\sqrt{6}(\sigma_2 - \sigma_3)^2(\sigma_1 - \sigma_2) - 4\sqrt{6}(\sigma_2 - \sigma_3)^3 - 9|I_E|' \times \\& \times (2\sqrt{2}H(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 2\sqrt{2}H(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3) + 2\sqrt{2}H(\sigma_1 - \sigma_2)^2) = k_1\end{aligned}\tag{1.1.5}$$

где $k_1 = (-2\sqrt{2}H^3 + 6\sqrt{6})9h'^3$, $|I_E|' = \frac{3\sigma}{3-2h}$, $|I_E| = E_1 + E_2 + E_3$, $H = \frac{1}{\sqrt{3}}(C_1 + C_2 + C_3)$, $C_i = 1 - 2E_i$, $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$.

Данная поверхность учитывает обе указанные выше особенности малоциклового усталости: эффект Баушингера и конечность пластических деформаций. В качестве параметра упрочнения выступает первый инвариант тензора Альманси $|I_E| = E_1 + E_2 + E_3$. При изображении процессов деформирования линиями L на поверхности Σ и их проекциями l на девиаторную плоскость, можно выделить процессы деформирования ортогональные линиям уровня в девиаторной плоскости пространства E_i . Эти процессы обладают следующим свойством: удельная работа внутренних сил при деформировании из точки O (при $|I_E| = 0$) до уровня $|I_E|$ имеет одно и то же значение – $|I_E|$. Материал упрочняется при деформировании по ортогональным процессам, при деформировании по линиям уровня упрочнения не происходит.

Для построения этой поверхности для конструкционных материалов используется описание процессов одноосного деформирования плоских или цилиндрических образцов с использованием инвариантов тензоров конечных деформаций, связанных с относительным удлинением образца ε следующим образом [79, 88]:

– для цилиндрических образцов

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon(2 + \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)^2}, E_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon, E_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon; \quad (1.1.6)$$

– для плоских образцов в условиях плоской деформации

$$E_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1 + \varepsilon)^2}, E_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \varepsilon, E_3 = 0; \quad (1.1.7)$$

– для плоских образцов в условиях плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned}
E_1 &= \sqrt{3}k \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}k} \ln|1 + \varepsilon| \right) + \frac{1}{k} \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} k \ln|1 + \varepsilon| - \frac{1}{3} \ln^2|1 + \varepsilon|}, \\
E_2 &= \sqrt{3}k \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}k} \ln|1 + \varepsilon| \right) - \frac{1}{k} \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} k \ln|1 + \varepsilon| - \frac{1}{3} \ln^2|1 + \varepsilon|}, \\
E_3 &= -2\sqrt{3}k + \ln|1 + \varepsilon|.
\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

1.2 Уравнения плоской деформации

При плоской деформации перемещения частиц тела параллельны плоскости x_1, x_2 и не зависят от x_3 :

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), u_2 = u_2(x_1, x_2), u_3 = 0. \tag{1.2.1}$$

Подобное состояние возникает в длинных призматических телах при нормальных к боковой поверхности и не зависящих от x_3 нагрузках.

Тело считается изотропным и однородным. В любом сечении $x_3 = \text{const.}$ будет одна и та же картина напряженного и деформированного состояния. Компоненты напряжения зависят только от x_1, x_2 , Причем $\sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ из-за отсутствия соответствующих сдвигов.

Из (1.2.1) вытекает, что $\varepsilon_3 = 0$. При несжимаемости материала

$$\sigma_{33} - \sigma = 0,$$

откуда

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \tag{1.2.2}$$

где σ_{33} является одним из главных напряжений. Остальные главные напряжения определяются из квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_i & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_i \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \tau, \tag{1.2.3}$$

где $\tau = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$ — максимальное касательное напряжение.

Интенсивность касательных напряжений равна максимальному касательному напряжению $k = \tau$ [104].

Главные напряжения равны

$$\sigma_1 = \sigma + k, \sigma_2 = \sigma - k, \sigma_3 = \sigma. \quad (1.2.4)$$

Таким образом, при плоской деформации напряженное состояние в каждой точке сплошной среды характеризуется наложением гидростатического давления σ на напряжение чистого сдвига k (рис. 1.4).

Значения косинусов, определяющих первое ($\sigma_1 > \sigma_{12}$) главное направление, находятся из системы

$$\begin{cases} (\sigma_{11} - \sigma_1) \cos \theta + \sigma_{12} \sin \theta = 0, \\ \sigma_{12} \cos \theta + (\sigma_{22} - \sigma_1) \sin \theta = 0, \end{cases} \quad (1.2.5)$$

откуда исключением σ_1 получается

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}. \quad (1.2.6)$$

Направления площадок, на которых действуют максимальные касательные напряжения, составляют угол $\pm \frac{\pi}{4}$ с главным направлением.

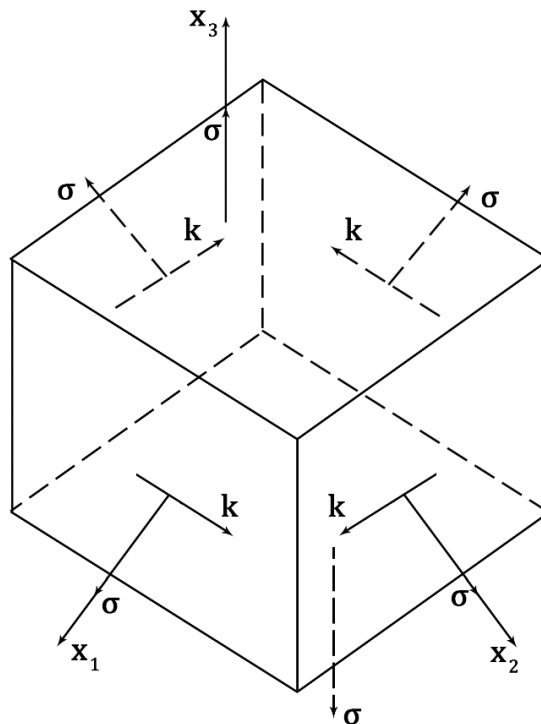


Рисунок 1.4 – Напряжённое состояние при плоской деформации

Большое значение имеют также линии, которые в каждой точке касаются площадки максимального касательного напряжения и называются линиями скольжения. Они состоят из двух ортогональных семейств линий, характеризуемых уравнениями $x_1 = x_1(\alpha, \beta), x_2 = x_2(\alpha, \beta)$, где α, β — некоторые параметры.

Линия α отклоняется от первого главного направления на угол $\frac{\pi}{4}$ по часовой стрелке, линия β отклоняется от первого главного направления на тот же угол против часовой стрелки.

Направления линий α, β выбираются таким образом, чтобы они образовывали правую систему координат, касательное напряжение k должно быть положительно. Угол наклона касательной к линии α , отсчитываемый от оси x_1 против часовой стрелки, обозначается через φ .

Линии скольжения покрывают область ортогональной сеткой. Бесконечно малый элемент, выделенный линиями скольжения, испытывает одинаковое растяжение в направлениях линий скольжения.

Если среда находится в состоянии идеальной пластичности, то должно выполняться условие текучести:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2. \quad (1.2.7)$$

К нему необходимо присоединить два уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0. \quad (1.2.8)$$

К приведенным уравнениям также добавляются соотношения ассоциированного закона течения. Это условие совпадения направлений площадки максимального касательного напряжения и площадки, испытывающей максимальную скорость деформации сдвига

$$\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2}}, \quad (1.2.9)$$

и условие несжимаемости

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0. \quad (1.2.10)$$

Система, содержащая пять уравнений (1.2.7) – (1.2.10) теории плоской деформации идеального жесткопластического тела была впервые установлена Сен-Венаном. В ней содержится пять неизвестных функций координат $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, V_1, V_2$. Эти уравнения – гиперболические, причем характеристики напряжений и скоростей совпадают.

Закон движения сплошной среды задается в форме Эйлера

$$x_i^0 = x_i^0(x_1, x_2, x_3, t). \quad (1.2.11)$$

или в форме Лагранжа

$$x_i = x_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t). \quad (1.2.12)$$

Задание движения сплошной среды равенством (1.2.12) описывает траектории, которые пробегают частицы материала, имевшие в начальный момент времени $t = 0$ координаты x_1^0, x_2^0, x_3^0 . Компоненты скорости этих частиц определяются как частные производные

$$u_i = \frac{\partial}{\partial t} x_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \Big|_{x_i^0 = \text{const.}}$$

при фиксированных лагранжевых координатах, в качестве которых могут быть выбраны начальные координаты частиц. В пространстве эйлеровых координат x_1, x_2, x_3 эти траектории являются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = V_i,$$

и вдоль каждой такой траектории начальные координаты x_i^0 постоянны:

$$\frac{dx_j^0}{dt} = \frac{\partial x_j^0}{\partial t} + \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial x_j^0}{\partial t} + V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} = 0, \quad (1.2.13)$$

Здесь $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ — субстанциональная производная, то есть производная по времени, взятая вдоль траектории фиксированной материальной частицы среды [91].

Результат дифференцирования уравнения (1.2.13) по x_i :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_j^0}{\partial x_i} \right) + V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial x_j^0}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \left(\frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} \right) = 0$$

можно записать в матричном виде следующим образом:

$$\frac{d}{dt} A + B^* A = 0, \quad (1.2.14)$$

где $A_{ij} = \frac{\partial x_j^0}{\partial x_i}$ — тензор дисторсии, $B^* = \frac{\partial v_j}{\partial x_k}$ — транспонированная матрица частных производных от компонент скорости.

Для элементов тензора дисторсии уравнение (1.2.14) имеет вид:

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + V_k \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} A_{kj} = 0. \quad (1.2.15)$$

Через дисторсию может быть выражен метрический тензор деформации

$$G = AA^*,$$

что позволяет при знании уравнений, описывающих изменение дисторсии A с течением времени, получить аналогичное уравнение для тензора G [91]

$$\frac{d}{dt} G + GB + B^* G = 0. \quad (1.2.16)$$

Уравнение (1.2.16) определяет закон, по которому меняется поле метрического тензора деформации с течением времени.

Тензор конечных деформаций Альманси определяется через тензор дисторсии [91]

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial x_k^0}{\partial x_i} \frac{\partial x_k^0}{\partial x_j} \right) \quad (1.2.17)$$

или в матричном виде

$$E = \frac{1}{2} (I - AA^*) = \frac{1}{2} (I - G), \quad (1.2.18)$$

где I — единичная матрица.

Выражение G через E и последующая подстановка в (1.2.16) даёт

$$\frac{d}{dt} (I - 2E) + (I - 2E)B + B^*(I - 2E) = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}E + EB + B^*E = \frac{1}{2}(B + B^*), \quad (1.2.19)$$

Уравнение (1.2.19) определяет закон, по которому изменяется с течением времени поле тензора конечных деформаций Альманси. В индексной форме это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} V_k + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

или

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} V_k + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij}, \quad (1.2.20)$$

где $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$ – тензор скорости деформации.

Тензор конечных деформаций Альманси может быть найден путем интегрирования по времени соотношения (1.2.20).

Запись (1.2.20) в компонентной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} (I) \quad & \frac{\partial E_{11}}{\partial t} + \frac{\partial E_{11}}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial E_{11}}{\partial x_2} V_2 + 2E_{11} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + 2E_{12} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}, \\ (II) \quad & \frac{\partial E_{22}}{\partial t} + \frac{\partial E_{22}}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial E_{22}}{\partial x_2} V_2 + 2E_{12} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + 2E_{22} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2}, \\ (III) \quad & \frac{\partial E_{12}}{\partial t} + \frac{\partial E_{12}}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial E_{12}}{\partial x_2} V_2 + 2E_{11} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + E_{12} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) + \\ & + 2E_{22} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

В случае плоской деформации компоненты тензоров E_{ij}, ε_{ij} могут быть записаны в виде [93]

$$\begin{aligned} E_{11} &= e + g \cos 2\theta, E_{22} = e - g \cos 2\theta, E_{12} = g \sin 2\theta, \\ \varepsilon_{11} &= \gamma \cos 2\psi, \varepsilon_{22} = -\gamma \cos 2\psi, \varepsilon_{12} = \gamma \sin 2\psi, \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

где $e = \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22})$, $g = \frac{1}{2}\sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}$, θ, ψ – соответственно углы наклона первого главного направления тензоров E_{ij} и ε_{ij} к оси x_1

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2}. \quad (1.2.23)$$

Тогда система (1.2.20) преобразуется к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} (I) \frac{de}{dt} + 2\gamma g \cos 2(\theta - \psi) = 0, \\ (II) \frac{dg}{dt} + 2\gamma e \cos 2(\theta - \psi) = \gamma \cos 2(\theta - \psi), \\ (III) 2g \frac{d\theta}{dt} - 2\gamma e \sin 2(\theta - \psi) + g \left[\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right] = \\ = -\gamma \sin 2(\theta - \psi). \end{array} \right. \quad (1.2.24)$$

Уравнения (1.2.24) устанавливают связь между инвариантами тензоров Альманси e, g и скоростей деформаций γ и их главными направлениями θ, ψ вдоль траектории движения частицы материала [32].

1.3 Уравнения плоского напряжённого состояния

Плоское напряженное состояние характеризуется следующими значениями компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= 0, \tau_{13} = 0, \tau_{23} = 0, \\ \sigma_{11} &= \sigma_{11}(x_1, x_2), \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2), \tau_{12} = \tau_{12}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Такое напряженное состояние приближенно реализуется в тонкой пластине, находящейся в плоскости $x_1 x_2$ и деформируемой под действием сил, лежащих в ее срединной плоскости. Равенство нулю компонент напряжения $\sigma_{33}, \tau_{13}, \tau_{23}$ обуславливается тем, что основания пластинки свободны от нагрузок, а её толщина мала по сравнению с остальными размерами. По той же причине напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}$ мало изменяются по толщине пластинки и определяются как осреднённые значения соответствующих компонент напряжения.

Дифференциальные уравнения равновесия при плоском напряженном состоянии совпадают с уравнениями равновесия при плоской деформации

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \quad (1.3.2)$$

Условие Мизеса в данном случае имеет вид

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\tau_{12}^2 = \sigma_s^2 = 3k^2, \quad (1.3.3)$$

или в главных осях

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_s^2$$

Постоянная k равна пределу текучести при чистом сдвиге. Условие Мизеса в главных осях представляет в плоскости σ_1, σ_2 эллипс (рис. 1.5) с полуосями $\sqrt{2}\sigma_s, \sqrt{2}\sigma_s$, наклонённый к осям x_1, x_2 под углом $\frac{\pi}{4}$. Точки пересечения эллипса с осями координат отсекают на них отрезки σ_s . Главные напряжения по величине не могут превышать значение $\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s = 2k$.

При развитых пластических деформациях можно, пренебрегая компонентами упругой деформации, исходить из соотношений Сен-Венана – Мизеса для жёсткопластического тела:

$$\frac{\frac{\partial V_1}{\partial x_1}}{2\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial x_2}}{2\sigma_{22} - \sigma_{11}} = \frac{\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1}}{6\tau_{12}}. \quad (1.3.4)$$

Условия (1.3.4) вместе с уравнениями равновесия (1.3.2) и условием текучести (1.3.3) образуют систему пяти уравнений с пятью неизвестными функциями $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}, V_1, V_2$.

Пусть напряжённое состояние известно, тогда система уравнений (1.3.4) является линейной системой с переменными коэффициентами и может быть преобразована к виду

$$\begin{cases} (2\sigma_{11} - \sigma_{22}) \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = (2\sigma_{22} - \sigma_{11}) \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \\ (2\sigma_{11} - \sigma_{22}) \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) = 6\tau_{12} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \end{cases} \quad (1.3.5)$$

В области гиперболичности уравнений для напряжений уравнения для скоростей также будут гиперболическими, характеристики обеих систем будут совпадать.

Из уравнений (1.3.5) следует, что вдоль характеристической линии, как и в случае плоской деформации, скорость относительного удлинения равна нулю. Это условие выполняется и вдоль характеристических линий второго семейства [31].

В зависимости от знака главных напряжений σ_1, σ_2 максимальные касательные напряжения развиваются по различным площадкам.

1. Если σ_1, σ_2 – разных знаков ($\sigma_1 \sigma_2 < 0$), то подобно случаю плоской деформации максимальное касательное напряжение равно

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2} = 4k^2 \quad (1.3.6)$$

и действует по площадкам, нормальным к плоскости $x_1 x_2$ и делящим пополам угол между главными осями σ_1, σ_2 (рис. 1.6, а). При этом в плоскости $x_1 x_2$ будет два ортогональных семейства линий скольжения. В этом случае можно перенести на плоское напряжённое состояние все методы интегрирования уравнений плоской деформации.

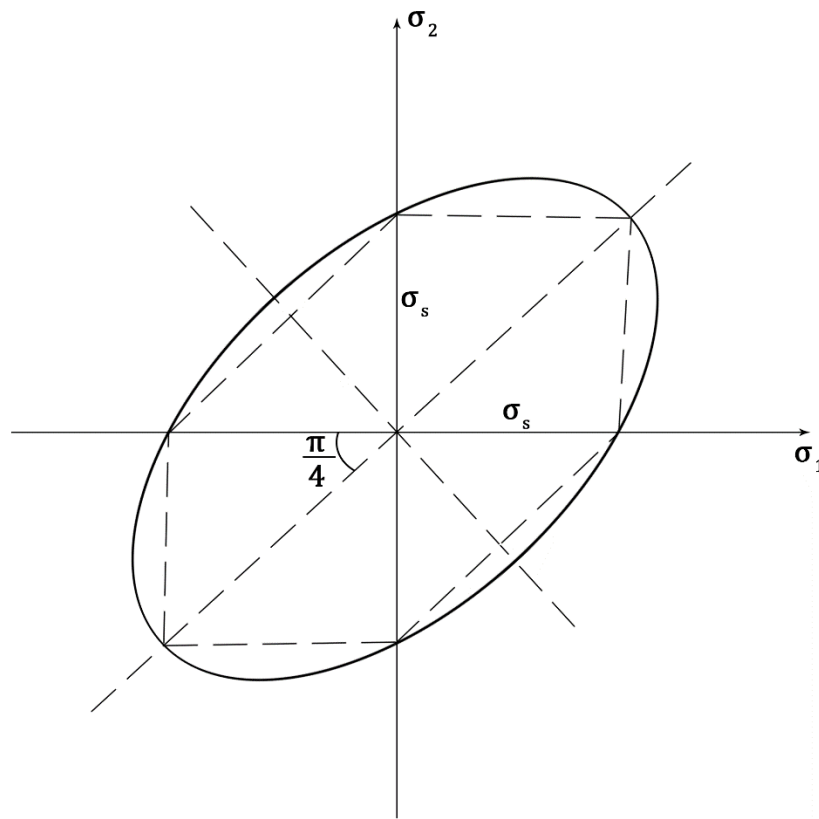


Рисунок 1.5 – Условие Мизеса и условие Треска – Сен-Венана на плоскости σ_1, σ_2

Если же σ_1, σ_2 имеют одинаковые знаки, например $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$, причём $\sigma_1 > \sigma_2$, то максимальное касательное напряжение равно

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sigma_1 \quad (1.3.7)$$

и действует по площадкам, параллельным оси σ_2 и наклонённым под углом $\frac{\pi}{4}$ к плоскости x_1x_2 (рис. 1.6, б).

На указанной плоскости площадки скольжения оставляют один след, то есть одно семейство линий скольжения, направление которых совпадает с главным направлением σ_2 . Вследствие чего условие текучести Треска – Сен-Венана примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_s, \text{ если } \sigma_1 \sigma_2 \leq 0, \\ \sigma_1 &= \pm \sigma_s \text{ или } \sigma_2 = \pm \sigma_s, \text{ если } \sigma_1 \sigma_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

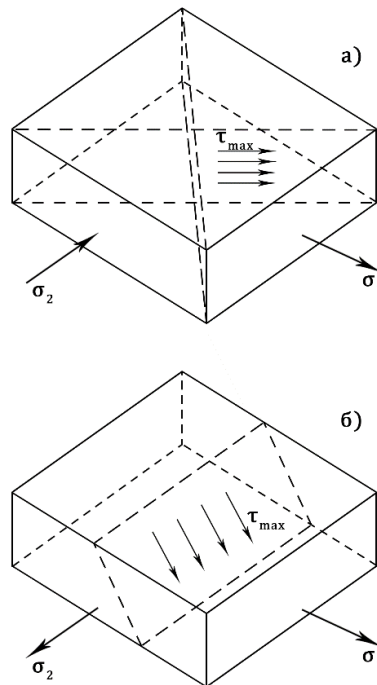


Рисунок 1.6 – Максимальное касательное напряжение при плоском напряжённом состоянии в зависимости от знаков главных напряжений σ_1, σ_2

Уравнения (1.3.8) представляют на плоскости σ_1, σ_2 шестиугольник, вписанный в эллипс Мизеса (рис. 1.5, пунктир). Этот же шестиугольник представляет собой сечение правильной шестигранной призмы, изображающей в пространстве напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ условие текучести Треска – Сен-Венана, плоскостью $\sigma_3 = 0$. Проекция нормали к призме перпендикулярна сторонам шестиугольника (рис. 1.7). Следовательно, отношение главных скоростей

деформации $\varepsilon_1 : \varepsilon_2$ равно отношению направляющих косинусов нормали к шестиугольнику в рассматриваемой точке. Присоединив условие несжимаемости

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \quad (1.3.9)$$

можно найти главную скорость деформации ε_3 .

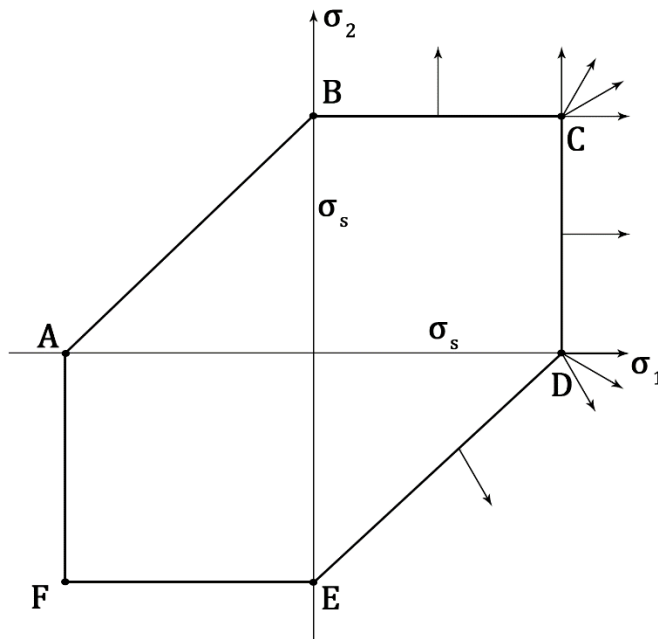


Рисунок 1.7 – Условие пластичности Треска – Сен-Венана

Одноосному растяжению/сжатию на рис. 1.7 соответствуют угловые точки D и A . В точке D :

$$\sigma_1 = \sigma_s, \sigma_2 = 0. \quad (1.3.10)$$

Скорости деформаций – линейные комбинации с неотрицательными коэффициентами λ_1, λ_2 течений на отрезках CD и DE , то есть

$$\varepsilon_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \varepsilon_2 = -\lambda_1, \varepsilon_3 = -\lambda_2, \quad (1.3.11)$$

где $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ – неизвестные функции, определяемые при решении каждой конкретной задачи. Переход к декартовым компонентам тензора напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi, \quad (1.3.12)$$

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi,$$

с учётом учитывая (1.3.10) даёт

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} [\sigma_s \pm \sigma_s \cos 2\varphi], \quad (1.3.13)$$

$$\tau_{12} = \frac{1}{2} \sigma_s \sin 2\varphi.$$

Подстановкой (1.3.13) в уравнения равновесия (1.3.2), легко получить, что угол наклона первого главного направления $\varphi = \text{const}$, что соответствует полю однородного растяжения/сжатия. Аналогичным образом определяется пластическое течение в точке A .

Другие типичные случаи:

– равномерное гидростатическое напряженное состояние в плоскости $x_1 x_2$, которому на рис. 1.7 соответствуют угловые точки C и F :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_s, (\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_s), \quad (1.3.14)$$

или согласно (1.3.13)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_s, (\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\sigma_s), \tau_{12} = 0. \quad (1.3.15)$$

Любое направление является главным.

– в угловых точках B и E течение происходит аналогично течению при одноосном растяжении/сжатии в точках D и A :

$$\sigma_2 = \sigma_s, \sigma_1 = 0 (\sigma_2 = -\sigma_s, \sigma_1 = 0). \quad (1.3.16)$$

– пластическое течение на вертикальных и горизонтальных гранях DC , CB , AF , FE , приводящее к системе уравнений параболического типа [27, 31]. Для грани DC :

$$\sigma_1 = \sigma_s (0 < \sigma_2 < \sigma_s), \quad (1.3.17)$$

и по ассоциированному закону течения

$$\varepsilon_1 = \lambda, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = -\lambda. \quad (1.3.18)$$

В работе [31] вводится неизвестная функция $\chi = \chi(x, y)$, связанная с напряжениями σ_1, σ_2 уравнением

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\sigma_s\chi. \quad (1.3.19)$$

При подстановке декартовых компонент тензора напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{aligned} \right\} = \sigma_s[(1 - \chi) \pm \chi \cos 2\varphi], \quad (1.3.20)$$

$$\tau_{12} = \sigma_s\chi \sin 2\varphi$$

в уравнения равновесия получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= 0, \\ \sin 2\varphi \frac{\partial \ln \chi}{\partial x_1} - \cos 2\varphi \frac{\partial \ln \chi}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Уравнения характеристик первого и второго уравнений (1.3.21) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{\sin 2\varphi} &= \frac{dx_2}{-\cos 2\varphi} = \frac{d\varphi}{0}, \\ \frac{dx_1}{\sin 2\varphi} &= \frac{dx_2}{-\cos 2\varphi} = \frac{d \ln \chi}{-2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}} \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

Из (1.3.22) следует, что характеристики совпадают, их вид:

$$\varphi = \text{const} = C_1, x_2 = x_1 \operatorname{tg}[\varphi + \pi/2] + C_2. \quad (1.3.23)$$

То есть характеристики - прямые линии, наклон которых к оси x_1 составляет угол равный $\varphi + \pi/2$, совпадающие с прямыми траекториями главных напряжений.

Общее решение системы уравнений (1.3.21) имеет вид [31]

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \operatorname{tg}[\varphi + \pi/2] + \Phi(\varphi), \\ \chi &= \frac{\psi(\varphi)}{2x_1 + (1 - \cos 2\varphi)\Phi'(\varphi)}, \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

где $\Phi(\varphi), \psi(\varphi)$ – произвольные функции, определяемые граничными условиями.

– на наклонных гранях AB, DE $\sigma_1\sigma_2 < 0$. Для грани DE : $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$, и условие текучести имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_s. \quad (1.3.25)$$

По ассоциированному закону:

$$\varepsilon_1 = \lambda, \varepsilon_2 = -\lambda. \quad (1.3.26)$$

Тогда из условия несжимаемости следует, что

$$\varepsilon_3 = 0.$$

Толщина пластинки не изменяется только в случаях угловых точек A, D , а также на наклонных гранях AB, DE , во всех остальных случаях деформация в плоскости x_1x_2 связана с изменением толщины пластины и при больших деформациях необходимо рассматривать пластину переменной толщины.

1.4 Деформационные состояния сжимаемых жесткопластических тел

Необходимость определения поверхности деформационных состояний обусловлена её связью с поверхностью нагружения, которая в свою очередь даёт возможность описания предельных состояний для упрочняющихся жёсткопластических тел. В п. 1.1 была приведена гипотеза Серенсена о том, что достижение предельного состояния материала определяется исчерпанием его пластических свойств. Это значит, что при достижении предельного состояния, материал не может деформироваться непрерывно, и его пластическое течение возможно только при наличии разрывов поля скоростей перемещений.

Поверхность деформационных состояний напрямую связана с законом сохранения массы, формулируемым в виде уравнения неразрывности [38]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho V_{k,k} = 0$$

или

$$V_{k,k} = -\frac{d}{dt} [\ln \rho], \quad (1.4.1)$$

где ρ – плотность материала; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ – материальная производная; V_k – скорость перемещения частиц материала. За меру деформаций принимается тензор конечных деформаций Альманси:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right).$$

Компоненты тензора скоростей деформации определяются в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.4.2)$$

Здесь X_i, x_i – лагранжевы и эйлеровы координаты частиц материала.

Тензоры E_{ij} и ε_{ij} связаны друг с другом соотношением

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{dE_{ij}}{dt} + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij}. \quad (1.4.3)$$

Пусть поле скоростей имеет вид [34]:

$$V_1 = x_1 \varepsilon_1(t), V_2 = x_2 \varepsilon_2(t), V_3 = x_3 \varepsilon_3(t). \quad (1.4.4)$$

Соотношения (1.4.4) задают простой тип нагружения, при котором тензоры деформаций и скоростей деформаций предполагаются соосными. Тогда компоненты тензора скоростей деформаций определяются в виде

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1(t), \varepsilon_{22} = \varepsilon_2(t), \varepsilon_{33} = \varepsilon_3(t), \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0,$$

то есть $\varepsilon_i(t)$ являются главными значениями тензора скоростей деформаций в выбранной декартовой системе координат. Уравнение (1.4.1) примет вид:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -\frac{d}{dt} [\ln \rho]. \quad (1.4.5)$$

С учётом выбранного поля скоростей (1.4.4) соотношения (1.4.3) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{11}}{dt} &= (1 - 2E_{11})\varepsilon_1(t), \\ \frac{dE_{22}}{dt} &= (1 - 2E_{22})\varepsilon_2(t), \\ \frac{dE_{33}}{dt} &= (1 - 2E_{33})\varepsilon_3(t). \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Интегрирование и суммирование выражений (1.4.6) приводит к соотношению

$$\ln(1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 2 \ln \rho - 2 \ln \rho_0 = 2 \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (1.4.7)$$

где ρ_0 – начальная плотность материала. Из (1.4.7) следует, что

$$(1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2. \quad (1.4.8)$$

При $\rho = \rho_0$ уравнение (1.4.8) определяет в пространстве главных деформаций (E_1, E_2, E_3) поверхность деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела, которая рассматривалась в работах [7, 34, 89, 90].

Уравнение (1.4.8) также можно записать через основные инварианты тензора конечных деформаций Альманси:

$$1 - 2I_E + 4II_E - 8III_E = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2. \quad (1.4.9)$$

Полученные уравнения (1.4.9) задают деформационные состояния пластически сжимаемого тела в виде семейства плоскостей, отстоящих от начала координат на расстояние, квадрат которого определяется относительным изменением плотности материала в процессе пластического деформирования.

Результатом введения поверхностей деформационных состояний является возможность интерпретировать предельные состояния, которые, как правило, связаны с качественным изменением процесса деформирования пластического тела, в виде линий на этих поверхностях. Характерные качественные изменения связаны с тремя этапами процесса одноосного растяжения плоских и цилиндрических образцов [5]:

- 1) растяжение образца до момента образования шейки, при котором материал ведёт себя практически как пластически несжимаемый;
- 2) образование шейки и зарождение пор в материале, на этом этапе материал можно считать сжимаемым;
- 3) объединение пор в общую макротрещину, что связано с разрушением материала.

Соответствие такому подходу имеют два вида предельных состояний пластических сред:

- 1) состояние перехода пластически несжимаемого материала в пластически сжимаемый;
- 2) образование макротрещины, связанное с объединением пор в материале.

Соотношение (1.4.9) позволяет ввести критерий разрушения материала по предельной плотности. Первое предельное состояние будет определяться соотношением

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \bar{\rho} = 1, \quad (1.4.10)$$

которому будет соответствовать некоторая плоскость (рис. 1.9). Второе предельное состояние определяется соотношением

$$\bar{\rho} = \rho^*. \quad (1.4.11)$$

Этому будет соответствовать плоскость в пространстве основных инвариантов тензора деформаций, параллельная плоскости, определяющей первое предельное состояние.

Величина ρ^* может быть определена из диаграммы нагружения образцов для конкретных материалов в условиях плоской деформации, осесимметричной деформации и плоского напряжённого состояния как деформированное состояние, соответствующее σ_B [18, 33, 74, 75, 77, 86, 88].

Деформация в условиях плоской деформации определяется соотношениями (1.1.7), в условиях осесимметричной деформации:

$$E_1 = e + g = \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}(2 + \bar{\varepsilon})}{(\bar{\varepsilon} + 1)^2},$$

$$E_2 = e - g = -\frac{1}{2} \bar{\varepsilon},$$

$$E_3 = r^2 E_{\phi\phi} = -\frac{1}{2} \bar{\varepsilon},$$

в условиях плоского напряжённого состояния:

$$E_1 = e + g = \frac{1}{2} - \frac{(\bar{\varepsilon} + 1)^{\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}{2},$$

$$E_2 = e - g = \frac{1}{2} - \frac{(\bar{\varepsilon} + 1)^{\sqrt{2}}}{2} \quad (1.4.12)$$

$$E_3 = -1 + \frac{(\bar{\varepsilon} + 1)^{\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}{2} + \frac{(\bar{\varepsilon} + 1)^{\sqrt{2}}}{2},$$

где $\bar{\varepsilon}$ – относительное удлинение образца.

Приведённые соотношения, соответствующие предположению о пластической несжимаемости материала, позволяют построить линии, определяющие деформирование образцов при перечисленных выше плоских деформационных состояниях в пространстве основных инвариантов тензора конечных деформаций. Разрушение образцов соответствует конечным точкам

этих линий. Эти точки должны находиться на определённой поверхности, определяемой уравнением (1.4.9).

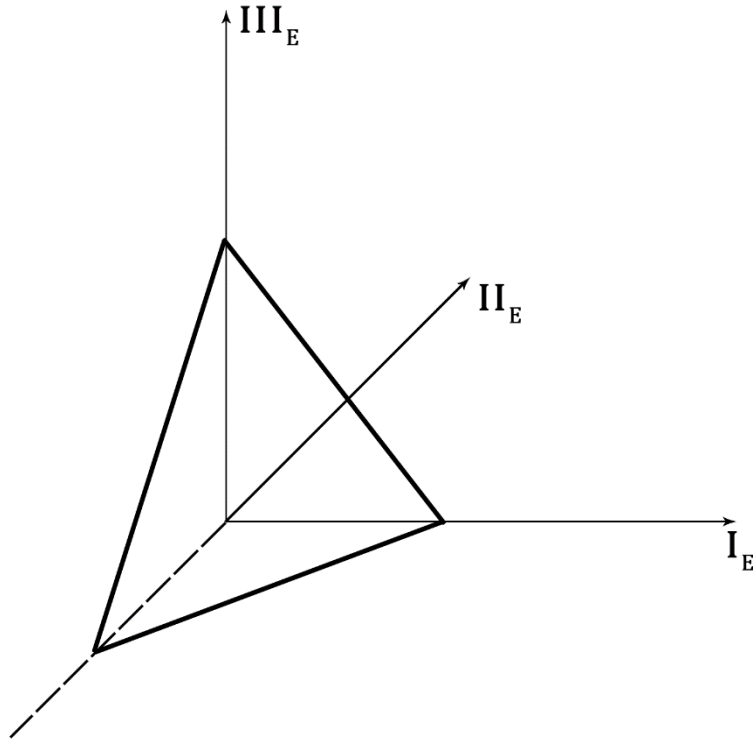


Рисунок 1.8 – Поверхность деформационных состояний

Условие пластичности Мизеса – Шлейхера имеет вид [38]

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} + \beta \sigma = k, \quad (1.4.13)$$

где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ – среднее гидростатическое давление.

Ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.4.14)$$

и условие пластичности (1.4.13) приводит к следующим выражениям для скоростей деформаций:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}} + \frac{\lambda\beta}{3}, \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}} + \frac{\lambda\beta}{3}, \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}} + \frac{\lambda\beta}{3}.
\end{aligned} \tag{1.4.15}$$

Суммирование выражений (1.4.15) и приведение подобных слагаемых даёт:

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \lambda\beta. \tag{1.4.16}$$

С учётом (1.4.1) и (1.4.2), для сжимаемого материала из (1.4.16) можно получить соотношение

$$V_{k,k} = \lambda\beta, \beta = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dt} [\ln \rho]. \tag{1.4.17}$$

Глава 2 Задачи о растяжении и разрушении полосы в условиях плоской деформации

В рассматриваемых задачах в ходе всего процесса нагружения растягивающие/сжимающие напряжения прикладываются только к верхней и нижней граням образца, обеспечивая направление скорости растяжения/сжатия вдоль оси x_2 . Напряжения на боковых гранях образца отсутствуют. Материал при малых деформациях считается сжимаемым.

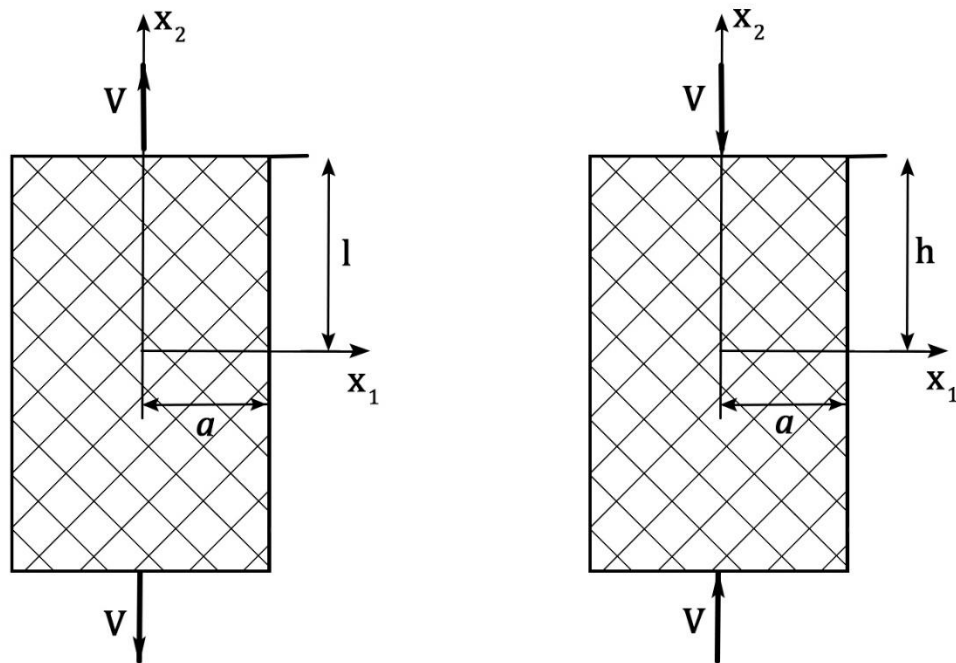


Рисунок 2.1 – Растяжение и сжатие полосы с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации

2.1 Растяжение и сжатие полосы

Из выше сказанного следует, что на этапе растяжения граничные условия для напряжений имеют вид:

$$\text{при } x_2 = l \quad \sigma_{22} = 2k, \text{ при } x_2 = -l \quad \sigma_{22} = -2k \quad (2.1.1)$$

В силу непрерывности поля скоростей при предположении о том, что весь образец находится в пластическом состоянии, условия (2.1.1) приводят к однородному напряжённому состоянию

$$\sigma_{22} = \pm 2k, \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \quad (2.1.2)$$

и прямолинейному полю линий скольжения, наклонённых к горизонтальной оси x_1 под углом $\varphi = \pi/4$.

Поле скоростей в условиях плоской деформации при учёте сжимаемости определяется интегрированием системы уравнений [88]

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -\frac{d}{dt} [\ln \rho], \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) (-\operatorname{ctg} 2\varphi). \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Условие сжимаемости материала связано с законом сохранения массы:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho V_{k,k} = 0,$$

из которого следует первое уравнение (2.1.3).

При подстановке во второе уравнение значения угла наклона линий скольжения $\varphi = \pi/4$ система (2.1.3) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \text{(I)} \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -\frac{d}{dt} [\ln \rho] \\ \text{(II)} \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = 0. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

При последующем преобразовании по закону $\frac{\partial}{\partial x_1} \text{(I)} - \frac{\partial}{\partial x_2} \text{(II)}$ и $\frac{\partial}{\partial x_2} \text{(I)} - \frac{\partial}{\partial x_1} \text{(II)}$, (2.1.4) приводится к системе волновых уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + g_1(x_1, x_2, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} + g_2(x_1, x_2, t) = 0, \end{cases} \quad (2.1.5)$$

где $g_1(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] \right)$, $g_2(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] \right)$ – функции координат и времени.

Общий вид волнового уравнения [36]:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} \right) a^2 + g_1(x_1, x_2, t).$$

В соответствии с ним в уравнении (I) из (1.5): $a^2 = 1$ и $\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = 0$, откуда следует, что функция V_1 зависит от времени t линейно, и решение неоднородного уравнения (I) можно найти в виде

$$V_1(x_1, x_2, t) = \int_0^t u(x_1, x_2) dt,$$

где функция

$$u(x_1, x_2) = \psi_1(x_2 - x_1) + \psi_2(x_2 + x_1),$$

является решением однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0.$$

Тогда решение уравнения (I) запишется в виде:

$$V_1(x_1, x_2, t) = t\psi_1(x_2 - x_1) + t\psi_2(x_2 + x_1).$$

Аналогичным образом находится решение уравнения (II), и общее решение системы (2.1.5) имеет вид:

$$\begin{cases} V_1(x_1, x_2, t) = t\psi_1(x_2 - x_1) + t\psi_2(x_2 + x_1), \\ V_2(x_1, x_2, t) = t\theta_1(x_2 - x_1) + t\theta_2(x_2 + x_1), \end{cases} \quad (2.1.6)$$

где $\psi_1, \psi_2, \theta_1, \theta_2$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

В дальнейшем рассматривается симметричное пластическое течение с двумя осями симметрии x_1 и x_2 . Граничные условия для скоростей перемещений

$$\begin{cases} \text{при } x_2 = 0 \ V_2 = 0, \text{ при } x_1 = 0 \ V_1 = 0, \\ \text{при } x_2 = l \ V_2 = V, \text{ при } x_1 = a \ V_1 = \text{const.} \end{cases} \quad (2.1.7)$$

При подстановке (2.1.7) в (2.1.6), с учётом того, что $t \neq 0$:

$$\begin{cases} \psi_1(x_2) + \psi_2(x_2) = 0, \\ \theta_1(-x_1) + \theta_2(x_1) = 0, \end{cases}$$

откуда следует

$$\begin{cases} \psi_1(x_2) = -\psi_2(x_2) = \psi(x_2), \\ \theta_1(-x_1) = -\theta_2(x_1) = \theta(x_1). \end{cases} \quad (2.1.8)$$

При дифференцировании уравнений (2.1.4) возможно приобретение новых решений. Для этого общее решение (2.1.6) подставляется в (2.1.4):

$$\begin{cases} -t\psi'_1 + t\psi'_2 + t\theta'_1 + t\theta'_2 = -\frac{d}{dt}[\ln \rho], \\ t\psi'_1 + t\psi'_2 - t\theta'_1 + t\theta'_2 = 0. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

С учётом (2.1.8):

$$\begin{cases} -t\psi' - t\psi' - t\theta' - t\theta' = -\frac{d}{dt}[\ln \rho], \\ t\psi' - t\psi' + t\theta' - t\theta' = 0. \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Из (2.1.10) следует

$$\begin{aligned} -2t(\theta' + \psi') &= -\frac{d}{dt}[\ln \rho], \\ \theta' &= \frac{1}{2t} \frac{d}{dt}[\ln \rho] - \psi'. \end{aligned}$$

Из решения однородного уравнения следует, что θ – функция только координат x_1, x_2 , а значит для того, чтобы удовлетворять полученному соотношению, функция $\frac{d}{dt}[\ln \rho]$ должна зависеть от времени t линейно.

Пусть

$$A' = \theta' = \frac{1}{2t} \frac{d}{dt}[\ln \rho] - \psi',$$

где A – некоторая дифференцируемая функция, тогда

$$A = \theta = \frac{1}{2t} \int \frac{d}{dt}[\ln \rho] dx_1 + \psi + C, C - \text{const.}$$

Из граничных условий (2.1.7):

$$\begin{cases} V_2 = [-A(-x_1) - A(x_1)]t = 0, \\ V_1 = [A(x_2) - A(x_2) + C]t = 0, \end{cases} \quad (2.1.11)$$

откуда следует, что $C = 0$, и A – нечётная дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям.

Общее решение системы уравнений (2.1.3) при данных граничных условиях имеет вид:

$$\begin{cases} V_1(x_1, x_2, t) = \left[A(x_2 + x_1) - A(x_2 - x_1) - \frac{1}{t} \int \frac{d}{dt}[\ln \rho] dx_1 \right] t, \\ V_2(x_1, x_2, t) = -[A(x_2 + x_1) + A(x_2 - x_1)]t. \end{cases} \quad (2.1.12)$$

Вид функции A возможно определить из граничных условий для скоростей перемещений и функции объёмной плотности мощности диссипации энергии, которая с учётом условий (2.1.2) равна [88]

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon_{ij}\sigma_{ij} = \varepsilon_{22}2k = \frac{\partial V_2}{\partial x_2}2k = -4kA't > 0, A' < 0. \quad (2.1.13)$$

Накопленная удельная диссипация энергии может быть одним из параметров упрочнения, которое тесно связано с деформациями материала. Упрочнение происходит там, где частицы материала ранее уже деформировались, и последующие деформации более интенсивны в соседних частицах материала. Это приводит к выравниванию деформаций по всему объёму образца и равномерному их накоплению. Отсюда следует критерий выбора функции A – предпочтительным будет считаться пластическое течение с минимальной плотностью мощности диссипации энергии.

С учётом (2.1.7) и (2.1.13) $A(0) = 0, A(l) = -\frac{V}{2t}$, откуда следует, что функция $A(\tau)$ – это гладкая дифференцируемая функция, монотонно убывающая на отрезке $[0, l]$. Этому условию отвечает линейная функция вида $A(\tau) = c\tau$. Её производная $A'(\tau) = c = const$ меньше чем максимальная производная любой другой дифференцируемой функции, проходящей через точки $(0,0)$ и $(l, -\frac{V}{2t})$.

Тогда из (2.1.12):

$$\begin{cases} V_1(x_1, x_2, t) = \left[c(x_2 + x_1) - c(x_2 - x_1) - \frac{1}{t} \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1 \right] t, \\ V_2(x_1, x_2, t) = -[c(x_2 + x_1) + c(x_2 - x_1)]t. \end{cases} \quad (2.1.14)$$

При $x_2 = l$ $V_2 = V$ и из (2.1.14) следует $V = -2clt$, откуда

$$c = -\frac{V}{2lt},$$

и система (2.1.14) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} V_1(x_1, t) = -\frac{V}{l}x_1 - \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, \\ V_2(x_2) = \frac{V}{l}x_2. \end{cases} \quad (2.1.15)$$

Соотношения (2.1.15) будут решением системы (2.1.4), если $\frac{d}{dt}[\ln \rho]$ не зависит от x_2 . Наиболее простой из функций, удовлетворяющих решению (2.1.15) системы (2.1.4) является функция вида $\rho = e^{-\frac{1}{2}c_1 t^2 + c_2}$, поэтому в дальнейшем решении будет рассматриваться функция плотности данного вида.

Компоненты тензора скоростей деформаций ε_{ij} определяются в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = -\frac{V}{l} - \frac{d}{dt}[\ln \rho], \varepsilon_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{V}{l}, \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) = 0, \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2} = \\ = \frac{V}{l} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt}[\ln \rho], l = l_0 + Vt. \end{array} \right. \quad (2.1.16)$$

Компоненты тензоров E_{ij} и ε_{ij} связывает система уравнений:

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} V_k + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij}. \quad (2.1.17)$$

В случае плоской деформации компоненты тензоров E_{ij} и ε_{ij} имеют вид:

$$\begin{aligned} E_{11} &= e + g \cos 2\theta, E_{22} = e - g \cos 2\theta, E_{12} = g \sin 2\theta, \\ \varepsilon_{11} &= \gamma \cos 2\psi, \varepsilon_{22} = -\gamma \cos 2\psi, \varepsilon_{12} = \gamma \sin 2\psi, \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

где $e = \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22})$, $g = \frac{1}{2}\sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}$, θ, ψ – углы наклона первого главного направления тензоров E_{ij} и ε_{ij} к оси Ox_1 .

С учётом (2.1.18) система (2.1.17) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (I) \frac{de}{dt} + 2\gamma g \cos 2(\theta - \psi) = 0, \\ (II) \frac{dg}{dt} + 2\gamma e \cos 2(\theta - \psi) = \gamma \cos 2(\theta - \psi), \\ (III) 2g \frac{d\theta}{dt} - 2\gamma e \sin 2(\theta - \psi) + g \left[\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right] = \\ = -\gamma \sin 2(\theta - \psi), \end{array} \right. \quad (2.1.19)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ – материальная производная по времени.

При рассматриваемой однородной деформации $\theta = \psi = \frac{\pi}{2}$, тогда (2.1.19) преобразуется к виду

$$\begin{cases} (I) \frac{de}{dt} + 2\gamma g = 0, \\ (II) \frac{dg}{dt} + 2\gamma \left(e - \frac{1}{2}\right) = 0, \\ (III) 0 = 0. \end{cases} \quad (2.1.20)$$

Преобразование (2.1.20) по законам $(I) \times 2 \left(e - \frac{1}{2}\right) - (II) \times 2g$ даёт уравнение

$$\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 = C_1, C_1 = \text{const.}$$

При $t = 0$ $e = 0, g = 0, C_1 = \frac{1}{4}$, тогда первым интегралом системы (2.1.20) будет

$$e^2 - e = g^2. \quad (2.1.21)$$

Второй интеграл системы (2.1.20) можно получить путём вычитания уравнения (I) из уравнения (II), учитывая при этом, что γ является функцией времени.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(g - e + \frac{1}{2}\right) &= 2\gamma \left(g - e + \frac{1}{2}\right), \\ \ln \left|g - e + \frac{1}{2}\right| &= 2\ln|l_0 + Vt|_0^t + [\ln \rho]_0^t + \ln C, C = \text{const}, \\ \left|g - e + \frac{1}{2}\right| &= \frac{(l_0 + Vt)^2 C \rho}{l_0^2 \rho_0}, \end{aligned}$$

где ρ_0 – плотность материала до начала деформирования. При $t = 0$ $e = 0, g = 0$, тогда

$$\frac{1}{2} = \frac{l_0^2 C}{l_0^2} \Rightarrow C = \frac{1}{2},$$

и вторым интегралом системы (2.1.20) будет

$$\left|g - e + \frac{1}{2}\right| = \frac{(l_0 + Vt)^2 \rho}{2l_0^2 \rho_0}. \quad (2.1.22)$$

Введя обозначение $\bar{\varepsilon} = \frac{Vt}{l_0}$ для относительного удлинения образца, общее решение системы можно записать в виде:

$$e^2 - e = g^2, \left|g - e + \frac{1}{2}\right| = \frac{\rho(1 + \bar{\varepsilon})^2}{2\rho_0}.$$

Тогда инварианты тензора Альманси g и e определяются соотношениями:

$$g = \frac{\rho^2(1 + \bar{\varepsilon})^4 - \rho_0^2}{4\rho\rho_0(1 + \bar{\varepsilon})^2}, e = -\frac{(\rho_0 - \rho(1 + \bar{\varepsilon})^2)^2}{4\rho\rho_0(1 + \bar{\varepsilon})^2}. \quad (2.1.23)$$

Тогда главные значения тензора конечных деформаций Альманси имеют вид:

$$E_1 = \frac{1}{2} - \frac{\rho_0}{2\rho(1 + \bar{\varepsilon})^2}, E_2 = \frac{1}{2} - \frac{\rho(1 + \bar{\varepsilon})^2}{2\rho_0} \quad (2.1.24)$$

Из полученного поля скоростей перемещений можно найти изменение ширины полосы $a(t)$ с течением времени. В соответствии с принятыми ранее предположениями о виде функции плотности из (2.1.15) следует, что

$$a(t) = a_0 - \int_0^t \frac{V}{l_0 + Vt} a(t) dt - \int_0^t \frac{d}{dt} [\ln \rho] a(t) dt,$$

Дифференцирование по t приводит к уравнению:

$$a' = -\frac{V}{l_0 + Vt} a - \frac{d}{dt} [\ln \rho] a, a(t)|_{t=0} = a_0.$$

Тогда

$$\ln|a|_0^t = -\ln \rho|_0^t - \ln|l_0 + Vt|_0^t,$$

откуда

$$a(t) = \frac{a_0 \rho_0}{\rho(1 + \bar{\varepsilon})}. \quad (2.1.25)$$

Усилие, необходимое для растяжения полосы, с учётом вида функции ρ , определяется выражением:

$$P = \frac{4ka_0\rho_0}{\rho(1 + \bar{\varepsilon})}. \quad (2.1.26)$$

На рисунке 2.2 представлены графики зависимости главных значений тензора деформаций Альманси E_1, E_2 от относительного удлинения образца $\bar{\varepsilon}$ в условиях плоской деформации.

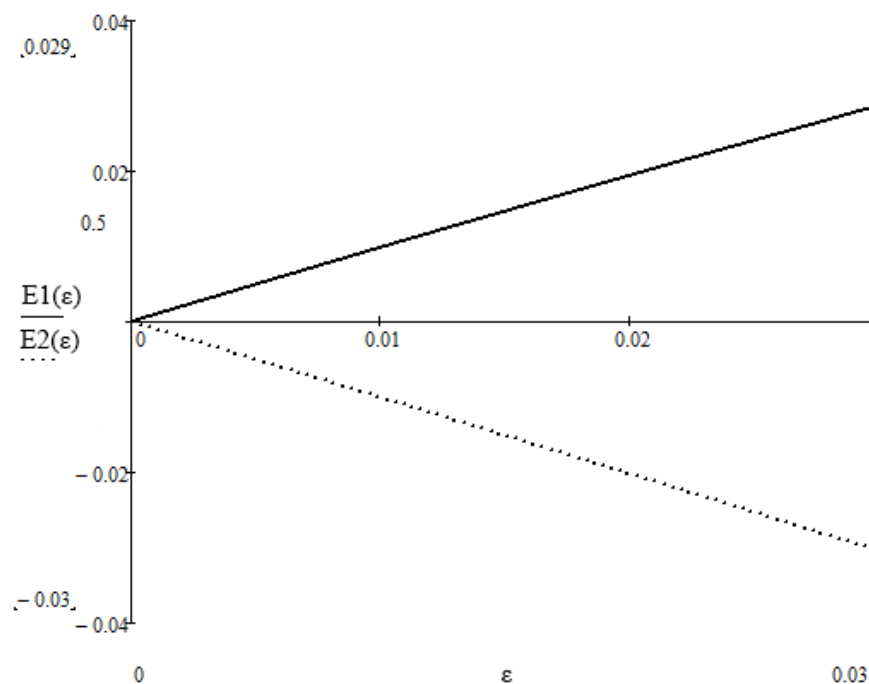


Рисунок 2.2 – График зависимости главных значений тензора Альманси от относительного удлинения образца при плоской деформации

На рисунке 2.3 приведён график изменения ширины полосы $a(t)$ с течением времени.

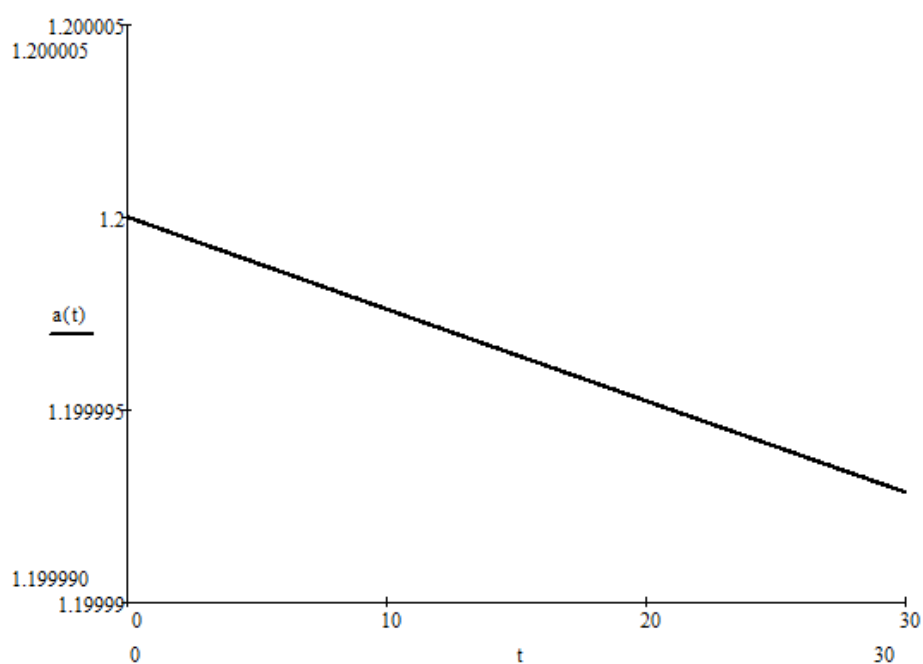


Рисунок 2.3 – Изменение ширины полосы с течением времени при растяжении в условиях плоской деформации

При сжатии полосы направления приложения напряжений меняются на противоположные, на боковых гранях образца они по-прежнему отсутствуют. Тогда граничные условия для напряжений примут вид:

$$\text{при } x_2 = h \sigma_{22} = -2k, \text{ при } x_2 = -h \sigma_{22} = 2k, \quad (2.1.27)$$

откуда следует, что однородное напряжённое состояние определяется выражениями:

$$\sigma_{22} = \mp 2k, \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0. \quad (2.1.28)$$

Поле линий скольжения прямолинейно, угол их наклона к оси Ox_1 также, как и при растяжении, $\varphi = \pi/4$.

Поле скоростей определяется аналогично задаче о растяжении, путём преобразований (2.1.3 – 2.1.14):

$$\begin{cases} V_1(x_1, x_2, t) = \left[c(x_2 + x_1) - c(x_2 - x_1) - \frac{1}{t} \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1 \right] t, \\ V_2(x_1, x_2, t) = -[c(x_2 + x_1) + c(x_2 - x_1)]t. \end{cases} \quad (2.1.29)$$

Граничные условия для скоростей в случае сжатия имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x_2 = h \quad V_2 &= -2cht = -V, c = \frac{V}{2ht}, \\ \text{при } x_1 = a \quad V_1 &= 2cat - \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1 = \frac{Va}{h} - \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, \\ \text{при } x_1 = 0 \quad V_1 &= 0, \text{ при } x_2 = 0 \quad V_2 = 0. \end{aligned}$$

Тогда поле скоростей определится в виде:

$$V_1 = \frac{V}{h} x_1 - \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, V_2 = -\frac{V}{h} x_2. \quad (2.1.30)$$

Выводы о виде функции плотности, сделанные в задаче о растяжении полосы справедливы и для задачи о сжатии.

Компоненты тензора скоростей деформаций ε_{ij} , с учётом (2.1.30) равны:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = \frac{V}{h} - \frac{d}{dt} [\ln \rho], \varepsilon_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -\frac{V}{h}, \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) = 0, \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2} = \\ = \frac{V}{h} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\ln \rho], h = h_0 - Vt. \end{cases} \quad (2.1.31)$$

При сжатии в условиях рассматриваемой однородной деформации углы $\theta = \psi = 0$. Тогда из уравнений (2.1.19) следует:

$$\begin{cases} (I) \frac{de}{dt} + 2\gamma g = 0, \\ (II) \frac{dg}{dt} + 2\gamma \left(e - \frac{1}{2}\right) = 0. \end{cases} \quad (2.1.32)$$

Интегралы системы (2.1.32) находятся аналогично задаче о растяжении образца. Первый интеграл имеет вид

$$e^2 - e = g^2. \quad (2.1.33)$$

Второй интеграл системы (2.1.32) можно получить путём вычитания уравнения (I) из уравнения (II), учитывая, что γ является функцией времени.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(g - e + \frac{1}{2} \right) &= 2\gamma \left(g - e + \frac{1}{2} \right), \\ \ln \left| g - e + \frac{1}{2} \right| &= -2\ln|h_0 - Vt| - \ln \rho|_0^t + \ln C, C = \text{const}, \end{aligned}$$

$$\left| g - e + \frac{1}{2} \right| = \frac{h_0^2 C \rho_0}{\rho(h_0 - Vt)^2}.$$

При $t = 0$ $e = 0, g = 0$, тогда

$$C_2 = \frac{1}{2},$$

и второй интеграл (2.1.32):

$$\left| g - e + \frac{1}{2} \right| = \frac{h_0^2 \rho_0}{2\rho(h_0 - Vt)^2}. \quad (2.1.34)$$

Вводя обозначение $\bar{\varepsilon} = \frac{Vt}{h_0}$ для относительного сжатия образца можно записать общее решение системы (2.1.32) в виде:

$$e^2 - e = g^2, \left| g - e + \frac{1}{2} \right| = \frac{\rho_0}{2\rho(1 - \bar{\varepsilon})^2}. \quad (2.1.35)$$

Тогда инварианты тензора деформаций e и g найдутся в виде:

$$g = \frac{\rho_0^2 - \rho^2(1 - \bar{\varepsilon})^4}{4\rho\rho_0(1 - \bar{\varepsilon})^2}, e = -\frac{(\rho(1 - \bar{\varepsilon})^2 - \rho_0)^2}{4\rho\rho_0(1 - \bar{\varepsilon})^2},$$

откуда главные значения тензора деформаций Альманси равны:

$$E_1 = \frac{1}{2} - \frac{\rho(1 - \bar{\varepsilon})^2}{2\rho_0}, E_2 = \frac{1}{2} - \frac{\rho_0}{2\rho(1 - \bar{\varepsilon})^2}. \quad (2.1.36)$$

На рисунке 2.4 приведены графики зависимости главных значений тензора деформаций Альманси E_1, E_2 от относительного сжатия образца $\bar{\varepsilon}$ при плоской деформации.

Изменение ширины полосы a с течением времени определяется аналогично выводу приведённому в задаче о растяжении полосы и, с учётом взятого вида функции плотности ρ , выражается в виде:

$$a(t) = \frac{a_0 \rho_0}{\rho(1 - \bar{\varepsilon})}. \quad (2.1.37)$$

На рисунке 2.5 представлен график изменения ширины полосы при её сжатии.

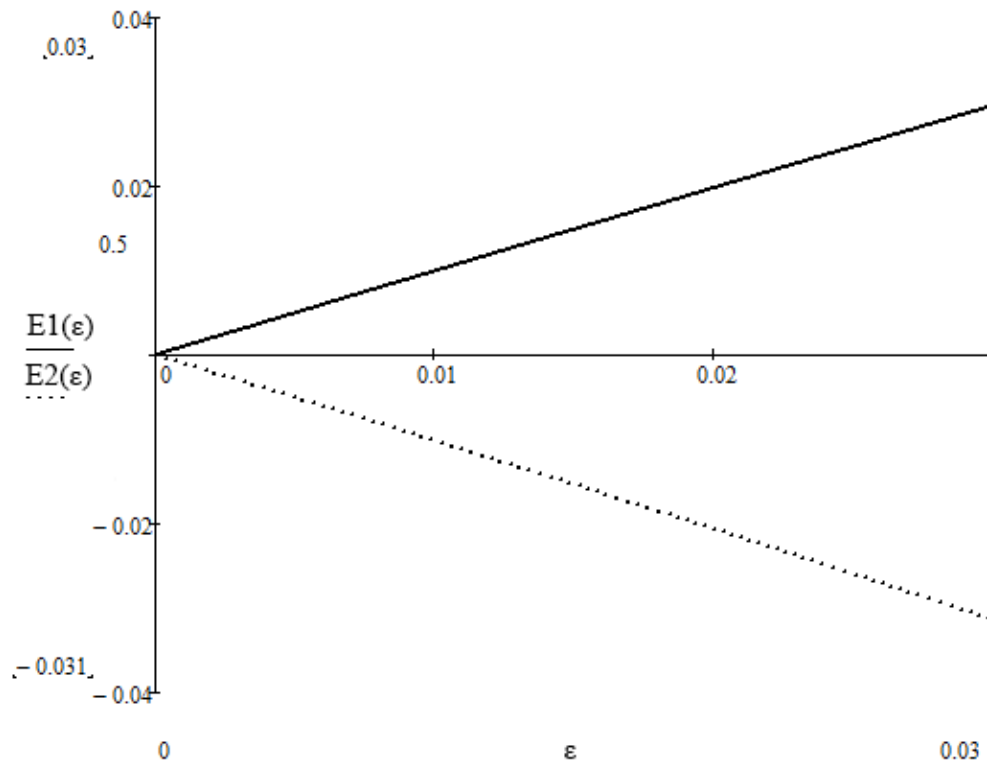


Рисунок 2.4 – График зависимости главных значений тензора Альманси от относительного сжатия образца при плоской деформации

Усилие, необходимое для растяжения полосы, определяется выражением:

$$P = -\frac{4ka_0\rho_0}{\rho(1 - \bar{\varepsilon})}. \quad (2.1.38)$$

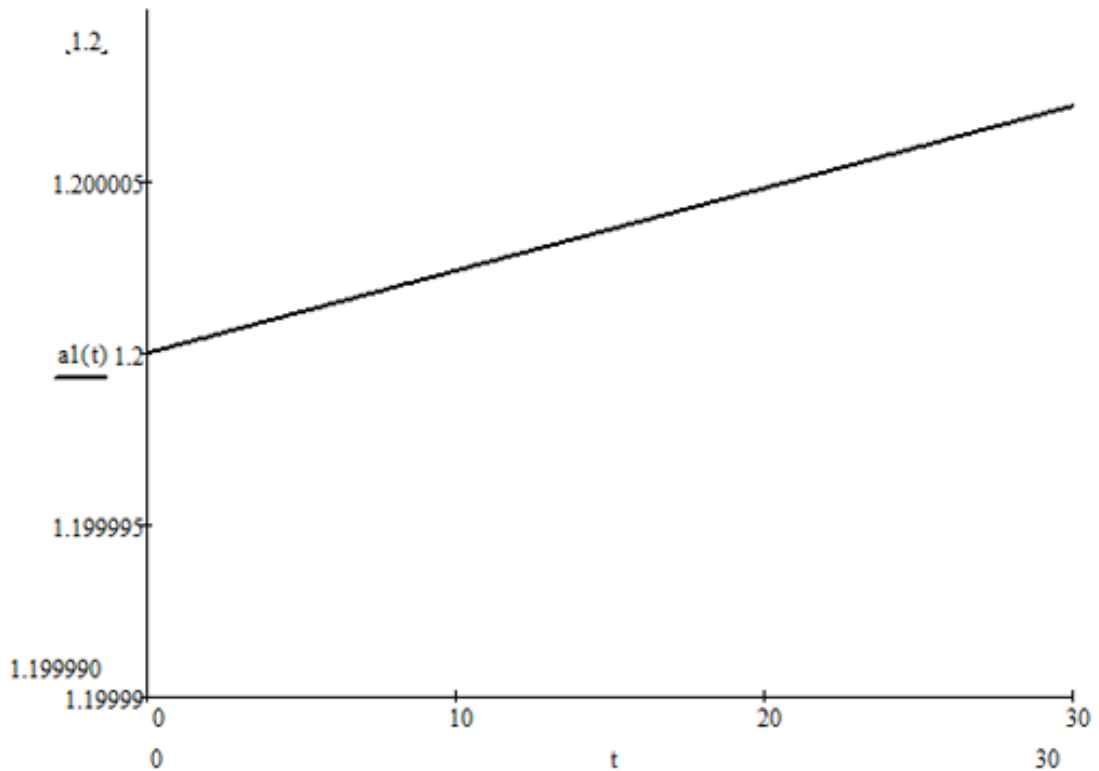


Рисунок 2.5 – Изменение ширины полосы с течением времени при одноосном сжатии в условиях плоской деформации

2.2 Накопление деформаций в полосе при последовательном растяжении-сжатии в условиях плоской деформации

Задача о последовательном одноосном растяжении и сжатии плоского образца формулируется следующим образом: до начала деформирования инварианты тензора конечных деформаций $e_0 = 0$, $g_0 = 0$, углы наклона к оси x_1 главных осей тензора Альманси θ и тензора скоростей перемещений ψ равны: $\theta = \psi = \frac{\pi}{2}$. На первом этапе реализуется решение задачи о растяжении плоского образца с непрерывным полем скоростей и условием сжимаемости материала. На втором этапе образец сжимается, при этом направления главных осей меняются на $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$, а в качестве начальных значений e_0 и g_0 используются значения e и g , полученные на этапе растяжения образца [88].

Первый этап растяжения полностью совпадает с задачей, рассмотренной в пункте 2.1, и инварианты тензора Альманси e и g определяются по формулам (2.1.23).

На этапе сжатия поле скоростей определяется системой уравнений (2.1.30). Относительное сжатие образца определяется параметром $\bar{\varepsilon} = \frac{vt}{h_0}$. Поле деформаций следует из решения системы (2.1.19) при $\theta = \frac{\pi}{2}, \psi = 0$:

$$\begin{cases} (I) \frac{de}{dt} - 2\gamma g = 0, \\ (II) \frac{dg}{dt} - 2\gamma \left(e - \frac{1}{2}\right) = 0. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Преобразование (2.1.19) по законам $(I) \times 2 \left(e - \frac{1}{2}\right) - (II) \times 2g$ приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{d}{dt} g^2 &= 0, \\ \left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 &= C_1, C_1 = \text{const}. \end{aligned}$$

При $t = 0$ $e = e_0, g = g_0$, и

$$C_1 = \left(e_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - g_0^2,$$

тогда первым интегралом системы (2.1.19) будет

$$e^2 - g^2 - e = e_0^2 - g_0^2 - e_0. \quad (2.2.2)$$

Второй интеграл системы (2.2.1) находится из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(g - e + \frac{1}{2}\right) &= -2\gamma \left(g - e + \frac{1}{2}\right), \\ \ln \left|g - e + \frac{1}{2}\right| &= 2 \ln |h_0 - Vt| \Big|_0^t - \ln \rho \Big|_0^t + \ln C, \\ \left|g - e + \frac{1}{2}\right| &= \frac{\rho(h_0 - Vt)^2 C}{h_0^2 \rho_0}. \end{aligned}$$

При $t = 0$ $e = e_0, g = g_0$, тогда

$$C = g_0 - e_0 + \frac{1}{2},$$

и вторым интегралом системы (2.2.1) будет

$$\left|g - e + \frac{1}{2}\right| = \frac{\rho(1 - \bar{\varepsilon})^2 \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right)}{\rho_0}. \quad (2.2.3)$$

Общее решение системы (2.2.1) определяется двумя интегралами:

$$\begin{aligned} e^2 - g^2 - e &= e_0^2 - g_0^2 - e_0, \\ \left|g - e + \frac{1}{2}\right| &= \frac{\rho(1 - \bar{\varepsilon})^2 \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right)}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Откуда следует, что инварианты тензора Альманси находятся по формулам

$$\begin{aligned} g &= \frac{\rho(1 - \bar{\varepsilon})^2 \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right)}{2\rho_0} - \frac{\rho_0 - 4\rho_0(e_0^2 - g_0^2 - e_0)}{8\rho(1 - \bar{\varepsilon})^2 \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right)}, \\ e &= \frac{1}{2} - \frac{\rho(1 - \bar{\varepsilon})^2 \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right)}{2\rho_0} - \frac{\rho_0 - 4\rho_0(e_0^2 - g_0^2 - e_0)}{8\rho(1 - \bar{\varepsilon})^2 \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

При последующем повторном растяжении граничные условия и напряжённое состояние определяются согласно пункту 2.1 формулами (2.1.1), (2.1.2). Поле деформаций следует из решения системы (2.1.19). С учётом того, что теперь при $t = 0$ $e = e_0, g = g_0$ два интеграла, определяющее решение указанной системы примут вид:

$$\begin{aligned} e^2 - g^2 - e &= e_0^2 - g_0^2 - e_0, \\ \left|g - e + \frac{1}{2}\right| &= \frac{\rho(1 + \bar{\varepsilon})^2 \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right)}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Тогда инварианты тензора Альманси равны

$$\begin{aligned} g &= \frac{\rho(1 + \bar{\varepsilon})^2 \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right)}{2\rho_0} + \frac{4\rho_0(e_0^2 - g_0^2 - e_0) - \rho_0}{8\rho(1 + \bar{\varepsilon})^2 \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right)}, \\ e &= \frac{1}{2} - \frac{\rho(1 + \bar{\varepsilon})^2 \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right)}{2\rho_0} + \frac{4\rho_0(e_0^2 - g_0^2 - e_0) - \rho_0}{8\rho(1 - \bar{\varepsilon})^2 \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

На рисунке 2.6 приведены зависимости инвариантов тензора деформаций e и g от относительного удлинения/сжатия образца. Образец растягивается до значения $\bar{\epsilon} = 0,02$, а затем сжимается до прежней длины.

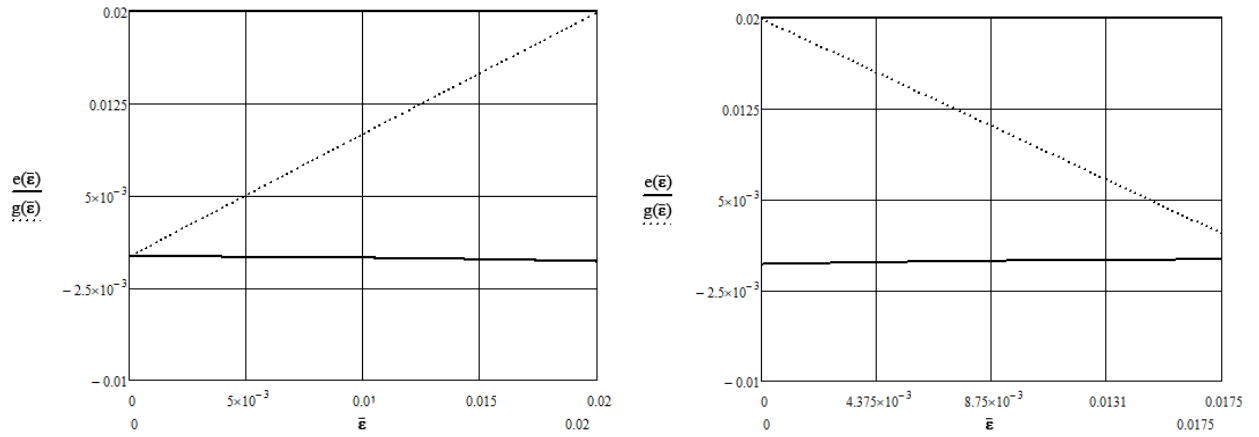


Рисунок 2.6 – Зависимость инвариантов тензора деформаций от относительного удлинения/сжатия образца при плоской деформации

Из полученного поля скоростей перемещений можно найти траектории движения частиц материала. Для растяжения поле скоростей перемещений определяется системой (2.1.15)

$$\begin{cases} v_1(x_1, x_2, t) = -\frac{V}{l_0 + Vt}x_1 - \int \frac{d}{dt}[\ln \rho]dx_1, \\ v_2(x_1, x_2, t) = \frac{V}{l_0 + Vt}x_2. \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Из первого уравнения следует

$$\frac{dx_1}{x_1} = \left(-\frac{d}{dt}[\ln \rho] - \frac{V}{l_0 + Vt} \right) dt,$$

$$\ln x_1 = \ln \frac{C_3}{\rho(l_0 + Vt)}, C_3 - const,$$

$$x_1 = \frac{C_3}{\rho(l_0 + Vt)}.$$

При $t = 0$

$$x_1^0 = \frac{C_3}{\rho_0 l_0} \Rightarrow C_3 = x_1^0 l_0 \rho_0,$$

$$x_1 = \frac{x_1^0 l_0 \rho_0}{\rho(l_0 + Vt)}. \quad (2.2.9)$$

Из второго уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{x_2} &= \frac{V}{l_0 + Vt} dt, \\ \ln x_2 &= \ln l_0 + Vt + \ln C_4, C_4 - const, \\ x_2 &= C_4(l_0 + Vt). \end{aligned}$$

При $t = 0$

$$\begin{aligned} x_2^0 &= C_4 l_0 \Rightarrow C_4 = \frac{x_2^0}{l_0}, \\ x_2 &= \frac{x_2^0}{l_0} (l_0 + Vt). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Здесь x_1^0, x_2^0 – значения x_1, x_2 в момент времени $t = 0$.

Исключение в (2.2.10) параметра t позволяет выразить x_2 в виде функции от x_2 и начальных значений x_1^0, x_2^0 :

$$x_2 = \frac{\rho_0 x_1^0 x_2^0}{\rho x_1}. \quad (2.2.11)$$

Для сжатия поле скоростей определяется в виде:

$$\begin{cases} v_1(x_1, x_2, t) = \frac{V}{h_0 - Vt} x_1 - \frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1, \\ v_2(x_1, x_2, t) = -\frac{V}{h_0 - Vt} x_2. \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Из первого уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{x_1} &= \left(\frac{V}{h_0 - Vt} - \frac{d}{dt} [\ln \rho] \right) dt, \\ \ln x_1 &= \ln \frac{C_5}{\rho(h_0 - Vt)}, C_5 - const, \\ x_1 &= \frac{C_5}{\rho(h_0 - Vt)}. \end{aligned}$$

При $t = 0$

$$x_1^0 = \frac{C_5}{\rho_0 h_0} \Rightarrow C_5 = x_1^0 h_0 \rho_0,$$

$$x_1 = \frac{x_1^0 h_0 \rho_0}{\rho(h_0 - Vt)}. \quad (2.2.13)$$

Из второго уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{x_2} &= -\frac{V}{h_0 - Vt} dt, \\ \ln x_2 &= \ln h_0 - Vt + \ln C_6, C_6 - const, \\ x_2 &= C_6(h_0 - Vt). \end{aligned}$$

При $t = 0$

$$\begin{aligned} x_2^0 &= C_6 h_0 \Rightarrow C_6 = \frac{x_2^0}{h_0}, \\ x_2 &= \frac{x_2^0}{h_0} (h_0 - Vt). \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Исключение в (2.2.14) параметра t даёт:

$$x_2 = \frac{\rho_0 x_1^0 x_2^0}{\rho x_1}. \quad (2.2.15)$$

На рисунке 2.7 приведены траектории движения частиц материала при растяжении и сжатии полосы.

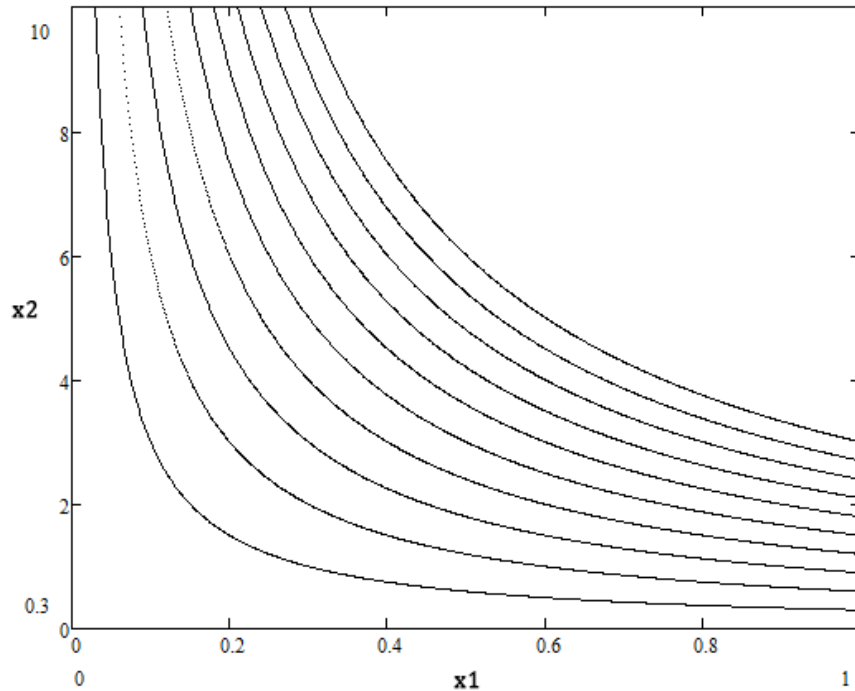


Рисунок 2.7 – Траектории движения частиц материала при растяжении и сжатии полосы в условиях плоской деформации

Из (2.2.11) и (2.2.15) следует, что как в случае растяжения, так и при сжатии частицы материала движутся по одним и тем же траекториям. Значит при последовательном растяжении и сжатии образца все частицы возвращаются в исходное положение, и, следовательно, изменение структуры материала при циклическом нагружении следует связывать не с деформациями, а с энергетическими параметрами. В качестве такого оценочного критерия можно использовать объёмную плотность диссипации энергии

$$\bar{W} = \int_0^t \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dt. \quad (2.2.16)$$

Для процесса растяжения мощность диссипации энергии с учётом (2.1.15) и (2.1.2) может быть записана в виде:

$$\bar{W}'_{\text{раст.}} = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = \varepsilon_{22} 2k = \frac{V}{l_0 + Vt} 2k.$$

Тогда можно найти удельную объёмную работу диссипации энергии на этапе растяжения в виде

$$A_{\text{раст.}} = \int_0^{\Delta t} \bar{W}'_{\text{раст.}} dt = 2k \int_0^{\Delta t} \frac{V}{l_0 + Vt} dt = 2k \ln \left(\frac{l_0 + V\Delta t}{l_0} \right),$$

$$A_{\text{раст.}} = 2k \ln(1 + \bar{\varepsilon}). \quad (2.2.17)$$

Для процесса сжатия мощность диссипации энергии с учётом (2.1.28) и (2.1.30) запишется в виде:

$$\bar{W}'_{\text{сжат.}} = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = 2k \frac{V}{h_0 - Vt}.$$

Удельная объёмная работа диссипации энергии на этапе сжатия образца

$$A_{\text{сжат.}} = \int_0^{\Delta t} \bar{W}'_{\text{сжат.}} dt = 2k \int_0^{\Delta t} \frac{V}{h_0 - Vt} dt = -2k \ln |h_0 - V\Delta t| \Big|_0^{\Delta t}.$$

Так как $h_0 = l_0 + V\Delta t$ – длина образца к концу этапа растяжения, то

$$A_{\text{сжат.}} = -2k(\ln |l_0| - \ln |l_0 + V\Delta t|),$$

$$A_{\text{сжат.}} = 2k \ln(1 + \bar{\varepsilon}). \quad (2.2.18)$$

Удельная объёмная работа за полный цикл, состоящий из растяжения и последующего сжатия образца составляет

$$A_{\text{полн.}} = A_{\text{раст.}} + A_{\text{сжат.}} = 4k \ln(1 + \bar{\varepsilon}) = 4k\varepsilon, \quad (2.2.19)$$

где ε – истинная (логарифмическая) деформация образца на этапе растяжения.

2.3 Растяжение плоского образца с разрывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации с учётом сжимаемости материала

2.3.1 Решение Оната-Прагера

Рассматривается решение задачи о растяжении полосы с разрывным полем скоростей перемещений, полученное Е. Онатом и В. Прагером [102], материал при малых деформациях считается сжимаемым.

Приложенное к образцу напряжение направлено вдоль оси x_2 ; условие сжимаемости материала формулируется в виде

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -\frac{d}{dt} [\ln \rho]. \quad (2.3.1.1)$$

Напряжённое состояние в заштрихованных на рисунке 2.8 областях определяется выражениями

$$\sigma_{22} = \pm 2k, \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0. \quad (2.3.1.2)$$

Система уравнений для определения поля скоростей при плоской деформации имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -\frac{d}{dt} [\ln \rho] \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = 0 \end{cases}. \quad (2.3.1.3)$$

Для дальнейших действий над системой вводятся новые переменные $\xi = x_2 - x_1, \eta = x_2 + x_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} &= -\frac{\partial V_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial \eta}, \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} &= -\frac{\partial V_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial \eta}, \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{\partial V_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

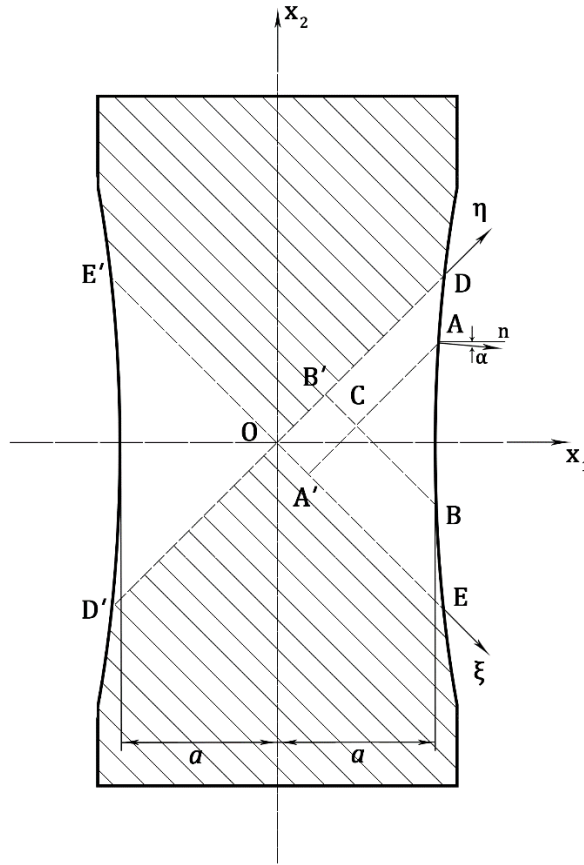


Рисунок 2.8 – Образец, ослабленный двумя симметричными вырезами

С учётом полученных выражений система (2.3.1.3) преобразуется к виду

$$\begin{cases} (I) - \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial \eta} + \frac{\partial V_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial \eta} = -\frac{d}{dt} [\ln \rho] \\ (II) \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial \eta} - \frac{\partial V_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial \eta} = 0 \end{cases}$$

или окончательно

$$\begin{cases} (I) + (II) 2 \frac{\partial V_1}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial V_2}{\partial \eta} = -\frac{d}{dt} [\ln \rho] \\ (I) - (II) - 2 \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial V_2}{\partial \xi} = -\frac{d}{dt} [\ln \rho] \end{cases}.$$

Действующие в незаштрихованной области ODE напряжения определяются в виде

$$\sigma_{11} = 4kc(a - x_1), \sigma_{22} = 2k(1 + 2c(a - x_1)), \sigma_{12} = 4kcx_2, \quad (2.3.1.4)$$

где $2a$ – наименьшая ширина образца, c – const.

Осевая сила, действующая на образец равна

$$F = 2 \int_0^a \sigma_{22} dx_1 = 4ka(1 + ac). \quad (2.3.1.5)$$

Заштрихованные на рисунке 2.8 области движутся как жёсткие со скоростью V параллельно оси x_2 от начала координат. Скорости на границах этих областей равны:

$$\begin{aligned} \text{вдоль линии } OD \quad V_1 - V_2 &= -V; \\ \text{вдоль линии } OE \quad V_1 + V_2 &= -V. \end{aligned} \quad (2.3.1.6)$$

Для того, чтобы найти компоненты скорости в точке C , лежащей внутри области ODE , через эту точку проводятся характеристические линии, пересекающиеся с границами области ODE в точках A' и B' . Тогда, согласно (2.3.1.3) и в соответствии с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \text{вдоль линии } A'C: \quad V_1 + V_2 &= -\frac{1}{2} \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] d\eta + C_1; \\ \text{вдоль линии } B'C: \quad V_1 - V_2 &= \frac{1}{2} \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] d\xi + C_2, \end{aligned} \quad (2.3.1.7)$$

где $C_1, C_2 - const$. С учётом (2.3.1.6), $C_1 = C_2 = -V$.

Функция плотности, как следует из (2.1.4), (2.1.15) зависит только от времени. Тогда

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4} \frac{d}{dt} [\ln \rho] (\xi - \eta) - V, \\ V_2 &= -\frac{1}{4} \frac{d}{dt} [\ln \rho] (\xi + \eta) \end{aligned} \quad (2.3.1.8)$$

или при возвращении к исходным переменным

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 - V, \\ V_2 &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2. \end{aligned} \quad (2.3.1.9)$$

Отсюда следует, что закон движения точки C зависит от вида функции плотности.

2.3.2 Определение поля деформаций в окрестности поверхности разрыва скоростей

При переходе частиц через линию разрыва скоростей будут изменяться градиенты деформаций. Необходимо найти эти изменения.

Пусть L – линия разрыва скоростей перемещений V_i , распространяющаяся с нормальной скоростью $\vec{G}$ ($G_i = Gv_i$). Для описания движения среды используется форма Эйлера [73]. Вводятся следующие обозначения

$$[x_{i,j}^0] = x_{i,j}^{0+} - \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} x_{i,j}^{0-}, [V_i] = V_i^+ - V_i^-, \quad (2.3.2.1)$$

где $[x_{i,j}^0]$ – изменение градиента деформации при пересечении линии разрыва скоростей, $[V_i]$ – разрыв тангенциальной составляющей скорости, индексы $+$ и $-$ обозначают определённую сторону линии разрыва.

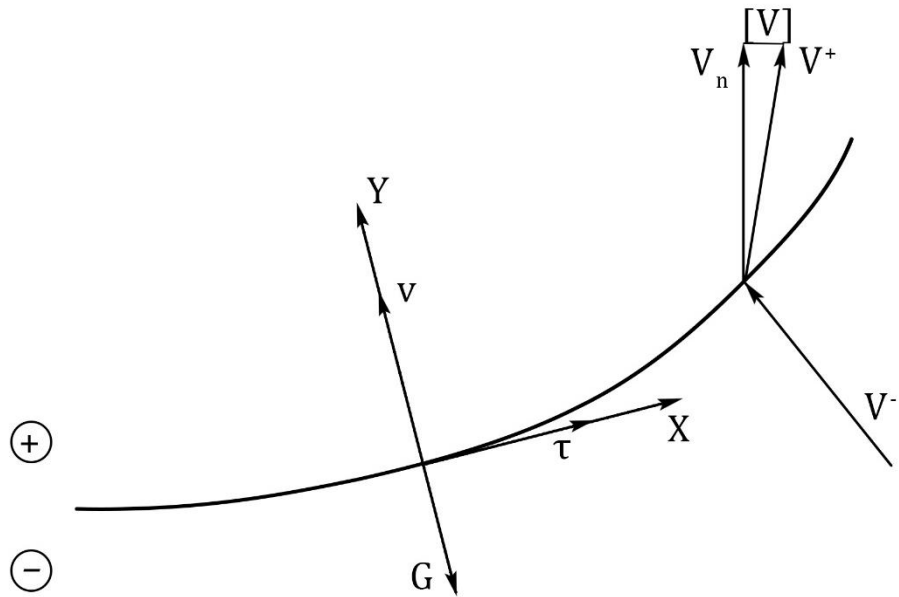


Рисунок 2.9 – Линия разрыва скоростей

При решении поставленной задачи считается, что материал ниже линии L не деформировался, то есть

$$x_{i,j}^{0-} = \delta_{ij}. \quad (2.3.2.2)$$

Для разрывов функций x_i^0 и их производных, предполагающихся вследствие гипотезы сплошности непрерывными, имеют место следующие кинематические и геометрические условия совместности:

$$[x_{i,j}^0] = \lambda_i v_j, \left[\frac{\partial x_i}{\partial t} \right] = -\lambda_i G, \quad (2.3.2.3)$$

где v_i – компоненты единичного вектора нормали к линии разрыва L , G – нормальная скорость движения линии L , λ_i – некоторые функции, определённые на линии разрыва.

Вдоль каждой траектории материальной частицы лагранжевы координаты постоянны, поэтому справедлива система равенств

$$\frac{dx_j^0}{dt} = \frac{\partial x_j^0}{\partial t} + V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k}, \quad (2.3.2.4)$$

откуда следует

$$\left[\frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] = - \left[V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} \right]. \quad (2.3.2.5)$$

С учётом (2.3.2.2) и (2.3.2.3)

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] &= - \left(V_k^+ x_{j,k}^{0+} - V_k^- \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} x_{j,k}^{0-} \right) = - \left(V_k^+ [x_{j,k}^0] + \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} x_{j,k}^{0-} [V_k] \right), \\ \left[\frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] &= - \left(V_k^+ \lambda_j v_k + \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} [V_j] \right), \end{aligned} \quad (2.3.2.6)$$

или окончательно

$$\left[\frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] = - \left(V_n \lambda_j + \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} [V_j] \right). \quad (2.3.2.7)$$

Здесь $V_n = V_k^+ v_k = t V_k^- v_k$ – нормальная компонента скорости движения частиц на линии разрыва, которая вследствие гипотезы сплошности среды должна быть непрерывна. Поэтому вектор разрыва скорости $[V_i]$ всегда коллинеарен единичному вектору касательной к линии разрыва τ_i :

$$[V_i] = [V_\tau] \tau_i, \quad (2.3.2.8)$$

где $[V_\tau] = V_\tau^+ - V_\tau^-$ – модуль вектора разрыва скорости.

Из сравнения правых частей выражений (2.3.2.3) и (2.3.2.7) следует, что

$$\lambda_i = \frac{\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} [V_i]}{G + V_n}, [x_{i,j}^0] = \frac{\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} [V_i]}{G + V_n} v_j \quad (2.3.2.9)$$

и

$$x_{i,j}^{0+} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \left(\delta_{ij} + \frac{[V_i]}{G + V_n} v_j \right). \quad (2.3.2.10)$$

Абсолютное значение величины

$$W = \frac{[V_\tau]}{G + V_n} k \quad (2.3.2.11)$$

имеет физический смысл объёмной плотности диссипации энергии, получаемой материальной частицей при пересечении поверхности разрыва скоростей. С введением обозначения

$$|\bar{W}| = \frac{|W|}{k} \quad (2.3.2.12)$$

для объёмной плотности диссипации энергии отнесённой к пределу текучести k , выражения (2.3.2.9), (2.3.2.10) преобразуются к виду

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \bar{W} \tau_i, [x_{i,j}^0] = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \bar{W} \tau_i v_j, x_{i,j}^{0+} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} (\delta_{ij} + \bar{W} \tau_i v_j). \quad (2.3.2.13)$$

На рисунке 2 вводится локальная система координат X, Y , связанная с касательной и нормалью к линии разрыва скоростей. Её орты

$$v = (0, 1), \tau = (1, 0) \quad (2.3.2.14)$$

Тогда для разрыва тензора градиентов перемещений имеет место равенство

$$[x_{i,j}^0] = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \bar{W} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.2.15)$$

Из формулы (2.3.2.13) следует, что

$$x_{i,j}^{0+} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} & \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \bar{W} \\ 0 & \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \end{bmatrix}$$

и компоненты тензора конечных деформаций Альманси в системе координат X, Y могут быть представлены в виде

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - x_{k,i}^{0+} x_{k,j}^{0+}),$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\rho}{\rho_0} & -\frac{\rho}{\rho_0} \bar{W} \\ -\frac{\rho}{\rho_0} \bar{W} & 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \bar{W}^2 - \frac{\rho}{\rho_0} \end{bmatrix}. \quad (2.3.2.16)$$

Угол θ между первым главным направлением тензора Альманси и касательной к линии разрыва скоростей L , а также основные инварианты тензора Альманси вычисляются через величину $\bar{W}$ по следующим формулам:

$$tg 2\theta = \frac{2E_{12}}{E_{11} - E_{22}} = -\frac{\frac{\rho}{\rho_0} \bar{W}}{\frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_0} \bar{W}^2} = -\frac{2}{\bar{W}},$$

$$I_E = \frac{1}{2} (E_{11} + E_{22}) = \frac{1}{4} \left(2 - \frac{\rho}{\rho_0} \bar{W}^2 - 2 \frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (2.3.2.17)$$

$$II_E = (E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \bar{W}^4 + \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \bar{W}^2;$$

главные значения тензора Альманси равны

$$E_1 = \frac{1}{2} (E_{11} + E_{22}) + \frac{1}{2} \sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2},$$

$$E_2 = \frac{1}{2} (E_{11} + E_{22}) - \frac{1}{2} \sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}.$$

С учётом (2.3.2.17):

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{4} \frac{\rho}{\rho_0} \bar{W}^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right), \\
E_2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{1}{4} \frac{\rho}{\rho_0} \bar{W}^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} + 1 \right).
\end{aligned} \tag{2.3.2.18}$$

По условию сжимаемости

$$(1 - 2E_1)(1 - 2E_2) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2.$$

Из (2.3.2.17) следует, что

$$\begin{aligned}
1 - 2E_1 &= \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_0} \bar{W}^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right), \\
1 - 2E_2 &= \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_0} \bar{W}^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} + 1 \right),
\end{aligned}$$

откуда исходит, что условие сжимаемости для полученных формул выполняется.

Если материал ниже линии разрыва L деформировался до её прохождения, то вводится промежуточная конфигурация

$$\bar{x}_i^0 = x_i(x_i^0, \bar{t}) \tag{2.3.2.19}$$

в момент времени $t = \bar{t}$ и тензор градиентов перемещений имеет вид

$$\frac{\partial x_i^0}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i^0}{\partial \bar{x}_k^0} \frac{\partial \bar{x}_k^0}{\partial x_j}. \tag{2.3.2.20}$$

Тогда согласно (2.3.2.20)

$$\frac{\partial x_i^{0+}}{\partial x_j} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} (\delta_{ik} + \bar{W} \tau_i v_k) \frac{\partial x_k^{0-}}{\partial x_j}. \tag{2.3.2.21}$$

2.3.3 Неединственность решения задачи о растяжении полосы с разрывным полем скоростей перемещений

Симметричное течение является не единственным возможным течением в полосе [73, 88]. Следует рассмотреть также возможные несимметричные течения. Для исключения неединственности поля скоростей в начальный момент времени рассматривается растяжение полосы с прямоугольной симметричной выточкой (рис. 2.10) такой, что точки A, A', B, B' являются точно вершинами квадрата со стороной $2a$.

Тогда в начальный момент времени $t = 0$ течение будет единственным и поле скоростей будет описываться следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} &\text{выше линий } OA', OA: V_1 = 0, V_2 = V; \\ &\text{ниже линий } OB', OB: V_1 = 0, V_2 = -V; \\ &\text{внутри } \Delta OAB: V_1 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 - V, V_2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2; \\ &\text{внутри } \Delta OA'B': V_1 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V, V_2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2. \end{aligned} \quad (2.3.3.1)$$

Свободная граница полосы на участках AB и $A'B'$ в начальный момент времени прямолинейна. Линии AB и $A'B'$ движутся вместе с областями AOB и $A'OB'$, не изменяя своей формы, поэтому поле скоростей будет сохранять вид (2.3.3.1), а линии скольжения $B'OA$ и $A'OB$ будут прямыми в течение всего процесса деформирования полосы.

Решение является полным в любой момент времени, так как статически допустимое продолжение поля напряжений в жёсткие области имеет вид

$$\sigma_{22} = \pm 2k, \sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0. \quad (2.3.3.2)$$

С течением времени положение линий скольжения изменяется и определяется точками A, A', B, B' , лежащими на пересечении вновь образующихся свободных поверхностей на участках $AA_1, A'A'_1, BB_1, B'B'_1$ с поверхностями AB и $A'B'$ (рис. 2.11). Форма поверхностей AB и $A'B'$ известна, формы образующихся свободных поверхностей должны быть определены.

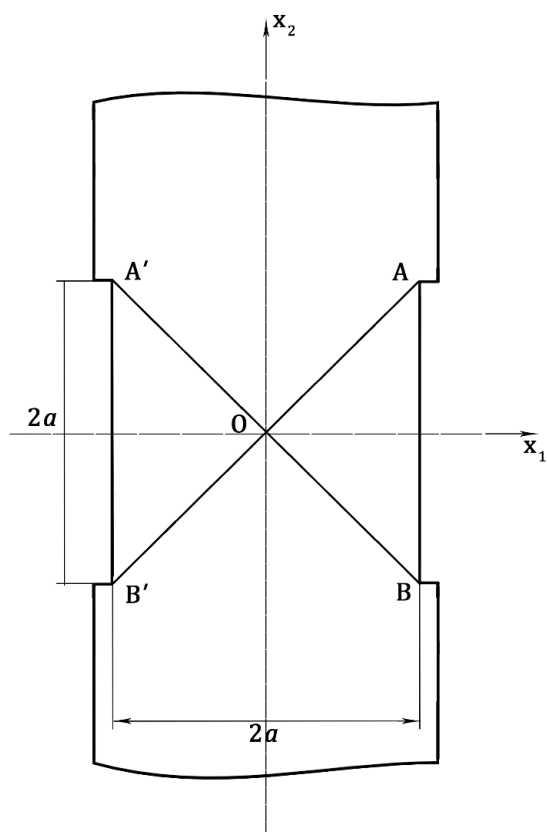


Рисунок 2.10 – Образец с симметричной прямоугольной выточкой

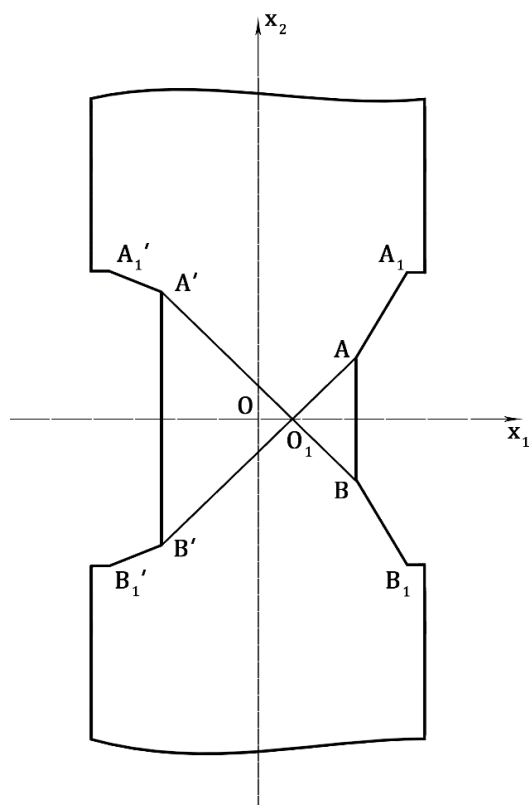


Рисунок 2.11 – Изменение положения линий скольжения с течением времени

Уравнения подвижных свободных границ имеют вид:

$$\begin{aligned}
 &\text{на } AA_1: x_2 = F_A(x_1) + Vt, \\
 &\text{на } A'A'_1: x_2 = F_{A'}(x_1) + Vt, \\
 &\text{на } BB_1: x_2 = F_B(x_1) - Vt, \\
 &\text{на } B'B'_1: x_2 = F_{B'}(x_1) - Vt, \\
 &\text{на } AB: x_1 = \frac{-V \int_0^t \sqrt{\rho} dt + a\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}}, x_2 = a \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}, \\
 &\text{на } A'B': x_1 = \frac{V \int_0^t \sqrt{\rho} dt - a\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}}, x_2 = -a \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}},
 \end{aligned} \tag{2.3.3.3}$$

где $F_A(x_1)$, $F_{A'}(x_1)$, $F_B(x_1)$, $F_{B'}(x_1)$ – неизвестные функции. Из уравнений (2.3.3.3) следует

$$\begin{aligned}
 x_{1A} &= \frac{-V \int_0^t \sqrt{\rho} dt + a\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}}, x_{2A} = F_A(x_{1A}) + Vt, \\
 x_{1A'} &= \frac{V \int_0^t \sqrt{\rho} dt - a\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}}, x_{2A'} = F_{A'}(x_{1A'}) + Vt, \\
 x_{1B} &= \frac{-V \int_0^t \sqrt{\rho} dt + a\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}}, x_{2B} = F_B(x_{1B}) - Vt, \\
 x_{1B'} &= \frac{V \int_0^t \sqrt{\rho} dt - a\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}}, x_{2B'} = F_{B'}(x_{1B'}) - Vt.
 \end{aligned} \tag{2.3.3.4}$$

Так как линии скольжения $A'B$ и AB' ортогональны и наклонены к оси x под углом $\pi/4$

$$x_{2A} - x_{2B'} = x_{1A} - x_{1B'}, x_{2A'} - x_{2B} = x_{1B} - x_{1A'}, \tag{2.3.3.5}$$

или, с учётом (2.3.3.4):

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} F_A(x_{1A}) + Vt - F_{B'}(x_{1B'}) + Vt = 2x_{1A} \\ F_{A'}(x_{1A'}) + Vt - F_B(x_{1B}) + Vt = 2x_{1A'} \end{cases}, \\
 &\begin{cases} F_A(x_{1A}) - F_{B'}(x_{1B'}) = 2x_{1A} - 2Vt \\ F_{A'}(x_{1A'}) - F_B(x_{1B}) = 2x_{1A} - 2Vt \end{cases}.
 \end{aligned} \tag{2.3.3.6}$$

В общем случае две из четырёх неизвестных функций $F_A(x_1)$, $F_{A'}(x_1)$, $F_B(x_1)$, $F_{B'}(x_1)$ произвольны. В частном случае при предположении симметрии течения относительно осей x и y имеют место дополнительные уравнения

$$F_A(x_1) = F_{A'}(-x_1), F_A(x_1) = -F_B(x_1). \quad (2.3.3.7)$$

При учёте (2.3.3.6) получается система из четырёх уравнений

$$\begin{cases} F_A(x_{1A}) - F_{B'}(x_{1B'}) = 2x_{1A} - 2Vt \\ F_{A'}(x_{1A'}) - F_B(x_{1B}) = 2x_{1A} - 2Vt \\ F_A(x_1) = F_{A'}(-x_1) \\ F_A(x_1) = -F_B(x_1) \end{cases}.$$

Из (2.3.3.3) x_{1A} имеет вид $x_{1A} = f(t)$, откуда $t = f^{-1}(x_{1A})$. Тогда

$$\begin{aligned} F_A(x_1) &= x_1 - Vf^{-1}(x_{1A}), F_{A'}(-x_1) = -x_1 - Vf^{-1}(-x_{1A}), \\ F_B(x_1) &= -x_1 + Vf^{-1}(x_{1A}), F_{B'}(-x_1) = x_1 + Vf^{-1}(-x_{1A}), \end{aligned} \quad (2.3.3.8)$$

$$\begin{aligned} x_{2A} &= x_1 - Vf^{-1}(x_{1A}) + Vt, x_{2A'} = -x_1 - Vf^{-1}(-x_{1A}) + Vt, \\ x_{2B} &= -x_1 + Vf^{-1}(x_{1A}) - Vt, x_{2B'} = x_1 + Vf^{-1}(-x_{1A}) - Vt. \end{aligned} \quad (2.3.3.9)$$

Неединственность рассматриваемого течения связана с тем, что образование деформированных поверхностей определяется не только полем скоростей в данный момент времени, но и его изменением.

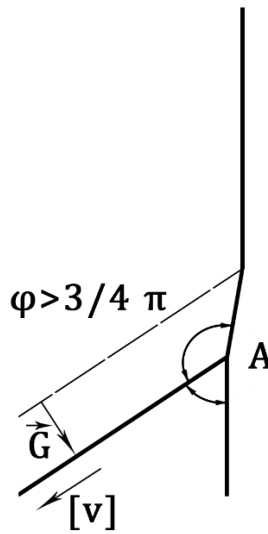


Рисунок 2.12 – Возможное направление движения точки A

Из условий существования статически допустимого продолжения поля напряжений следует, что точка A перемещается вниз по вновь образующейся свободной поверхности – подвижной границе AB (рис. 2.12), поэтому

$$F'_A(x_1) \geq 1. \quad (2.3.3.10)$$

При $F'_A(x) = 1$ образование свободной поверхности происходит вдоль линии скольжения OA . Аналогичные ограничения для остальных функций имеют вид:

$$F'_{A'}(x_1) \leq -1, F'_B(x_1) \leq -1, F'_{B'}(x_1) \geq 1. \quad (2.3.3.11)$$

Дифференцирование (2.3.3.6) по времени t даёт:

$$\begin{cases} F'_A(x_1) = 2 - F'_{B'}(-x_1) + \frac{4V\rho\sqrt{\rho}}{2V\rho\sqrt{\rho} + \left[a\sqrt{\rho_0} - V \int_0^t \sqrt{\rho} dt\right] \rho'} \\ F'_{A'}(-x_1) = -2 - F'_B(x_1) - \frac{4V\rho\sqrt{\rho}}{2V\rho\sqrt{\rho} + \left[a\sqrt{\rho_0} - V \int_0^t \sqrt{\rho} dt\right] \rho'} \end{cases}. \quad (2.3.3.12)$$

Отсюда, с учётом (2.3.3.11), следует

$$\begin{aligned} 1 &\leq F'_A(x_1) \leq 1 + \frac{4V\rho\sqrt{\rho}}{2V\rho\sqrt{\rho} + \left[a\sqrt{\rho_0} - V \int_0^t \sqrt{\rho} dt\right] \rho'}, \\ -1 - \frac{4V\rho\sqrt{\rho}}{2V\rho\sqrt{\rho} + \left[a\sqrt{\rho_0} - V \int_0^t \sqrt{\rho} dt\right] \rho'} &\leq F'_{A'}(-x_1) \leq -1, \\ -1 - \frac{4V\rho\sqrt{\rho}}{2V\rho\sqrt{\rho} + \left[a\sqrt{\rho_0} - V \int_0^t \sqrt{\rho} dt\right] \rho'} &\leq F'_B(x_1) \leq -1, \\ 1 &\leq F'_{B'}(-x_1) \leq 1 + \frac{4V\rho\sqrt{\rho}}{2V\rho\sqrt{\rho} + \left[a\sqrt{\rho_0} - V \int_0^t \sqrt{\rho} dt\right] \rho'}. \end{aligned} \quad (2.3.3.13)$$

Всевозможные несимметричные течения могут быть получены путём задания на плоскости x, y движения точки O , в которой пересекаются линии скольжения AOB' и $A'OB$. Координаты точки O определяются уравнениями

$$x_{1o} = \frac{x_{1A} + x_{1A'} - x_{2A} + x_{2A'}}{2}, x_{2o} = \frac{x_{2A} + x_{2A'} - x_{1A} + x_{1A'}}{2}. \quad (2.3.3.14)$$

Подстановка (2.3.3.4) в уравнения (2.3.3.14) даёт

$$x_{1o} = \frac{F_{A'}(-x_{1A}) - F_A(x_{1A})}{2}, \quad (2.3.3.15)$$

$$x_{2o} = \frac{[F_A(x_{1A}) + F_{A'}(-x_{1A}) + 2Vt]\sqrt{\rho} + 2V \int_0^t \sqrt{\rho} dt - 2a\sqrt{\rho_0}}{2\sqrt{\rho}}.$$

При дифференцировании по t (2.3.3.15) преобразуется к виду

$$\frac{dx_{1o}}{dt} = \frac{2V\rho\sqrt{\rho} + [a\sqrt{\rho_0} - V \int_0^t \sqrt{\rho} dt]\rho'}{4\rho\sqrt{\rho}} (F'_{A'}(-x_{1A}) + F'_A(x_{1A})), \quad (2.3.3.16)$$

$$\frac{dx_{2o}}{dt} = \frac{2V\rho\sqrt{\rho} + [a\sqrt{\rho_0} - V \int_0^t \sqrt{\rho} dt]\rho'}{4\rho\sqrt{\rho}} (F'_{A'}(x_{1A}) - F'_A(x_{1A}) + 2) + V,$$

или, с учётом (2.3.3.10), (2.3.3.11)

$$-V \leq \frac{dx_{1o}}{dt} \leq V, -V \leq \frac{dx_{2o}}{dt} \leq V. \quad (2.3.3.17)$$

Таким образом траектория движения точки O может быть направлена произвольно, а скорость её движения ограничена условиями (2.3.3.17).

Все несимметричные решения будут полными, причём зависимости усилий, необходимых для деформации полосы, будут совпадать с соответствующими зависимостями для симметричного течения

$$p = -4k \frac{V \int_0^t \sqrt{\rho} dt - a\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}}. \quad (2.3.3.18)$$

Пусть в начальный момент времени пластическое течение имеет симметричную форму и точка O перемещается со скоростью s (рис. 2.13), тогда линии скольжения $L_1 - OA$, $L_2 - OB$, $L_3 - OB'$, $L_4 - OA'$ будут перемещаться в плоскости XY с некоторыми нормальными скоростями G_1, G_2, G_3, G_4 .

Пусть $V_{n1}, V_{n2}, V_{n3}, V_{n4}$ – нормальные компоненты скоростей перемещений, а $[V_{\tau 1}], [V_{\tau 2}], [V_{\tau 3}], [V_{\tau 4}]$ – разрывы тангенциальных компонент скоростей перемещений на соответствующих линиях разрыва [88]. На рисунке 2.13 представлены положительные направления величин $V_{ni}, [V_{\tau i}]$ и G_i .

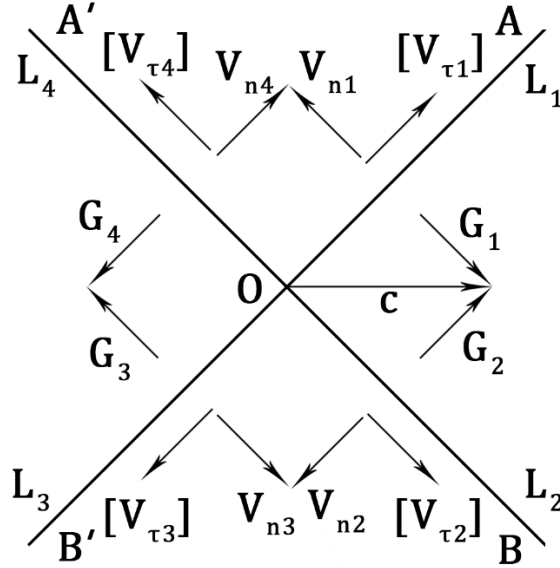


Рисунок 2.13 – Линии скольжения

Пусть точка O движется по закону

$$x_{1o} = x_{1o}(t), x_{2o} = x_{2o}(t). \quad (2.3.3.19)$$

Объёмная плотность диссипации энергии, получаемой частицей при пересечении соответствующей линии разрыва скоростей, определяется выражением

$$W_i = \frac{[V_{\tau i}]k}{G_i + V_{ni}} \quad (i = \overline{1,4}). \quad (2.3.3.20)$$

Числитель равенства (2.3.3.20) определяет работу, совершаемую внутренними силами на единице площади, соответствующей линии разрыва в единицу времени. Знаменатель определяет объём материала, протекающего через единицу площади указанной поверхности в единицу времени.

Линии L_i не изменяют своего угла наклона к оси x , поэтому

$$[V_{\tau i}] = \frac{V}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V\right)^2}, \quad (2.3.3.21)$$

$$V_{ni} = \frac{V}{\sqrt{2}} \quad (i = \overline{1,4}),$$

$$G_1 = c \sin \varphi, G_2 = c \cos \varphi, G_3 = -c \sin \varphi, G_4 = -c \cos \varphi, \quad (2.3.3.22)$$

где c – модуль скорости движения точки O , φ – угол между вектором c и линией L_1 .

Для рассматриваемой задачи W_i определяются величинами G_i и t и являются функциями c , φ и t

$$W_i = \frac{\left(V + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V \right)^2} \right) k}{\sqrt{2}G + V}. \quad (2.3.3.23)$$

Область допустимых значений G_i :

$$-V_{ni} \leq G_i \leq +\infty. \quad (2.3.3.24)$$

При $G_i \rightarrow +\infty$ $W_i \rightarrow 0$; при $G_i \rightarrow -V_{ni}$ $W_i \rightarrow +\infty$; при $G_i = 0$ $W_i = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2V} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V \right)^2} \right) k$. В случае $G_i = -V_{ni}$ происходит

сдвиг материала вдоль линии скольжения по одним и тем же частицам. При $G_i < -V_{ni}$ полного решения рассматриваемой задачи с выбранным полем линий скольжения не существует [74]. Вектор c направлен вдоль оси x и ограничен по модулю условием (2.3.3.24).

При $c \neq 0$ хотя бы на двух линиях L_i значения G_i имеют противоположные знаки, поэтому

$$\inf_{L_i} W < W|_{G=0} < \sup_{L_i} W. \quad (2.3.3.25)$$

При $c = 0$

$$\inf_{c,\varphi} \sup_{L_i} W = \sup_{c,\varphi} \inf_{L_i} W = W|_{G=0}. \quad (2.3.3.26)$$

Условие (2.3.3.26) выделяет из возможных пластических течений единственное предпочтительное – с неподвижной точкой O . Данное условие также позволяет сформулировать критерий выбора предпочтительного решения задач о пластическом течении с учётом изменений геометрии тела, когда существует несколько (бесконечное множество) полных решений:

$$\inf_c \sup_{L_i} W \quad (2.3.3.27)$$

Пусть точка O движется по закону (2.3.3.19). Разрывы компонент скорости частицы $[V_i]$, компоненты нормали к линии скольжения v_i и нормальная скорость распространения линии скольжения G определяются соотношениями

$$\begin{aligned} [V_x] &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V, [V_y] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V, \\ G &= \frac{-x_1'{}_o + x_2'{}_o}{\sqrt{2}}, v_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, v_y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (2.3.3.28)$$

Компоненты тензора градиентов деформаций и тензора Альманси определяются выражениями (2.3.2.17) при

$$\bar{W} = \frac{[V_\tau]}{G + V_n} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2V} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V\right)^2}}{\sqrt{2}\bar{G} + 1},$$

где $\bar{G} = \frac{G}{V}$.

Компоненты тензора градиентов деформаций определяются из соотношений (2.3.2.10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1^0}{\partial x_1} &= \left(1 - \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2V} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V\right)^2}}{2(\sqrt{2}\bar{G} + 1)} \right) \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}, \\ \frac{\partial x_1^0}{\partial x_2} &= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2V} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V\right)^2}}{2(\sqrt{2}\bar{G} + 1)} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}, \\ \frac{\partial x_2^0}{\partial x_1} &= -\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2V} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V\right)^2}}{2(\sqrt{2}\bar{G} + 1)} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}, \\ \frac{\partial x_2^0}{\partial x_2} &= \left(1 + \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2V} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V\right)^2}}{2(\sqrt{2}\bar{G} + 1)} \right) \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}. \end{aligned} \quad (2.3.3.29)$$

Обозначение

$$A = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2V} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V\right)^2}}{2(\sqrt{2}\bar{G} + 1)}. \quad (2.3.3.30)$$

позволяет записать компоненты тензор конечных деформаций Альманси в виде

$$\begin{aligned}
E_{11} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) + A \frac{\rho}{\rho_0} (1 - A), \\
E_{12} &= A^2 \frac{\rho}{\rho_0}, E_{21} = A^2 \frac{\rho}{\rho_0} \\
E_{22} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - A \frac{\rho}{\rho_0} (1 + A).
\end{aligned} \tag{2.3.3.31}$$

Его инварианты

$$\begin{aligned}
I_E &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - A^2 \frac{\rho}{\rho_0}, \\
II_E &= 4A^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 (1 + A^2),
\end{aligned} \tag{2.3.3.32}$$

$$E_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - A^2 \frac{\rho}{\rho_0} \pm A \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{1 + A^2}. \tag{2.3.3.33}$$

Первое главное направление тензора E_{ij} определяется углом θ

$$tg 2\theta = A. \tag{2.3.3.34}$$

Для симметричного течения $\bar{G} = 0$, поэтому

$$\bar{A} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}V} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V \right)^2}, \tag{2.3.3.35}$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \bar{A}^2 \frac{\rho}{\rho_0} + \bar{A} \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{1 + \bar{A}^2},$$

$$2\theta_1 = arctg(\bar{A}),$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2} arctg(\bar{A}),$$

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} (arctg(\bar{A}) - \pi).$$

На рисунке 2.14 представлены зависимости главного значения тензора Альманси

E_1 и угла θ_1 от величины $\bar{G}$.

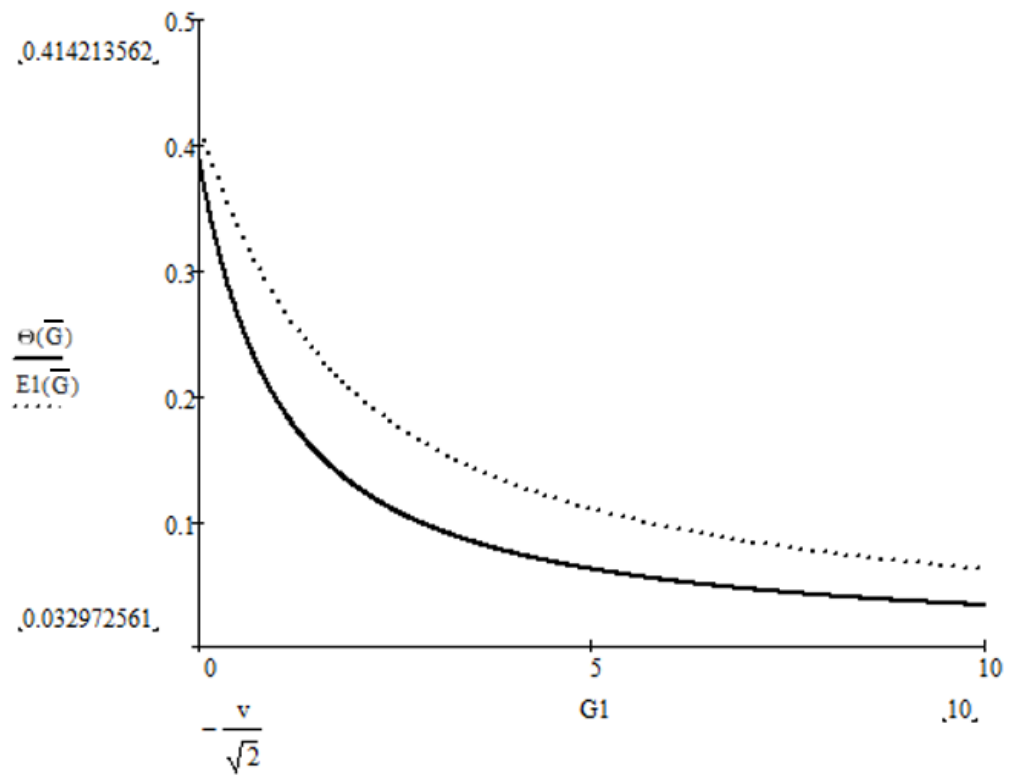


Рисунок 2.14 – График зависимости главного значения тензора Альманси E_1 и угла θ_1 от величины $\bar{G}$

2.3.4 Растяжение полосы с разрушением

Пусть в полосе имеется начальная трещина OO' (рис. 2.15). В рамках рассматриваемого подхода её величина и направление не влияют на пластическое течение [88]. Если при растяжении материал разрушаться не будет, то пластическое течение будет развиваться аналогично решению Оната–Прагера (пункт 2.3.1).

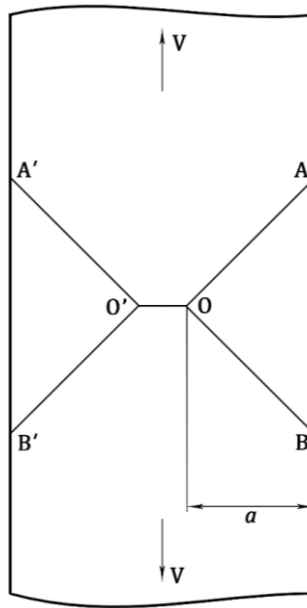


Рисунок 2.15 – Полоса с начальной трещиной

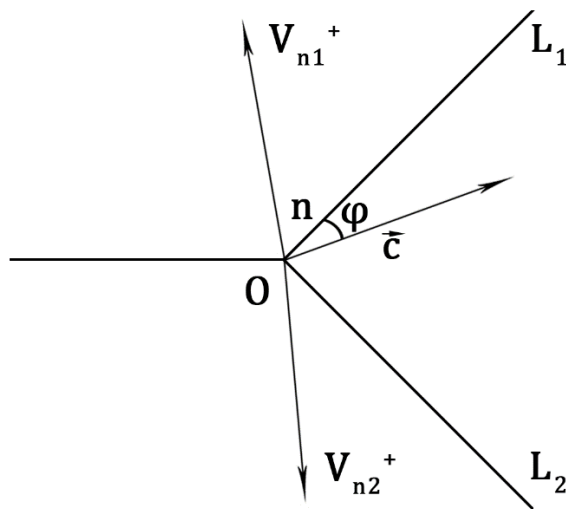


Рисунок 2.16 – Движение вершины трещины O при разрушении материала

При разрушении материала вершина трещины O будет перемещаться в направлении вектора c (рис. 2.16).

Рассматривается непрерывное развитие трещины при условии

$$W = W_*. \quad (2.3.4.1)$$

Величина W_* , согласно (2.3.3.20), изменяется только при $G_i > 0$. Это возможно при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то есть вектор c должен находиться между линиями L_1, L_2 . Если вектор c будет находиться выше оси X , то $\sup W_i = W_1$ и разрушение будет определяться линией L_2 .

Пусть $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, тогда из условия разрушения (2.3.4.1) следует:

$$\bar{W}_1 = \bar{W}_* = \frac{B}{\sqrt{2}c \sin \varphi + V}, \bar{W} = \frac{W}{k}, \bar{W}_* = \frac{W_*}{k}, \quad (2.3.4.2)$$

где

$$B = V + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V\right)^2}. \quad (2.3.4.3)$$

Из (2.3.4.2) можно определить скорость движения вершины трещины

$$c = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \varphi} \left[\frac{B}{\bar{W}_*} - V \right]. \quad (2.3.4.4)$$

Усилие, необходимое для деформирования полосы определяется по формуле

$$p = 4ka(t),$$

где $a(t) = x_{\text{гр}} - x_O$, $x_{\text{гр}}$ – абсцисса внешней границы полосы, x_O – абсцисса вершины трещины.

Скорость движения вершины трещины c полагается постоянной, тогда $\left[\frac{B}{\bar{W}_*} - V \right]$ также есть постоянная величина, и

$$x_O = \frac{1}{2} (ctg \varphi + 1) \left(\frac{B}{\bar{W}_*} - V \right) t, x_{\text{гр}} = \frac{-V \int_0^t \sqrt{\rho} dt + a \sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}}. \quad (2.3.4.5)$$

Тогда

$$P = \frac{p}{2k} = 2 \left[\frac{-V \int_0^t \sqrt{\rho} dt + a \sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2} (ctg \varphi + 1) \left(\frac{B}{\bar{W}_*} - V \right) t \right]. \quad (2.3.4.6)$$

Скорость изменения усилия равна

$$\frac{dP}{dt} = - \left[\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + 2V + (ctg\varphi + 1) \left(\frac{B}{\bar{W}_*} - V \right) \right], \quad (2.3.4.7)$$

При $\frac{\pi}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$:

$$\bar{W}_2 = \bar{W}_* = \frac{B}{\sqrt{2}\bar{c} \cos \varphi + V}, \quad \bar{c} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \varphi} \left[\frac{B}{\bar{W}_*} - V \right]. \quad (2.3.4.8)$$

Усилие, необходимое для деформирования полосы

$$P = 2 \left[\frac{-V \int_0^t \sqrt{\rho} dt + a\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2} (1 + tg\varphi) \left(\frac{B}{\bar{W}_*} - V \right) t \right], \quad (2.3.4.9)$$

скорость его изменения

$$\frac{dP}{dt} = - \left[\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + 2V + (1 + tg\varphi) \left(\frac{B}{\bar{W}_*} - V \right) \right], \quad (2.3.4.10)$$

Из (2.3.4.7), (2.3.4.10) следует, что наименьшее падение усилия достигается при $\varphi = \frac{\pi}{4}$. В этом случае работа, затраченная на деформацию полосы до разрушения, будет наибольшей, а скорость распространения трещины наименьшей.

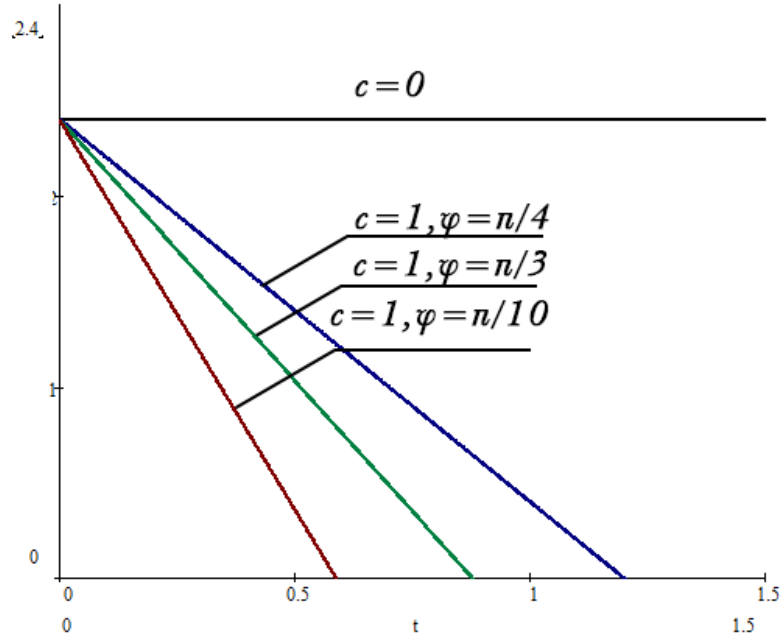


Рисунок 2.17 – Графики зависимости усилия, необходимого для деформирования полосы P от времени t при различных значениях угла φ

На рисунке 2.17 приведены зависимости усилия P от времени t при различных значениях угла φ , на рисунке 2.18 показана форма полости в момент полного разрушения при $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Основные параметры пластического течения при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned}\bar{W}_1 = \bar{W}_2 = \bar{W}_* &= \frac{B}{\bar{c} + V}, \bar{c} = \frac{B}{\bar{W}_*} - V, \\ P(t) &= 2 \left[\frac{-V \int_0^t \sqrt{\rho} dt + a\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}} - \left(\frac{B}{\bar{W}_*} - V \right) t \right], \\ A = \frac{dP}{dt} &= - \left[\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + 2V + 2 \left(\frac{B}{\bar{W}_*} - V \right) \right], t g \gamma = \bar{c},\end{aligned}\tag{2.3.4.11}$$

где A – работа, необходимая для полного разрушения полосы, γ – половина угла раскрытия трещины.

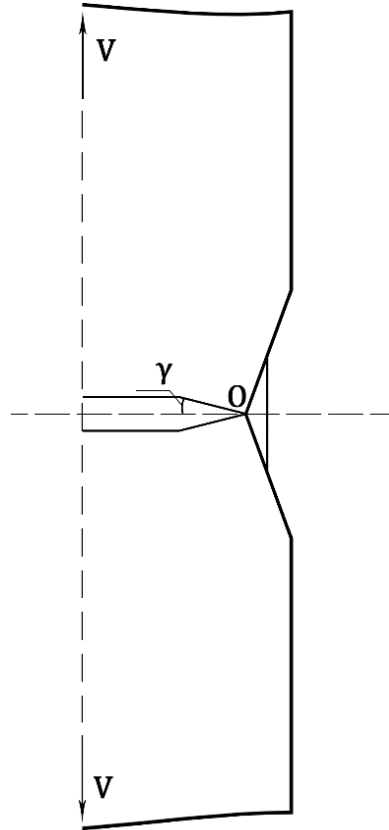


Рисунок 2.18 – Форма полосы в момент полного разрушения при $\varphi = \frac{\pi}{4}$

2.3.5 Определение констант разрушения на основе испытаний плоских образцов

Можно выделить две схемы определения констант разрушения [88]. Первая – упрощённая – предполагает, что деформации материала до образования макротрещины малы и, поэтому, не учитываются.

В качестве критерия разрушения принимается локальный деформационный критерий:

$$E_1 \geq E_*. \quad (2.3.5.1)$$

Равенство $E_1 = E_*$ определяет скорость распространения трещины. Вследствие взаимно однозначной связи величин E_1 и $\bar{W}$ неравенство (2.3.5.1) может быть заменено на аналогичное условие

$$\bar{W} \geq \bar{W}_* \quad (2.3.5.2)$$

Константы разрушения E_* и $\bar{W}_*$ могут быть определены из решения задачи о растяжении плоского образца с учётом разрушения по коэффициенту относительного удлинения образца

$$\delta = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (2.3.5.3)$$

и коэффициенту сужения образца

$$\psi = \frac{F_0 - F}{F_0}, \quad (2.3.5.4)$$

где l – длина образца при разрушении, l_0 – его первоначальная длина, $F_0 = 1 \cdot 2a_0$ – первоначальная площадь поперечного сечения, $F = 1 \cdot 2a_*$ – площадь поперечного сечения при разрушении, a_* – половина длины трещины при разрушении

$$a_* = \frac{ds}{dt} t_*, \frac{ds}{dt} = \sqrt{2}G, \quad (2.3.5.5)$$

где s – половины длины трещины, t_* – время разрушения образца.

Скорость распространения трещины $\frac{ds}{dt}$ в данной задаче полагается постоянной в силу однородности материала.

Из (2.3.5.4) следует

$$a_* = a_0(1 - \psi), \quad (2.3.5.6)$$

где $a_0 = a_* + Vt_*$, t_* – время с момента образования трещины до разрыва образца.

Из (2.3.5.6):

$$a_* = (a_* + Vt_*)(1 - \psi).$$

С учётом (2.3.5.4)

$$a_* = \sqrt{2}Gt_*,$$

то есть

$$\sqrt{2}Gt_* = (\sqrt{2}Gt_* + Vt_*)(1 - \psi),$$

откуда

$$G = \frac{V(1 - \psi)}{\sqrt{2}\psi}, \frac{ds}{dt} = V \left(\frac{1 - \psi}{\psi} \right). \quad (2.3.5.7)$$

Подстановка (2.3.5.7) в (2.3.3.20) даёт выражение для определения $\bar{W}_*$:

$$\bar{W}_* = \frac{\frac{B}{\sqrt{2}}}{\frac{V(1 - \psi)}{\sqrt{2}\psi} + \frac{V}{\sqrt{2}}} = \frac{B\psi}{V(1 - \psi) + V\psi} = \frac{B\psi}{V}. \quad (2.3.5.8)$$

Данное соотношение верно только в том случае, если материал до разрушения не деформировался.

Вторая схема предполагает следующее описание процесса разрушения образца. Перед началом нагружения образец имеет исходные длину и ширину l_0, a_0 . На первом этапе реализуется решение с непрерывным полем скоростей перемещений до зарождения в материале образца макротрещины. К концу первого этапа образец имеет промежуточные параметры $l_{\text{п}}, a_{\text{п}}$. На втором этапе реализуется решение с разрывным полем скоростей перемещений, при котором происходит развитие трещины. Вторым этапом заканчивается разрывом образца. К этому моменту он имеет конечные параметры $l_{\text{к}}, a_{\text{к}}$.

Вводятся две следующие константы материала: E_{**} – значение E_1 , тензора Альманси, соответствующее концу первого этапа деформирования,

определяющее момент зарождения макротрещины и начала образования «шейки», E_* – значение E_1 в вершине макротрещины, определяющее скорость распространения макротрещины.

Из условия сжимаемости материала следует, что объём образца остаётся неизменным, поэтому на первом этапе деформирования

$$a_{\pi} l_{\pi} = a_0 l_0. \quad (2.3.5.9)$$

Для второго этапа:

$$l_k = l_{\pi} + V t_1, a_k = \frac{-V \int_0^{t_1} \sqrt{\rho} dt + a_{\pi} \sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}}, \quad (2.3.5.10)$$

где t_1 – время растяжения образца на втором этапе.

Добавление к соотношениям (2.3.5.9), (2.3.5.10) выражений для ψ , δ из (2.3.5.3), (2.3.5.4) даёт систему уравнений

$$\begin{cases} a_{\pi} l_{\pi} = a_0 l_0 \\ l_k = l_{\pi} + V t_1 \\ a_k = \frac{-V \int_0^{t_1} \sqrt{\rho} dt + a_{\pi} \sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}}, \\ a_k = a_0 (1 - \psi) \\ l_k = l_0 (1 + \delta) \end{cases} \quad (2.3.5.11)$$

где l_{π} , a_{π} – неизвестные величины, а ψ , δ , l_0 , a_0 известны из экспериментов.

Система (2.3.5.11) может быть сведена к одному уравнению относительно t_1 :

$$\frac{a_0 l_0}{l_0 (1 + \delta) - V t_1} = \frac{a_0 (1 - \psi) \sqrt{\rho} + V \int_0^{t_1} \sqrt{\rho} dt}{\sqrt{\rho_0}}. \quad (2.3.5.12)$$

Найденное численно из уравнения (2.3.5.12) значение t_1 позволяет вычислить неизвестные величины системы (2.3.5.11): a_{π} , l_{π} .

По известному значению l_{π} определяется соответствующее ему первое главное значение тензора конечных деформаций Альманси (E_{**}):

$$\begin{aligned} \delta_{\pi} = \bar{\varepsilon} &= \frac{l_{\pi} - l_0}{l_0}, \\ E_{**} = E_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\rho_0}{2\rho(1 + \delta_{\pi})^2}. \end{aligned} \quad (2.3.5.13)$$

Для случая, когда имеется комбинация решений с непрерывным и разрывным полем скоростей, скорость распространения трещины находится в виде

$$\frac{ds}{dt} = V \left(\frac{1 - \psi_{\Pi}}{\psi_{\Pi}} \right), \quad (2.3.5.14)$$

где $\psi_{\Pi} = \frac{a_{\Pi} - a_{\kappa}}{a_{\Pi}}$ – относительное сужение полосы на втором этапе деформирования; ψ и ψ_{Π} связаны соотношением

$$\psi_{\Pi} = 1 - \frac{a_{\kappa}}{a_{\Pi}} = 1 - \frac{a_0}{a_{\Pi}} (1 - \psi), \quad (2.3.5.15)$$

откуда, с учётом (2.3.5.14), следует

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= V \frac{1 - \psi_{\Pi}}{\frac{a_0}{a_{\Pi}} \left(\frac{a_{\Pi}}{a_0} - (1 - \psi) \right)} = \frac{V(1 - \psi)}{\frac{a_{\Pi}}{a_0} - (1 - \psi)}, \\ G &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{ds}{dt} = \frac{V(1 - \psi)}{\sqrt{2} \left(\frac{a_{\Pi}}{a_0} - (1 - \psi) \right)}. \end{aligned} \quad (2.3.5.16)$$

При подстановке (2.3.5.15) в (2.3.5.8) находится объёмная плотность диссипации энергии на линии разрыва скоростей перемещений на втором этапе:

$$\bar{W}_{*II} = \frac{B}{V} \left(1 - \frac{a_0}{a_{\Pi}} (1 - \psi) \right). \quad (2.3.5.17)$$

На первом этапе деформирования удельная объёмная диссипация энергии может быть рассчитана по формуле:

$$\bar{W}_{*I} = 2 \ln(1 + \delta_{\Pi}). \quad (2.3.5.18)$$

Полная удельная объёмная диссипация энергии для частиц, деформирующихся на I и II этапе находится в виде

$$\bar{W}_* = \bar{W}_{*I} + \bar{W}_{*II} = 2 \ln(1 + \delta_{\Pi}) + \frac{B}{V} \left(1 - \frac{a_0}{a_{\Pi}} (1 - \psi) \right). \quad (2.3.5.19)$$

Так как материал ниже линии $O'A$ деформировался до прохождения линии разрыва (рис. 2.19) и компоненты тензора дисторсии имели значения x_{ij}^{0-} , то его компоненты за линией разрыва определяются из соотношения (2.3.2.21).

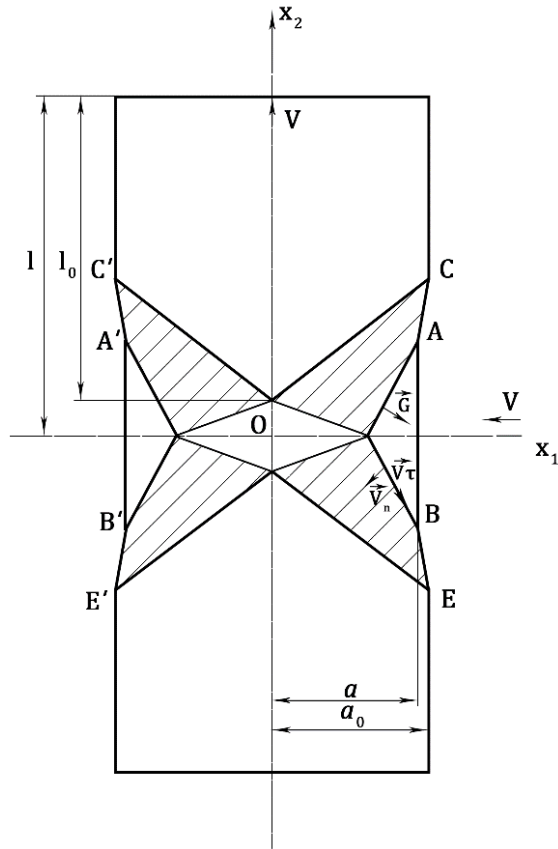


Рисунок 2.19 – Переход частиц через линию разрыва

Из определения тензора Альманси через тензор дисторсии

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - x_{k,i}^0 x_{k,j}^0), i, j = 1, 2,$$

$$A_{ij} = x_{j,i}^0,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, x_i^0 – лагранжевы, x_i – эйлеровы координаты частицы, а также из условия сжимаемости материала для тензора дисторсии

$$\frac{\partial x_1^0}{\partial x_1} \frac{\partial x_2^0}{\partial x_2} - \frac{\partial x_1^0}{\partial x_2} \frac{\partial x_2^0}{\partial x_1} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

следует система четырёх уравнений для определения компонент тензора дисторсии:

$$\begin{cases} A^2 + C^2 = 1 - 2E_{11} \\ B^2 + D^2 = 1 - 2E_{22} \\ AB + CD = -2E_{12} \\ AD - BC = \frac{\rho}{\rho_0} \end{cases}, \quad (2.3.5.20)$$

где $A = \frac{\partial x_1^0}{\partial x_1}$, $B = \frac{\partial x_1^0}{\partial x_2}$, $C = \frac{\partial x_2^0}{\partial x_1}$, $D = \frac{\partial x_2^0}{\partial x_2}$ – компоненты тензора дисторсии.

Деформирование полосы на первом этапе является простым, то есть главные направления тензоров Альманси и скоростей деформаций совпадают между собой и осью x_2 . Поэтому

$$\varepsilon_{12} = E_{12} = 0, B = \frac{\partial x_1^0}{\partial x_2} = 0, C = \frac{\partial x_2^0}{\partial x_1} = 0.$$

На первом этапе деформирования $E_{11} = E_1$, $E_{22} = E_2$ и система (2.3.5.20) преобразуется к виду

$$\begin{cases} A = \sqrt{1 - 2E_{11}} \\ D = \sqrt{1 - 2E_{22}} \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}.$$

Подстановка найденных компонент тензора дисторсии в (2.3.2.21) даёт

$$\frac{\partial x_i^{0+}}{\partial x_j} = \left(\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \bar{W}_{II} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} & \bar{W}_{II} D \\ 0 & D \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \end{bmatrix}. \quad (2.3.5.21)$$

Полученный тензор дисторсии позволяет найти тензор конечных деформаций Альманси для частиц материала, прошедших линию разрыва скоростей перемещений $O'A$,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\rho}{\rho_0} A^2 - \bar{W}_{II}^2 D^2 & -\bar{W}_{II} D^2 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \\ -\bar{W}_{II} D^2 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} & 1 - D^2 \frac{\rho}{\rho_0} \end{bmatrix}. \quad (2.3.5.22)$$

Компоненты E_{11} , E_{22} , E_{12} выражаются через инварианты тензора Альманси e , g соотношениями

$$E_{11} = e + g \cos 2\theta, E_{22} = e - g \cos 2\theta, E_{12} = g \sin 2\theta,$$

где θ – угол между первым главным направлением и осью x_1 .

Инварианты, главные значения тензора Альманси и угол θ определяются из (2.3.5.22) в виде

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{1}{4} \left(2 - \bar{W}_{II}^2 D^2 - \frac{\rho}{\rho_0} (A^2 + D^2) \right) \\
 g &= \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_0} (D^2 - A^2) - \bar{W}_{II}^2 D^2 \right)^2 + 4 \bar{W}_{II}^2 D^4 \frac{\rho}{\rho_0}} \\
 E_{1,2} &= \frac{1}{4} \left(2 - \bar{W}_{II}^2 D^2 - \frac{\rho}{\rho_0} (A^2 + D^2) \right) \pm \\
 &\pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_0} (D^2 - A^2) - \bar{W}_{II}^2 D^2 \right)^2 + 4 \bar{W}_{II}^2 D^4 \frac{\rho}{\rho_0}} \\
 \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{-\bar{W}_{II} D^2 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}}{\frac{\rho}{\rho_0} (D^2 - A^2) - \bar{W}_{II}^2 D^2}
 \end{aligned} \tag{2.3.5.23}$$

Подстановка (2.3.5.19) в (2.3.5.23) позволяет найти константу E_* – значение E_1 в вершине макротрещины, характеризующее скорость её распространения.

Глава 3 Задачи о растяжении полосы в условиях плоского напряжённого состояния

Задача о деформировании полосы в условиях плоского напряжённого состояния имеет следующую постановку [18]: полоса, имеющая начальные параметры – длину l_0 , ширину a_0 и толщину f_0 – растягивается при кинематических граничных условиях на её концах со скоростью V . Размеры полосы таковы, что $a_0 \gg f_0$. В качестве условия пластичности используется условие Мизеса в виде:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 = \sigma_s^2 = 3k^2. \quad (3.1)$$

Компоненты вектора скоростей перемещений V_1, V_2 связаны с компонентами тензора напряжений уравнениями

$$\frac{\frac{\partial V_1}{\partial x_1}}{2\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial x_2}}{2\sigma_{22} - \sigma_{11}} = \frac{\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1}}{6\tau_{12}}, \quad (3.2)$$

которые следуют из соотношений Сен Венана – Мизеса для жёсткопластического тела.

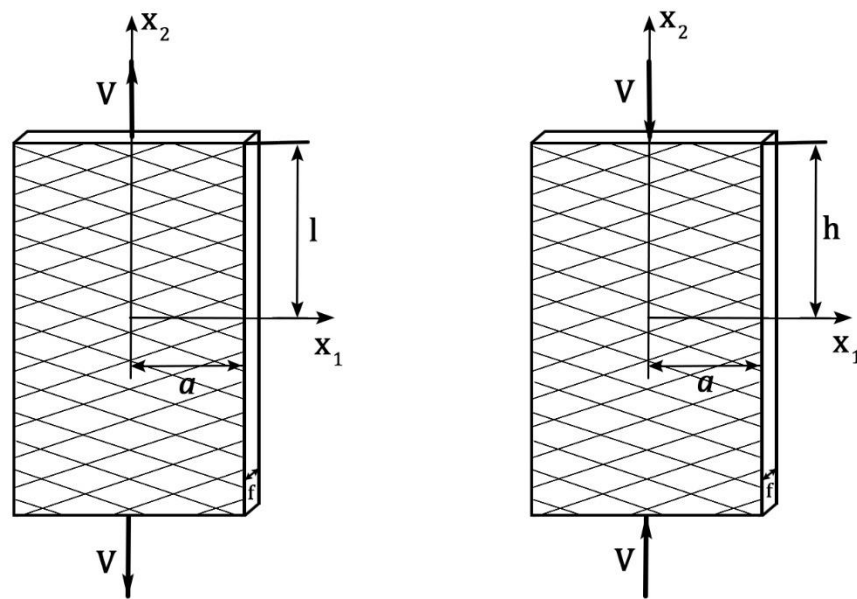


Рисунок 3.1 – Растяжение и сжатие полосы с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоского напряжённого состояния

Растягивающие усилия, как и в случае плоской деформации прикладываются только к верхней и нижней граням образца, на боковой поверхности напряжения отсутствуют. Материал при малых деформациях считается сжимаемым.

3.1 Растяжение полосы в условиях плоского напряжённого состояния

Граничные условия для напряжений имеют вид:

$$\text{при } x_2 = l \sigma_{22} = \sigma_s, \text{ при } x_2 = -l \sigma_{22} = -\sigma_s, \sigma_s = \sqrt{3}k \quad (3.1.1)$$

При предположении о том, что весь образец находится в пластическом состоянии, условия (3.1.1) приводят к следующему однородному напряжённому состоянию:

$$\sigma_{22} = \pm \sigma_s, \sigma_{11} = \tau_{12} = 0. \quad (3.1.2)$$

Поле линий скольжения, как и в случае плоской деформации, прямолинейно, их наклон к горизонтальной оси x_1 составляет угол $\varphi = 54^\circ 44'$.

Граничные условия для скоростей перемещений

$$\begin{cases} \text{при } x_2 = 0 V_2 = 0, \text{ при } x_1 = 0 V_1 = 0, \\ \text{при } x_2 = l V_2 = V, \text{ при } x_1 = a V_1 = \text{const.} \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Поле скоростей при плоском напряжённом состоянии определяется интегрированием уравнений (3.2):

$$\begin{cases} (2\sigma_{22} - \sigma_{11}) \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = (2\sigma_{11} - \sigma_{22}) \frac{\partial V_2}{\partial x_2}, \\ (2\sigma_{11} - \sigma_{22}) \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) = 6\tau_{12} \frac{\partial V_1}{\partial x_1}. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Из условия сжимаемости материала можно выразить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} &= -\frac{d}{dt} [\ln \rho] - \frac{\partial V_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_2} &= -\frac{d}{dt} [\ln \rho] - \frac{\partial V_1}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Тогда система (3.1.4) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} (2\sigma_{22} - \sigma_{11}) \left(-\frac{d}{dt} [\ln \rho] - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) = (2\sigma_{11} - \sigma_{22}) \left(-\frac{d}{dt} [\ln \rho] - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right), \\ (2\sigma_{11} - \sigma_{22}) \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) = 6\sigma_{12} \frac{\partial V_1}{\partial x_1}. \end{cases}$$

Учитывая условия (3.1.1), (3.1.2) можно записать:

$$\begin{cases} \text{(I)} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -3 \frac{d}{dt} [\ln \rho] \\ \text{(II)} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = 0. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Преобразование (3.1.5) по закону $\frac{\partial}{\partial x_1} \text{(I)} - 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \text{(II)}$ и $\frac{\partial}{\partial x_2} \text{(I)} - \frac{\partial}{\partial x_1} \text{(II)}$,

приводит к системе волновых уравнений:

$$\begin{cases} \text{(I)} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + g_1(x_1, x_2, t) = 0, \\ \text{(II)} 2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} + g_2(x_1, x_2, t) = 0, \end{cases} \quad (3.1.6)$$

где $g_1(x_1, x_2, t) = 3 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] \right)$, $g_2(x_1, x_2, t) = 3 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] \right)$ – функции

координат и времени.

Решение первого уравнения системы (3.1.6) может быть найдено в виде

$$V_1(x_1, x_2, t) = \int_0^t u(x_1, x_2) dt,$$

где функция $u(x_1, x_2)$

$$u(x_1, x_2) = \psi_1(x_2 - \sqrt{2}x_1) + \psi_2(x_2 + \sqrt{2}x_1).$$

является решением однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0.$$

Тогда решение уравнения (I):

$$V_1(x_1, x_2, t) = t\psi_1(x_2 - \sqrt{2}x_1) + t\psi_2(x_2 + \sqrt{2}x_1).$$

Аналогичным образом решается уравнение (II), и, тогда общее решение системы (3.1.6) имеет вид:

$$\begin{cases} V_1(x_1, x_2, t) = t\psi_1(x_2 - \sqrt{2}x_1) + t\psi_2(x_2 + \sqrt{2}x_1), \\ V_2(x_1, x_2, t) = t\theta_1(x_2 - \sqrt{2}x_1) + t\theta_2(x_2 + \sqrt{2}x_1), \end{cases} \quad (3.1.7)$$

где $\psi_1, \psi_2, \theta_1, \theta_2$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

При подстановке (3.1.3) в (3.1.7), с учётом того, что $t \neq 0$:

$$\begin{cases} \psi_1(x_2) + \psi_2(x_2) = 0, \\ \theta_1(-\sqrt{2}x_1) + \theta_2(\sqrt{2}x_1) = 0, \end{cases}$$

откуда следует

$$\begin{cases} \psi_1(x_2) = -\psi_2(x_2) = \psi(x_2), \\ \theta_1(-\sqrt{2}x_1) = -\theta_2(\sqrt{2}x_1) = \theta(\sqrt{2}x_1). \end{cases} \quad (3.1.8)$$

При дифференцировании уравнений (3.1.5) возможно приобретение новых решений. Подстановка (3.1.7) в (3.1.5) даёт:

$$\begin{cases} -\sqrt{2}t\psi'_1 + \sqrt{2}t\psi'_2 + 2t\theta'_1 + 2t\theta'_2 = -3\frac{d}{dt}[\ln \rho], \\ t\psi'_1 + t\psi'_2 - \sqrt{2}t\theta'_1 + \sqrt{2}t\theta'_2 = 0. \end{cases}$$

Или с учётом (3.1.8):

$$\begin{cases} -\sqrt{2}t\psi' - \sqrt{2}t\psi' - 2t\theta' - 2t\theta' = -3\frac{d}{dt}[\ln \rho], \\ t\psi' - t\psi' + \sqrt{2}t\theta' - \sqrt{2}t\theta' = 0. \end{cases} \quad (3.1.9)$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} -4t(\theta' + \frac{\sqrt{2}}{2}\psi') &= -3\frac{d}{dt}[\ln \rho], \\ \theta' &= \frac{3}{4t}\frac{d}{dt}[\ln \rho] - \frac{\sqrt{2}}{2}\psi'. \end{aligned}$$

Так как θ – функция только координат x_1, x_2 (что следует из решения однородного уравнения), то для выполнения этого условия $\frac{d}{dt}[\ln \rho]$ должна зависеть от времени t линейно.

Пусть

$$A' = \theta' = \frac{3}{4t}\frac{d}{dt}[\ln \rho] - \frac{\sqrt{2}}{2}\psi',$$

где A – некоторая дифференцируемая функция, тогда

$$A = \theta = \frac{3}{4t} \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \psi + C, C - const,$$

Из граничных условий (3.1.3) следует:

$$\begin{cases} V_2 = [-A(-\sqrt{2}x_1) - A(\sqrt{2}x_1)]t = 0, \\ V_1 = \left[-\frac{2}{\sqrt{2}}A(x_2) + \frac{2}{\sqrt{2}}A(x_2) + C\right]t = 0, \end{cases} \quad (3.1.10)$$

то есть $A(\tau)$ – нечётная функция, а $C = 0$.

Общее решение системы уравнений (3.1.5) при граничных условиях (3.1.3) имеет вид:

$$\begin{cases} V_1(x_1, x_2, t) = \frac{2}{\sqrt{2}} [A(x_2 + \sqrt{2}x_1) - A(x_2 - \sqrt{2}x_1)]t - 3 \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, \\ V_2(x_1, x_2, t) = -[A(x_2 + \sqrt{2}x_1) + A(x_2 - \sqrt{2}x_1)]t. \end{cases} \quad (3.1.11)$$

Объёмная плотность мощности диссипации энергии запишется в виде:

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon_{ij}\sigma_{ij} = \varepsilon_{22}\sqrt{3}k = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} 2k = -2\sqrt{3}kA't, A' < 0. \quad (3.1.12)$$

Критерий выбора функции A будет таким же, как и в случае плоской деформации, а именно – предпочтительным пластическим течением считается течение с минимальной плотностью мощности диссипации энергии.

Из граничных условий для скоростей перемещений (3.1.3) и (3.1.12) следует, что $A(0) = 0, A(l) = -\frac{V}{2t}$. Функция $A(\tau)$ – гладкая дифференцируемая функция, монотонно убывающая ($A' < 0$) на отрезке $[0, l]$. Этому условию отвечает линейная функция вида $A(\tau) = c\tau$, которая имеет постоянную производную $A'(\tau) = c$, меньшую чем максимальная производная любой другой дифференцируемой функции, проходящей через точки $(0,0)$ и (l, V) .

Тогда из (3.1.11):

$$\begin{cases} V_1(x_1, x_2, t) = 4cx_1t - 3 \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, \\ V_2(x_1, x_2, t) = -2cx_2t. \end{cases} \quad (3.1.13)$$

При $x_2 = l, V_2 = V$ и из (3.1.13) следует $V = -2clt$, откуда

$$c = -\frac{V}{2lt},$$

и система (3.1.13) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} V_1(x_1, x_2, t) = -2 \frac{V}{l} x_1 - 3 \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, \\ V_2(x_1, x_2, t) = \frac{V}{l} x_2. \end{cases} \quad (3.1.14)$$

Соотношения (3.1.14) будут решением системы (3.1.5), если $\frac{d}{dt} [\ln \rho]$ не зависит от x_2 . Аналогично решению для случая плоской деформации рассматривается функция плотности вида $\rho = e^{-\frac{1}{2}c_1 t^2 + c_2}$.

Компоненты тензора скоростей деформаций ε_{ij} определяются в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = -2 \frac{V}{l} - 3 \frac{d}{dt} [\ln \rho], \varepsilon_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{V}{l}, \\ \varepsilon_{33} = -\frac{d}{dt} [\ln \rho] - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = \frac{V}{l} + 2 \frac{d}{dt} [\ln \rho], \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.1.15)$$

Откуда главные значения тензора скоростей деформаций:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -2 \frac{V}{l} - 3 \frac{d}{dt} [\ln \rho], \\ \varepsilon_2 = \frac{V}{l}, \\ \varepsilon_3 = \frac{V}{l} + 2 \frac{d}{dt} [\ln \rho]. \end{cases} \quad (3.1.16)$$

Объёмная плотность мощности диссипации энергии

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = \sqrt{3} k \frac{V}{l}. \quad (3.1.17)$$

Из (3.1.17) следует, что плотность мощности диссипации энергии одинакова во всех частицах образца, так как $\frac{dW}{dt}$ не зависит от координат.

С учётом того, что $l = l_0 + Vt$:

$$\frac{dW}{dt} = \sqrt{3} k \frac{V}{l_0 + Vt} = \sqrt{3} k \frac{V}{l_0(1 + \bar{\varepsilon})},$$

где $\bar{\varepsilon} = \frac{Vt}{l_0}$ – относительное удлинение образца. Тогда

$$W(t) = \int_0^t \sqrt{3} k \frac{V}{l_0 + Vt} dt = \sqrt{3} k \ln \left| \frac{l_0 + Vt}{l_0} \right|. \quad (3.1.18)$$

Компоненты тензоров E_{ij} и ε_{ij} связаны уравнениями:

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} V_k + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.1.19)$$

Для случая плоского напряжённого состояния система (3.1.19) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (I) \frac{dE_{11}}{dt} + 2E_{11} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + 2E_{12} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}, \\ (II) \frac{dE_{12}}{dt} + E_{11} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + E_{12} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + E_{21} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + E_{22} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \varepsilon_{12}, \\ (III) \frac{dE_{22}}{dt} + 2E_{21} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + 2E_{22} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22}, \\ (IV) \frac{dE_{33}}{dt} + 2E_{31} \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + 2E_{32} \frac{\partial V_2}{\partial x_3} = \varepsilon_{33}. \end{array} \right. \quad (3.1.20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} E_{11} &= e + g \cos 2\theta, E_{22} = e - g \cos 2\theta, E_{12} = g \sin 2\theta, E_{33} = -2e, \\ \varepsilon_{11} &= s + \gamma \cos 2\psi, \varepsilon_{22} = s - \gamma \cos 2\psi, \varepsilon_{12} = \gamma \sin 2\psi, \varepsilon_{33} = -2s, \\ e &= \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}), g = \frac{1}{2}\sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}, \\ s &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \gamma = \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2}, \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

где θ, ψ – углы наклона первого главного направления тензоров E_{ij} и ε_{ij} к оси Ox .

С учётом (3.1.21) система (3.1.20) преобразуется к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} (I) \frac{de}{dt} + \frac{dg}{dt} \cos(2\theta) - 2g \sin(2\theta) \frac{d\theta}{dt} + 2(e + g \cos(2\theta)) \times \\ \quad \times (s + \gamma \cos(2\psi)) = s + \gamma \cos(2\psi), \\ (II) \frac{dg}{dt} \sin(2\theta) + 2g \cos(2\theta) \frac{d\theta}{dt} + 2sg(\sin(2\theta)) = \\ \quad = \gamma \sin(2\psi), \\ (III) \frac{de}{dt} - \frac{dg}{dt} \cos(2\theta) + 2g \sin(2\theta) \frac{d\theta}{dt} + 2(e - g \cos(2\theta)) \times \\ \quad \times (s - \gamma \cos(2\psi)) = s - \gamma \cos(2\psi), \\ (IV) - 2 \frac{de}{dt} = -2s, \end{array} \right. \quad (3.1.22)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ – материальная производная по времени.

Преобразования по законам $(I) + (III), \frac{(I)-(III)}{2} \cos(2\theta) + (II) \sin(2\theta), \frac{(I)-(III)}{2} \sin(2\theta) - (II) \cos(2\theta)$, приводят систему к виду:

$$\begin{cases} (I) \frac{de}{dt} + 2\gamma g \cos(2\theta) \cos(2\psi) = s(1 - 2e), \\ (II) \frac{dg}{dt} + 2\gamma e \cos(2\theta) \cos(2\psi) + 2gs = \gamma \cos 2(\psi - \theta), \\ (III) -2g \frac{d\theta}{dt} + 2\gamma e \sin(2\theta) \cos(2\psi) + \gamma \sin 2(\psi - \theta) = 0, \\ (IV) \frac{de}{dt} = s. \end{cases} \quad (3.1.23)$$

При рассматриваемом однородном деформировании углы не изменяются и равны $\theta = \psi = \frac{\pi}{2}$, тогда система (3.1.23) преобразуется к виду

$$\begin{cases} (I) \frac{de}{dt} + 2\gamma g = s(1 - 2e), \\ (II) \frac{dg}{dt} + 2\gamma \left(e - \frac{1}{2}\right) = -2gs. \end{cases} \quad (3.1.24)$$

Преобразование (3.1.24) по законам $(I) \times 2 \left(e - \frac{1}{2}\right) - (II) \times 2g$ приводит к уравнению

$$\frac{d}{dt} \left[\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 \right] = -4s \left[\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 \right],$$

где

$$s = \frac{1}{2} \left(-\frac{V}{l} - 3 \frac{d}{dt} [\ln \rho] \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d \left[\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 \right]}{\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2} &= \left[2 \frac{V}{l_0 + Vt} + 6 \frac{d}{dt} [\ln \rho] \right] dt, \\ \ln \left| \left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 \right| &= \ln \left| \frac{(l_0 + Vt)^2 C_1 \rho^6}{l_0^2 \rho_0^6} \right|, C_1 - const, \\ \left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 &= \frac{(l_0 + Vt)^2 C_1 \rho^6}{l_0^2 \rho_0^6}. \end{aligned}$$

При $t = 0$ $e = 0, g = 0$, и $C_1 = \frac{1}{4}$, тогда первый интеграл системы (3.1.24) имеет вид

$$\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 = \frac{(l_0 + Vt)^2 \rho^6}{4l_0^2 \rho_0^6}.$$

Второй интеграл системы (3.1.24) находится из уравнения

$$\frac{d\left(g - e + \frac{1}{2}\right)}{\left(g - e + \frac{1}{2}\right)} = 2(\gamma - s)dt,$$

где

$$\gamma = \frac{3}{2}\left(\frac{V}{l} + \frac{d}{dt}[\ln \rho]\right).$$

$$\gamma - s = 2\frac{V}{l} + 3\frac{d}{dt}[\ln \rho],$$

$$\frac{d\left(g - e + \frac{1}{2}\right)}{\left(g - e + \frac{1}{2}\right)} = \left[4\frac{V}{l} + 6\frac{d}{dt}[\ln \rho]\right] dt,$$

$$\ln\left|g - e + \frac{1}{2}\right| = \ln\left|\frac{(l_0 + Vt)^4 C_2 \rho^6}{l_0^4 \rho_0^6}\right|, \quad C_2 - const,$$

$$\left|g - e + \frac{1}{2}\right| = \frac{(l_0 + Vt)^4 C_2 \rho^6}{l_0^4 \rho_0^6}.$$

При $t = 0$ $e = 0, g = 0$, тогда

$$C_2 = \frac{1}{2},$$

и второй интеграл системы (3.1.24) имеет вид

$$\left|g - e + \frac{1}{2}\right| = \frac{(l_0 + Vt)^4 \rho^6}{2l_0^4 \rho_0^6}.$$

Общее решение системы (3.1.24) определяется двумя интегралами:

$$\begin{aligned} \left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 &= \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^2 \rho^6}{4\rho_0^6}, \\ \left|g - e + \frac{1}{2}\right| &= \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^4 \rho^6}{2\rho_0^6}. \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

где $\bar{\varepsilon}$ – относительное удлинение образца. Тогда

$$\begin{aligned} g &= -\frac{1}{4(1 + \bar{\varepsilon})^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^6 (1 + \bar{\varepsilon})^4, \\ e &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4(1 + \bar{\varepsilon})^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^6 (1 + \bar{\varepsilon})^4. \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Отсюда находим главные значения тензора деформаций Альманси:

$$E_1 = e + g = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1 + \bar{\varepsilon})^2}, E_2 = e - g = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^6 (1 + \bar{\varepsilon})^4, \quad (3.1.27)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} - \frac{\rho_0^4}{2\rho^4(1 + \bar{\varepsilon})^2}.$$

Значение E_3 определяется из условия сжимаемости

$$(1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2,$$

На рисунке 3.2 приведены графики зависимости двух главных значений тензора деформаций Альманси E_1, E_2 от относительного удлинения образца $\bar{\varepsilon}$.

С помощью полученного поля скоростей можно найти зависимости изменения ширины $a(t)$ и толщины $f(t)$ полосы с течением времени. Из (3.1.14) следует, что

$$a(t) = a_0 - 2 \int_0^t \frac{V}{l_0 + Vt} a(t) dt - 3 \int_0^t \frac{d}{dt} [\ln \rho] a(t) dt.$$

Дифференцирование по t приводит к уравнению:

$$a' = -2 \frac{V}{l_0 + Vt} a - 3 \frac{d}{dt} [\ln \rho] a, a(t)|_{t=0} = a_0,$$

откуда

$$a(t) = \frac{a_0 l_0^2 \rho_0^3}{(l_0 + Vt)^2 \rho^3} = \frac{a_0 \rho_0^3}{(1 + \bar{\varepsilon})^2 \rho^3}. \quad (3.1.28)$$

Из (3.1.15):

$$f(t) = f_0 + \int_0^t \frac{V}{l_0 + Vt} f(t) dt + 2 \int_0^t \frac{d}{dt} [\ln \rho] f(t) dt.$$

Дифференцирование по t приводит к уравнению:

$$f' = \frac{V}{l_0 + Vt} f + 2 \frac{d}{dt} [\ln \rho] f, f(t)|_{t=0} = f_0,$$

откуда

$$f(t) = \frac{(l_0 + Vt) f_0 \rho^2}{l_0 \rho_0^2} = \frac{(1 + \bar{\varepsilon}) f_0 \rho^2}{\rho_0^2}. \quad (3.1.29)$$

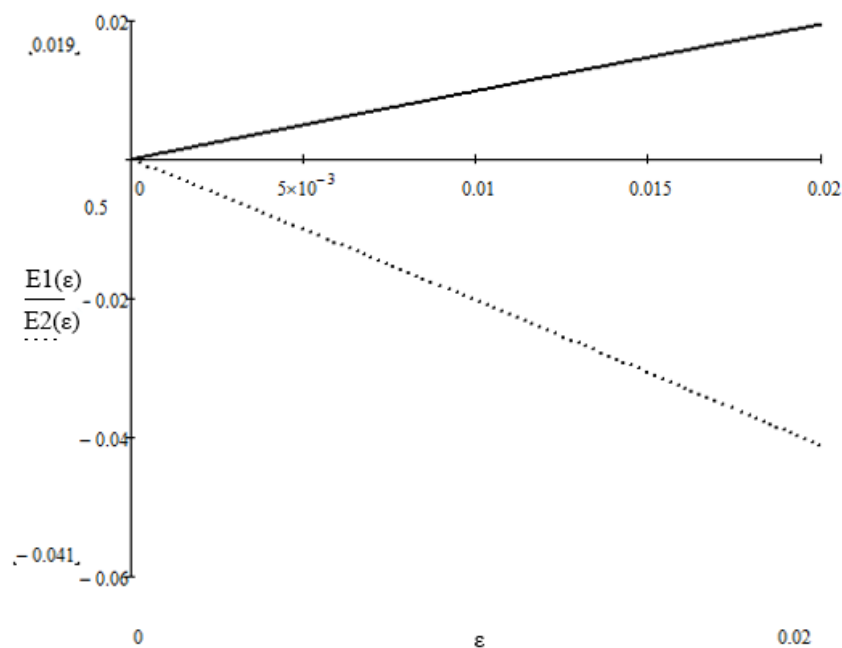


Рисунок 3.2 – График зависимости главных значений тензора Альманси от относительного удлинения образца при плоском напряженном состоянии

На рисунке 3.3 приведены сравнительные графики зависимости изменения ширины полосы с течением времени в процессе её растяжения при плоском напряжённом состоянии $a1(t)$ и плоской деформации $a(t)$; на рисунке 3.4 представлен график изменения толщины полосы $f(t)$.

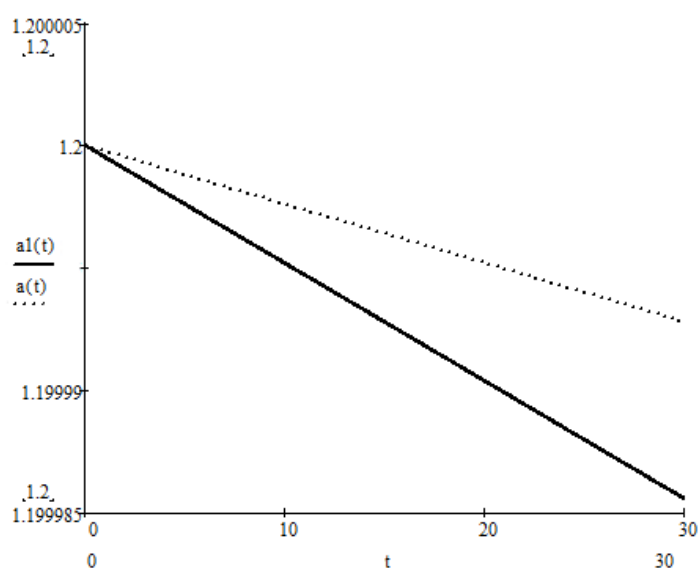


Рисунок 3.3 – Сравнение графиков изменения ширины полосы с течением времени при плоской деформации и плоском напряжённом состоянии

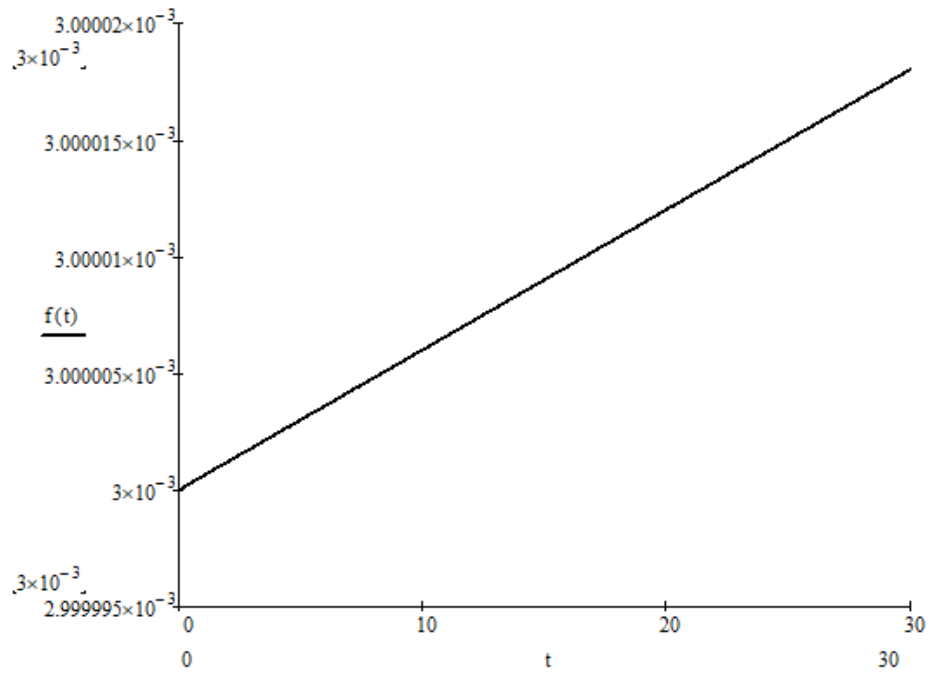


Рисунок 3.4 – График изменения толщины полосы с течением времени

Усилие, необходимое для растяжения полосы, определяется выражением:

$$P = a(t)f(t)\sigma_{22} = \sqrt{3}k \frac{a_0 \rho_0^3}{(1 + \bar{\varepsilon})^2 \rho^3} \frac{(1 + \bar{\varepsilon})f_0 \rho^2}{\rho_0^2},$$

$$P = \sqrt{3}k \frac{a_0 f_0 \rho_0}{(1 + \bar{\varepsilon})\rho}. \quad (3.1.30)$$

3.2 Сжатие полосы в условиях плоского напряжённого состояния

При сжатии полосы направления приложения напряжений меняются на противоположные, на боковых гранях образца они по-прежнему отсутствуют. Тогда граничные условия для напряжений примут вид:

$$\text{при } x_2 = h \quad \sigma_{22} = -\sigma_s, \text{ при } x_2 = -h \quad \sigma_{22} = \sigma_s. \quad (3.2.1)$$

откуда следует, что однородное напряжённое состояние определяется выражениями:

$$\sigma_{22} = \mp \sigma_s, \sigma_{11} = \tau_{12} = 0. \quad (3.2.2)$$

Поле линий скольжения, как и при растяжении, прямолинейно, угол $\varphi = 54^\circ 44'$.

Поле скоростей определяется преобразованиями (3.1.4) – (3.1.13), откуда:

$$\begin{cases} V_1(x_1, x_2, t) = 4cx_1t - 3 \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, \\ V_2(x_1, x_2, t) = -2cx_2t. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

При $x_2 = h$ $V_2 = -V$ и из (3.1.13) следует $-V = -2cht$, откуда

$$c = \frac{V}{2ht},$$

Тогда поле скоростей определится в виде:

$$V_1 = 2 \frac{V}{h} x_1 - 3 \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, V_2 = -\frac{V}{h} x_2. \quad (3.2.4)$$

Компоненты тензора скоростей деформаций ε_{ij} равны:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = 2 \frac{V}{h} - 3 \frac{d}{dt} [\ln \rho], \varepsilon_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -\frac{V}{h}, \\ \varepsilon_{33} = -\frac{d}{dt} [\ln \rho] - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = -\frac{V}{h} + 2 \frac{d}{dt} [\ln \rho], \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Объёмная плотность мощности диссипации энергии

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = \sqrt{3}k \frac{V}{h}. \quad (3.2.6)$$

Из (3.2.6) следует, что плотность мощности диссипации энергии, как и при растяжении, одинакова во всех частицах образца, так как $\frac{dW}{dt}$ также не зависит от координат. Так как $h = h_0 - Vt$, то

$$\frac{dW}{dt} = \sqrt{3}k \frac{V}{h_0 - Vt} = \sqrt{3}k \frac{V}{h_0(1 - \bar{\varepsilon})},$$

где $\bar{\varepsilon} = \frac{Vt}{h_0}$ – относительное сжатие образца. Тогда

$$W(t) = \int_0^t \sqrt{3}k \frac{V}{h_0 - Vt} dt = \sqrt{3}k \ln \left| \frac{h_0}{h_0 - Vt} \right|. \quad (3.2.7)$$

Из уравнений (3.1.23) с учётом того, что при рассматриваемой однородной деформации углы $\theta = \psi = 0$, следует:

$$\begin{cases} (I) \frac{de}{dt} + 2\gamma g = s(1 - 2e), \\ (II) \frac{dg}{dt} + 2\gamma \left(e - \frac{1}{2}\right) = -2gs, \end{cases} \quad (3.2.8)$$

где

$$s = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{h} - 3 \frac{d}{dt} [\ln \rho] \right),$$

$$\gamma = \frac{3}{2} \left(\frac{V}{h} - \frac{d}{dt} [\ln \rho] \right).$$

Преобразование (3.2.8) по законам $(I) \times 2 \left(e - \frac{1}{2}\right) - (II) \times 2g$ приводит к уравнению

$$\frac{d}{dt} \left[\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 \right] = -4s \left[\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 \right],$$

откуда

$$\ln \left| \left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 \right| = \ln \left| \frac{(h_0 - Vt)^2 C_1 \rho^6}{h_0^2 \rho_0^6} \right|, C_1 - const,$$

$$\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 = \frac{(h_0 - Vt)^2 C_1 \rho^6}{h_0^2 \rho_0^6}.$$

При $t = 0$ $e = 0, g = 0$, и $C_1 = \frac{1}{4}$, тогда первый интеграл системы (3.2.8) имеет вид

$$\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 = \frac{(h_0 - Vt)^2 \rho^6}{4h_0^2 \rho_0^6}. \quad (3.2.9)$$

Второй интеграл системы (3.2.8) следует из уравнения

$$\frac{d \left(g - e + \frac{1}{2} \right)}{\left(g - e + \frac{1}{2} \right)} = 2(\gamma - s)dt,$$

$$\gamma - s = \frac{V}{h},$$

следовательно

$$\frac{d \left(g - e + \frac{1}{2} \right)}{\left(g - e + \frac{1}{2} \right)} = 2 \frac{V}{h_0 - Vt} dt,$$

$$\ln \left| g - e + \frac{1}{2} \right| = \ln \left| \frac{h_0^2 C_2}{(h_0 - Vt)^2} \right|, \quad C_2 - \text{const},$$

$$\left| g - e + \frac{1}{2} \right| = \frac{h_0^2 C_2}{(h_0 - Vt)^2}.$$

При $t = 0$ $e = 0, g = 0$, тогда $C_2 = \frac{1}{2}$,

и второй интеграл системы (3.2.8) имеет вид

$$\left| g - e + \frac{1}{2} \right| = \frac{h_0^2}{2(h_0 - Vt)^2}. \quad (3.2.10)$$

Общее решение системы (3.2.8) определяется двумя интегралами:

$$\left(e - \frac{1}{2} \right)^2 - g^2 = \frac{(1 - \bar{\varepsilon})^2 \rho^6}{4\rho_0^6}, \quad \left| g - e + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(1 - \bar{\varepsilon})^2}. \quad (3.2.11)$$

Из (3.2.11) находятся инварианты

$$g = \frac{1}{4(1 - \bar{\varepsilon})^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^6 (1 - \bar{\varepsilon})^4,$$

$$e = \frac{1}{2} - \frac{1}{4(1 - \bar{\varepsilon})^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^6 (1 - \bar{\varepsilon})^4.$$

Тогда главные значения тензора деформаций Альманси имеют вид:

$$E_1 = e + g = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^6 (1 - \bar{\varepsilon})^4, \quad E_2 = e - g = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1 - \bar{\varepsilon})^2},$$

$$E_3 = \frac{1}{2} - \frac{\rho_0^4}{2\rho^4(1 - \bar{\varepsilon})^2}. \quad (3.2.12)$$

На рисунке 3.5 приведён график зависимости двух главных значений тензора деформаций Альманси E_1, E_2 от относительного сжатия образца $\bar{\varepsilon}$.

Изменение ширины $a(t)$ и толщины $f(t)$ полосы с течением времени определяется выражениями:

$$a(t) = \frac{a_0 \rho_0^3}{(1 - \bar{\varepsilon})^2 \rho^3}, \quad (3.2.13)$$

$$f(t) = \frac{(1 - \bar{\varepsilon}) f_0 \rho^2}{\rho_0^2}. \quad (3.2.14)$$

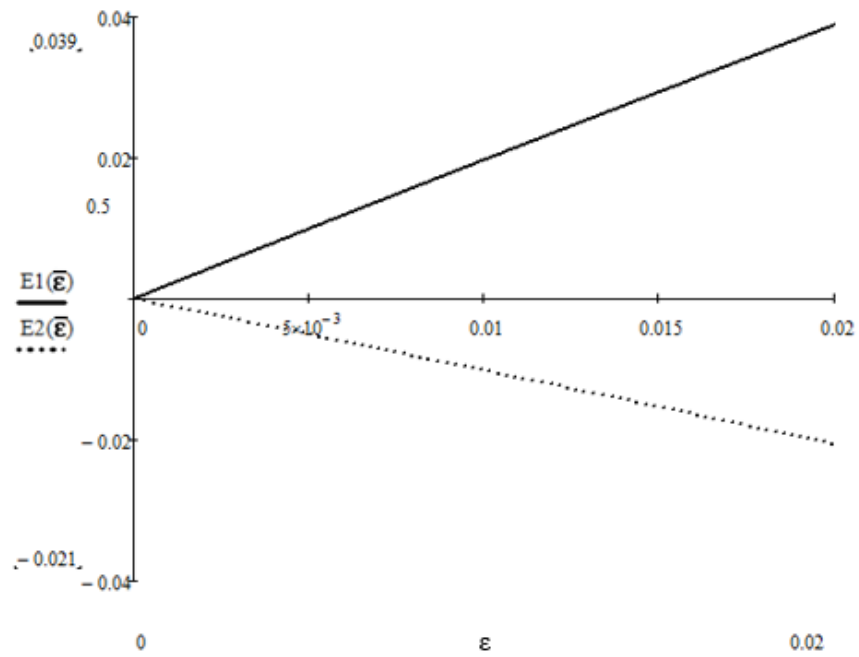


Рисунок 3.5 – График зависимости главных значений тензора Альманси от относительного сжатия образца при плоском напряженном состоянии

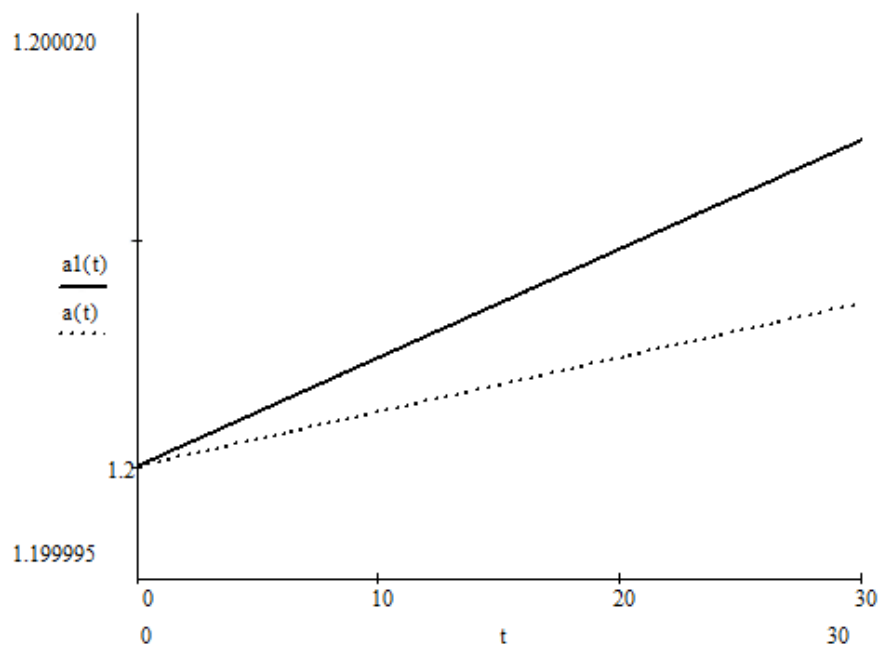


Рисунок 3.6 – Сравнение графиков изменения ширины полосы с течением времени при плоской деформации и плоском напряжённом состоянии

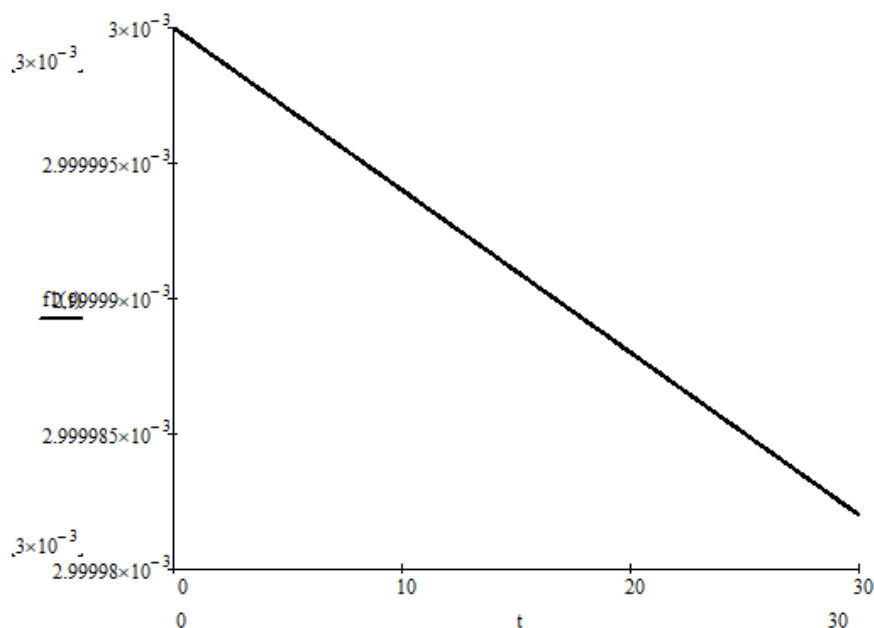


Рисунок 3.7 – График изменения толщины полосы с течением времени

На рисунке 3.6 приведены сравнительные графики зависимости изменения с течением времени ширины полосы в процессе сжатия при плоском напряжённом состоянии $a_1(t)$ и плоской деформации $a(t)$; на рисунке 3.7 представлен график изменения толщины полосы с течением времени.

Усилие, необходимое для сжатия полосы, определяется выражением:

$$P = -a(t)f(t)\sigma_{22} = -\sqrt{3}k \frac{a_0 \rho_0^3}{(1 - \bar{\varepsilon})^2 \rho^3} \frac{(1 - \bar{\varepsilon})f_0 \rho^2}{\rho_0^2},$$

$$P = -\sqrt{3}k \frac{a_0 f_0 \rho_0}{(1 - \bar{\varepsilon})\rho}. \quad (3.2.15)$$

3.3 Накопление деформаций в полосе при последовательном растяжении-сжатии в условиях плоского напряжённого состояния

Формулировка задачи о последовательном одноосном растяжении и сжатии плоского образца в условиях плоского напряжённого состояния аналогична формулировке для плоской деформации: до начала деформирования инварианты тензора Альманси $e_0 = 0, g_0 = 0$, углы наклона к оси x_1 главных осей тензора Альманси θ и тензора скоростей перемещений ψ равны: $\theta = \psi = \frac{\pi}{2}$. На первом этапе реализуется решение задачи о растяжении плоского образца с непрерывным полем скоростей и условием сжимаемости материала. На втором этапе образец сжимается, при этом направления главных осей меняются на $\theta = \frac{\pi}{2}, \psi = 0$, а в качестве начальных значений e_0 и g_0 используются значения e и g , полученные на этапе растяжения образца.

Первый этап растяжения полностью совпадает с задачей, рассмотренной в пункте 4.1, и инварианты тензора Альманси e и g определяются по формулам (3.1.26).

На этапе сжатия поле скоростей определяется системой уравнений (3.2.4). Относительное сжатие образца определяется параметром $\bar{\varepsilon} = \frac{vt}{h_0}$. Поле деформаций следует из решения системы (3.1.23) при $\theta = \frac{\pi}{2}, \psi = 0$:

$$\begin{cases} (I) \frac{de}{dt} - 2\gamma g = s(1 - 2e), \\ (II) \frac{dg}{dt} - 2\gamma e + 2gs + \gamma = 0. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Преобразование системы (3.3.1) по закону $(I) \times 2 \left(e - \frac{1}{2}\right) - (II) \times 2g$ приводит к уравнению:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 \right] = -4s \left[\left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 \right],$$

откуда

$$\ln \left| \left(e - \frac{1}{2} \right)^2 - g^2 \right| = \ln \left| \frac{(h_0 - Vt)^2 C_1 \rho^6}{h_0^2 \rho_0^6} \right|, C_1 - const,$$

$$\left(e - \frac{1}{2} \right)^2 - g^2 = \frac{(h_0 - Vt)^2 C_1 \rho^6}{h_0^2 \rho_0^6}.$$

При $t = 0$ $e = e_0, g = g_0$, и

$$C_1 = \left(e_0 - \frac{1}{2} \right)^2 - g_0^2,$$

тогда первый интеграл системы (3.3.1) имеет вид

$$\left(e - \frac{1}{2} \right)^2 - g^2 = \left[\left(e_0 - \frac{1}{2} \right)^2 - g_0^2 \right] \frac{(h_0 - Vt)^2 \rho^6}{h_0^2 \rho_0^6}. \quad (3.3.2)$$

Второй интеграл системы (3.3.1) получается из уравнения

$$\frac{d \left(g - e + \frac{1}{2} \right)}{\left(g - e + \frac{1}{2} \right)} = -2(\gamma + s)dt,$$

$$\gamma + s = 2 \frac{V}{h} - 3 \frac{d}{dt} [\ln \rho],$$

следовательно

$$\frac{d \left(g - e + \frac{1}{2} \right)}{\left(g - e + \frac{1}{2} \right)} = -2 \left(2 \frac{V}{h} - 3 \frac{d}{dt} [\ln \rho] \right) dt,$$

$$\ln \left| g - e + \frac{1}{2} \right| = \ln \left| \frac{(h_0 - Vt)^4 C_2 \rho^6}{h_0^4 \rho_0^6} \right|, C_2 - const,$$

$$\left| g - e + \frac{1}{2} \right| = \frac{(h_0 - Vt)^4 C_2 \rho^6}{h_0^4 \rho_0^6}.$$

При $t = 0$ $e = e_0, g = g_0$, тогда

$$C_2 = g_0 - e_0 + \frac{1}{2},$$

и второй интеграл системы (3.3.1) имеет вид

$$\left| g - e + \frac{1}{2} \right| = \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2} \right) \frac{(h_0 - Vt)^4 \rho^6}{h_0^4 \rho_0^6}. \quad (3.3.3)$$

Общее решение системы (3.3.1) определяется двумя интегралами:

$$\begin{aligned} \left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 &= \left[\left(e_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - g_0^2\right] \frac{(1 - \bar{\varepsilon})^2 \rho^6}{\rho_0^6}, \\ \left|g - e + \frac{1}{2}\right| &= \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right) \frac{(1 - \bar{\varepsilon})^4 \rho^6}{\rho_0^6}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Из (3.3.4) следует, что инварианты тензора Альманси e и g равны

$$\begin{aligned} g &= \frac{\left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right) (1 - \bar{\varepsilon})^4 \rho^6}{2\rho_0^6} - \frac{\left[\left(e_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - g_0^2\right]}{2\left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right) (1 - \bar{\varepsilon})^2}, \\ e &= \frac{1}{2} - \frac{\left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right) (1 - \bar{\varepsilon})^4 \rho^6}{2\rho_0^6} - \frac{\left[\left(e_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - g_0^2\right]}{2\left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right) (1 - \bar{\varepsilon})^2}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

При последующем повторном растяжении граничные условия и напряжённое состояние определяются согласно пункту 3.1 формулами (3.1.1), (3.1.2). Поле деформаций следует из решения системы (3.1.23). С учётом того, что при $t = 0$ $e = e_0$, $g = g_0$ два интеграла системы найдутся в виде:

$$\begin{aligned} \left(e - \frac{1}{2}\right)^2 - g^2 &= \left[\left(e_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - g_0^2\right] \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^2 \rho^6}{\rho_0^6}, \\ \left|g - e + \frac{1}{2}\right| &= \left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right) \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^4 \rho^6}{\rho_0^6}. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Инварианты тензора конечных деформаций Альманси равны

$$\begin{aligned} g &= \frac{\left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right) (1 + \bar{\varepsilon})^4 \rho^6}{2\rho_0^6} - \frac{\left[\left(e_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - g_0^2\right]}{2\left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right) (1 + \bar{\varepsilon})^2}, \\ e &= \frac{1}{2} - \frac{\left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right) (1 + \bar{\varepsilon})^4 \rho^6}{2\rho_0^6} - \frac{\left[\left(e_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - g_0^2\right]}{2\left(g_0 - e_0 + \frac{1}{2}\right) (1 + \bar{\varepsilon})^2}. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

На рисунке 3.8 приведены зависимости инвариантов тензора деформаций e и g от относительного удлинения/сжатия образца в условиях плоского напряженного состояния. Образец растягивается до значения $\bar{\varepsilon} = 0,003$, а затем сжимается до прежней длины.

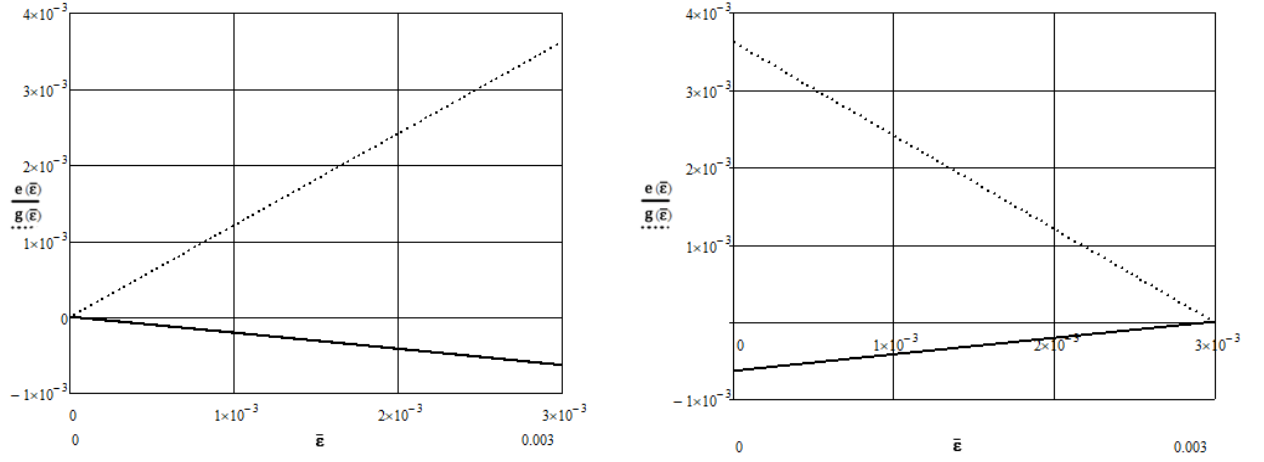


Рисунок 3.8 – Зависимость инвариантов тензора деформаций от относительного удлинения/сжатия при плоском напряжённом состоянии

Траектории движения частиц материала можно найти из поля скоростей. Для растяжения поле скоростей перемещений определяется системой (3.1.14)

$$\begin{cases} v_1(x_1, x_2, t) = -2 \frac{V}{l_0 + Vt} x_1 - 3 \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, \\ v_2(x_1, x_2, t) = \frac{V}{l_0 + Vt} x_2. \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Из первого уравнения следует

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{x_1} &= \left(2 \frac{V}{l_0 + Vt} - 3 \frac{d}{dt} [\ln \rho] \right) dt, \\ \ln x_1 &= \ln \frac{C_1}{(l_0 + Vt)^2 \rho^3}, C_1 - \text{const}, \\ x_1 &= \frac{C_1}{(l_0 + Vt)^2 \rho^3}. \end{aligned}$$

При $t = 0$

$$x_1^0 = \frac{C_1}{l_0^2 \rho_0^3} \Rightarrow C_1 = x_1^0 l_0^2 \rho_0^3,$$

тогда

$$x_1 = \frac{x_1^0 l_0^2 \rho_0^3}{(l_0 + Vt)^2 \rho^3}. \quad (3.3.9)$$

Из второго уравнения:

$$\frac{dx_2}{x_2} = \frac{V}{l_0 + Vt} dt,$$

$$x_2 = C_2(l_0 + Vt), C_2 - const.$$

При $t = 0$

$$x_2^0 = C_2 l_0 \Rightarrow C_2 = \frac{x_2^0}{l_0},$$

$$x_2 = \frac{x_2^0}{l_0} (l_0 + Vt). \quad (3.3.10)$$

Здесь x_1^0, x_2^0 – значения x_1, x_2 в момент времени $t = 0$.

Исключение в (3.3.10) параметра t даёт зависимость вида:

$$x_2 = \sqrt{\frac{x_1^0 (x_2^0)^2 \rho_0^3}{x_1 \rho^3}}, \quad (3.3.11)$$

Для сжатия поле скоростей определяется выражениями (3.2.4):

$$\begin{cases} V_1(x_1, x_2, t) = 2 \frac{V}{h_0 - Vt} x_1 - 3 \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, \\ V_2(x_1, x_2, t) = -\frac{V}{h_0 - Vt} x_2. \end{cases} \quad (3.3.12)$$

Из первого уравнения:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \left(2 \frac{V}{h_0 - Vt} - 3 \frac{d}{dt} [\ln \rho] \right) dt,$$

$$\ln x_1 = \ln \frac{C_3}{(h_0 - Vt)^2 \rho^3}, C_3 - const,$$

$$x_1 = \frac{C_3}{(h_0 - Vt)^2 \rho^3}.$$

При $t = 0$

$$x_1^0 = \frac{C_3}{h_0^2 \rho_0^3} \Rightarrow C_3 = x_1^0 h_0^2 \rho_0^3,$$

$$x_1 = \frac{x_1^0 h_0^2 \rho_0^3}{(h_0 - Vt)^2 \rho^3}. \quad (3.3.13)$$

Из второго уравнения:

$$\frac{dx_2}{x_2} = -\frac{V}{h_0 - Vt} dt,$$

$$x_2 = C_4(h_0 - Vt), C_4 - const.$$

При $t = 0$

$$x_2^0 = C_4 h_0 \Rightarrow C_4 = \frac{x_2^0}{h_0},$$

$$x_2 = \frac{x_2^0}{h_0} (h_0 - Vt). \quad (3.3.14)$$

Исключение в (3.3.14) параметра t приводит к функции:

$$x_2 = \sqrt{\frac{x_1^0 (x_2^0)^2 \rho_0^3}{x_1 \rho^3}}. \quad (3.3.15)$$

На рисунке 3.9 приведены траектории движения частиц материала при растяжении и сжатии в условиях плоского напряжённого состояния.

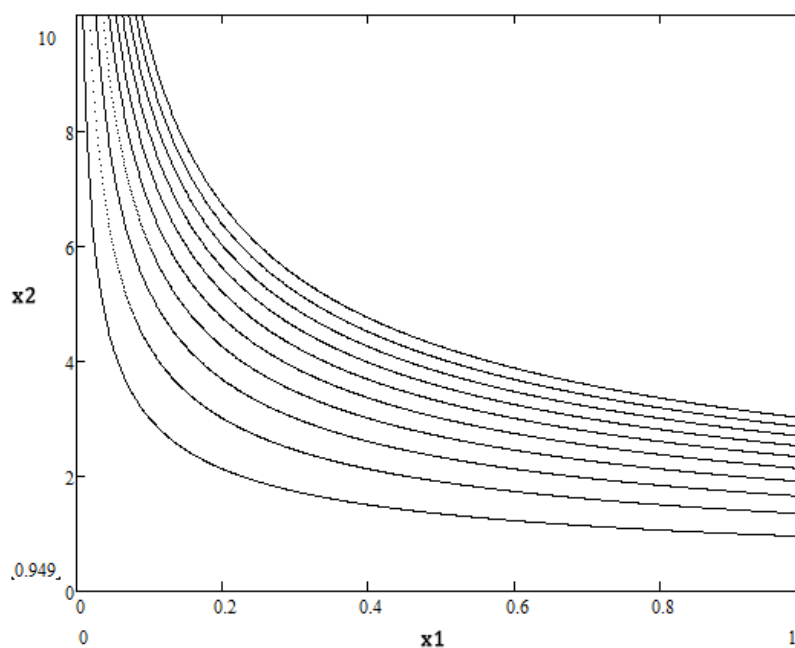


Рисунок 3.9 – Траектории движения частиц материала при растяжении полосы в условиях плоского напряжённого состояния

Из приведённых графиков следует, что как в случае растяжения, так и в случае сжатия частицы движутся по одним и тем же траекториям. Значит изменение структуры материала при циклическом нагружении, как и при плоской деформации, следует связывать с энергетическими параметрами. В

качестве такого оценочного критерия может быть использована объёмная плотность диссипации энергии

$$\bar{W} = \int_0^t \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dt. \quad (3.3.16)$$

Для процесса растяжения мощность диссипации энергии можно записать в виде:

$$\bar{W}'_{\text{раст.}} = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = \frac{V}{l_0 + Vt} \sqrt{3}k.$$

Тогда удельная объёмная работы диссипации энергии

$$\begin{aligned} A_{\text{раст.}} &= \int_0^{\Delta t} \bar{W}'_{\text{раст.}} dt = \sqrt{3}k \int_0^{\Delta t} \frac{V}{l_0 + Vt} dt = \sqrt{3}k \ln \left(\frac{l_0 + V\Delta t}{l_0} \right), \\ A_{\text{раст.}} &= \sqrt{3}k \ln(1 + \bar{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Для процесса сжатия мощность диссипации энергии запишется в виде:

$$\bar{W}'_{\text{сжат.}} = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = \sqrt{3}k \frac{V}{h_0 - Vt}.$$

Тогда удельная объёмная работы диссипации энергии

$$A_{\text{сжат.}} = \int_0^{\Delta t} \bar{W}'_{\text{сжат.}} dt = \sqrt{3}k \int_0^{\Delta t} \frac{V}{h_0 - Vt} dt = -\sqrt{3}k \ln|h_0 - V\Delta t| \Big|_0^{\Delta t}.$$

$h_0 = l_0 + V\Delta t$ – длина образца к концу этапа растяжения, тогда

$$\begin{aligned} A_{\text{сжат.}} &= -\sqrt{3}k (\ln|h_0| - \ln|l_0 + V\Delta t|), \\ A_{\text{сжат.}} &= \sqrt{3}k \ln(1 + \bar{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Удельная объёмная работа за полный цикл, состоящий из растяжения и последующего сжатия образца составляет

$$A_{\text{полн.}} = A_{\text{раст.}} + A_{\text{сжат.}} = 2\sqrt{3}k \ln(1 + \bar{\varepsilon}) = 2\sqrt{3}k\bar{\varepsilon}, \quad (3.3.19)$$

где $\bar{\varepsilon}$ – истинная (логарифмическая) деформация образца на этапе растяжения.

Глава 4 Задачи о внедрении жёстких штампов

4.1 Вдавливание клина в выпуклое тело

Пусть клин с углом раствора 2θ внедряется в выпуклую заготовку криволинейной формы, в результате чего часть материала выдавливается, и форма заготовки изменяется. Поле линий скольжения (рис. 4.1) состоит из двух треугольных областей ABD и AEC , оба семейства линий скольжения в которых прямолинейны и центрированного веера ADE .

Клин внедряется со скоростью $V_y = -1$ (ось y направлена вверх), коэффициент трения μ не изменяется вдоль поверхности контакта клина с заготовкой. Значение коэффициента μ связано с углом η зависимостью

$$\mu = \frac{\cos 2\eta}{1 + \sin 2\eta}.$$

Решение задачи состоит в определении в каждый момент времени t : формы деформированной границы материала AFC , координат точек A и C , угла раскрытия веера $\psi(t)$, которые определяют необходимую для внедрения клина нагрузку; распределения деформаций в окрестности особенностей поля линий скольжения.

В каждый момент времени поле скоростей определяется проекциями скорости V_y на α – и β – линии, равные:

$$v_\alpha = -V_y \frac{\sin \theta}{\cos \eta}, v_\beta = 0.$$

Согласно полю скоростей материал в области $AECF$ движется поступательно как жёсткое целое по направлению α – линий, поэтому проекции скорости точек области $AECF$ на оси координат x и y равны:

$$v_x = v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi), v_y = v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi). \quad (4.1.1)$$

Уравнения свободной границы деформированной поверхности AFC получаются интегрированием соотношений (4.1.1) и имеют вид:

$$\begin{aligned} x(t, \tau) &= v_\alpha \int_\tau^t \cos(\eta - \theta + \psi) dt + x_0(\tau), \\ y(t, \tau) &= v_\alpha \int_\tau^t \sin(\eta - \theta + \psi) dt + y_0(\tau). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

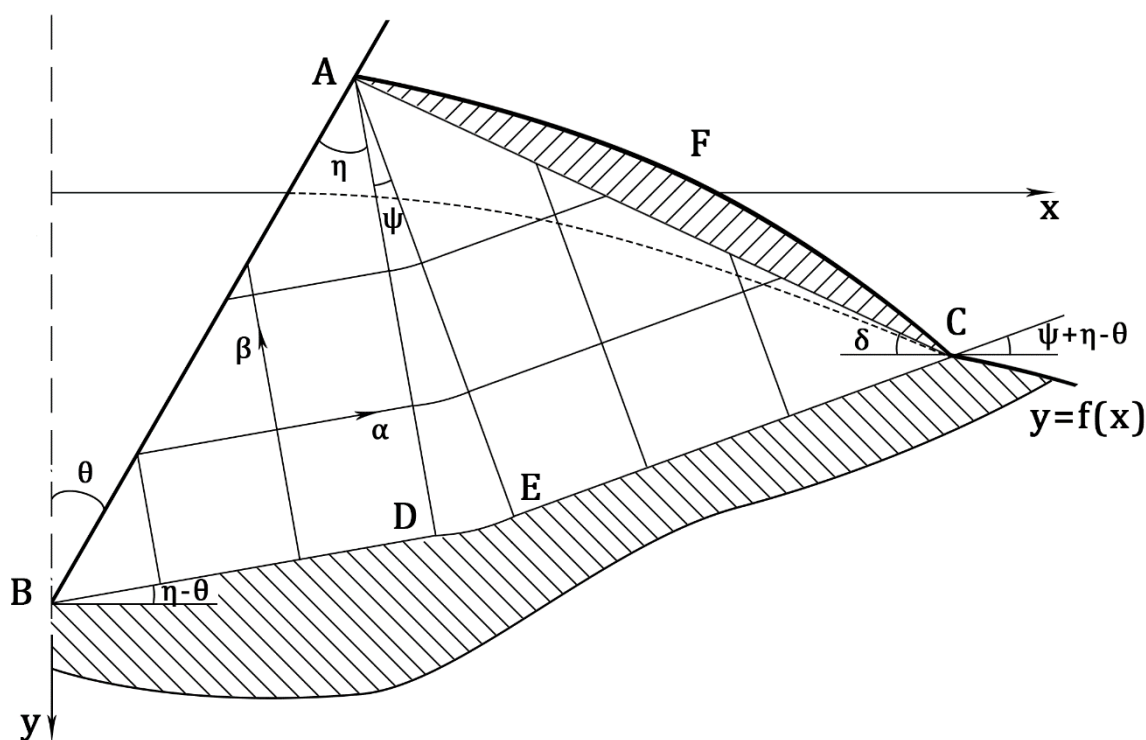


Рисунок 4.1 – Поле линий скольжения при вдавливании клина с углом раствора 2θ в выпуклую заготовку

Здесь $x = x_0(\tau)$, $y = y_0(\tau)$ – параметрическое представление границы тела до деформации; $x = x(t, \tau)$, $y = y(t, \tau)$ – параметрические уравнения деформированной части свободной поверхности AFC в момент времени t . Параметр τ выбран таким образом, что он совпадает со временем перехода соответствующей точки с недеформированной границы на свободную поверхность выдавливаемого объёма, то есть

$$x_0(\tau) = x_c(\tau), y_0(\tau) = y_c(\tau).$$

Треугольники ABD и AEC – ортогональны, а линии AD и AE равны между собой как радиусы централизованного веера. Поэтому справедливо соотношение

$$|AC| = \sqrt{2}|AB| \cos \eta.$$

Координаты точек A и C находятся как проекции прямой AB и ломаной линии BAC на оси x и y :

$$\begin{aligned} x_A &= |AB| \sin \theta, \\ y_A &= V_y t + |AB| \cos \theta, \\ x_C &= |AB| \sin \theta + |AC| \cos \delta, \\ y_C &= V_y t + |AB| \cos \theta - |AC| \sin \delta, \end{aligned}$$

здесь $\delta = \frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi$. Из полученных равенств следует соотношение между координатами точки C :

$$\frac{x_C}{1 + \omega \cos \delta} = \frac{(y_C + t) \operatorname{tg} \theta}{1 - \omega \operatorname{tg} \theta \sin \delta}. \quad (4.1.3)$$

Так как точка C лежит на недеформированной поверхности, при форме заготовки $y = f(x)$, справедливо равенство

$$y_C(t) = f(x_C(t)). \quad (4.1.4)$$

Точка A лежит на пересечении деформированной поверхности и клина, поэтому

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{x_C}{1 + \omega \cos \delta} = v_\alpha \int_{\tau_A}^t \cos \left(\frac{\pi}{4} - \delta \right) dt + x_C(\tau_A), \\ y_A &= \frac{y_C + t \omega \operatorname{tg} \theta \sin \delta}{1 - \omega \operatorname{tg} \theta \sin \delta} = v_\alpha \int_{\tau_A}^t \sin \left(\frac{\pi}{4} - \delta \right) dt + y_C(\tau_A), \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

где τ_A – время начала движения материальной точки, имеющей в момент времени t координаты $x_A(t), y_A(t)$.

Соотношения (4.1.3) – (4.1.5) представляют собой систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными функциями: $x_C(t), y_C(t), \delta(t), \tau_A(t)$.

Дифференцированием по t эта система может быть приведена к системе дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом:

$$y'_c(t) - f'(x_c)x'_c = 0,$$

$$x'_c z_1 - y'_c z_2 - \omega \psi' [x_c \sin \delta z_1^2 - (y_c + t) \cos \delta z_2^2] = z_2,$$

$$\begin{aligned} x'_c z_1 - \psi' x_c z_1^2 \omega \sin \delta + \tau'_A [v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - x'_c(\tau_A)] = \\ = v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi), \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

$$y'_c \frac{z_2}{tg\theta} - \omega \cos \delta \frac{z_2}{tg\theta} \psi' [tg\theta + z_2(y_c + t\omega tg\theta \sin \delta)] +$$

$$+ \tau'_A [v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - y'_c(\tau_A)] = v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi) - \omega \sin \delta z_2.$$

$$\text{Здесь } z_1 = \frac{1}{1 + \omega \cos \delta}, z_2 = \frac{tg\theta}{1 - \omega tg\theta \sin \delta}.$$

В момент начала процесса деформирования

$$\begin{aligned} t = 0, x_c = 0, y_c = 0, \tau_A = 0, \delta_0 = \frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi(0), \\ z_{10} = \frac{1}{1 + \omega \cos \delta_0}, z_{20} = \frac{tg\theta}{1 - \omega tg\theta \sin \delta_0}, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

и система (4.1.6) примет вид

$$y'_c - f'(0)x'_c = 0,$$

$$x'_c z_{10} - y'_c z_{20} = z_{20},$$

$$x'_c + \frac{\tau'_A}{z_{10}} \left[v_\alpha \cos \left(\frac{\pi}{4} - \delta_0 \right) - x'_c \right] = \frac{v_\alpha}{z_{10}} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \delta_0 \right) \quad (4.1.8)$$

$$y'_c + \frac{\tau'_A tg\theta}{z_{20}} \left[v_\alpha \sin \left(\frac{\pi}{4} - \delta_0 \right) - y'_c \right] = \frac{v_\alpha tg\theta}{z_{20}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \delta_0 \right) - \omega tg\theta \sin \delta_0.$$

Система (4.1.8) содержит четыре уравнения с тремя неизвестными — x'_c , y'_c , τ'_A . Условие совместности этой системы

$$f'(0) =$$

$$= \frac{z_{10} \left[\left(v_\alpha \cos \left(\frac{\pi}{4} - \delta_0 \right) z_{10} - z_{20} \right) (z_{20} - tg\theta) - z_{20} v_\alpha \sin \left(\frac{\pi}{4} - \delta_0 \right) tg\theta (z_{10} - 1) \right]}{z_{20} \left[v_\alpha \cos \left(\frac{\pi}{4} - \delta \right) (z_{20} - tg\theta) z_{10} + z_{20} tg\theta \left(1 - z_{10} \left(v_\alpha \sin \left(\frac{\pi}{4} - \delta_0 \right) + 1 \right) + v_\alpha \sin \left(\frac{\pi}{4} - \delta_0 \right) \right) \right]}$$

определяет начальное значение функции $\delta(t)$. При $f'_x(0) = 0$ это условие совпадает с уравнением, связывающим углы раствора клина θ и раскрытия веера ψ в задаче о внедрении клина в полупространство:

$$\cos(2\theta - \psi_0) = \frac{\cos \psi_0}{1 + \sin \psi_0}. \quad (4.1.9)$$

Поскольку область $AECF$ движется как жёсткое целое, поле напряжений в этой области в рамках теории идеального жесткопластического тела не определено. Приведённое на рис. 4.1 поле прямолинейных характеристик определяет напряжённое состояние, которое может рассматриваться как возможное, статически допустимое продолжение поля напряжений в эту область и имеет вид

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -2k.$$

Прямая линия AC является линией разрыва напряжений, на ней выполняется условие

$$n_j \sigma_{ij} = 0,$$

а в области AFC

$$\sigma_{ij} = 0,$$

поэтому граничные условия на деформированной свободной поверхности выполняются.

Усилие, необходимое для внедрения клина, рассчитывается по формуле

$$p = 4k(1 + \psi)|AB| \sin \theta. \quad (4.1.10)$$

Из-за выпуклости недеформированной заготовки угол ψ в процессе деформирования монотонно уменьшается и в некоторый момент времени t^* становится равен 0. Схема пластического течения при $\psi = 0$ представлена на рис. 4.6.

Все точки области $A'C'C_1B_1A_1$ в каждый момент времени t ($t \geq t^*$) движутся с одной и той же скоростью v , проекции которой на оси координат равны:

$$v_x = v_\alpha \cos(\eta - \theta), v_y = v_\alpha \sin(\eta - \theta)$$

Уравнение подвижной границы $A'C'C_1$ определяется функцией $y = F(x)$, которая является решением системы (4.1.6), и имеет вид

$$y(x, t) = F(x - v_\alpha(t - t^*) \cos(\eta - \theta)) + v_\alpha(t - t^*) \sin(\eta - \theta). \quad (4.1.11)$$

Система уравнений (4.1.15) – (4.1.17) при условии $F(x_c) = y_c$ определяет ниже точки C некоторую проходящую через эту точку кривую $y = F(x)$, которая, перемещаясь вдоль линии скольжения со скоростью v_α , образует деформированную границу. Выполненная замена переменных эквивалентна обратному перемещению деформированной границы из положения $A'C'$ (рис. 4.2) в положение AC .

При $\psi = 0$ процесс деформирования происходит только вдоль линии разрыва скоростей B_1C_1 и вся область $B_1A_1A'C_1$ движется как жёсткое целое. В качестве возможного статически допустимого продолжения поля напряжений в эту область можно рассматривать однородное напряжённое состояние

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -2k.$$

Усилие, необходимое для внедрения клина в этом случае можно рассчитать по формуле

$$p = 4k|A_1B_1| \sin \theta,$$

так как материал в области $A_1A'C_1C_1$ свободен от напряжений и не оказывает давления на клин, и при расчёте усилия, необходимого для внедрения клина, учитывается только часть площади контакта B_1A_1 .

В процессе пластического течения при $\psi > 0$ деформированная поверхность образуется в точке C , а в точке A она подминается клином. Вновь образовавшийся элемент деформированной поверхности будет оказывать влияние на пластическое течение, определяя положение точки A только через промежуток времени τ_A . Поэтому (4.1.8) – система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

При обращении угла ψ в нуль характер пластического течения изменяется. Деформированная поверхность в точке A уже не будет подминаться клином и, соответственно, не будет оказывать влияния на пластическое течение.

Рассмотренное решение задачи о внедрении клина в выпуклую заготовку будет полным, если существует статически допустимое продолжение поля напряжений ниже линии $BDEC$ и имеет место при условии

$$\eta \geq \theta.$$

К особенностям поля линий скольжения, в окрестности которых определяется распределение деформаций, относятся линия разрыва скоростей перемещений ($BDEC$) и центр веера характеристик (точка A).

Деформации на линии разрыва скоростей определяются величиной удельной диссипации энергии $\bar{W}$, которая зависит от нормальной $V_n = 0$ и касательной $[V_\tau] = V^+ - V^- = \frac{\sin \theta}{\cos \eta}$ составляющих скорости, а также нормальной скорости распространения линии $BDEC - G$.

Скорость G определяется соотношением

$$G = \frac{1}{|\text{grad } f|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad (4.1.18)$$

где $f(x, y) = t$ – функция, определяющая уравнение линии разрыва скоростей перемещений.

Уравнения для составляющих линии $BDEC$ имеют вид:

- линия BD : $-[y - tg(\eta - \theta)x] = t$;
- линия DE : $\begin{cases} x = x_A + R \cos \xi \\ y = y_A + R \sin \xi \end{cases}, R = |AE|, \xi = \alpha - \frac{\pi}{2}$;
- линия EC : $y = xt g\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) + y_c - x_c t g\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)$.

Тогда из (4.1.18):

$$G = \begin{cases} \cos(\eta - \theta) \\ \frac{dx_A}{dt} \cos \xi + \frac{dy_A}{dt} \sin \xi + \frac{dR}{dt}, \xi \in \left[\eta - \theta - \frac{\pi}{2}; \eta - \theta - \frac{\pi}{2} + \psi\right] \\ \frac{(x_c - x)\delta'}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)} + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \left[y'_c - x'_c \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)\right] \end{cases}. \quad (4.1.19)$$

Здесь

$$\frac{dx_A}{dt} = \frac{x'_c(1 + \omega \cos \delta) + x_c \omega \sin \delta \delta'}{(1 + \omega \cos \delta)^2},$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{x'_c \cos \eta \sin \theta (1 + \omega \cos \delta) + x_c \cos \eta \omega \sin \theta \sin \delta \delta'}{(\sin \theta)^2 (1 + \omega \cos \delta)^2},$$

$$\frac{dy_A}{dt} = \frac{[y'_c + \omega t g \theta (\sin \delta + t \cos \delta \delta')]}{(1 - \omega t g \theta \sin \delta)} + \frac{(y_c + t \omega t g \theta \sin \delta) \omega g \theta \cos \delta \delta'}{(1 - \omega t g \theta \sin \delta)^2}.$$

Полученные значения скорости G позволяют определить величину объёмной плотности диссипации энергии

$$\bar{W} = \frac{[V_\tau]}{G + V_n}, \quad (4.1.20)$$

от которой зависит первое главное значение тензора конечных деформаций Альманси и угол между первым главным направлением тензора Альманси и касательной к линии разрыва скоростей:

$$E_1 = \frac{\bar{W}^2}{4} \left[\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right], \quad tg 2\theta = -\frac{2}{\bar{W}}. \quad (4.1.21)$$

Деформации в окрестности центра веера определяются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da_{11}}{d\alpha} \bar{A} - a_{11} \sin \alpha \cos \alpha + a_{21} (\cos \alpha)^2 &= 0, \\ \frac{da_{12}}{d\alpha} \bar{A} - a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} (\cos \alpha)^2 &= 0, \\ \frac{da_{21}}{d\alpha} \bar{A} - a_{11} (\sin \alpha)^2 + a_{21} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \frac{da_{22}}{d\alpha} \bar{A} - a_{12} (\sin \alpha)^2 + a_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Здесь a_{ij} – компоненты тензора дисторсии, $\bar{A} = \frac{v_\alpha - a' \cos \alpha - b' \sin \alpha}{v_\alpha}$, $a' = \frac{dx_A}{dt}$, $b' = \frac{dy_A}{dt}$ – закон движения центра веера линий скольжения. Приведённая система может быть решена методом Рунге-Кутты IV порядка; в силу того, что частица попадающая в веер получает начальные деформации на линии EC , решение системы должно удовлетворять начальным условиям

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \bar{W}_{EC} & 1 \end{bmatrix}.$$

При обращении угла раскрытия всера в нуль деформации вдоль всей линии разрыва будут распределены равномерно.

Примером может служить решение задачи о внедрении абсолютно твёрдого клина $y = |x| \operatorname{ctg}(\theta)$ в клинообразную заготовку $y = -|x| \operatorname{tg}(\gamma)$. В данном случае угол ψ на протяжении всего процесса деформирования сохраняет постоянное значение, так как форма заготовки не является выпуклой.

Уравнение (4.1.4) примет вид

$$y_C = -|x_C| \operatorname{tg}(\gamma).$$

Уравнение (4.1.3) после исключения из него y_C запишется в виде:

$$x_C(t) = \frac{z_2}{z_1 + z_2 \operatorname{tg} \gamma} t.$$

Подстановка данного соотношения в (4.1.5) при учёте того, что $\delta = \text{const}$ приводит к однородной системе двух уравнений относительно t и τ_A .

$$\begin{cases} \frac{ttg\theta}{u_1 + u_2tg\gamma tg\theta} = v_\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)(t - \tau_A) + \frac{u_2tg\theta\tau_A}{u_1 + u_2tg\gamma tg\theta}, \\ \frac{(1 - u_1)t - u_2ttg\gamma tg\theta}{u_1 + u_2tg\gamma tg\theta} = v_\alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)(t - \tau_A) - \frac{u_2tg\gamma tg\theta\tau_A}{u_1 + u_2tg\gamma tg\theta}, \end{cases}$$

где $u_1 = 1 - \omega tg\theta \sin \delta$, $u_2 = 1 + \omega \cos \delta$.

Условие существования ненулевого решения этой системы имеет вид

$$\sin \theta \cos(\theta - \gamma) + 2 \cos \eta \sin(\gamma - \delta) [\cos \eta \cos \delta + \sqrt{2} \sin \theta] = 0$$

и позволяет определить значение угла δ .

Решением системы является зависимость $\tau_A(t)$:

$$\tau_A(t) = \left(1 + \frac{\sqrt{2} \cos^2 \eta \cos \delta \cos \gamma}{\sin \theta \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) [\cos(\theta - \gamma) + \sqrt{2} \cos \eta \sin(\gamma - \delta)] - \cos \gamma \cos \eta (\sin \theta + \sqrt{2} \cos \eta \cos \delta)} t \right)$$

На рисунке 4.4 приведено графическое представление решения задачи о внедрении клина $y = |x| \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{6})$ в клин $y = -|x| \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8})$ в момент времени $t = 1$. Коэффициент трения $\mu = 0,20$. Пунктирная линия соответствует начальному положению недеформированной поверхности, линия AC определяет текущее положение деформированной поверхности. Пластическое течение в

Пусть абсолютно твёрдый клин $y = |x|\operatorname{ctg}(\theta)$ внедряется в заготовку, имеющую форму гиперболического цилиндра $\frac{(y-a)^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. Для данной задачи возможны три варианта пластического течения.

В первом случае угол раскрытия веера $\psi(t)$ в течение всего процесса пластического течения будет больше нуля. Вследствие наличия у гиперболы асимптот $y = \pm \frac{a}{b}x$ процесс будет стремиться к некоторому автомодельному режиму, соответствующему вдавливанию клина $y = |x|\operatorname{ctg}(\theta)$ в клин $y = \frac{a}{b}|x|$. Форма подвижной границы в этом случае находится из решения системы уравнений (4.1.6).

Второй случай имеет место, если выполняется условие

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta\right) \geq \frac{a}{b}.$$

Тогда при малых глубинах внедрения клина течение происходит при ненулевом ψ . Форма подвижной границы определяется решением системы (4.1.6). При дальнейшем внедрении клина угол раскрытия веера обращается в нуль и процесс деформирования стремится к автомодельному режиму. Форма деформированной границы определяется из решения системы (4.1.15) – (4.1.17).

Третий случай имеет место при

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta\right) < \frac{a}{b}.$$

Тогда решение может быть построено только до момента, когда прямая линия AC займёт положение касательной к гиперболе в точке C . Для данной схемы это предельное положение линии AC , позволяющее построить статически допустимое продолжение поля напряжений в жёсткую область.

Пусть гиперболический цилиндр задаётся уравнением

$$\frac{(y - \sqrt{2})^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1,$$

угол раствора клин равен $\frac{\pi}{4}$, коэффициент трения $\mu = 0.12$, то есть $\eta \approx 0.67$ радиан, тогда уравнение недеформированной поверхности примет вид

$$y_c = \sqrt{2} - \sqrt{x_c^2 + 2}.$$

При введении обозначений:

$$\begin{aligned} x_c z_1^2 \sin \delta - (y_c + t) z_2^2 \cos \delta &= A, \\ x_c z_1^2 \omega \sin \delta &= B, \\ v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - x'_c(\tau_A) &= C, \\ \frac{\omega \cos \delta z_2}{\operatorname{tg} \theta} [t \operatorname{tg} \theta + z_2(y_c + t \omega \operatorname{tg} \theta \sin \delta)] &= D, \\ v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - y'_c(\tau_A) &= E, \\ v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi) - \omega \sin \delta z_2 &= G, \end{aligned}$$

система (4.1.6) запишется в виде

$$\left\{ \begin{aligned} y'_c &= -\frac{x_c x'_c}{\sqrt{x_c^2 + 2}}, \\ x'_c z_1 - y'_c z_2 + A \omega \delta' &= z_2, \\ x'_c z_1 + B \delta' + C \tau'_A &= v_\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right), \\ y'_c \frac{z_2}{\operatorname{tg} \theta} + D \delta' + E \tau'_A &= G. \end{aligned} \right.$$

Полученная система может быть сведена к одному дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом относительно $\delta' = -\psi'$. Это уравнение имеет вид

$$\delta' = \frac{(v_\alpha \cos(\frac{\pi}{4} - \delta) E - C G) \operatorname{tg} \theta (z_1 \sqrt{x_c^2 + 2} + z_2 x_c) - z_1 z_2 E \operatorname{tg} \theta \sqrt{x_c^2 + 2} - C z_2^2 x_c}{(B E - C D) \operatorname{tg} \theta (z_1 \sqrt{x_c^2 + 2} + z_2 x_c) - z_1 A \omega E \operatorname{tg} \theta \sqrt{x_c^2 + 2} - C z_2 x_c A \omega}.$$

Данное уравнение решается методом последовательного интегрирования. Отрезок времени на котором определяется неизвестная функция разбивается на n шагов. Функции, зависящие от параметра запаздывания на первом шаге определяются начальными условиями для системы (4.1.6), на каждом i -м шаге – решением, полученным на $(i - 1)$ -м шаге.

Решение уравнения на каждом из шагов находится с помощью численных методов (например, метод Адамса) с последующей интерполяцией функции $\psi(t)$.

Значения неизвестных функций в окрестности $t = 0$ для первого шага:
 $\delta(\tau_A) = \delta_0, y'_c(\tau_A) = y'_c(0) = 0, x'_c(\tau_A) = x'_c(0) = \frac{z_{20}}{z_{10}}.$

На рисунке 4.6 приведён график изменения угла раскрытия веера с течением времени. Угол веера обращается в нуль и процесс течения переходит ко второму этапу при $t \approx 0.523$.

Геометрическое представление пластической области и деформированной поверхности материала дано на рисунке 4.7.

На рисунке 4.8 приводится сравнительное построение деформированных поверхностей для задачи с учётом (сплошная линия) и без учёта коэффициента трения (пунктирная линия). При учёте коэффициента трения образование деформированной поверхности происходит на большей части образца, чем в случае отсутствия трения.

На рисунке 4.9 представлен график изменения удельного усилия, необходимого для внедрения клина.

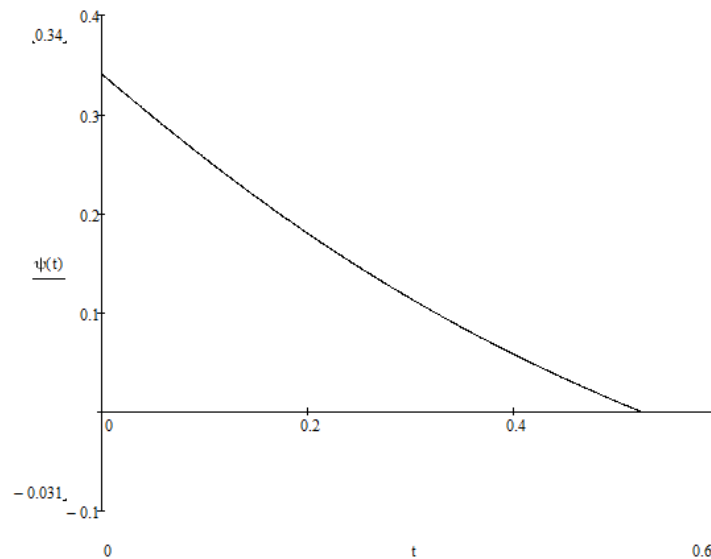


Рисунок 4.6 – График зависимости угла раскрытия веера характеристик от времени $\psi(t)$

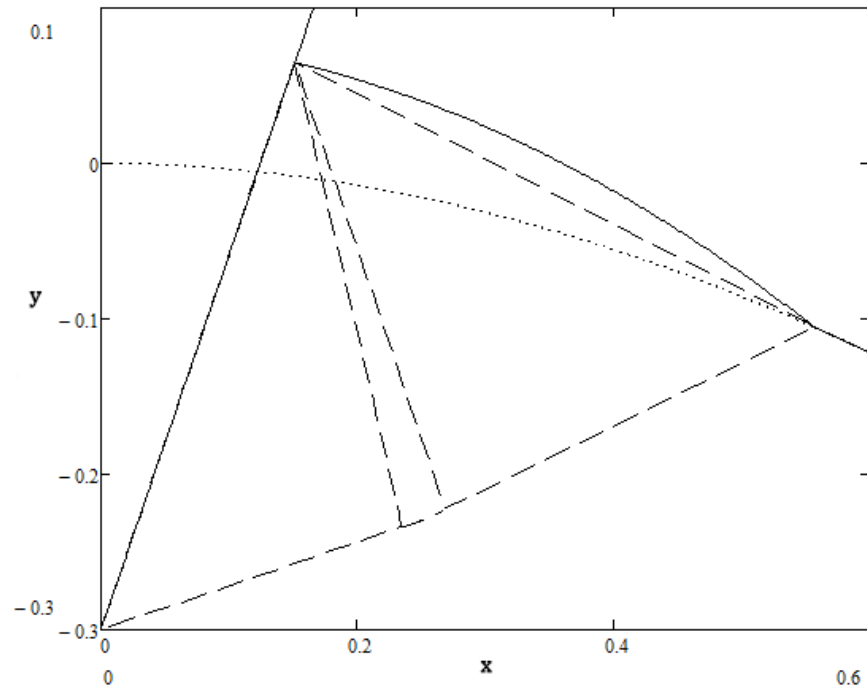


Рисунок 4.7 – Пластическая область и деформированная поверхность в задаче о вдавливании клина $y = |x|ctg(\theta)$ с углом раствора $22^{\circ}31'2''$ в гиперболический цилиндр $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$

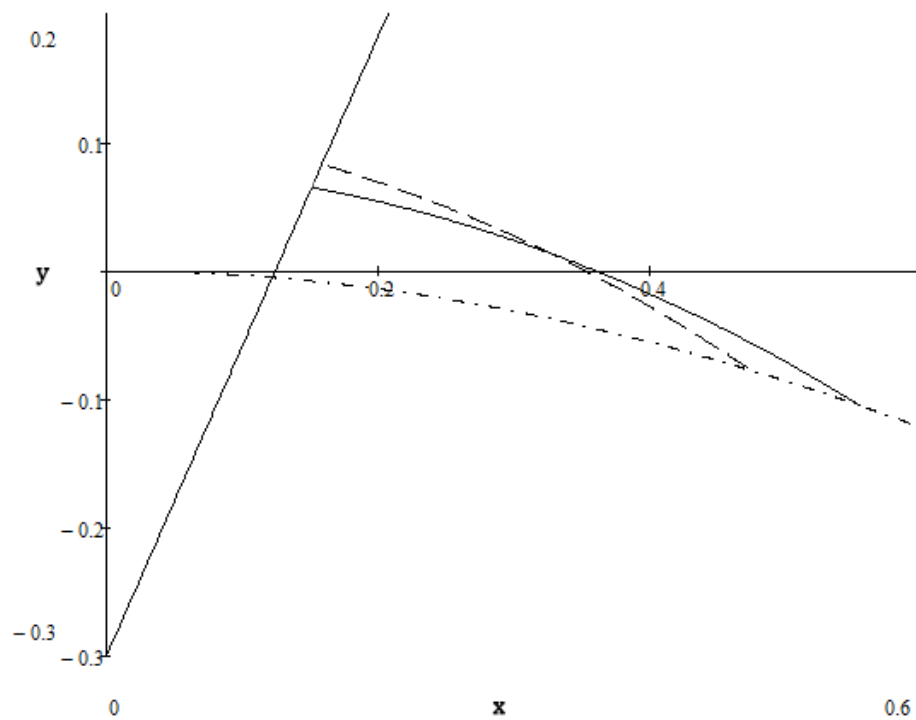


Рисунок 4.8 – Деформированная поверхность с учётом и без учёта коэффициента трения

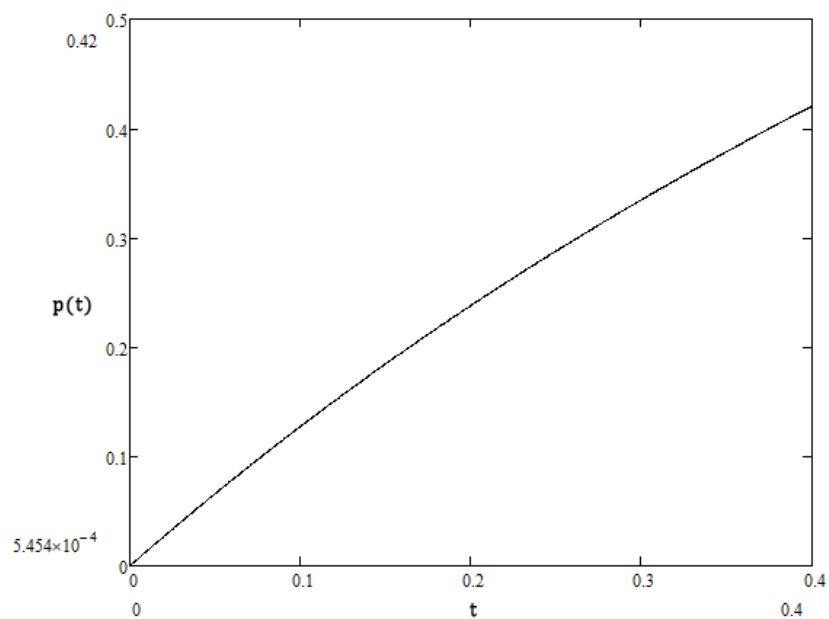


Рисунок 4.9 – График зависимости удельного усилия, необходимого для внедрения клина, от времени $p(t)$

На рисунке 4.10 приведено распределение деформаций на линии разрыва скоростей перемещений $BDEC$ и в окрестности центра веера линий скольжения в момент времени $t = 0.3$. Из рисунка видно, что наибольшие деформации наблюдаются в окрестности центра веера линий скольжения.

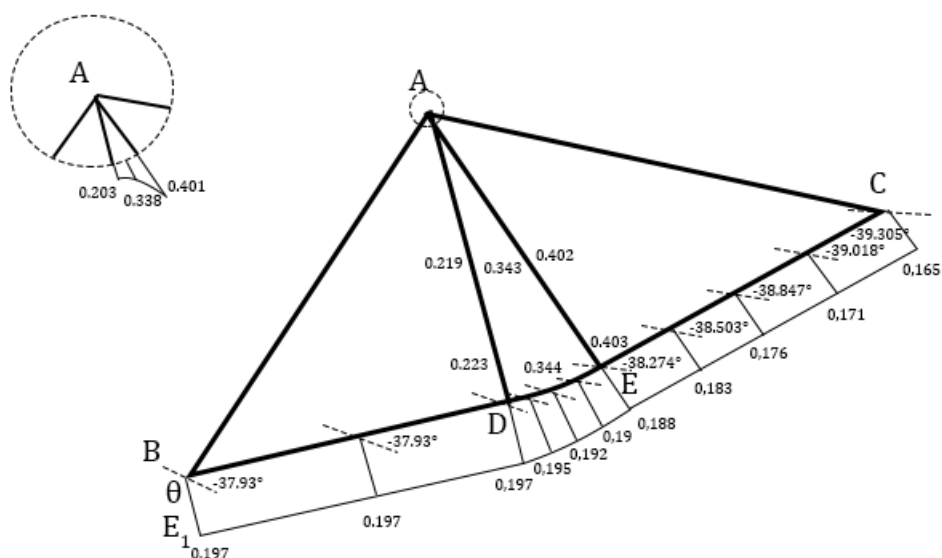


Рисунок 4.10 – Распределение деформаций на линии разрыва скоростей перемещений и в окрестности центра веера линий скольжения при $t = 0.3$

4.2 Сжатие выпуклого тела плоским штампом

Задача о сжатии выпуклого тела плоским штампом решается аналогично задаче о вдавливании клина в выпуклое тело, рассмотренной выше. Распределение скоростей в данной задаче, как и в задаче о вдавливании плоского штампа в полупространство не единственно. Схемы сеток линий скольжения, соответствующие решениям данной задачи, полученных Хиллом и Прандтлем представлены на рисунке 4.11.

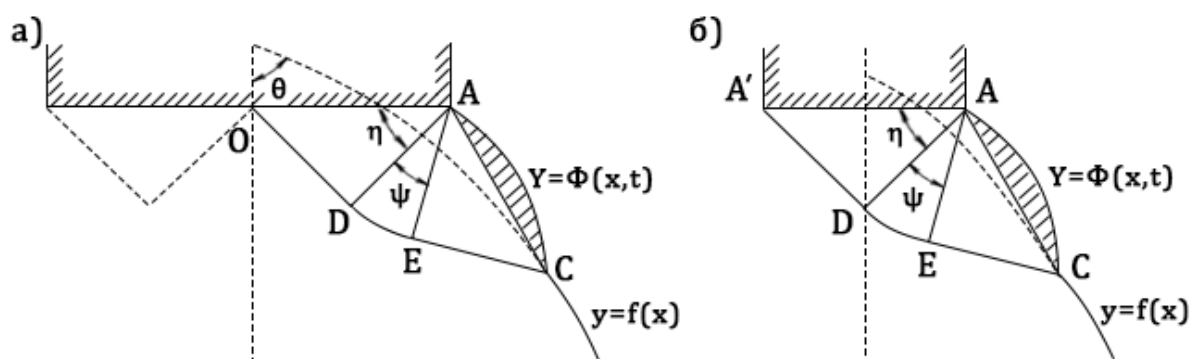


Рисунок 4.11 – Схемы сеток линий скольжения: а) в решении Хилла, б) в решении Прандтля

Пусть штамп движется со скоростью $V_y = -1$, тогда $y_A = -t$, поскольку точка A всегда находится на штампе.

В решении по схеме Р. Хилла (рис. 4.7, а) поле скоростей имеет вид:

$$v_\alpha = -\frac{V_y}{\cos \eta}, v_\beta = 0.$$

Проекции скорости v_α на оси координат равны

$$v_x = \frac{\cos\left(\eta + \psi - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos \eta}, v_y = \frac{\sin\left(\eta + \psi - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos \eta}.$$

Координаты точек A и C связаны соотношениями:

$$x_C = x_A \left[1 + \sqrt{2} \cos \eta \cos \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right) \right],$$

$$y_c = y_A - \sqrt{2}x_A \cos \eta \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right).$$

Отсюда следует выражение, связывающее координаты точки C

$$y_c = -t - x_c \frac{\sqrt{2} \cos \eta \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right)}{1 + \sqrt{2} \cos \eta \cos \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right)}. \quad (4.2.1)$$

Уравнения свободной поверхности задаются в параметрической форме

$$\begin{aligned} x(t, \tau) &= \frac{1}{\cos \eta} \int_{\tau}^t \cos \left(\eta + \psi - \frac{\pi}{2} \right) dt + x_0(\tau), \\ y(t, \tau) &= \frac{1}{\cos \eta} \int_{\tau}^t \sin \left(\eta + \psi - \frac{\pi}{2} \right) dt + y_0(\tau). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Параметр τ выбран таким образом, что он совпадает со временем перехода соответствующей точки с недеформированной границы на свободную поверхность выдавливаемого объёма, то есть

$$x_0(\tau) = x_c(\tau), y_0(\tau) = y_c(\tau).$$

Тогда система уравнений для решения задачи по схеме Хилла имеет вид:

$$\begin{aligned} y_c(t) &= f(x_c(t)), \\ x_c \sqrt{2} \cos \eta \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right) + (y_c + t) \left(1 + \sqrt{2} \cos \eta \cos \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right) \right) &= 0, \\ \frac{x_c}{1 + \sqrt{2} \cos \eta \cos \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right)} &= \left(\frac{1}{\cos \eta} \int_{\tau_A}^t \cos \left(\eta + \psi - \frac{\pi}{2} \right) dt + x_c(\tau_A) \right), \\ \frac{1}{\cos \eta} \int_{\tau_A}^t \sin \left(\eta + \psi - \frac{\pi}{2} \right) dt + y_c(\tau_A) + t &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Дифференцированием по t и введением обозначений

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2} \cos \eta \cos \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right), \\ v &= \sqrt{2} \cos \eta \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right), \\ w &= \frac{1}{\cos \eta} \cos \left(\eta + \psi - \frac{\pi}{2} \right), \\ z &= \frac{1}{\cos \eta} \sin \left(\eta + \psi - \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

система (4.2.3) приводится к системе дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом:

$$\begin{aligned}
y'_c(t) - f'(x_c)x'_c &= 0, \\
vx'_c - ux_c\psi' + (1+u)(y'_c + 1) + v(y_c + t)\psi' &= 0, \\
\frac{x'_c(1+u) - vx_c\psi'}{(1+u)^2} &= w - \frac{1}{\cos\eta} \cos\left(\eta + \psi(\tau_A) - \frac{\pi}{2}\right) \tau'_A + x'_c(\tau_A)\tau'_A \\
z - \frac{1}{\cos\eta} \sin\left(\eta + \psi(\tau_A) - \frac{\pi}{2}\right) \tau'_A + y'_c(\tau_A)\tau'_A + 1 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Условие совместности системы (4.2.4) при $t = 0$:

$$v_0[v_0w_0 + u_0(z_0 + 1) + 1] = 0, \tag{4.2.5}$$

где u_0, v_0, w_0, z_0 – значения u, v, w и z , взятые при начальном значении угла раскрытия веера ψ_0 .

При отсутствии трения условие (4.2.5) совпадает с полученным Р. Хиллом уравнением, связывающим углы θ и ψ при сжатии клина плоским штампом [72].

Решение системы (4.2.4) как и в задаче о внедрении клина в выпуклое тело может быть произведено методом последовательного интегрирования.

Поскольку в окрестности $t = 0$ значения производных x'_c и x'_A стремятся к бесконечности, а угол раскрытия веера $\psi \approx \psi_0$, на первом этапе от $t_0 = 0$ до t_1 , рассматривается приближённое решение задачи, при котором значение угла $\psi = \psi_0$. Тогда значение x_c определяется из уравнения

$$-\frac{v_0}{u_0 + 1}x_c - t = f(x_c).$$

Величина $x_c(t_1)$ позволяет определить производную $x'_c(\tau_A)$ на втором этапе интегрирования.

Нормальная и разрыв касательной составляющей скорости на линии $ODEC$ равны:

$$V_n = 0, [V_\tau] = \frac{1}{\cos\eta}$$

Уравнения составляющих линии разрыва $ODEC$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\text{– линия } OD: -[y + ctg(\eta)x] = t; \\
&\text{– линия } DE: \begin{cases} x = x_A + R \cos \xi \\ y = y_A + R \sin \xi \end{cases}, R = |AE|, \xi = \alpha - \frac{\pi}{2};
\end{aligned}$$

– линия EC : $y = y_c + x \operatorname{tg} \left(\eta + \psi - \frac{\pi}{2} \right) - x_c \operatorname{tg} \left(\eta + \psi - \frac{\pi}{2} \right)$.

Тогда скорость линии разрыва:

$$G = \begin{cases} \sin(\eta) \\ \frac{dx_A}{dt} \cos \xi + \frac{dy_A}{dt} \sin \xi + \frac{dR}{dt}, \xi \in [\eta - \pi; \eta - \pi + \psi] \\ \frac{(x - x_c)\psi'}{\cos \left(\eta + \psi - \frac{\pi}{2} \right)} + \cos \left(\eta + \psi - \frac{\pi}{2} \right) \left[y'_c - x'_c \operatorname{tg} \left(\eta + \psi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \end{cases}. \quad (4.2.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{dx_A}{dt} &= \frac{x'_c}{\left(1 + \sqrt{2} \cos \eta \cos \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right) \right)} - \frac{x_c \psi' \sqrt{2} \cos \eta \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right)}{\left(1 + \sqrt{2} \cos \eta \cos \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right) \right)^2}, \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{x'_c \cos \eta}{\left(1 + \sqrt{2} \cos \eta \cos \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right) \right)} - \frac{x_c (\cos \eta)^2 \psi' \sqrt{2} \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right)}{\left(1 + \sqrt{2} \cos \eta \cos \left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right) \right)^2}, \\ \frac{dy_A}{dt} &= -1. \end{aligned}$$

Удельная диссипация энергии определяется соотношением (4.1.20), первое главное значение тензора деформаций Альманси – соотношением (4.1.21). Деформации в окрестности центра веера находятся решением системы (4.1.22).

Пусть недеформированная поверхность имеет форму гиперболического цилиндра

$$y_c = \sqrt{2} - \sqrt{x_c^2 + 2},$$

коэффициент трения $\mu = 0.12$, то есть $\eta \approx 0.67$ радиан. Тогда координата x_c на начальном этапе деформирования находится в виде

$$x_c = \frac{-\frac{v_0}{u_0 + 1}(t + \sqrt{2}) - \sqrt{2 \left(-\frac{v_0}{u_0 + 1} \right)^2 + t^2 + 2\sqrt{2}t}}{\left(-\frac{v_0}{u_0 + 1} \right)^2 - 1}.$$

На втором этапе система (4.2.4) может быть сведена к одному дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом, которое имеет вид

$$\psi' = \frac{\left[A \left[v - \frac{x_c}{\sqrt{x_c^2 + 2}} (u + 1) \right] + 1 \right] (1 + u)^2}{u(1 + u)x_c - v(1 + u)(\sqrt{2} - \sqrt{x_c^2 + 2} + t) - vx_c \left[v - \frac{x_c}{\sqrt{x_c^2 + 2}} (u + 1) \right]},$$

где $A = w - \frac{(z+1)(w(\tau_A) - x'_c(\tau_A))}{z(\tau_A) - y'_c(\tau_A)}$, $x'_c(\tau_A) = \frac{-(u+1)\sqrt{x_c(t_1)^2 + 2}}{v\sqrt{x_c(t_1)^2 + 2} - (u+1)x_c(t_1)}$, $y'_c(\tau_A) = -1$.

График функции $\psi(t)$ имеет вид, приведённый на рисунке 4.12.

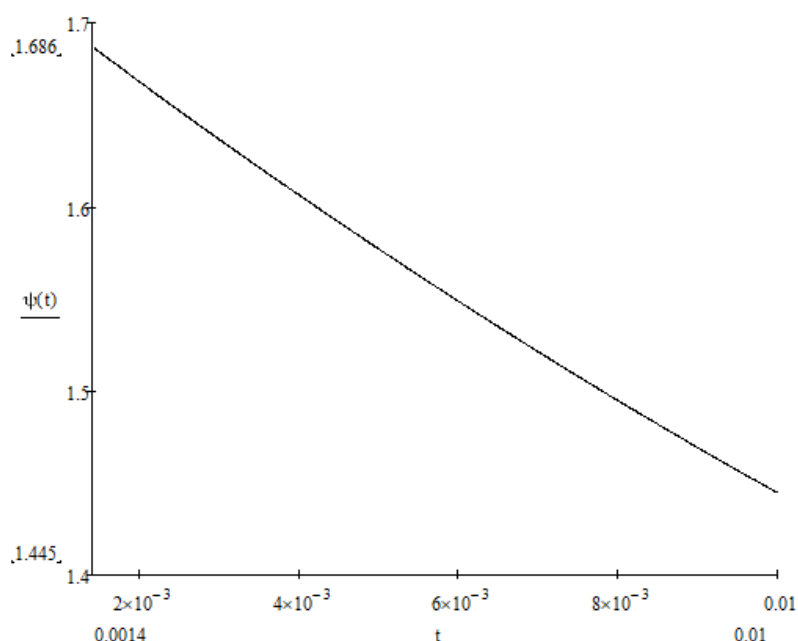


Рисунок 4.12 – График зависимости угла раскрытия веера характеристик от времени $\psi(t)$ при сжатии гиперболического цилиндра $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$ плоским штампом по схеме Хилла

На рисунке 4.13 построены пластическая область и деформированная поверхность в момент времени $t = 0.01$, деформирование с постоянным углом ψ рассматривалось при t от 0 до 0.0014.

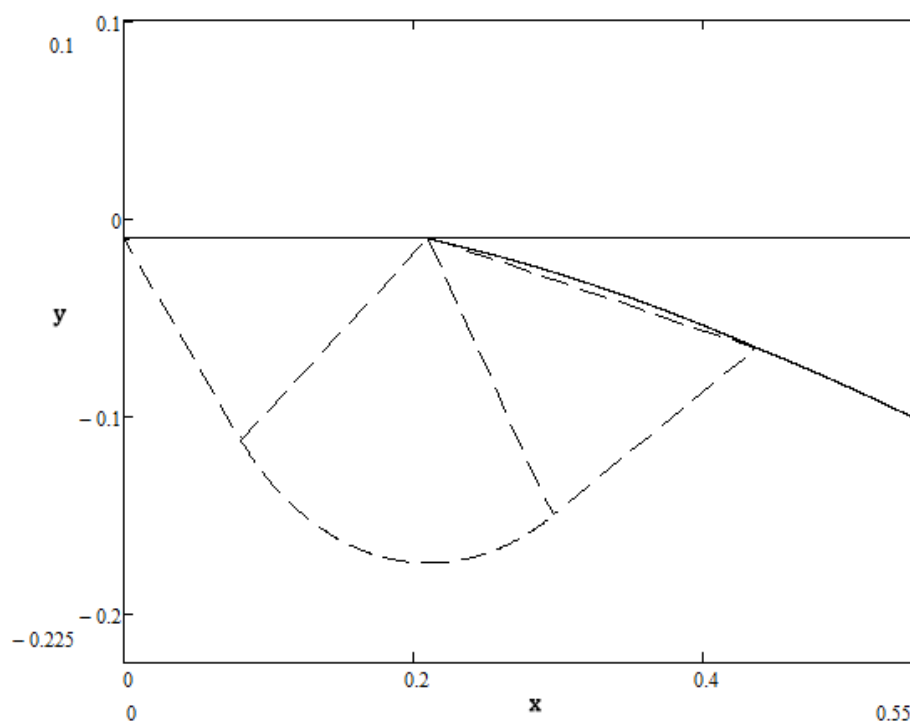


Рисунок 4.13 – Пластическая область и деформированная поверхность в задаче о сжатии гиперболического цилиндра $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$ по схеме Хилла

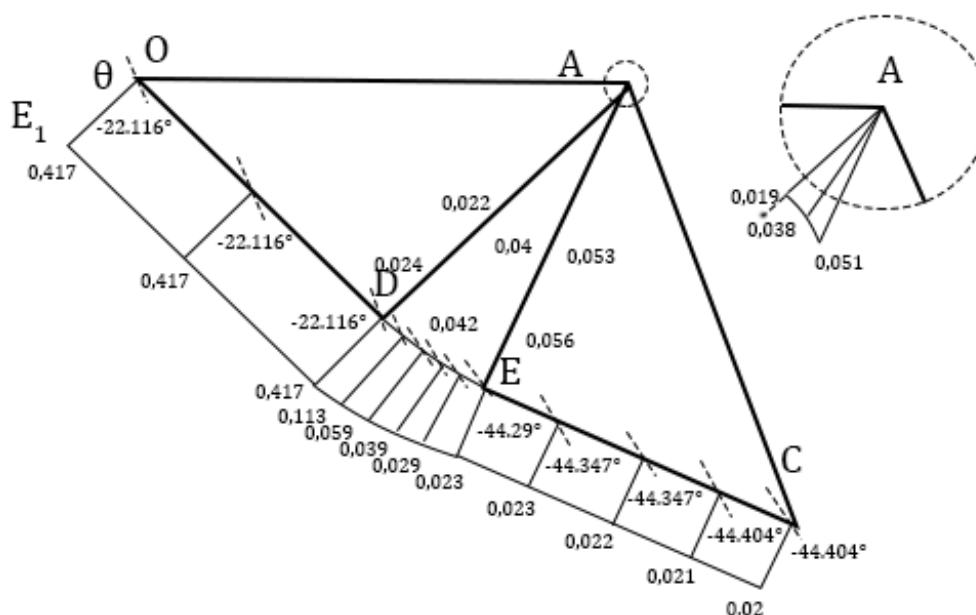


Рисунок 4.14 – Распределение деформаций на линии разрыва скоростей перемещений и в окрестности центра веера линий скольжения в схеме Хилла при $t = 0.01$

На рисунке 4.14 представлено распределение деформаций на линии разрыва скоростей перемещений $ODEC$ и в окрестности центра веера линий скольжения в схеме Хилла в момент времени $t = 0.01$. Из рисунка видно, что наибольшие деформации наблюдаются при переходе через линию OD , при этом вдоль всей линии разрыва $ODEC$ деформации постепенно уменьшаются.

В решении по схеме Л. Прандтля под штампом имеется треугольная область $AA'D$ (рис. 4.11, б), которая движется вместе со штампом как жёсткое целое. Поле скоростей в пластической области $ADEC$ определяется в виде:

$$v_\alpha = -V_y \cos \eta, v_\beta = 0.$$

Проекция скорости v_α на оси координат равны

$$v_x = \cos \eta \cos(\psi - \eta), v_y = \cos \eta \sin(\psi - \eta).$$

Соотношения, связывающие координаты точек A и C имеют вид:

$$x_C = x_A \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{\cos \eta} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi \right) \right],$$

$$y_C = y_A - \frac{\sqrt{2}x_A}{\cos \eta} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi \right),$$

откуда следует

$$y_C = -t - x_C \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi \right)}{\cos \eta + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi \right)}. \quad (4.2.7)$$

Параметрическая форма уравнений свободной поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} x(t, \tau) &= \cos \eta \int_{\tau}^t \cos(\psi - \eta) dt + x_0(\tau), \\ y(t, \tau) &= \cos \eta \int_{\tau}^t \sin(\psi - \eta) dt + y_0(\tau). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Параметр τ выбран по правилам, аналогичным приведённым в решении задачи по схеме Хилла.

Система уравнений для решения по схеме Прандтля:

$$\begin{aligned}
y_c(t) &= f(x_c(t)), \\
(y_c + t) \left(\cos \eta + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi \right) \right) + x_c \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi \right) &= 0, \\
\frac{x_c \cos \eta}{\cos \eta + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi \right)} &= \left(\cos \eta \int_{\tau_A}^t \cos(\psi - \eta) dt + x_c(\tau_A) \right), \\
\cos \eta \int_{\tau_A}^t \sin(\psi - \eta) dt + y_c(\tau_A) + t &= 0.
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Дифференцированием по t и введением обозначений

$$\begin{aligned}
u &= \cos \eta + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi \right), \\
v &= \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi \right), \\
w &= \cos \eta \cos(\psi - \eta), \\
z &= \cos \eta \sin(\psi - \eta),
\end{aligned}$$

система (4.2.9) приводится к системе дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом:

$$\begin{aligned}
y'_c(t) - f'(x_c)x'_c &= 0, \\
vx'_c - (u - \cos \eta)x_c\psi' + u(y'_c + 1) + v(y_c + t)\psi' &= 0, \\
\frac{x'_c u \cos \eta - v \cos \eta x_c \psi'}{u^2} &= w - \cos \eta \cos(\psi(\tau_A) - \eta) \tau'_A + x'_c(\tau_A) \tau'_A \\
z - \cos \eta \sin(\psi(\tau_A) - \eta) \tau'_A + y'_c(\tau_A) \tau'_A + 1 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Условие совместности системы (4.2.10) при $t = 0$:

$$v_0[v_0 w_0 - z_0(\cos \eta - u_0) + u_0] = 0, \tag{4.2.11}$$

При отсутствии трения условие (4.2.11) совпадает с условием автомодельности течения при раздавливании клина по схеме Прандтля.

Система (4.2.9) также может быть решена методом последовательного интегрирования.

Как и в случае схемы Хилла, в окрестности $t = 0$ значения производных x'_c и x'_A стремятся к бесконечности, поэтому на первом этапе от $t_0 = 0$ до t_1 , рассматривается приближённое решение задачи, при $\psi = \psi_0$. Значение x_c определяется из уравнения

$$-\frac{v_0}{u_0} x_c - t = f(x_c).$$

В схеме Прандтля кроме линии $A'DEC$ линией разрыва будет также прямая AD . Составляющие скорости на этих линиях будут равны соответственно

$$AD: V_n = \cos \eta, [V_\tau] = \cos \eta,$$

$$A'DEC: V_n = 0, [V_\tau] = \cos \eta.$$

Уравнения составляющих линии разрыва $A'DEC$ имеют вид:

$$- \text{линия } A'D: y = -xtg(\eta) - \frac{x_c \sin(\eta)}{\cos \eta + \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi)} - t;$$

$$- \text{линия } DE: \begin{cases} x = x_A + R \cos \xi \\ y = y_A + R \sin \xi \end{cases}, R = |AE|, \xi = \alpha - \frac{\pi}{2};$$

$$- \text{линия } EC: y = y_c + xtg(\psi - \eta) - x_c tg(\psi - \eta).$$

Тогда скорость движения линии разрыва $A'DEC$ равна:

$$G = \begin{cases} -\cos(\eta) \left[1 + \frac{x'_c \sin(\eta)}{u} - \frac{v\psi' x_c \sin(\eta)}{u^2} \right] \\ \frac{dx_A}{dt} \cos \xi + \frac{dy_A}{dt} \sin \xi + \frac{dR}{dt}, \xi \in \left[-\eta - \frac{\pi}{2}; -\eta - \frac{\pi}{2} + \psi \right] \\ \frac{(x - x_c)\psi'}{\cos(\psi - \eta)} + \cos(\psi - \eta) [y'_c - x'_c \operatorname{tg}(\psi - \eta)] \end{cases}. \quad (4.2.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{dx_A}{dt} &= \frac{x'_c \cos(\eta)}{\left(\cos(\eta) + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi\right) \right)} - \frac{x_c \psi' \sqrt{2} \cos \eta \sin\left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi\right)}{\left(\cos(\eta) + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi\right) \right)^2}, \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{x'_c}{\left(\cos(\eta) + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi\right) \right)} - \frac{x_c \psi' \sqrt{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi\right)}{\left(\cos(\eta) + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \eta - \psi\right) \right)^2}, \\ \frac{dy_A}{dt} &= -1. \end{aligned}$$

Удельная диссипация энергии определяется соотношением (4.1.20), первое главное значение тензора деформаций Альманси – соотношением (4.1.21). Деформации в окрестности центра веера находятся из системы (4.1.22).

Так как AD является линией разрыва, то частица, проходящая в процессе деформирования через центрированный веер, деформируется скачкообразно два раза: первый раз при прохождении через участок линии разрыва скоростей EC ,

второй – при пересечении линии AD . Деформации при переходе частицей, движущейся в окрестности централизованного веера, линии AD определяются при известном значении W_{AD} , которое будет совпадать со значением для линии $A'D$, и получаемом при пересечении линии EC значении удельной диссипации энергии.

Пусть недеформированная поверхность имеет форму гиперболического цилиндра

$$y_c = \sqrt{2} - \sqrt{x_c^2 + 2},$$

коэффициент трения $\mu = 0.12$, $\eta \approx 0.67$ радиан. Координата x_c на начальном этапе деформирования находится в виде

$$x_c = \frac{-\frac{v_0}{u_0}(t + \sqrt{2}) - \sqrt{2\left(-\frac{v_0}{u_0}\right)^2 + t^2 + 2\sqrt{2}t}}{\left(-\frac{v_0}{u_0}\right)^2 - 1}.$$

Система (4.2.9) на втором этапе деформирования может быть сведена к одному дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом относительно угла ψ :

$$\psi' = \frac{\left[A \left[v - \frac{x_c}{\sqrt{x_c^2 + 2}} u \right] + \cos \eta \right] u^2}{u \cos \eta [(u - \cos \eta)x_c - v(\sqrt{2} - \sqrt{x_c^2 + 2} + t)] - v \cos \eta x_c \left[v - \frac{x_c}{\sqrt{x_c^2 + 2}} u \right]},$$

$$\text{где } A = w + \frac{(z+1)(x'_c(\tau_A) - w(\tau_A))}{z(\tau_A) - y'_c(\tau_A)}, \quad x'_c(\tau_A) = \frac{-u\sqrt{x_c(t_1)^2 + 2}}{v\sqrt{x_c(t_1)^2 + 2} - ux_c(t_1)}, \quad y'_c(\tau_A) = -1.$$

График функции $\psi(t)$ имеет вид, представленный на рисунке 4.15. На рисунке 4.16 построены пластическая область и деформированная поверхность в момент времени $t = 0.011$, деформирование с постоянным углом ψ рассматривалось при t от 0 до 0.0016.

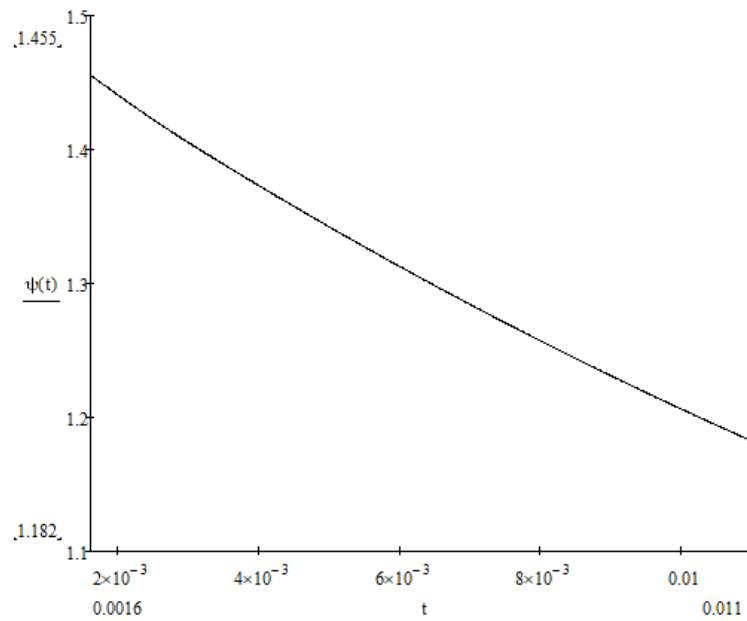


Рисунок 4.15 – График зависимости угла раскрытия веера характеристик от времени $\psi(t)$ при сжатии гиперболического цилиндра $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$ плоским штампом по схеме Прандтля

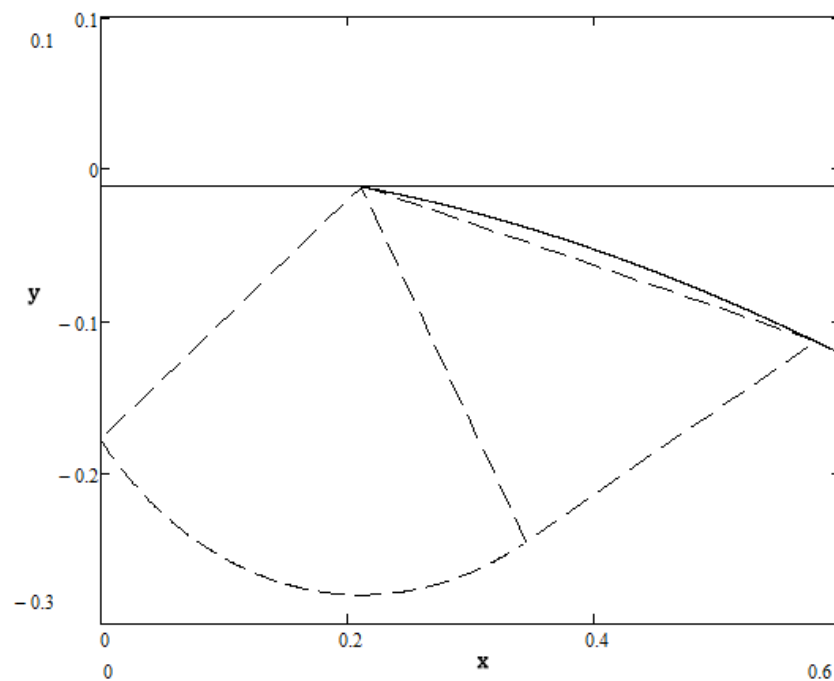


Рисунок 4.16 – Пластическая область и деформированная поверхность в задаче о сжатии гиперболического цилиндра $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$ по схеме Прандтля

Усилие, необходимое для вдавливания штампа не зависит от выбора сетки линий скольжения и вычисляется по формуле

$$p = 4kx_A(1 + \psi).$$

График зависимости удельного усилия ($\frac{p}{2k}$) от времени приведён на рисунке 4.17.

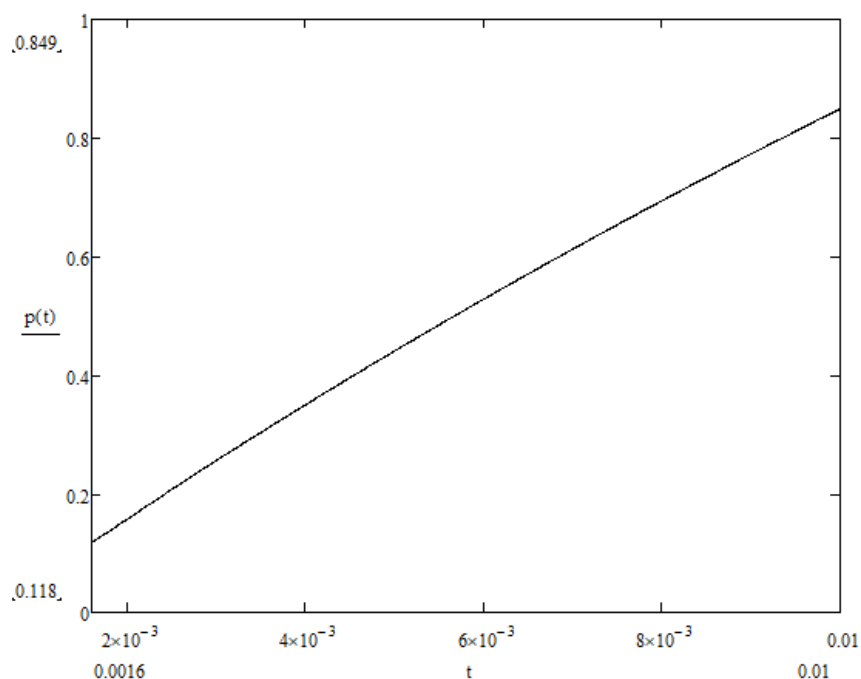


Рисунок 4.17 – График изменения удельного усилия, необходимого для сжатия гиперболического цилиндра $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$ плоским штампом, с течением времени

На рисунке 4.18 представлено распределение деформаций на линии разрыва скоростей перемещений $A'DEC$ и в окрестности центра веера линий скольжения в схеме Прандтля в момент времени $t = 0.011$. Из полученных значений следует, что вдоль линии $A'DEC$ происходит уменьшение деформаций, а наибольшие деформации получают частицы материала, деформирующиеся дважды. Также на рисунке отражён скачок деформаций при переходе через линию AD .

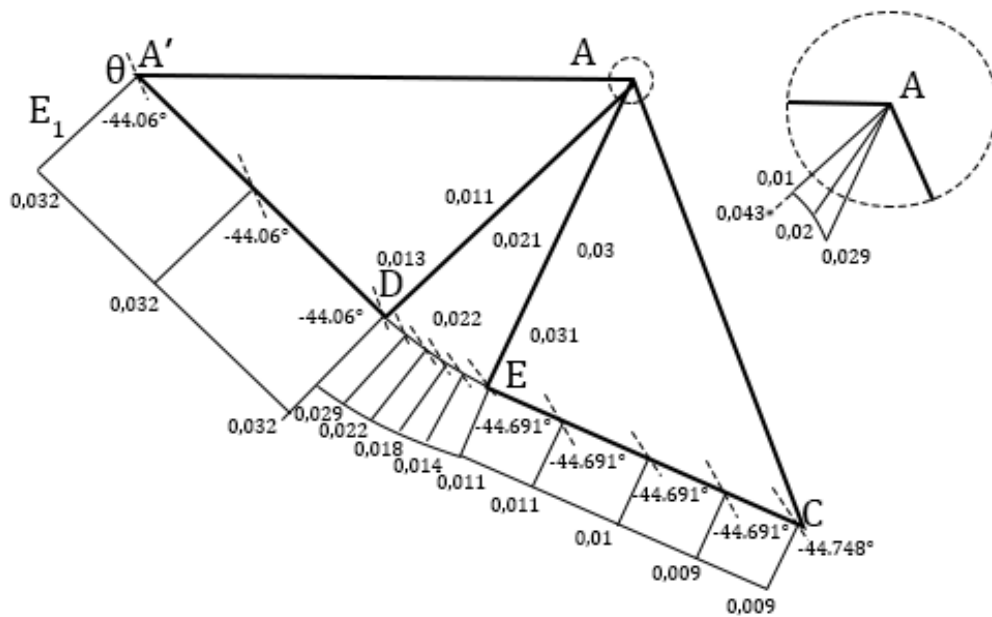


Рисунок 4.18 – Распределение деформаций на линии разрыва скоростей перемещений и в окрестности центра веера линий скольжения в схеме Прандтля при $t = 0.01$

Системы (4.2.3) и (4.2.7), полученные в ходе решения задачи, описывают пластическое течение при угле раскрытия веера $\psi > 0$. Продолжение решения при $\psi = 0$ возможно только по схеме Хилла, оно является частным случаем решения задачи о вдавливании клина с углом раствора $\frac{\pi}{2}$. Продолжение решения по схеме Прандтля без центрированного веера линий скольжения в точке A невозможно.

4.3 Вдавливание клина с ограниченной поверхностью контакта

В рассмотренных выше задачах предполагалось, что контактная поверхность штампа достаточно велика, и площадь контакта штампа с заготовкой постоянно увеличивается. При ограничении поверхности контакта внедряемого штампа процесс образования деформированной поверхности можно разделить на два этапа. На первом этапе, когда ещё не вся поверхность клина вступила в контакт, пластическое течение аналогично приведённому в п. 4.1. На втором этапе образование деформированной поверхности происходит с двух сторон: вдоль линии выхода жёсткопластической границы на свободную поверхность, и вдоль линии, ограничивающей контактную поверхность клина.

Пусть ширина поверхности контакта клина ограничена и равна $2h$. (рис. 4.19). Момент времени, когда вся поверхность клина вступила в контакт с материалом заготовки и точка A заняла положение угловой точки – t^* . Положение точки A на клине при дальнейшем внедрении не изменяется. Угол раскрытия центрированного веера ψ увеличивается от начального значения ψ_0 до ψ_k , которое определяется из условия существования продолжения поля напряжения в окрестности точки C .

Поскольку образование деформированной поверхности будет происходить не только в точке C , но и в точке A , она может быть разбита на три участка:

- на участке AF функция имеет вид $y = \Phi_1(x, t)$;
- на участке FG функция имеет вид $y = \Phi(x, t)$;
- на участке GC функция имеет вид $y = \Phi_2(x, t)$.

Участок поверхности FG определяется историей деформирования до момента времени t^* . Решение задачи сводится к определению функций: $y = \Phi_1(x, t)$, $y = \Phi_2(x, t)$, $x_C(t)$, $y_C(t)$, $\psi(t)$.

Пусть клин внедряется с единичной скоростью, параллельной оси y , то есть $V_y = -1$. Тогда

$$y_A(t) = y_* - t, y_* = y_A(t^*). \quad (4.3.1)$$

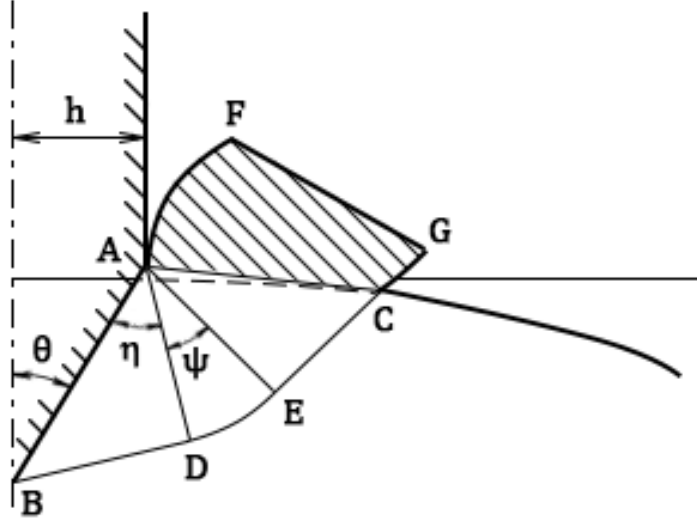


Рисунок 4.19 – Поле линий скольжения при вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта шириной $2h$ в выпуклую заготовку

Так как положение точки A на штампе не изменяется, откуда следует $|AB| = \frac{h}{\sin \theta}$, а точка C лежит на недеформированной поверхности $y = f(x)$:

$$x_C = x_A + |AC| \cos \left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi \right),$$

$$y_C = y_A - |AC| \sin \left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi \right),$$

$$|AC| = \sqrt{2}|AB| \cos \eta,$$

Откуда

$$\begin{aligned} x_C &= x_A + \sqrt{2} \frac{h \cos \eta}{\sin \theta} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi \right), \\ y_C &= y_A - \sqrt{2} \frac{h \cos \eta}{\sin \theta} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi \right), y_C = f(x_C). \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Зависимости (4.3.2) определяют координаты точки C и угол раскрытия веера ψ как функции времени t .

Все точки области $AECGFA$ в данный момент перемещаются с одной и той же скоростью, равной $v_\alpha = \frac{\sin \theta}{\cos \eta}$. Проекции скорости на оси координат

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\sin \theta}{\cos \eta} \cos(\eta - \theta + \psi), \\ v_y &= \frac{\sin \theta}{\cos \eta} \sin(\eta - \theta + \psi). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Поэтому поверхности AF и GC могут быть представлены в параметрическом виде

$$\begin{aligned} x_1(\tau, t) &= h + \int_{\tau}^t v_x dt, y_1(\tau, t) = y_A(\tau) + \int_{\tau}^t v_y dt \\ x_2(\tau, t) &= x_C(\tau) + \int_{\tau}^t v_x dt, y_2(\tau, t) = y_C(\tau) + \int_{\tau}^t v_y dt. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Исключение параметра τ , который совпадает со временем выхода рассматриваемой точки поверхности из точек A и C соответственно, позволяет получить функции $y = \Phi_1(x, t)$ и $y = \Phi_2(x, t)$.

Распределение деформаций на первом этапе внедрения клина будет совпадать с распределением в задаче о вдавливании клина с неограниченной поверхностью контакта. Разрыв касательной и нормальная скорости на линии разрыва сохраняют свои значения в течение всего процесса деформирования. Уравнения составляющих линии разрыва $BDEC$ на втором этапе имеют вид:

$$\begin{aligned} & - \text{линия } BD: xt g(\eta - \theta) - y = t; \\ & - \text{линия } DE: \begin{cases} x = x_A + R \cos \xi \\ y = y_A + R \sin \xi \end{cases}, R = |AE|, \xi = \alpha - \frac{\pi}{2}; \\ & - \text{линия } EC: y = y_C + xt g(\eta - \theta + \psi) - x_C t g(\eta - \theta + \psi). \end{aligned}$$

Тогда скорость движения линии разрыва $BDEC$ равна:

$$G = \begin{cases} \cos(\eta - \theta) \\ -\sin \xi, \xi \in \left[\eta - \theta - \frac{\pi}{2}; \eta - \theta - \frac{\pi}{2} + \psi \right] \\ \frac{(x - x_C)\psi'}{\cos(\eta - \theta + \psi)} + \cos(\eta - \theta + \psi) [y'_C - x'_C \operatorname{tg}(\eta - \theta + \psi)] \end{cases}, \quad (4.3.5)$$

поскольку $\frac{dx_A}{dt} = 0, \frac{dy_A}{dt} = -1, \frac{dR}{dt} = 0$.

Удельная диссипация энергии, как и в предыдущих задачах определяется соотношением (4.1.20), первое главное значение тензора деформаций Альманси – соотношением (4.1.21), деформации в окрестности центра веера – (4.1.22).

Примером может служить частный случай внедрения клина с ограниченной поверхностью контакта в полупространство. На первом этапе характер пластического течения определяется решением автомодельной задачи, аналогичным полученному в п. 4.3. Угол $\psi - const$ определяется уравнением (4.1.9).

Удельное усилие, приходящееся на единицу длины, необходимое для внедрения клина при $0 \leq t \leq t^*$ может быть найдено из соотношения (4.1.10) в виде

$$p = 4kt(1 + \psi_0) \frac{\sqrt{2} \sin \theta + 2 \cos \eta \cos(\theta - \psi_0)}{2 \cos \eta \cos \psi_0} \sin \theta.$$

Значение координаты y_A в момент времени t^* определяется выражением

$$y_* = \sqrt{2} \frac{h \cos \eta}{\sin \theta} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi \right). \quad (4.3.6)$$

Течение при $t > t^*$ описывается системой уравнений (4.3.1) – (4.3.4).

Подстановка (4.3.5) в (4.3.1) позволяет найти зависимость

$$y_A(t) = \sqrt{2} \frac{h \cos \eta}{\sin \theta} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi \right) - t.$$

Следовательно, функции $x_c(t)$, $\psi(t)$ имеют вид

$$x_c(t) = h + \sqrt{\frac{2h^2(\cos \eta)^2}{(\sin \theta)^2} - (y_* - t)^2},$$

$$\psi(t) = \frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \arcsin \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}h \cos \eta} (y_* - t) \right).$$

Параметрическое представление функций $\Phi_1(x, t)$, $y = \Phi_2(x, t)$ примет вид

$$x_1(\tau, t) = h + \frac{(\sin \theta)^2}{2h(\cos \eta)^2} \left(y_* \tau - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{\tau}^t - \frac{h}{2} \arcsin \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}h \cos \eta} (y_* - t) \right) \Big|_{\tau}^t -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sqrt{2} \sin \theta}{4 \cos \eta} (y_* - t) \sqrt{1 - \frac{(\sin \theta)^2}{2h^2(\cos \eta)^2} (y_* - t)^2} \Big|_{\tau}^t, \\
y_1(\tau, t) = & y_* - \tau - \frac{(\sin \theta)^2}{2h(\cos \eta)^2} \left(y_* t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{\tau}^t - \frac{h}{2} \arcsin \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}h \cos \eta} (y_* - t) \right) \Big|_{\tau}^t - \\
& -\frac{\sqrt{2} \sin \theta}{4 \cos \eta} (y_* - t) \sqrt{1 - \frac{(\sin \theta)^2}{2h^2(\cos \eta)^2} (y_* - t)^2} \Big|_{\tau}^t, \\
x_2(\tau, t) = & h + \sqrt{\frac{2h^2(\cos \eta)^2}{(\sin \theta)^2} - (y_* - \tau)^2} + \frac{(\sin \theta)^2}{2h(\cos \eta)^2} \left(y_* t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{\tau}^t - \\
& \frac{h}{2} \arcsin \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}h \cos \eta} (y_* - t) \right) \Big|_{\tau}^t - \frac{\sqrt{2} \sin \theta}{4 \cos \eta} (y_* - t) \sqrt{1 - \frac{(\sin \theta)^2}{2h^2(\cos \eta)^2} (y_* - t)^2} \Big|_{\tau}^t, \\
y_2(\tau, t) = & \frac{(\sin \theta)^2}{2h(\cos \eta)^2} \left(y_* t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{\tau}^t - \frac{h}{2} \arcsin \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}h \cos \eta} (y_* - t) \right) \Big|_{\tau}^t - \\
& -\frac{\sqrt{2} \sin \theta}{4 \cos \eta} (y_* - t) \sqrt{1 - \frac{(\sin \theta)^2}{2h^2(\cos \eta)^2} (y_* - t)^2} \Big|_{\tau}^t,
\end{aligned}$$

Удельное усилие p при $t > t^*$ определяется выражением

$$p = 4kh(1 + \psi(t)).$$

На рисунке 4.20 представлен результат деформации полупространства при внедрении клина шириной $h = 1$, с углом раствора $\theta = \frac{\pi}{6}$ и коэффициентом трения 0.20. На рисунке 4.21 – распределение деформаций на линии разрыва скоростей и в окрестности центра веера в момент времени $t = 1.728$.

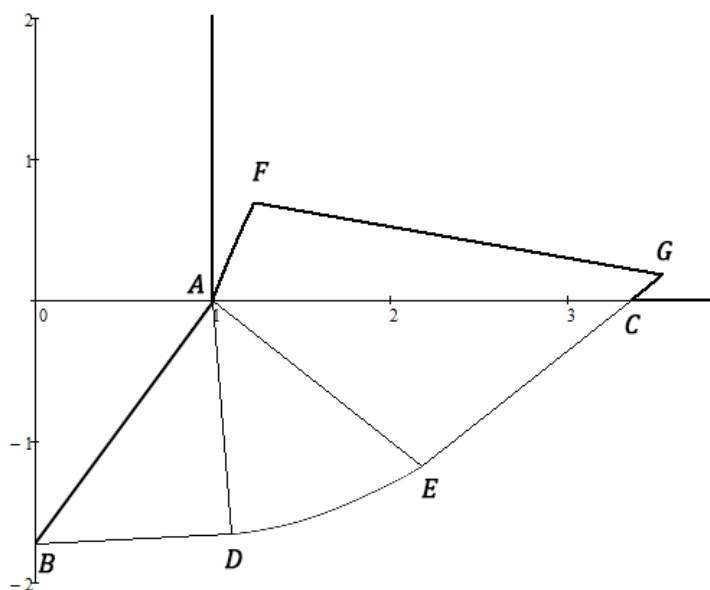


Рисунок 4.20 – Деформация полупространства при внедрении клина шириной $h = 1$, с углом раствора $\theta = \frac{\pi}{6}$ и коэффициентом трения 0.20

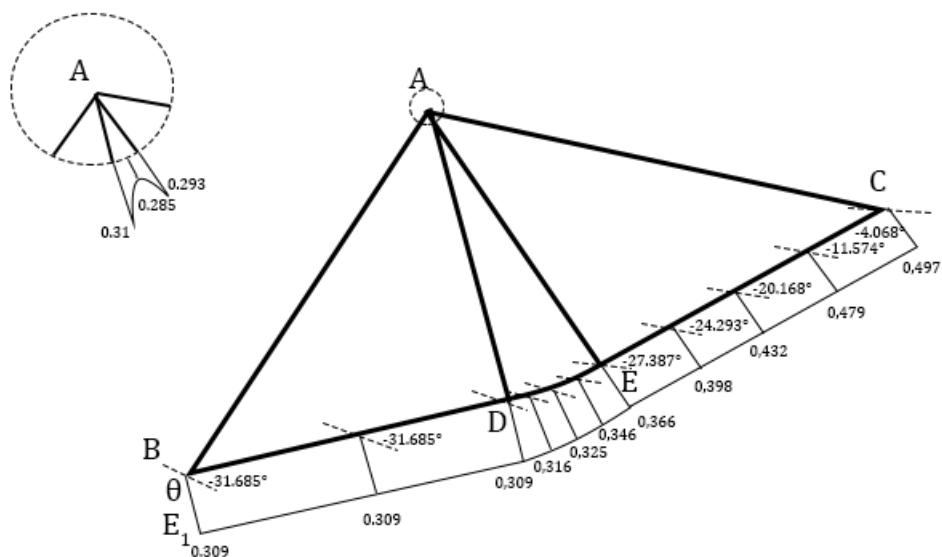


Рисунок 4.21 – Распределение деформаций на линии разрыва скоростей и в окрестности центра веера в момент времени $t = 1.728$

Пусть клин с углом раствора $\theta = 22^{\circ}31'2''$ внедряется в заготовку, имеющую форму гиперболического цилиндра, который задаётся уравнением

$$y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}.$$

Коэффициент трения $\mu = 0.12$, угол $\eta \approx 0.67$ радиан, ширина клина $h = 0.2$.

Решение данной задачи на первом этапе будет совпадать с решением, рассмотренным в п. 4.1. Функция $\psi(t)$ на втором этапе может быть определена путём интерполирования набора значений, полученных как решения уравнения

$$h \left(ctg\theta - \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta} \cos\eta \sin\delta \right) - t = \sqrt{2} - \sqrt{h^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta} \cos\eta \cos\delta \right)^2 + 2}$$

при разных значениях t . Обозначение угла $\delta = \frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi$ взято из п. 4.1.

Координаты точки C находятся из соотношений

$$x_c = h \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta} \cos\eta \cos\delta \right), y_c = \sqrt{2} - \sqrt{x_c^2 + 2}.$$

На рисунке 4.22 приведён график изменения угла раскрытия веера характеристик с течением времени

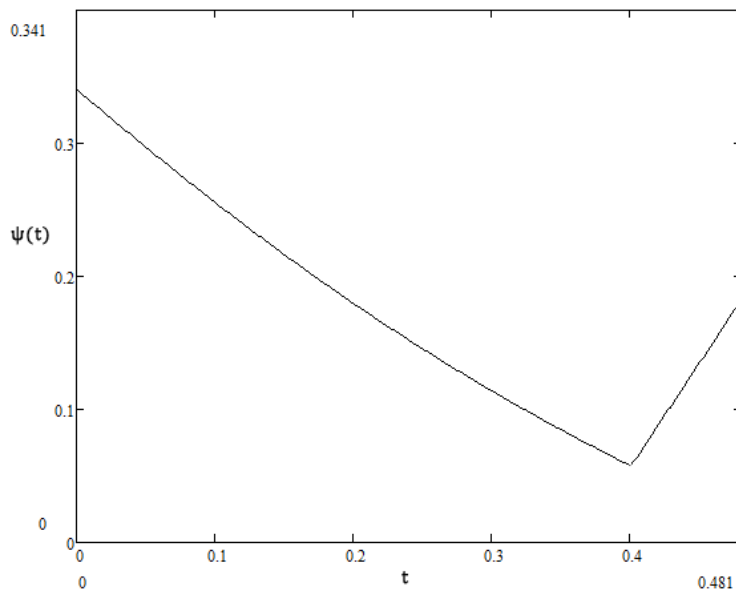


Рисунок 4.22 – График зависимости угла раскрытия веера характеристик от времени $\psi(t)$

Первый этап деформирования происходит при $0 \leq t \leq 0.4$, угол ψ монотонно уменьшается. Начиная с момента времени $t = 0.401$ начинается второй этап деформирования, и угол раскрытия веера увеличивается.

Пластическая область и деформированная поверхность при вдавливании клина $y = |x|ctg(\theta)$ с углом раствора $\theta = 22^\circ 31' 2''$ и шириной $h = 0.2$ в гиперболический цилиндр $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$ имеют вид, представленный на рисунке 4.23.

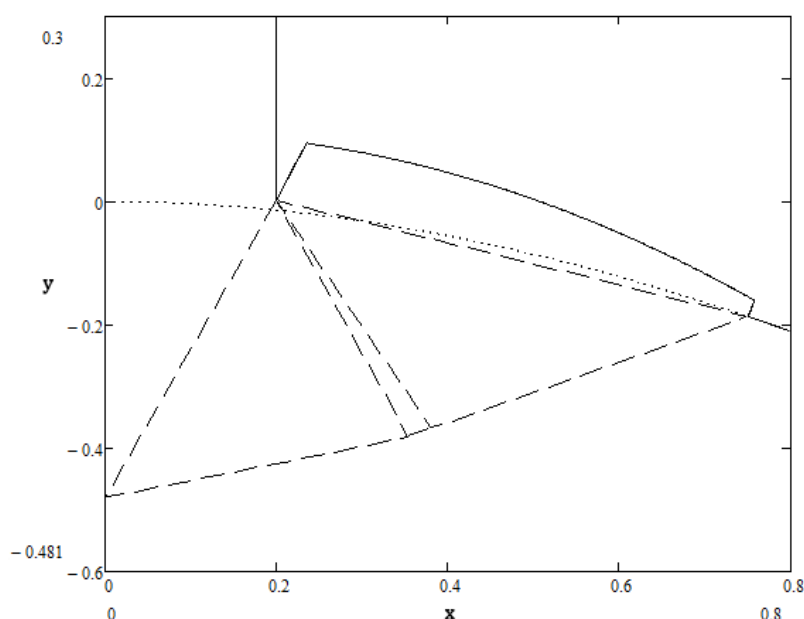


Рисунок 4.23 – Пластическая область и деформированная поверхность в задаче о вдавливании клина с углом раствора $22^\circ 31' 2''$ и шириной 0.2 в заготовку $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$

График зависимости удельного усилия, необходимого для внедрения клина, от времени построен на рисунке 4.24. На рисунке 4.25 представлено распределение деформаций на втором этапе деформирования. Как следует из полученных значений, вдоль линии разрыва $BDEC$ наблюдается увеличение деформаций, и наибольшие деформации имеют место в окрестности точки C .

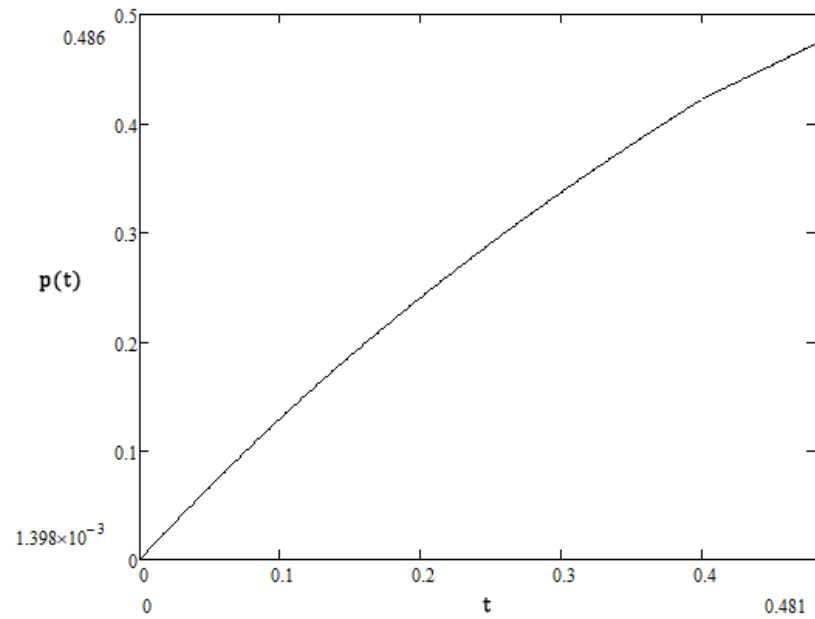


Рисунок 4.24 – График зависимости удельного усилия, необходимого для внедрения клина от времени

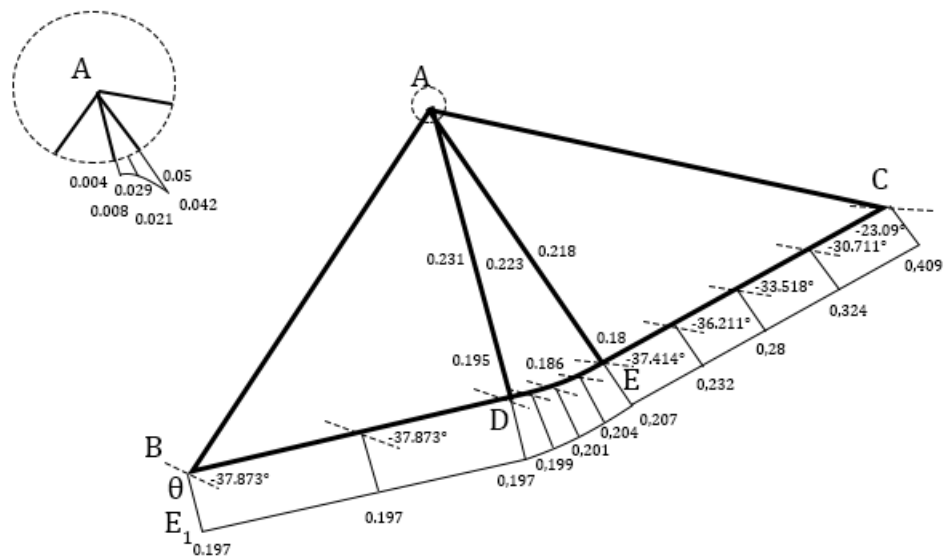


Рисунок 4.25 – Распределение деформаций на линии разрыва скоростей перемещений и в окрестности центра веера линий скольжения при $t = 0.481$

4.4 Контактная задача

Рассматривается первоначальный этап деформирования в задаче о сжатии двух симметричных выпуклых жёсткопластических тел. Предполагается, что предел текучести материала нижнего тела меньше верхнего, то есть на данном этапе в пластическое состояние переходит только нижнее тело. Также полагается, что проскальзывание на поверхности контакта отсутствует. Формы тел в начальный момент времени задаются функциями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, симметричными относительно оси y . При $t > 0$ свободную поверхность можно разбить на недеформированную $y = f_2(x)$ и деформированную $y = F(x, t)$.

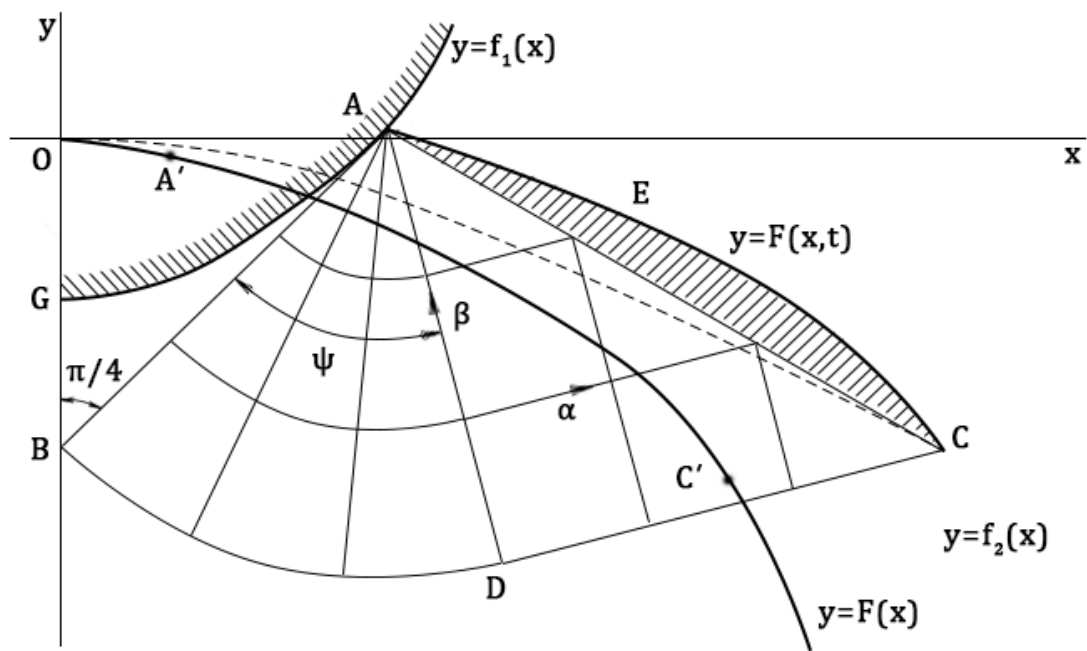


Рисунок 4.26 – Поле линий скольжения для первого этапа задачи о сжатии двух симметричных выпуклых жёсткопластических тел

Выбранная сетка линий скольжения (рис. 4.26) состоит из централизованного веера BAD и треугольника ACD , угол наклона отрезка AB к плоскости симметрии $y = 0$ равен $\frac{\pi}{4}$. Материал в области GAB перемещается вместе с верхним телом как жёсткое целое. Жёсткая область деформируемого тела ниже линии BDC покоится.

Поле скоростей в деформируемой области $ABDCEA$ определяется проекциями на α – и β – линии и имеет вид

$$v_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, v_\beta = 0.$$

Рассматриваемое поле скоростей впервые было предложено Прандтлем при решении задач о предельном равновесии выпуклого шероховатого штампа и жёсткопластического полупространства.

Для того, чтобы область $ADCEA$ находилась в равновесии, гидростатическое давление p вдоль прямых линий скольжения AD и BC должно быть равно пределу текучести k . Поле напряжений, соответствующее полю параллельных линий скольжения в области ADC , можно рассматривать как статически допустимое продолжение в жёсткую область ADC . В области $AECA$ напряжения отсутствуют, линия AC – линия разрыва напряжений.

Продолжение поля напряжений в жёсткую область GAB может быть осуществлено с помощью поля прямых линий скольжения, параллельных линии AB , а также симметричного относительно плоскости $x = 0$ поля.

Поскольку угол между линией скольжения AB и осью симметрии равен $\frac{\pi}{4}$, решение будет полным при выполнении условия $f'_1(x_A) \leq 1$.

Угол раскрытия веера ψ изменяется от первоначального значения ψ_0 до ψ_k , при этом деформированная поверхность $y = F(x, t)$ совершает поступательное движение вдоль α – линии с постоянной скоростью v_α . Проекция скорости на оси координат:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\psi(t) - \frac{\pi}{4}\right), \\ v_y &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\psi(t) - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Проекция скорости точек области ADC на нормаль в точке A к поверхности вдавливаемого тела равна

$$v_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \psi + \gamma\right),$$

где γ – острый угол между касательной к поверхности вдавливаемого тела и осью x в точке A . Проекция скорости верхнего тела на ту же нормаль $V_n = \cos\gamma$. Тогда разность между проекциями

$$\Delta V_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \psi + \gamma\right) - \cos\gamma. \quad (4.4.2)$$

Возможны два случая. Если $\Delta V_n < 0$, то деформированная поверхность образуется в точке C и в точке A подминается штампом. При $\Delta V_n > 0$ образование деформированной поверхности происходит как в точке C , так и в точке A .

В рассматриваемом диапазоне изменения углов $\psi \geq 0$, $\gamma < \frac{\pi}{4}$ разность проекций $\Delta V_n < 0$, следовательно задача об определении формы деформированной поверхности и параметров поля линий скольжения может быть сведена к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Так как деформированная поверхность $y = F(x, t)$ в каждый момент времени t перемещается поступательно, её можно представить в виде

$$F(x, t) = F(x - T_1(t)) + T_2(t),$$

где $T_1(t) = v_\alpha \int_0^t \cos\left(\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4}\right) d\lambda$, $T_2(t) = v_\alpha \int_0^t \sin\left(\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4}\right) d\lambda$, $y = F(x)$ – поверхность, смещение которой вдоль DC образует деформированную поверхность $y = F(x, t)$.

Координаты точек A и C связаны соотношениями

$$\begin{aligned} y_A(t) &= f_1(x_A(t)) - t, y_C(t) = f_2(x_C(t)), \\ y_A(t) - y_C(t) &= 2x_A(t) \cos(\psi(t)), \\ x_C(t) &= x_A(t)(1 + 2 \sin(\psi(t))), \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

$$f_1(x_A(t)) - t - f_2(x_C(t)) = 2x_A(t) \cos(\psi(t)).$$

$$F(x_A(t) - T_1(t)) = f_1(x_A(t)) - t - T_2(t), \quad (4.4.4)$$

$$F(x_C(t) - T_1(t)) = f_2(x_C(t)) - T_2(t).$$

Системой четырёх уравнений (4.4.3), (4.4.4) определяются четыре неизвестных функции $x_A(t)$, $x_C(t)$, $\psi(t)$, $F(x)$.

Решение этой системы уравнений может быть сведено к интегрированию системы уравнений с отклоняющимся аргументом.

Пусть

$$\begin{aligned} X_A(t) &= x_A(t) - T_1(t), Y_A(t) = f_1(x_A(t)) - t - T_2(t), \\ X_C(t) &= x_C(t) - T_1(t), Y_C(t) = f_2(x_C(t)) - T_2(t), \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

тогда система (4.4.4) может быть записана в виде

$$F(X_A(t)) = Y_A(t), F(X_C(t)) = Y_C(t). \quad (4.4.6)$$

Введённые функции определяют на кривой $F(x)$ точки A' , C' , которые в момент времени t займут положение точек A и C . В некоторый момент времени $\tau(t)$ точка C' находилась в том же положении, что и точка A' в момент времени t , то есть

$$X_A(t) = X_C(\tau), Y_A(t) = Y_C(\tau). \quad (4.4.7)$$

Момент времени τ будет считаться параметром запаздывания.

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_1(x_A(t)) - t - T_2(t) &= f_2(x_C(\tau)) - T_2(\tau), \\ x_A(t) - T_1(t) &= x_C(\tau) - T_1(\tau). \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Дифференцирование (4.4.8) по t даёт два дифференциальных уравнения с отклоняющимся аргументом

$$\begin{aligned} x'_A(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\psi(t) - \frac{\pi}{4}\right) &= x'_C(\tau) \tau'(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\psi(\tau) - \frac{\pi}{4}\right) \tau'(t), \\ f'_1(x_A(t)) x'_A(t) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\psi(t) - \frac{\pi}{4}\right) &= \\ = f'_2(x_C(\tau)) x'_C(\tau) \tau'(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\psi(\tau) - \frac{\pi}{4}\right) \tau'(t) \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Уравнения (4.4.9) вместо неизвестной функции $F(x)$ содержат функцию $\tau(t)$.

В начальный момент времени $t = 0$ пластическая зона вырождается в линию начального контакта штампа и заготовки. Тогда начальные значения искомых функций

$$x_A(0) = 0, x_C(0) = 0, \tau(0) = 0.$$

Переход к пределу при $t \rightarrow 0$ в (4.4.3) и (4.4.9) позволяет определить начальное значение угла $\psi_0 = \psi(0)$:

$$\cos \psi_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(x_A(t)) - t - f_2(x_C(t))}{2x_A(t)},$$

откуда по правилу Лопиталя следует

$$\cos \psi_0 = \frac{1}{2} f'_1(0) - \frac{1}{2x'_A(0)} - \frac{1}{2} f'_2(0)(1 + 2 \sin \psi_0). \quad (4.4.10)$$

Из (4.4.9):

$$\begin{aligned} x'_A(0) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\psi_0 - \frac{\pi}{4}\right) &= \left[x'_A(0)(1 + 2 \sin \psi_0) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\psi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \right] \tau'(0) \\ f'_1(0)x'_A(0) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\psi_0 - \frac{\pi}{4}\right) &= \\ &= \left[f'_2(0)x'_A(0)(1 + 2 \sin \psi_0) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\psi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \right] \tau'(0) \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Таким образом, в начальный момент времени система состоит из трёх уравнений (4.4.10), (4.4.11) с двумя неизвестными производными $x'_A(0)$, $\tau'(0)$. Условие совместности этой системы определяет начальное значение угла ψ_0 и имеет вид

$$f'_1(0) = 4 \cos \psi_0 (1 + \sin \psi_0) + f'_2(0)(1 + 2 \sin \psi_0)^2. \quad (4.4.12)$$

Угол ψ_0 совпадает с углом раскрытия веера BAD в автомодельном течении при вдавливании абсолютно шероховатого тупого клина в клинообразное тело, углы раствора которых задаются производными $f'_1(0)$ и $f'_2(0)$. При $f'_2(0) = 0$ это условие примет вид

$$f'_1(0) = 4 \cos \psi_0 (1 + \sin \psi_0). \quad (4.4.13)$$

В том случае, когда производные обеих функций $f'_1(0)$ и $f'_2(0)$ обращаются в нуль, построение решения в окрестности $t = 0$ с помощью полученных уравнений (4.4.11) затруднительно, так как $x'_A(0)$ обращается в бесконечность. Из тех же уравнений следует, что при $f'_1(0)$ и $f'_2(0)$ близких к нулю, деформирование в окрестности $t = 0$ происходит при углах ψ близких к

$\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. Тогда, аналогично задаче о сжатии выпуклого тела плоским штампом, можно считать, что на начальном этапе деформирование происходит при $\psi = \psi_0$. Положение точек A и C определяется системой уравнений (4.4.3).

Функция $\psi(t)$, а также координаты x_A , x_C на втором этапе находятся из совместного решения уравнений (4.4.3) и (4.4.9).

В схеме линий скольжения для рассматриваемой задачи, как и в схеме Прандтля для задачи о сжатии выпуклого тела плоским штампом имеет место область под штампом, которая движется вместе с ним как жёсткое целое. Поэтому линия AB наряду с линией $A'BDC$ будет линией разрыва скоростей. Составляющие скорости равны:

$$AD: V_n = \frac{\sqrt{2}}{2}, [V_\tau] = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$A'DEC: V_n = 0, [V_\tau] = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Уравнения составляющих линии разрыва $A'BDC$ имеют вид:

– линия $A'B$: $y = x_A + t - x - f_1(x)$;

– линия BD : $\begin{cases} x = x_A + R \cos \xi \\ y = y_A + R \sin \xi \end{cases}, R = |AD|, \xi = \alpha - \frac{\pi}{2};$

– линия DC : $y = xtg\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) - x_A tg\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi\right)}{\cos(\eta)}\right).$

Тогда скорость движения линии разрыва $A'BDC$:

$$G = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} x'_A - \frac{\sqrt{2}}{2} f'_1(x) \\ \frac{dx_A}{dt} \cos \xi + \frac{dy_A}{dt} \sin \xi + \frac{dR}{dt}, \xi \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4} + \psi\right] \\ \frac{(x - ux_A)\psi'}{\cos\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right)} - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) (ux'_A + vx_A\psi') \end{cases}. \quad (4.4.14)$$

Здесь $\frac{dR}{dt} = \sqrt{2}x'_A$, $u = 1 + \frac{\sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi\right)}{\cos(\eta)}$, $v = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \eta - \psi\right)}{\cos(\eta)}$.

Удельная диссипация энергии определяется соотношением (4.1.20), первое главное значение тензора деформаций Альманси – соотношением (4.1.21). Деформации в окрестности центра веера находятся из системы (4.1.22).

На рисунке 4.27 представлены пластическая область и деформированная поверхность в задаче о внедрении абсолютно шероховатого цилиндра радиуса $r = 1$ в жёсткопластическое полупространство.

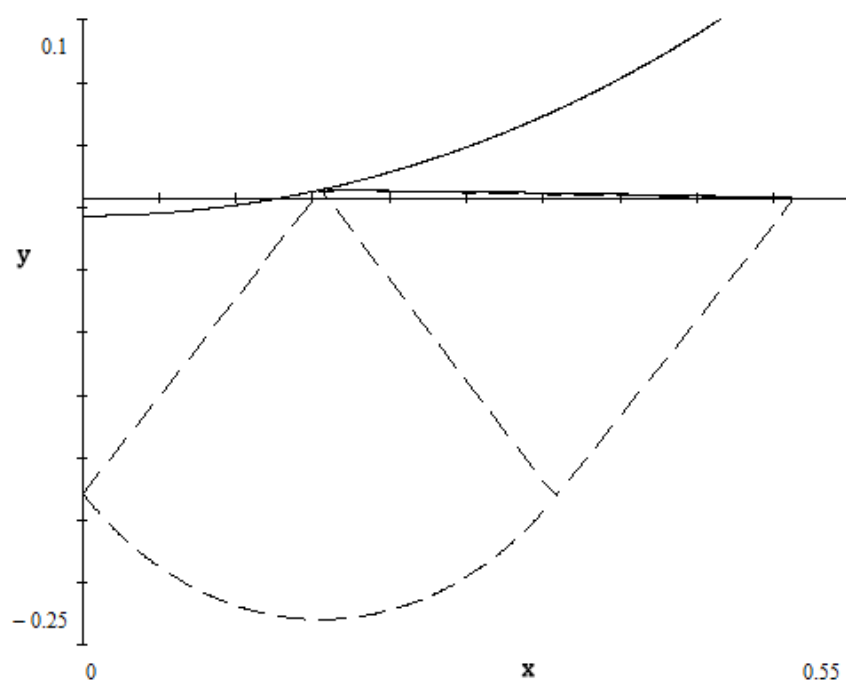


Рисунок 4.27 – Деформация жёсткопластического полупространства при внедрении в него абсолютно шероховатого цилиндра радиуса $r = 1$

На рисунке 4.28 для данной задачи приведены сравнительные зависимости угла раствора веера $\psi(t)$, безразмерного давления на линии контакта $\frac{p(t)}{2k} = 1 + \psi(t)$, и удельного необходимого усилия на единицу длины штампа $\frac{R(t)}{2kr} = 4x_A(t)(1 + \psi(t))$ без учёта (пунктирная линия) и с учётом изменения формы поверхности деформируемого материала.

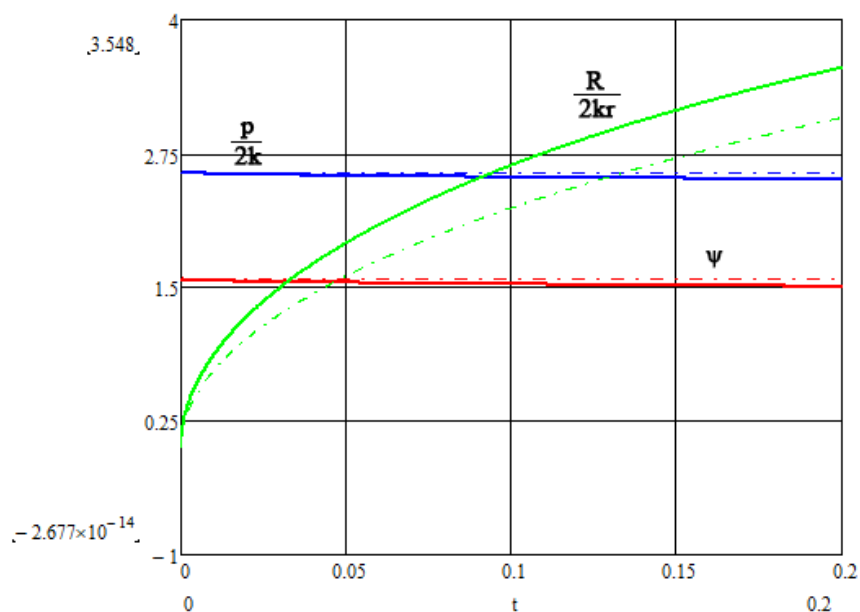


Рисунок 4.28 – Сравнительные зависимости угла раствора веера $\psi(t)$, безразмерного давления на линии контакта $\frac{p(t)}{2k}$, удельного необходимого усилия на единицу длины штампа $\frac{R(t)}{2kr}$

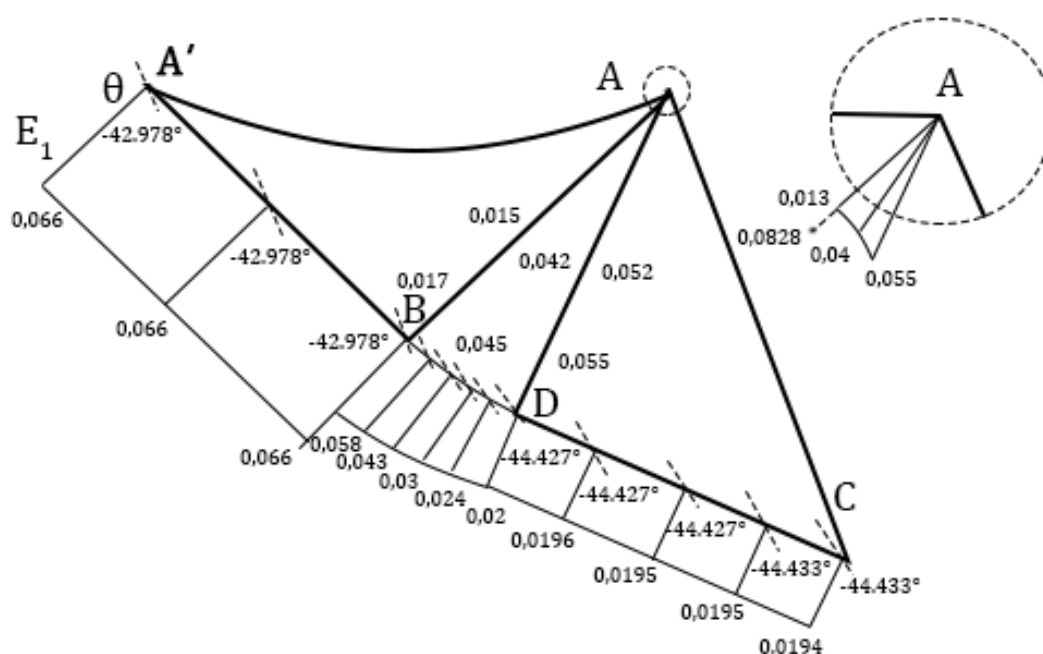


Рисунок 4.29 – Распределение деформаций на линии разрыва скоростей перемещений $A'BDC$ и в окрестности центра веера линий скольжения в момент времени $t = 0.01$

На рисунке 4.29 приведено распределение деформаций на линии разрыва скоростей перемещений $A'BDC$ и в окрестности центра веера линий скольжения в момент времени $t = 0.01$. Из полученных значений следует, что вдоль линии происходит уменьшение деформаций, а наибольшие деформации получают частицы материала, деформирующиеся дважды. Также как и в задаче о сжатии выпуклого тела плоским штампом по схеме Прандтля происходит скачок деформаций при переходе через линию AB .

Заключение

В диссертации получены следующие результаты:

1. Получено аналитическое решение задач о растяжении, сжатии, последовательном растяжении/сжатии полосы с непрерывным полем скоростей перемещений при условии сжимаемости в условиях плоской деформации. Найдены поля скоростей, инварианты и главные значения тензора конечных деформаций Альманси, изменение ширины полосы с течением времени, а также необходимое для её деформирования усилие. В задаче о последовательном растяжении-сжатии полосы найдены траектории движения частиц материала.

2. Получено аналитическое решение задачи о растяжении полосы с разрывным полем скоростей перемещений при условии сжимаемости материала в условиях плоской деформации. Определены поля скоростей и деформаций в окрестности разрыва скоростей, найдено изменение градиентов деформаций при пересечении линии разрыва скоростей, инварианты и главные значения тензора деформаций Альманси, угол между первым главным направлением тензора Альманси и касательной к линии разрыва. Рассмотрены возможные несимметричные течения, растяжение полосы с разрушением, определена скорость движения вершины трещины и усилие, необходимое для деформирования полосы. Описаны упрощённая и полная схемы определения констант разрушения при растяжении полосы, найдено изменение градиентов деформаций при пересечении линии разрыва скоростей если материал до этого деформировался.

3. Получено аналитическое решение задач о растяжении, сжатии, последовательном растяжении/сжатии полосы с непрерывным полем скоростей перемещений при условии сжимаемости в условиях плоского напряжённого состояния. Найдены поля скоростей, инварианты и главные значения тензора конечных деформаций Альманси, изменение ширины полосы с течением времени, а также необходимое для её деформирования усилие. В задаче о

последовательном растяжении-сжатии полосы найдены траектории движения частиц материала.

4. Создан программный продукт для определения количества полуциклов нагружения до зарождения в материале трещины и определения основных параметров процесса малоциклового нагружения плоского образца в условиях плоской деформации и плоского напряжённого состояния (изменение размеров полосы, накопленные пластические деформации, граничные напряжения, необходимое для деформирования образца усилие, объёмная плотность диссипации энергии).

5. Создан программный продукт для вычисления констант разрушения по упрощённой и полной схеме, а также параметров плоского образца при его растяжении в условиях плоской деформации.

6. Получены аналитические решения задач о: вдавливании клина в выпуклое тело, сжатии выпуклого тела плоским штампом, вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта, сжатии двух симметричных выпуклых жёсткопластических тел с учётом трения.

7. Получены численные решения задач о: внедрении клина $y = |x| \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{6})$ в клин $y = -|x| \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8})$ с коэффициентом трения 0.20; вдавливании клина $y = |x| \operatorname{ctg}(\theta)$ с углом раствора $22^\circ 31' 2''$ в гиперболический цилиндр $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$ с коэффициентом трения 0.12; сжатии гиперболического цилиндра $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$ по схемам Хилла и Прандтля; деформации полупространства при внедрении клина шириной $h = 1$, с углом раствора $\theta = \frac{\pi}{6}$ и коэффициентом трения 0.20; вдавливании клина с углом раствора $22^\circ 31' 2''$ и шириной $h = 0.2$ в гиперболический цилиндр $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$; деформации жёсткопластического полупространства при внедрении в него абсолютно шероховатого цилиндра радиуса $r = 1$.

Список литературы

1. Анисимов, А. Н. Об учёте необратимой сжимаемости материала при волочении полос сквозь короткую матрицу / А. Н. Анисимов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2007. – № 3(55). – С. 19–31.
2. Аннин, Б. Д. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашов. – Новосибирск.: Наука, 1985. – 142 с.
3. Аннин, Б. Д. Упруго-пластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. – Новосибирск.: Наука, 1983. – 238 с.
4. Бабайцев, А. В. Методика приближённой оценки напряжений в толстостенной осесимметричной композитной конструкции / А. В. Бабайцев, А. Ю. Бурцев, Л. Н. Рабинский, Ю. О. Соляев // Труды МАИ. – 2019. – № 107.
5. Бобылев, А. В. Механические и технологические свойства металлов: справочник / А. В. Бобылев. – М.: Металлургия, 1987. – 208 с.
6. Брок, Д. Основы механики разрушения / Д. Брок; пер. с англ В. И. Дорофеева. – Москва.: Высшая школа, 1980. – 368 с.
7. Буханько, А. А. Деформационно-энергетический критерий разрушения жёсткопластических тел / А. А. Буханько, А. Л. Григорьева, Е. П. Кочеров, А. И. Хромов // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – № 6. – С. 178–186
8. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток.: Дальнаука, 1988. – 527 с.
9. Быковцев, Г. И. Плоская деформация идеальных жёсткопластических тел с учётом изменения границы / Г. И. Быковцев, А. И. Хромов // Известия Академии наук СССР. Механика твёрдого тела. – 2002. – № 2. – С. 71–78.
10. Бьюи, Х. Д. Механика разрушения: обратные задачи и решения / Х. Д. Бьюи; пер. с англ. Л. В. Степановой. – Москва.: Физматлит, 2011. – 409 с.
11. Воронич, И. В. Об особенностях аэродинамики малоразмерного летательного аппарата нормальной схемы / И. В. Воронич, С. А. Колчев, Д.

- В. Панчук, В. А. Песецкий, А. А. Силкин, В. В. Ткаченко, Т. Т. Нгуен // Труды МАИ. – 2019. – № 109.
12. Гениев, Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона / Г. А. Гениев, В. Н. Киссюк, Г. А. Тюпин. – Москва.: Стройиздат, 1974. – 316 с.
 13. Глушенкова, Е. Д. Продольные и изгибные колебания трёхслойной пластины со сжимаемым заполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости / Е. Д. Глушенкова, Л. И. Могилевич, В. С. Попов, А. А. Попова // Труды МАИ. – 2019. – № 106.
 14. Гольденблат, И. И. Общая теория критериев прочности изотропных и анизотропных материалов / И. И. Гольденблат, В. А. Копнов // Проблемы прочности. – 1971. – № 2. – С. 65–69.
 15. Гольдштейн, Р. В. Фундаментальные проблемы механики деформируемого твёрдого тела в наукоёмких технологиях / Р. В. Гольдштейн, Н. Ф. Морозов // Физическая мезомеханика. – 2012. – № 2. – С. 5–13.
 16. Гомонова, О. В. Новые точные решения, описывающие двумерное поле скоростей для решения Прандтля / О. В. Гомонова, С. И. Сенашов // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. Академика М. Ф. Решетнёва. – 2009. – № 4. – С. 18–21.
 17. Григорьева, А. Л. Алгоритм решения задачи о растяжении полосы с непрерывным полем скоростей перемещений с использованием деформационно-энергетического условия пластичности / А. Л. Григорьева, Я. Ю. Григорьев // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 1-3. – С. 694-700.
 18. Григорьева, А. Л. Одноосное растяжение жёсткопластической полосы в условиях плоского напряжённого состояния при однородном поле скоростей деформаций / А. Л. Григорьева, А. И. Хромов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния. – 2015. – № 4(26). – С. 198–205.
 19. Григорьева, А.Л. Одноосное растяжение полосы при плоском напряженном состоянии / А. Л. Григорьева, И. В. Слабожанина, А.И. Хромов //

- Актуальные проблемы математики и механики: материалы и доклады Всероссийской научной конференции, посвященной 75-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Г.И. Быковцева, Самара, 18 – 21 апреля 2013 г. – Самара: Самарский университет, 2013. – С. 57-58.
20. Григорьева, А. Л. Математическое моделирование поля тензора деформаций Альманси при исследовании растяжения полосы в условиях плоского напряженного состояния / А. Л. Григорьева, Я. Ю. Григорьев, А. И. Хромов, Е. П. Жарикова // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении: материалы V Дальневосточной конференции с международным участием, Комсомольск-на-Амуре, 18 – 21 сентября 2018 г. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КНАГУ», 2018. – С. 124-136.
 21. Григорьева, А. Л. Моделирование сравнительных деформационных процессов, при растяжении плоских образцов в условиях различных деформационных состояний / А. Л. Григорьева, Я. Ю. Григорьев, А. И. Хромов, И. В. Канахин // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4-х томах. Т. 3 Механика деформируемого твёрдого тела, Уфа, 19 – 24 августа 2019 г. – Уфа: Башкирский государственный университет, 2019. – С. 423-425.
 22. Друянов, Б. А. Теория технологической пластичности / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. – Москва.: Машиностроение, 1990. – 271 с.
 23. Егорова, Ю. Г. Моделирование пластического состояния в задаче о волочении полосы / Ю. Г. Егорова, В. А. Егоров // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2013. – № I-1(13). – С. 42-50;
 24. Егорова, Ю. Г. Резание и разрушение идеальных жёсткопластических тел / Ю. Г. Егорова, С. А. Каверзина, А. И. Хромов // Доклады академии наук. – 2002. – Т. 385, № 4. – С. 490–493.

25. Зубчанинов, В. Г. Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. – Тверь.: ТГТУ, 2002. – 299 с.
26. Зубчанинов, В. Г. Устойчивость и пластичность. В 2 т. Т. 2 Пластичность / В. Г. Зубчанинов. – Москва.: Физматлит, 2007. – 336 с.
27. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – Москва.: Наука, 1966. – 231 с.
28. Ивлев, Д. Д. Механика пластических сред. В 2 т. Т. 1. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – Москва.: Физматлит, 2001. – 445 с.
29. Ишлинский, А. Ю. Прикладные задачи механики. В 2 т. Т. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел / А. Ю. Ишлинский. – Москва.: Наука, 1986. – 356 с.
30. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – Москва.: Физматлит, 2001. – 701 с.
31. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – Москва.: Наука, 1969. – 421 с.
32. Качанов, Л. М. Основы механики разрушения / Л. М. Качанов. – Москва.: Наука, 1974. – 311 с.
33. Козлова, О. В. Константы разрушения для идеальных жёсткопластических тел / О. В. Козлова, А. И. Хромов // Доклады Академии наук. – Т. 385, № 3. – 2002. – С. 342–345.
34. Кочеров, Е. П. Деформационные состояния и разрушение идеальных жёсткопластических тел / Е. П. Кочеров, А. И. Хромов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2006. – № 42. – С. 66–71.
35. Кочеров, Е. П. Деформационно-энергетический подход и малоцикловая усталость материалов/ Е. П. Кочеров, А. А. Буханько, А. И. Хромов // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. Академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). – 2011. – № 3–1. – С. 23–27.

36. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: «Высшая школа», 1970. – 712 с.
37. Лошманов, А. Ю. Распространение внутренней и внешних трещин при растяжении полосы с v-образными вырезами / А. Ю. Лошманов, А. В. Периг // Наука и бизнес: пути развития. – 2012. – № 8(14). – С. 59–64.
38. Лошманов, А. Ю. Деформационные состояния сжимаемых жёсткопластических тел / А. Ю. Лошманов, А. А. Сиротин, А. И. Хромов // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2018. – № III-1(35). – С. 109-113.
39. Макклиток, Ф. Деформация и разрушение материалов / Ф. Макклиток, А. Аргон; пер. с англ; под ред. Е. М. Морозова и Б. М. Струнина. – Москва.: Мир, 1970. – 443 с.
40. Матвиенко, Ю. Г. Модели и критерии механики разрушения / Ю. Г. Матвиенко. – Москва.: Физматлит, 2006. – 328 с.
41. Махутов, Н. А. Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. В 2 т. Т. 1: Критерии прочности и ресурса / Н. А. Махутов. – Новосибирск.: Наука, 2005. – 493 с.
42. Машиностроение. Энциклопедия / Ред. совет: К. В. Фролов (пред.) и др. – М.: Машиностроение. М38 Физико-механические свойства. Испытания металлических материалов. Т. II-1/Л. В. Агамиров, М. А. Алимов и др.; под общ. ред. Е. И. Мамаевой. 2010. – 852 с.; ил.
43. Мейз, Д. Теория и задачи механики сплошных сред / Д. Мейз. – Москва.: Мир, 1974. – 319 с.
44. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения / В. Т. Трощенко [и др.]. – Киев.: Логос, 2000. – 571 с.
45. Морозов, Н. Ф. Математические вопросы теории трещин / Н. Ф. Морозов. – Москва.: Наука, 1984. – 255 с.
46. Надаи, А. Пластичность и разрушение твёрдых тел. В 2 т. Т. 1 / А. Надаи. – Москва.: Изд-во иностранной литературы, 1954. – 648 с.

47. Немировский, Ю. В. Динамическое сопротивление плоских пластических преград / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова. – Новосибирск.: Гео, 2009. – 309 с.
48. Нотт, Д. Ф. Основы механики разрушения / Д. Ф. Нотт; пер. с англ. Д. В. Лаптева; под ред. В. Г. Кудряшова. – Москва.: Металлургия, 1978. – 256 с.
49. Партон, В. З. Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – Москва.: Наука, 1985. – 502 с.
50. Партон, В. З. Механика упругопластического разрушения: Основы механики разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – Москва.: ЛКИ, 2007. – 348 с.
51. Партон, В. З. Механика упругопластического разрушения: Специальные задачи механики разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – Москва.: ЛКИ, 2008. – 189 с.
52. Писаренко, Г. С. О форме предельной поверхности механического критерия прочности / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев // Прикладная механика. – 1968. – Т. 4, № 3. – С. 45–50.
53. Писаренко, Г. С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряжённом состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев. – Киев.: Наукова думка, 1976. – 415 с.
54. Писаренко, Г. С. Сопротивление жаропрочных материалов нестационарным силовым и температурным воздействиям / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский, Е. А. Антипов. – Киев.: Наукова думка, 1974. – 199 с.
55. Писаренко, Г. С. Пластичность и прочность материалов при нестационарных нагружениях / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский, Е. А. Антипов. – Киев.: Наукова думка, 1984. – 216 с.
56. Поля деформаций при малоцикловом нагружении / С. В. Серенсен [и др.]. – Москва.: Наука, 1979. – 277 с.
57. Предельные состояния деформируемых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев [и др.]. – Москва.: Физматлит, 2008. – 830 с.

58. Проблемы механики: сборник статей. К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского / под ред. Д. М. Климова. – Москва: Физматлит, 2003. – 829 с.
59. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твёрдого тела / Ю. Н. Работнов. – Москва.: Наука, 1979. – 713 с.
60. Работнов, Ю. Н. Введение в механику разрушения / Ю. Н. Работнов. – Москва.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2009. – 79 с.
61. Радаев, Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев. – Самара.: Самарский университет, 2007. – 338 с.
62. Радаев, Ю. Н. О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – № 5(56). – С. 102–114.
63. Разрушение. В 7 т. Т. 2. Математические основы теории разрушения / под ред. Г. Либовица. – Москва.: Мир, 1975. – Гл. 3. – С. 204–335.
64. Разрушение. В 7 т. Т. 2. Математические основы теории разрушения / под ред. Г. Либовица. – Москва.: Мир, 1975. – Гл. 4. – С. 336–520.
65. Русланцев, А. Н. Модель напряжённо-деформированного состояния криволинейной слоистой композитной балки / А. Н. Русланцев, А. М. Думанский, М. А. Алимов // Труды МАИ. – 2017. – № 96.
66. Сенашов, С. И. Пластические течения среды Мизеса со спирально-винтовой симметрией / С. И. Сенашов // Прикладная математика и механика. – 2004. – Т. 68, № 1. – С. 150–154.
67. Серенсен, С. В. Несущая способность и расчёты деталей машин на прочность. Руководство и справочное пособие / С. В. Серенсен, В. П. Когаев, Р. М. Шнейдерович. – Москва.: Машиностроение, 1975. – 488 с.
68. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – Москва.: Высшая школа, 1969. – 608 с.

69. Старовойтов, Э. И. Деформирование трёхслойных композитных ортотропных прямоугольных пластин / Э. И. Старовойтов, Н. А. Локтева, Н. А. Старовойтова // Труды МАИ. – 2014. – № 77.
70. Хеллан, К. Введение в механику разрушения / К. Хеллан; пер. с англ. А. С. Кравчука; под ред. Е. М. Морозова. – Москва.: Мир, 1988. – 364 с.
71. Херцберг, Р. В. Деформация и механика разрушения конструкционных материалов / Р. В. Херцберг. – М.: Металлургия, 1989. – 576 с.
72. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл; пер. с англ. Э. И. Григолюка. – Москва.: Гостехиздат, 1956. – 407 с.
73. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жёсткопластических тел / А. И. Хромов. – Владивосток.: Дальнаука, 1996. – 180 с.
74. Хромов, А. И. Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жёсткопластических тел / А. И. Хромов // Доклады Академии наук. – 1998. – Т. 362, № 2. – С. 202–205.
75. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жёсткопластической полосы при растяжении / А. И. Хромов // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2002. – № 1. – С. 136–142.
76. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жёсткопластических тел, константы разрушения / А. И. Хромов // Проблемы механики: Сборник статей. К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского / под ред. Д. М. Климова. – Москва: Физматлит, 2003. – С. 762–775.
77. Хромов, А. И. Разрушение жёсткопластических тел, константы разрушения / А. И. Хромов // Математика. Механика. Информатика: труды конференции, посвящённой 10-летию РФФИ. – М.: Физматлит, 2005. – С. 403–420.
78. Хромов, А. И. Локализация пластических деформаций и концентраторы деформаций / А. И. Хромов, А. А. Буханько, О. В. Козлова // Современные проблемы механики и прикладной математики: сборник трудов международной школы-семинара / Воронежский государственный университет. – Воронеж: ВГУ, 2004. – Ч. 1, т. 2. – С. 513–516.

79. Хромов, А. И. Пластические константы разрушения / А. И. Хромов, А. А. Буханько, О. В. Козлова, С. Л. Степанов // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 147–155.
80. Хромов, А. И. Деформационные состояния и разрушение жёсткопластических тел / А. И. Хромов, А. А. Буханько, Е. П. Кочеров // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: материалы съезда, Нижний Новгород, 22 – 28 августа 2006 г. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского, 2006. – С. 50.
81. Хромов, А. И. Деформационно-энергетический подход к описанию процессов разрушения пластических тел / А. И. Хромов, А. А. Буханько, Е. П. Кочеров // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4(4). – С. 1839–1840.
82. Хромов, А. И. Предельное состояние и малоцикловая усталость пластических материалов / А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. А. Овчинникова // Дальневосточный математический журнал. – 2013. – Т. 13, № 1. – С. 148–158.
83. Хромов, А. И. Деформационно-энергетические критерии и разрушение пластических тел в окрестности концентраторов деформаций / А. И. Хромов, А. А. Буханько, О. В. Патлина // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием, Самара, 29 – 31 мая 2008 г. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2008. – Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. – С. 342–345.
84. Хромов, А. И. Концентраторы деформаций и деформационные критерии разрушения / А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. Л. Степанов // Тезисы докладов VI международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвящённой 105-летию со дня рождения академика М. А. Лаврентьева, Новосибирск, 27 – 31 мая 2005 г. –

- Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2005. – С. 177
85. Хромов, А. И. Разрушение пластических тел / А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. Л. Степанов // Сборник трудов международной школы-семинара «Современные проблемы механики и прикладной математики», Воронеж, 12 – 17 сентября 2005 г. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2005. – С. 191–192.
 86. Хромов, А. И. Концентраторы деформаций / А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. Л. Степанов // Доклады Академии наук. – 2006. – Т. 407, № 6. – С. 777–781.
 87. Хромов, А. И. Концентраторы деформаций и разрушение пластических тел / А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. Л. Степанов // Проблемы механики деформируемых твёрдых тел и горных пород: Сборник статей к 75-летию Е. И. Шемякина. – Москва: Физматлит, 2006. – С. 809–819.
 88. Хромов, А. И. Разрушение жёсткопластических тел. Константы разрушения / А. И. Хромов, О. В. Козлова. – Владивосток.: Дальнаука, 2005. – 157 с.
 89. Хромов, А. И. Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформаций несжимаемого жёсткопластического тела / А. И. Хромов, Е. П. Кочеров, А. Л. Григорьева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2006. – № 43. – С. 88–91.
 90. Хромов, А. И. Деформационные состояния и условия разрушения жёсткопластических тел / А. И. Хромов, Е. П. Кочеров, А. Л. Григорьева // Доклады академии наук. – 2007. – Т. 413, № 4. – С. 481–485.
 91. Циглер, Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механики сплошной среды / Г. Циглер. – М.: Мир, 1966. – 135 с.
 92. Черепанов, Г. П. Механика разрушения композиционных материалов / Г. П. Черепанов. – Москва.: Наука, 1983. – 296 с.
 93. Чудин, В. Н. Изгиб с растяжением элементов корпусных конструкций / В. Н. Чудин // Кузнечно-штамповочное производство. – 2001. – № 6. – С. 3–6.

94. Coffin, L. F. A study of the effects of cyclic thermal stresses in ductile metals / L. F. Coffin // Transaction of ASME. – 1954. – Vol. 76. – P. 931–950.
95. Experimental and Numerical Investigation of Advanced Materials and Structures / Ed. By A. Öchsner, H. Altenbach. – Springer International Publishing, 2013. – Vol. 41 of Advanced Structured Materials.
96. Feltner, C. E. Microplastic strain hysteresis energy as a criterion for fatigue fracture / C. E. Feltner, J. D. Morrow. – Transaction of ASME, 1961. – Vol. 83, no. 1. – P. 15–22.
97. Hill, R. Some Special problems of indentation and compression in plasticity / R. Hill // Proc. 7th Intern. Congr. Appl. Mech. L. – 1948. – V. 1. – P. 365–377
98. Hill, R. The theory of wedge indentation of ductile materials / R. Hill, E. H. Lee, S. J. Tupper // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1947. – V. 188, N 1013. – P. 273–289
99. Lee, E. H. Plastic Flow in a V-Notched Bar Pulled in Tension / E. H. Lee // J. Appl. Mech. – 1952. – V. 19. – P. 331–336.
100. Manson, S. S. Behavior of materials under conditions of thermal stress / S. S. Manson // Heat Transfer Symposium / University of Michigan. – Engineering Research Institute, 1953. – P. 9–75.
101. Martin, D. E. An energy criterion for low-cycle fatigue / D. E. Martin // Basic Engineering. Transaction of ASME. – 1961. – Vol. 83, no. 4. – P. 565–571.
102. Onat, E. The necking of a tension specimen in plane plastic flow / E. Onat, W. Prager // J. Appl. Phys. – 1954. – N. 4. – P. 491–493.
103. Richmond, O. Plane strain necking of V-notched and un-notched tensile bars / O. Richmond // J. Mech. And Phys. Solids. – 1969. – V. 17, № 2. – P. 83–90.
104. Shield, R. T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry / R. T. Shield // Proc. Roy. Soc., London. Ser. A. – 1955. – V. 233, N. 1193. – P. 267–287.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(рекомендуемое)

Созданные программные продукты

Рисунок 1 – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Определение основных параметров малоциклового нагружения металлических материалов»



Рисунок 2 – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Определение параметров малоциклового нагружения плоских образцов из металлических материалов»



Рисунок 3 – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Определение констант разрушения на основе испытаний плоских образцов»

LowCyclingForm

Тип образца ▾

Материал образца ▾

Длина образца (мм)

Ширина образца (мм)

Время нагружения (с)

Деформационное состояние

☐ Плоская деформация ☐ Плоское напряжённое состояние

Условие сжимаемости материала

☐ Нет ☐ Да

Режим нагружения

☐ С постоянным размахом деформаций ☐ С постоянным временем нагружения

Количество циклов до зарождения трещины

Запустить эксперимент

Вывести результаты эксперимента

Сбросить результаты эксперимента

Рисунок 4 – Интерфейс программы «Определение параметров малоциклового нагружения плоских образцов из металлических материалов»

LowCyclingForm

Тип образца ▾

алюм. сплав В95 ▾

Длина образца (мм)

Ширина образца (мм)

Время нагружения (с)

Деформационное состояние

☒ Плоская деформация ☐ Плоское напряжённое состояние

Условие сжимаемости материала

☒ Нет ☐ Да

Режим нагружения

☐ С постоянным размахом деформаций ☒ С постоянным временем нагружения

Количество циклов до зарождения трещины

Запустить эксперимент

Вывести результаты эксперимента

Сбросить результаты эксперимента

Рисунок 5 – Результаты работы программы «Определение параметров малоциклового нагружения плоских образцов из металлических материалов» для образца из алюминиевого сплава В95 размерами 1000×100 в условиях плоской деформации при несжимаемости материала с постоянным временем нагружения

The screenshot shows the 'LowCyclingForm' application window. The parameters are set as follows:

- Тип образца: алюмин. сплав B95
- Длина образца (мм): 1000
- Ширина образца (мм): 100
- Время нагружения (с): 3
- Деформационное состояние: ☒ Плоская деформация, ☐ Плоское напряжённое состояние
- Условие сжимаемости материала: ☐ Нет, ☒ Да
- Режим нагружения: ☐ С постоянным размахом деформаций, ☒ С постоянным временем нагружения
- Количество циклов до зарождения трещины: 4343

Buttons at the bottom: 'Запустить эксперимент' (disabled), 'Вывести результаты эксперимента' (highlighted with a blue border), 'Сбросить результаты эксперимента' (disabled).

Рисунок 6 – Результаты работы программы «Определение параметров малоциклового нагружения плоских образцов из металлических материалов» для образца из алюминиевого сплава B95 размерами 1000×100 в условиях плоской деформации при сжимаемости материала с постоянным временем нагружения

The screenshot shows the 'LowCyclingForm' application window with the following parameters:

- Тип образца: сталь 30XGT
- Длина образца (мм): 500
- Ширина образца (мм): 60
- Время нагружения (с): 5
- Деформационное состояние: ☒ Плоская деформация, ☐ Плоское напряжённое состояние
- Условие сжимаемости материала: ☒ Нет, ☐ Да
- Режим нагружения: ☒ С постоянным размахом деформаций, ☐ С постоянным временем нагружения
- Количество циклов до зарождения трещины: 61

Buttons at the bottom: 'Запустить эксперимент' (disabled), 'Вывести результаты эксперимента' (highlighted with a blue border), 'Сбросить результаты эксперимента' (disabled).

Рисунок 7 – Результаты работы программы «Определение параметров малоциклового нагружения плоских образцов из металлических материалов» для образца из стали 30XGT размерами 500×60 в условиях плоской деформации при несжимаемости материала с постоянным размахом деформаций

№	Описание удара	Длина волны (м)	Ширина полосы (м)	Изменение частоты (Гц)	Первый интервал	Второй интервал	Первое главное значение тензора Алямова	Второе главное значение тензора Алямова	Мощность диссипации	Время нагружения	Размах деформации
1	1.2E-05	1.000003	0.9999980000000000	1.19999589350347E-06	-1.439992719674278E-17	1.19999279993208E-10	1.000001000040832E-25	1.000000997592632E-06	2.39999850000339E-05	1	1.199997840044880E-02
2	1.2000000000108E-05	0.9999999999999999	0.100000000000000000	1.199999400081942E-06	-5.55111512137E-18	-1.0800435459101E-10	1.08004107005210E-01	1.200000499970504E-04	1.799998200000323E-05	1	1.199998200004598E-02
3	1.200000000000000E-05	1.0000000000000000	0.9999999999999999	1.199999899913123E-06	-1.43999593269742E-10	1.199981999511212E-10	1.19999999599189E-05	1.199999639903935E-05	1.799994000000983E-04	2	1.200004900013007E-01
4	1.199999999999999E-05	0.9999999999999999	0.100000000000000000	1.199999400081942E-06	-1.11023042621565E-16	-2.160084999601121E-05	2.16008907183835E-04	2.16008738777877E-04	9.59992800000647E-05	3	1.2000409812001E-01
5	1.200000000000000E-05	1.0000000000000000	0.9999999999999999	1.199999899913123E-06	-1.43999593269742E-10	1.19999199967734E-05	1.19999979691897E-05	1.000019999100701E-02	1.000019999100701E-02	1	1.199915982770510E-01
6	1.199999999999999E-05	0.9999999999999999	0.100000000000000000	1.199999400081942E-06	-1.11023042621565E-16	-2.16013660663373E-05	2.16013660663373E-05	2.16013660663373E-05	1.000019999100701E-02	1	1.199915982770510E-01
7	1.200000000000000E-05	1.0000000000000000	0.9999999999999999	1.199999899913123E-06	-1.43999593269742E-10	1.199999999915007E-05	1.199999999915007E-05	1.19999767020876E-04	1.000019999100701E-02	2	2.44197860175001E-01
8	1.199999999999999E-05	0.9999999999999999	0.100000000000000000	1.199999400081942E-06	-5.55111512137E-18	-4.3201756014834E-10	4.32017561154233E-10	4.32017050113127E-05	1.000019998500121E-02	3	3.20178603233901E-01
9	1.200000000000000E-05	1.0000000000000000	0.9999999999999999	1.199999899913123E-06	-1.439878216658030E-10	1.1999485981148E-05	1.19993190429078E-05	1.199963999671126E-05	1.0000199984101308E-04	1	1.19989197616947E-01
10	1.199999999999999E-05	0.9999999999999999	0.100000000000000000	1.199999400081942E-06	-1.11023042621565E-16	-5.40022027056679E-10	-5.40022181179904E-10	5.40021914073855E-10	0.00002399800201619	1	1.199999999903799E-05
11	1.200000000000000E-05	1.0000000000000000	0.9999999999999999	1.199999899913123E-06	-1.43985184886191E-10	1.19998379744004E-05	1.199904239925603E-05	1.199993196263276E-05	0.000023998006116183	2	1.20000519825197E-01
12	1.199999999999999E-05	0.9999999999999999	0.100000000000000000	1.199999400081942E-06	-1.11023042621565E-16	-4.4802453069409E-10	4.4802453069409E-10	4.48026230436382E-10	0.0000287990401191943	3	8.64032601746320E-01
13	1.200000000000000E-05	1.0000000000000000	0.9999999999999999	1.199999899913123E-06	-1.439826313751628E-10	1.199927991374028E-05	1.199927991374028E-05	1.19994239579967E-05	0.0000199179686014824	1	1.199927991374028E-01
14	1.199999999999999E-05	0.9999999999999999	0.100000000000000000	1.199999400081942E-06	-1.11023042621565E-16	-1.46031074528113E-10	1.46031074528113E-10	1.46031074528113E-10	0.0000199999999999999	1	1.199999999999999E-05
15	1.200000000000000E-05	1.0000000000000000	0.9999999999999999	1.199999899913123E-06	-1.439802202445005E-10	1.19991779684590E-05	1.1999077968818245E-05	1.199911496826843E-05	0.00001999		

The screenshot shows the 'StartingForm' application window. It contains three rows of input fields and three buttons on the right. The first row has a dropdown menu for 'Материал образца', a text field for 'Значение E** (момент зарождения макротрещины)', and a button 'Запустить эксперимент'. The second row has a text field for 'Длина образца (мм)', a text field for 'Значение E* (скорость распространения макротрещины)', and a button 'Вывести результаты эксперимента'. The third row has a text field for 'Ширина образца (мм)', a text field for 'Общее время нагружения', and a button 'Сбросить результаты эксперимента'.

Рисунок 10 – Интерфейс программы «Определение констант разрушения на основе испытаний плоских образцов»

The screenshot shows the 'StartingForm' application window with the results of an experiment. The 'Материал образца' dropdown is set to 'алюм. сплав В95'. The 'Значение E** (момент зарождения макротрещины)' field contains the value '0,058339607399087834'. The 'Длина образца (мм)' field contains the value '1000'. The 'Значение E* (скорость распространения макротрещины)' field contains the value '0,0838187922112823'. The 'Ширина образца (мм)' field contains the value '100'. The 'Общее время нагружения' field contains the value '70000,000000000006'. The 'Запустить эксперимент' button is highlighted with a blue border. The other buttons are 'Вывести результаты эксперимента' and 'Сбросить результаты эксперимента'.

Рисунок 11 – Результаты работы программы «Определение констант разрушения на основе испытаний плоских образцов» для образца из алюминиевого сплава В95 размерами 1000 × 100

	Ширина полосы	Длина полосы	Критическая диссипация	Время нагружения
►	0,09398505073782963	1,0639990000000001	0,12406890213877411	63999,000000000006
	0,088000000000000001	1,07	0,12731372895859586	6001

Рисунок 12 – Расчёт основных параметров растяжения плоского образца из алюминиевого сплава В95 размерами 1000 × 100 с помощью программы «Определение констант разрушения на основе испытаний плоских образцов»

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(рекомендуемое)

Акт внедрения



Рисунок 1 – Акт внедрения результатов научно-исследовательской работы в
учебный процесс