

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр
Сибирского отделения Российской академии наук»
(ФИЦ КНЦ СО РАН, КНЦ СО РАН)

На правах рукописи

Петраков Игорь Евгеньевич

**Моделирование упругого деформирования
композитных пластин, по-разному сопротивляющихся
растяжению и сжатию**

1.1.8 «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
чл.-корр. РАН
доктор физико-математических наук, профессор
Садовский В. М.

Красноярск – 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Математические модели композитных материалов	12
1.1 Обзор методов моделирования композитных материалов . .	12
1.2 Обобщенный реологический метод	21
1.3 Выводы по главе 1	29
Глава 2. Сильный изгиб балки	31
2.1 Уточненное уравнение Эйлера	31
2.2 Нейтральная линия в балке	34
2.3 Обратная коэффициентная задача	38
2.4 Выводы по главе 2	41
Глава 3. Плоское напряженное состояние многослойной композитной пластины	43
3.1 Уравнение плоского напряженного состояния пластины . . .	43
3.2 Результаты расчетов	49
3.3 Выводы по главе 3	54
Глава 4. Чистый изгиб пластин	56
4.1 Уравнение изгиба слоистой пластины	56
4.2 Вычислительный алгоритм	66
4.3 Результаты расчетов чистого изгиба пластины	69
4.4 Изгиб пластины жестким штампом	71
4.5 Результаты расчетов изгиба пластины жестким штампом . .	74
4.6 Выводы по главе 4	78
Глава 5. Напряженно-деформированное состояние пластины	79
5.1 Уравнение напряженно-деформированного состояния пластины	79

5.2	Результаты вычислений	90
5.3	Выводы по главе 5	94
	Заключение	96
	Приложение А. Результаты лабораторных измерений	
	стрелы консольного прогиба балок	98
	Приложение Б. Копия свидетельства о регистрации	
	программы для ЭВМ	99
	Список рисунков	101
	Список таблиц	103
	Литература	104

Введение

Потребность промышленности в легких, высокопрочных, недорогих материалах привела к развитию принципиально нового подхода в области их конструирования. Результатом этого подхода в XX веке стала разработка композитных материалов [34], активное использование которых стало одним из решающих факторов промышленного прогресса в таких областях как автомобилестроение [68;118], авиастроение [75;101], в космической отрасли промышленности [71;120] и др [15]. В настоящее время композитные материалы продолжают широко использоваться как в промышленности так и, например, для создания переправ, дорог, площадок для разгрузки морских судов, взлетно-посадочных полос и т.п. в условиях холодных территорий [37; 38]. При этом в аэрокосмической отрасли растут объемы использования композитных материалов, а в современных самолетах доля композитов составляет от 15% до 30% от общей массы, а в ракетных двигателях достигает 90% [10;12].

В процессе развития механики деформируемого твердого тела одной из основных гипотез являлась гипотеза об однородности сплошной среды. Однако свойства композитных материалов существенно отличаются от свойств однородных составляющих. Для создания композитных материалов с заданными свойствами, а также расчета конструкций из таких неоднородных материалов необходимо развивать теоретические знания, явным образом учитывающие эту неоднородность [46]. Это привело к тому, что при создании математических моделей и методов расчета сложных конструкций, необходимо учитывать специфические свойства композитов, такие как разномодульность и разнопрочность [3]. Под разномодульностью здесь понимается разные модули упругости, а разнопрочность означает различные пределы прочности при растяжении и сжатии. Необходимо отметить, что при конструировании объектов из композитных материалов в реальных приложениях используются поправки для учета свойств разномодульности и разнопрочности, которые определяются, в основном, экспериментально, что приводит к удорожанию и увеличению времени проекти-

рования конструкций. Таким образом, учет неоднородности композитов на этапе математического моделирования поведения материала под действием различной нагрузки является актуальной задачей и, в целом, может быть использован для оптимизации промышленного использования композитных материалов.

Одним из подходов, которые позволяют построить модель, учитывающую разномодульность композита, является обобщенный реологический метод [45]. С его помощью можно строить корректные с точки зрения термодинамики определяющие уравнения волокнистых композитов. Метод основан на построении реологических схем с помощью базовых элементов (упругой пружины, вязкого демпфера и пластического шарнира) и нового элемента — жесткого контакта, имитирующего поведение идеальной сыпучей среды с абсолютно твердыми частицами. Реологический метод хорошо зарекомендовал себя при моделировании динамики и статики сыпучих и пористых материалов с пороговым изменением жесткости при схлопывании пор. Аналогичное изменение жесткости происходит в волокнистом композите при смене знака деформации.

Актуальность работы обусловлена широким распространением композитных материалов. Моделирование микроструктуры композита является сложной задачей из-за трудоемкости описания распределения и ориентации инородных включений и армирующих элементов в матрице материала, а также из-за необходимости описания механических взаимодействий на микроуровне [64; 72]. Построение определяющих уравнений для волокнистых композитов с различным сопротивлением сжатию и растяжению в настоящий момент является нерешенной задачей и для более детального моделирования необходимы математические модели, не требующие больших вычислительных мощностей для проведения расчетов и способные описать особенности композитных материалов.

Степень разработанности темы. В настоящее время существуют различные методы моделирования композитных материалов, однако общепринятой модели, позволяющей учитывать разномодульность материала и удовлетворяющей всем необходимым критериям, не разработано. Как было указано выше, одним из подходов, позволяющим построить модель,

учитывающую разномодульность композита является обобщенный реологический метод, разработанный В.М. Садовским. К описанию поведения композитных материалов этот метод будет применяться впервые.

Цель исследования состоит в создании методов расчета напряженно-деформированного состояния композитных пластин под действием произвольной системы сил, включая математическую модель, учитывающую разное сопротивление волокнистых композитов растяжению и сжатию, а также алгоритмическую и программную реализацию предложенной модели.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие **задачи**:

1. построить определяющие уравнения многослойных композитных материалов, учитывающие разное сопротивление растяжению и сжатию;
2. разработать методику решения краевых задач квазистатического деформирования пластин из многослойных композитных материалов;
3. выполнить расчеты напряженно-деформированного состояния слоистых композитных пластин при растяжении-сжатии в плоскости пластин, при чистом изгибе и их совокупности.

Научная новизна. Особенность этой задачи состоит в том, что определяющие уравнения должны быть представимы в потенциальной форме, что гарантирует выполнение фундаментальных принципов термодинамики. Для получения уравнений, описывающих упругую деформацию волокнистых композитов с различным сопротивлением сжатию и растяжению, впервые был применен обобщенный реологический метод.

Теоретическая значимость. Полученные в работе математические модели и определяющие уравнения являются важным этапом на пути к созданию математической модели композитного материала, учитывающей разномодульность и позволяющей описывать напряженно-деформированное состояние конструкций из композитных материалов с различными способами армирования под действием произвольных систем

сил. В данной работе развивается обобщенный реологический метод и его применение к описанию композитных материалов.

Практическая значимость. Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы в различных областях промышленности при проектировании конструкций из композитных материалов, проведении прочностных расчетов, решении оптимизационных задач.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Диссертация соответствует паспорту научной специальности: 1.1.8 – механика деформируемого твердого тела по следующим пунктам:

2. теория определяющих соотношений деформируемых тел с простой и сложной структурой;
3. задачи теории упругости, теории пластичности, теории вязкоупругости;
4. механика композиционных материалов и конструкций, механика интеллектуальных материалов;
11. математическое моделирование поведения дискретных и континуальных деформируемых сред при механических, тепловых, электромагнитных, химических, гравитационных, радиационных и прочих воздействиях;
12. вычислительная механика деформируемого твёрдого тела.

Методология и методы исследования. При построении математической модели упругого композита применяется обобщенный реологический подход. Для проведения расчетов в рамках моделей разномодульных композитных материалов требуется нахождение проекций на выпуклые множества в пространствах напряжений и деформаций, для вычисления которых применены методы решения вариационных неравенств – метод множителей Лагранжа и итерационный алгоритм Удзавы. Программный продукт реализован на основе метода конечных элементов, который широко используется при решении задач механики деформируемого твердого тела и позволяет с помощью метода последовательных приближений учесть нелинейные определяющие уравнения развиваемых моделей. В качестве метода исследования в работе используется вычислительный эксперимент, включающий в себя следующие этапы: математическая формулировка задачи, построение численного алгоритма, его программная реализация, проведение расчетов и анализ полученных результатов.

Положения выносимые на защиту.

1. Определяющие уравнения многослойного волокнистого композитного материала, учитывающие разное сопротивление растяжению и сжатию, применимые к задачам расчета напряженно-деформированного состояния пластин из композитного материала.
2. Алгоритм и компьютерная программа, реализующая определяющие уравнения композитного материала при решении краевых квазистатических задач для слоистых композитных пластин.
3. Результаты расчетов напряженно-деформированного состояния слоистых композитных пластин при растяжении-сжатии в плоскости пластин, при чистом изгибе и их совокупности.

Достоверность. Получаемые с помощью обобщенного реологического метода определяющие уравнения относятся к теории гиперупругости. Для них определены упругие потенциалы напряжений и деформаций, что гарантирует выполнение фундаментальных принципов равновесной термодинамики. В работе проведены вычислительные эксперименты, проведено сравнение полученных решений с решениями, полученными с помощью конечно-элементного комплекса Abaqus.

Личный вклад автора состоит в получении определяющих уравнений на основе обобщенного реологического метода, разработке вычислительных алгоритмов и программы для ЭВМ, проведении расчетов, обработке и анализе полученных результатов, подготовке научных статей и докладов по теме диссертационной работы. Научному руководителю Садовскому В.М. принадлежат постановки задач и общая оригинальная идея использования обобщенного реологического метода в применении к моделям волокнистых композитных материалов и критическое сравнение результатов с известными алгоритмами.

Апробация работы. Основные результаты работы изложены в виде докладов на 7 конференциях:

1. XI всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященной памяти академика А.Ф.Сидорова с элементами школы молодых ученых. 1-7 сентября 2022 г., пос. Кабардинка, Краснодарский край, Россия;

2. междисциплинарной конференции молодых учёных ФИЦ КНЦ СО РАН (КМУ-XXIV). 29 апреля 2021, г. Красноярск;
3. 27-ой всероссийской конференции с участием зарубежных учёных по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, посвященной 100-летию со дня рождения Николая Николаевича Яненко. Красноярск, Сибирский федеральный университет, 5 – 9 июля 2021 г.;
4. XI, XII, XIII международных конференциях по применению математических подходов в технических и естественных науках (AMiTaNS'19, AMiTaNS'20, AMiTaNS'21), Албена, Болгария, 2019, 2020, 2021 гг.;
5. всероссийской конференция молодых учёных-механиков 3 – 12 сентября 2021 года, пансионат МГУ “Буревестник”, г. Сочи, Россия.

Работа была поддержана проектом РФФИ №20-31-90032 “Моделирование напряженно-деформированного состояния многослойных волокнистых композитов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию”.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 13 печатных изданиях, из которых 3 изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 6 – в тезисах докладов, 5 индексируются в базах данных Web of Science, 6 – в базах Scopus, из них 5 публикации индексируются одновременно в Web of Science и Scopus.

Публикации в рецензируемых научных изданиях:

1. Петраков И.Е. Контактная задача изгиба многослойной композитной пластины с учётом различных модулей упругости при растяжении и сжатии / И.Е. Петраков // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2022. – Т. 25, №4. – С. 153-163.
2. Petrakov I.E., Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Analysis of bending of composite plates with account for the difference in resistance to tension and compression / I.E. Petrakov, V.M. Sadovskii, O.V. Sadovskaya // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2021. – Vol. 62. – No 5. – P. 851-860.

3. Annin B.D., Sadovskii V.M., Petrakov I.E., Vlasov A.Yu. Strong Bending of a Beam from a Fibrous Composite, Differently Resistant to Tension and Compression / B.D. Annin, V.M. Sadovskii, I.E. Petrakov, A.Yu. Vlasov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2019. – Vol. 12. – №5. – P. 533-542.
4. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Petrakov I.E. On the theory of constitutive equations for composites with different resistance in compression and tension / V.M. Sadovskii, O.V. Sadovskaya, I.E. Petrakov // Composite Structures. – 2021. – Vol. 268. – P. 113921.
5. Petrakov I.E. Modeling the bending of a multilayer composite plate with a rigid stamp / I.E. Petrakov // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol. 2522. – P. 080004.
6. Petrakov I.E., Sadovskii V.M. Mathematical modeling of plane stress state of a multilayer fibrous composite, differently resistant to tension and compression / I.E. Petrakov, V.M. Sadovskii // AIP Conference Proceedings : Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: 12th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. – Albena: American Institute of Physics Inc., 2020. – P. 090003.
7. Petrakov I.E., Sadovskii V.M. Identification of the elastic modules of a fibrous composite by solving inverse problems / I. E. Petrakov, V. M. Sadovskii // AIP Conference Proceedings : Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: 11th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. – Albena: American Institute of Physics Inc., 2019. – P. 090004.

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ:

1. Петраков И.Е. Расчет напряженно-деформированного состояния композитной пластины с учетом разномодульности / 18.08.2022 / Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022665584.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 119 страниц

с 31 рисунком и 4 таблицами. Список литературы содержит 138 наименований.

Глава 1. Математические модели КОМПОЗИТНЫХ материалов

1.1 Обзор методов моделирования композитных материалов

Композитные материалы — это материалы, состоящие из двух или более разнородных материалов и обладающие свойствами, отличными от свойств исходных материалов. Помимо этого состав и распределение отдельных компонентов заранее известны, доля каждого компонента должна быть не ниже некоторого значения и должна быть возможность установить отчетливые границы, отделяющие исходные материалы [19; 30]. Несмотря на неоднородность композитов в микромасштабе, в макромасштабе можно рассматривать их как однородные материалы. Составляющие композитного материала принято разделять на непрерывную фазу, которая называется матрицей, и на наполнитель или армирующую фазу. Причем в различных композитах один и тот же материал может играть роль матрицы или нести армирующего материала [34].

Существуют различные подходы для классификации композитных материалов [20]. По геометрической форме армирующих элементов материалы армирования можно разделить на нульмерные, одномерные и двумерные. Нульмерным армирующим материалом называют частицы, размеры которых составляют от 10^{-2} до 10 мкм. Одномерными элементами называют волокна различного сечения. Размер сечения может составлять от 10^{-1} до 10^2 мкм, а их длина на несколько порядков выше ($1 - 10^2$ мм). Двумерный армирующий материал — это пластины, длина и ширина которых значительно больше толщины ($1 - 10^2$ мм длина и ширина, против $10 - 10^3$ мкм толщины). По структуре материала выделяют дисперсно-проченные, т.е. армированные нульмерным материалом, распределенным по матрице равномерно в соответствии с объемной долей; волокнистые —

армированные волокнами, которые могут располагаться как направленно, так и хаотично; и слоистые. Под слоистыми композитными материалами могут пониматься как материалы, армированные двумерными армирующими элементами, так и композиты, состоящие из чередующихся слоев волокнистых или дисперсноупрочненных композитных материалов.

Остановимся на волокнистых композитах подробнее. Классификация волокнистых композитных материалов может проводиться по следующим признакам: по распределению и ориентации волокон, по материалу матрицы и по способу производства. В зависимости от распределения волокон композит, в макромасштабе, можно считать изотропным, если волокна в нем распределены равномерно и хаотично направлено, и анизотропными или ортотропными при направленном армировании. По материалу матрицы разделяют композиты с металлической матрицей, полимерной и керамической. Основными же способами производства являются литье, спекание, горячее прессование, диффузионная сварка и горячая штамповка.

В волокнистых композитах используются высокопрочные и высокомодульные волокна, которые воспринимают основные напряжения, возникающие при действии внешних нагрузок. Более податливая матрица заполняет пространство между волокнами и обеспечивает совместную работу за счет собственной жесткости и взаимодействия между матрицей и волокном. Армирующее волокно должно удовлетворять требованиям по прочности, жесткости, плотности, стабильности свойств в необходимом температурном интервале. При создании волокнистых композитов используются металлические проволоки; углеродные, стеклянные, борные и органические волокна, которые могут иметь вид как отдельных моноволокон, так и быть организованы в различные сетки, жгуты, ленты и т.п. Также важным требованием является совместимость волокон с материалом матрицы. Под совместимостью понимается то, что при создании композита, на границе между матрицей и волокном возможно получить предел прочности близкий к пределу прочности матрицы. Матрица в волокнистом композите обеспечивает монолитность композита, фиксирует форму изделия и взаимное расположение волокон, распределяет действующие напряжения по объёму материала, обеспечивая равномерную нагрузку на волокно. При-

рода матрицы определяет уровень рабочих температур, характер изменения свойств при воздействии атмосферных и других факторов. От выбора матрицы зависят термостойкость, сопротивление ударным нагрузкам и усталости. В настоящее время используют термореактивные полимерные, термопластичные полимерные и металлические матрицы.

До 1920-х годов в механике сплошных сред одной из основных гипотез была гипотеза об однородности сплошной среды, однако множество материалов как природных, так и искусственных обладают неоднородной структурой. Одним из первых подходов к моделированию структурно неоднородных сред являются методы осреднения или гомогенизации сред. Основой таких подходов могут служить работы Фойгта и Рейса [114; 131], в которых предложено вычисление эффективных модулей упругости с помощью правила механического смешивания.

Толчком к развитию композитных материалов стало создание однонаправленного стеклопластика А.К. Буровым в конце 1930-х годов [26] и создание углеродных волокон в Великобритании и США в начале 1960-х годов [65]. Вследствие своей структуры, композитные материалы обладают более сложным поведением, чем составляющие его компоненты, а моделирование всей микроструктуры композита является сложной задачей из-за сложности описания структуры композита и отдельных армирующих элементов на микроуровне [90] и больших вычислительных мощностей [72].

Для композитов метод Фойгта и Рейса развивали Хашин [80], Хилл [83; 84] и др. [25], в работах которых оценки для эффективных модулей волокнистых и гранулированных композитов уточнялись с помощью вариационных методов. Дальнейшим расширением правила смесей стали работы Оллера и др. [63; 106; 107], в которых были получены модели, объединяющие теорию смесей и анизотропные упругопластические модели из механики сплошных сред, а также современные работы по сужению оценок Фойгта – Рейса для различных материалов [47]. Основу для развития механики композитных материалов заложил Ю.Н. Работнов вместе со своими учениками (Б. Д. Аннин, Ю.В. Немировский и др.) [42]. Развитием метода гомогенизации стало построение усредненных моделей неоднородных тонкостенных конструкций и трехмерных уравнений теории упругости для композитных

материалов. В монографии [5] представлены результаты в области механики и вычислительной математики слоистых тонкостенных анизотропных оболочек, а также неклассическая математическая модель нелинейного деформирования тонкостенных слоистых упругих композитных пластин и оболочек, отражающих специфику их механического поведения в широкой области изменения нагрузок, геометрических и механических параметров, структур армирования. В монографиях Б.Д. Аннина, А.Л. Каламкарова и др. [7] описаны методы определения механических и прочностных характеристик различных типов композитов периодической структуры, а также методы решения обратной задачи – определения структуры слоистых и волокнистых композитов, доставляющей им заранее заданные механические характеристики.

Также развитием методов осреднения или гомогенизации стали методы локального приближения. Эти методы основаны на замене краевой задачи для произвольной или бесконечной области на краевую задачу для области, представляющей собой определенный объемный элемент, соответствующий выбранному масштабу моделирования. Одним из подходов к моделированию композитов является последовательное иерархическое моделирование поведения материала от мелких до более крупных масштабов [134]. К этому подходу относятся различные иерархические модели. Такой модели посвящена работа [74], в которой вводятся три уровня масштаба: микроскопический, на котором используется модель, основанная на диаграмме Вороного, макроскопический и масштаб, моделируемый с помощью элемента представительного объема (RVE, representative volume element). Размер RVE определялся согласно критерию Хилла-Мендела [83]: структура материала в единичном объеме должна быть однородна и этот объем содержит такое количество инородных включений, при котором зависимость этих параметров от граничных условий можно опустить. В дальнейшем для RVE были получены критерии для выбора масштаба, при котором допустимо использование элемента [108] и для выбора размера элемента [57; 82]. Использование RVE применительно к коротковолокнистым композитам, параметрическое исследование, включающее рассмотрение объемной доли волокна, положения волокон и геометрии упаковки волокна рассматривались

в [135]. Другая работа рассматривает поведение однонаправленных волокнистых композитов используя RVE и быстрое преобразование Фурье [133].

Недостатками RVE считается требование периодичности материала и невозможность учесть неоднородность материала на микроуровне. Преодолеть эти недостатки позволяет использование статистического объемного элемента (SVE, statistical volume element) [77; 127], который может содержать большое количество параметров среды, которые задаются согласно заданным законам распределения. С помощью SVE в [137] показано статистическая связь между микроструктурой материала и эффективными определяющими свойствами. В работе [76] исследована возможность использования сферических SVE и проведено сравнение сферических элементов с кубическими. Исследование масштабов, при которых целесообразно использовать SVE или переходить к RVE рассматривается в [69], влияние размера элемента на решение рассматривается в [60] с использованием метода Монте-Карло. Другим альтернативным RVE элементом, учитывающим неоднородность и лучше представляющим реальную микроструктуру материала является некоррелированный объемный элемент (UVE, uncorellated volume element) [117]. UVE использовался для моделирования масштабов, при которых микроструктурные параметры в соседних элементах перестают быть коррелированными.

Отдельным классом композитных материалов являются волокнистые композиты. Для волокнистых композитов также применяются методы осреднения и оценки их параметров: модели Тандона-Венга, Халпина-Цая и их модификации [73; 95; 125]. Сравнение некоторых моделей и экспериментальных данных проводится в [59]. Волокнистые композиты являются неоднородными анизотропными материалами. Выделяют два уровня неоднородности – микронеоднородность в пределах одного слоя, составленного из волокон и связующего, обуславливается различиями свойств матрицы и армирующих элементов, неравномерным распределением армирующих элементов и т.д.; и макронеоднородность, в которую входят особенности слоистой структуры и способы укладки слоев по толщине пакета. Одной из работ по исследованию взаимосвязи микро- и макроструктуры является работа [138] и упомянутая ранее работа [134]. Первая статья посвя-

щена иерархическому конкурентному подходу к проектированию, который позволил максимизировать собственную частоту конструкции. Для этого авторы сформулировали общую задачу и связь между макроструктурой и микроструктурой материала. Рассчитанные свойства материала применялись для анализа макроструктуры, в то время как поле перемещений макроструктуры рассматривалось при анализе чувствительности на микроуровне. Вторая статья посвящена виртуальному тестированию композитов, армированных ориентированными короткими волокнами. Метод основан на получении иерархической восходящей характеристике коротковолокнистого композита и связи механического поведения материалов и микроструктур в крупном масштабе от более низкого масштаба. Авторы моделируют композит с микроскопической модели элементарной ячейки для оценки поперечных и сдвиговых свойств ориентированных. Затем используют два типа мезомасштабных моделей с явным учетом прерывистости волокон и возможных локальных смещений волокон для получения эффективных свойств материала.

Важной особенностью волокнистых композитов является необходимость учета структуры материала на уровне армирующих элементов. Например, изменяя способ укладки волокон можно, в определенных пределах, изменять сопротивление материала нагрузкам и тем самым проектировать материал для заранее обозначенных целей. Развитие данного подхода приводит к принципам оптимального проектирования композитного материала. Рассмотрение задачи плоского деформирования и разрушения слоистого композита, динамического упругопластического деформирования слоистых плит и задачи оптимального проектирования слоистых конструкций рассматривается в работе Б. Д. Аннина [6]. Проектированию композитных материалов и развитию подхода построения структурной механики произвольных типов слоисто-волокнистых конструкций посвящены работы Ю.В.Немировского, С.К. Голушко, А.П. Вахмянина, С.Б. Бушманова и др [14; 16; 17]. В монографии [36] рассмотрены аналитические и численные методы решения и приведены примеры расчетов наиболее важных элементов конструкций из волокнистых композитов. Н.А. Федоровой развивается подход рационального армирования и в работе [35; 49] решена

задача рационального армирования семействами криволинейных волокон осесимметричной кольцевой пластины.

Стоит отметить, что структурно-неоднородная среда гораздо разнообразнее по возможным реакциям на процесс деформирования, чем однородный материал. Так, например, в волокнистых композитах влияние оказывают микродефекты в масштабах отдельных волокон, которые могут привести к отслоению армирующих элементов, разрыву волокон и, в общем, более сложному процессу разрушения композитному материалу по сравнению с однородными материалами. Для описания разрушения материала могут использоваться модели механики разрушения сплошной среды, описание которых приведены в работах Работнова Ю.Н. [43], Качанова Л.М. [21] и др. [92]. В данных работах для описания композита как изотропного или анизотропного материала используется феноменологический подход. Этот подход также используется для моделирования повреждений и прогнозирования снижения жесткости в квазихрупких материалах. Так в работе [79] трехмерные критерии разрушения однонаправленных волокнистых композитов устанавливаются в терминах квадратичных полиномов напряжений, которые выражаются через инварианты приложенного среднего напряжения. Полученные критерии позволяют описать четыре режима разрушения однонаправленного волокнистого композита. В другой работе [86] предложено феноменологическое условие разрушения ортотропных хрупких материалов. Оно содержит девять параметров материала и может учитывать сильно различающиеся прочностные свойства на сжатие и растяжение в разных направлениях. Они основываются на компонентах тензоров напряжений и деформаций и описывают различные виды повреждений, такие как возникновение микротрещин, разрыв волокон, отслоение волокон и слоев композита, разрушение матрицы и др. Вследствие появления большого количества различных критериев разрушения материалов были описаны процессы проверки и сравнения различных теорий разрушения. Например, работа [85] посвящена теории разрушения непрерывных полимерных композитных материалов, армированных волокном. В этой работе собраны рекомендации для описания теорий разрушения, непосредственное сравнение их прогностических возможностей друг с другом и экспе-

риментальными данными. Непосредственное сравнение критериев разрушения приведено в работе [121]. В этой статье собраны воедино результаты скоординированного исследования, известного как “World-Wide Failure Exercise”, в ходе которого 12 ведущих теорий прогнозирования разрушения слоистых композитов были проверены на основе экспериментальных данных.

В работах [81; 93; 94; 103; 115; 119] потеря жесткости рассматривается как распределение микротрещин и микропустот и вводится феноменологический тензор повреждений, относящийся к указанным выше видам разрушения. Предложены различные критерии разрушения для прогнозирования начала разрушения и развития повреждений в композитном материале [104; 126; 128].

Особенностью волокнистых композитов является то, что они проявляют различные свойства при растяжении и сжатии [3]. Помимо волокнистых композитов подобными свойствами могут обладать некоторые биогели, сплавы с памятью формы и мембранные конструкции [66; 88; 97]. В работах Е.В. Ломакина [11; 98], Н.И. Деревянко [18], А.С. Кравчука [24] и др. [22; 33; 78; 100] показано наличие свойства разномодульности у композитных материалов и то, что такие материалы как углепластики, стеклопластики, армированный лед и др. имеют несимметричные диаграммы деформирования при одноосном нагружении.

Первыми работами по исследованию и моделированию разномодульных материалов являются работы С.А. Амбарцумяна, А.А. Хачатрян, Г.С. Шапиро, Н.М. Матченко и др. [1; 2; 32; 52]. Одной из основных работ в области разномодульной теории упругости является монография С.А. Амбарцумяна [3], которая посвящена изложению общей теории упругости материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию, и в которой также рассматривается теория оболочек из разномодульного материала.

На основе этих работ разномодульная теория упругости получила свое развитие в различных направлениях. Модификации определяющих соотношений посвящены работы Берта [62], Джонса [89], Ломакина [27–29] и др. [67; 110; 130]. Работы [116; 136] посвящены получению аналитических решений. Для описания слоистых композитов может использоваться рас-

ширение теории оболочек и пластин на многослойные материалы. На основе работ Строха [122; 123] предложена модель, описывающая анизотропную пластину с линейной упругостью [87]. Общий обзор разномодульной теории упругости и способы построения определяющих уравнений приведен в работах И.Ю. Цвелодуба [50; 51].

Помимо обратимого деформирования различное поведение материалов при растяжении и сжатии также оказывает значительное влияние при необратимых процессах деформирования таких как ползучесть. Моделированию деформирования и исследованию ползучести в разномодульных материалах посвящены работы А.А. Буренина и В.М. Ярушиной [13; 53]. Моделирование ползучести в металлических изделиях и в разносопротивляющихся сплавах, а также особенности численных решений методом конечных элементов рассмотрены в работах А.И. Олейникова, С.Н. Коробейникова и К.С. Бормотина [39; 40]. В работе [23] предложен алгоритм численного решения задач ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии. В работе рассматриваются трехмерные задачи для численного решения которых используется метод конечных элементов с восьмиузловыми конечными элементами с трилинейной аппроксимацией геометрии и перемещений по их значениям в узловых точках элемента. Расчеты с учетом разного сопротивления при кручении стержней и моделирование пластин учитывающее упрочнение материала представлены в работах И.А. Банищиковой [8; 9].

Для улучшения устойчивости тканых композитов к повреждениям и расслаиванию были разработаны многослойные структуры с трехмерной архитектурой волокон, что привело к необходимости построения трехмерной конечно-элементной модели для изучения характеристик этой новой структуры. Для анализа таких структур методом конечных элементов были предложены различные подходы. Например, в работе [124] авторы используя различные методы осреднения, предложили типы конечных элементов, позволяющие описать элементарные ячейки со сложной структурой плетения. В работе [55] автор предлагает ввод в конечный элемент дополнительных параметров, описывающих объем жгута в элементе и его углы наклона. В другой работе [111] были предложены новые типы конеч-

ных элементов для моделирования пластин, а также исследовано влияние количества слоев и типов элементов для моделирования одной элементарной ячейки. Также разработаны модели для использования в пакетах конечноэлементных расчетов Abaqus [56; 112] и ANSYS [109].

1.2 Обобщенный реологический метод

Как уже отмечалось выше, важной особенностью композитных материалов является их различное поведение при растяжении и сжатии, т.е. свойства разносопротивляемости и разнопрочности, и в случае моделирования композитных материалов данными свойствами нельзя пренебрегать. Для этого применим обобщенный реологический метод.

Реология – это наука о деформациях и текучести вещества, изучающая свойства реальных тел [44]. Реология рассматривает действующие на тело механические напряжения и вызываемые ими деформации, как обратимые, так и остаточные. Реологический метод позволяет описывать напряженное состояние сред с различными механическими свойствами. Он позволяет строить математические модели, обладающие удовлетворительной точностью описания количественных характеристик и имеющие хорошую математическую структуру [31]. Как правило, для моделей, полученных с помощью реологического метода, могут быть исследованы вопросы разрешимости основных краевых задач и достаточно просто строятся эффективные алгоритмы численной реализации.

Напомним основные определения механики деформируемого твердого тела и реологии. Основной задачей реологии является установление зависимости между механическими напряжениями σ и деформациями ε , и их изменениями во времени t .

Деформацией твердого тела называется изменение взаимного положения частиц тела, связанное с их перемещением друг относительно друга за счет приложения усилия, при котором происходит изменение размеров тела или его объема. В деформированном теле возникают упругие силы,

которые уравнивают внешние силы, вызывающие деформацию. Мемой деформации может служить относительная деформация, равная $\frac{\delta l}{l}$, где δl и l – абсолютное изменение и первоначальное значение величины, характеризующей форму или размер тела [48]. Простейшей деформацией является одноосное растяжение или сжатие – увеличение или уменьшение длины тела под действием внешней растягивающей или сжимающей силы.



Рисунок 1.1 — Схема упругой среды

В традиционном реологическом методе используются следующие реологические элементы: упругая пружина, вязкий демпфер и пластический шарнир, описывающая упругие, вязкие и пластические свойства материала соответственно. Уравнение $f(\sigma, \varepsilon, t) = 0$ называется реологическим уравнением состояния. Простейшими реологическими уравнениями состояния являются линейные соотношения между деформацией и напряжением. Для линейных вязкоупругих сред деформации и скорости деформирования также пропорциональны напряжениям, но связь между этими величинами выражается не постоянными коэффициентами, а некоторыми функциями времени. Это приводит к различным временным эффектам. К их числу относятся ползучесть и релаксация. Для упругих тел реологическим уравнением состояния является закон Гука:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

которому соответствует реологическая схема, состоящая из одной упругой пружины, изображенная на рисунке 1.1.

Поведение материала, которое объединяет в себе свойства упругости и вязкости, называется вязкоупругим. Реологическая схема, соответствующая такому поведению, состоит из пружин и демпферов. Простейшими вязкоупругими моделями являются модели Максвелла и Кельвина-Фойгта. Модели Максвелла соответствует схема изображена на рисунке 1.2. При

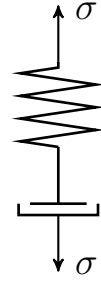


Рисунок 1.2 — Модель Максвелла

постоянном напряжении, среда будет деформироваться с постоянной скоростью, а при быстром нагружении $\sigma = \sigma_0$ в среде возникнет деформация σ_0/E . Математическая зависимость между деформацией ε и напряжением σ , характеризуется уравнением

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu}, \quad (1.1)$$

где μ — коэффициент вязкости.

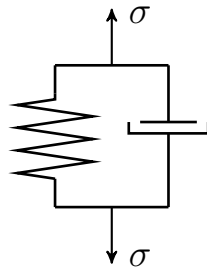


Рисунок 1.3 — Модель Кельвина-Фойгта

При параллельном соединении вязкого демпфера и упругой пружины получается схема соответствующая модели Кельвина-Фойгта. Уравнение связывающее деформации и напряжения в модели Кельвина-Фойгта имеет следующий вид:

$$\sigma = E\varepsilon + \mu \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (1.2)$$

а реологическая схема изображена на рисунке 1.3.

Реологический метод также является основой феноменологического подхода к описанию напряженно-деформированного состояния сред со сложными механическими свойствами, но поскольку традиционные реологические элементы (пружина, вязкий демпфер, пластический шарнир)

не способны описать различное сопротивление среды растяжению и сжатию или учесть разные пределы прочности. В работе [45] В.М. Садовский предлагает использование жесткого контакта. На рисунке 1.4 изображено обозначение жесткого контакта в реологической схеме. Данному элементу соответствует сыпучая среда с абсолютно жесткими частицами: при растяжении частицы не контактируют между собой и напряжение в среде равно нулю, а при сжатии напряжения могут быть произвольными, но деформация равна нулю.

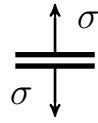


Рисунок 1.4 — Жесткий контакт

Выпишем определяющие соотношения для данного элемента:

$$\sigma \leq 0, \quad \varepsilon \geq 0, \quad \sigma \varepsilon = 0. \quad (1.3)$$

Эти неравенства исключают растягивающие напряжения и сжимающие деформации, а из условия дополненности следует, что одна из величин (напряжение или деформация) равна нулю.

Можно заметить, что определяющие соотношения (1.4) не являются механически корректными и не позволяют определить деформацию по заданному напряжению, и наоборот, напряжение по заданной деформации. Эту некорректность устраним далее при построении реологической схемы волокнистого композита.

Покажем, что система (1.3) может быть приведена к двум эквивалентным между собой вариационным неравенствам [45]:

$$\sigma(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \leq 0, \quad \varepsilon, \tilde{\varepsilon} \geq 0; \quad (\tilde{\sigma} - \sigma)\varepsilon \leq 0, \quad \sigma, \tilde{\sigma} \leq 0. \quad (1.4)$$

Пусть для σ и ε выполняются соотношения (1.3). Рассмотрим два случая: $\sigma < 0, \varepsilon = 0$ и $\sigma = 0, \varepsilon \geq 0$. В первом случае $(\tilde{\sigma} - \sigma)\varepsilon = 0$, а $\sigma(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \leq 0$ поскольку $\sigma \tilde{\varepsilon} \leq 0$. Во втором случае $\sigma(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) = 0$, а $(\tilde{\sigma} - \sigma)\varepsilon \leq 0$ поскольку $\tilde{\sigma}\varepsilon \geq 0$. Обратно, если выполняются неравенства (1.10), то в

силу произвольности вариаций деформации и напряжения либо $\sigma = 0$, либо $\varepsilon = 0$.

Определяющие соотношения для среды с абсолютно жесткими частицами также могут быть представлены следующим соотношением:

$$\sigma \in \partial\Phi(\varepsilon), \quad (1.5)$$

где $\Phi(\varepsilon)$ – потенциал напряжений, который в данном случае равен индикаторной функции конуса $C = \{\varepsilon \mid \varepsilon \geq 0\}$:

$$\delta_C(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon \in C, \\ +\infty, & \text{если } \varepsilon \notin C. \end{cases} \quad (1.6)$$

Потенциал деформаций $\Psi(\sigma)$ является индикаторной функцией конуса $K = \{\sigma \mid \sigma \leq 0\}$:

$$\delta_K(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma \in K, \\ +\infty, & \text{если } \sigma \notin K, \end{cases} \quad (1.7)$$

с включением

$$\varepsilon \in \partial\Psi(\sigma). \quad (1.8)$$

Для моделирования волокнистого композита более податливого при сжатии и жесткой при растяжении требуется использование жесткого контакта с обратным включением в реологическую схему. Такое включение жесткого контакта соответствует поведению гибкой нерастяжимой нити, которая не сопротивляется сжатию и не деформируется при растяжении. Реологическая схема показана на рисунке 1.5, а определяющие соотношения при одноосном растяжении-сжатии совпадают с соотношениями, описывающими прямое включение с точностью до перемены знаков:

$$\sigma \geq 0, \quad \varepsilon \leq 0, \quad \sigma\varepsilon = 0. \quad (1.9)$$

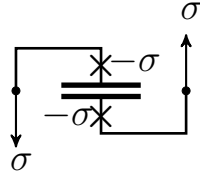


Рисунок 1.5 — Жесткий контакт с обратным включением

Запишем вариационные неравенства для обратного включения жесткого контакта аналогичные (1.4):

$$\sigma(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) \geq 0, \quad \varepsilon, \tilde{\varepsilon} \leq 0; \quad (\sigma - \tilde{\sigma})\varepsilon \geq 0, \quad \sigma, \tilde{\sigma} \geq 0. \quad (1.10)$$

Покажем, что из (1.9) следует (1.10). Также рассмотрим два случая: $\sigma > 0, \varepsilon = 0$ и $\sigma = 0, \varepsilon \leq 0$. В первом случае $(\sigma - \tilde{\sigma})\varepsilon = 0$, а $\sigma(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) \geq 0$ поскольку $\sigma(-\tilde{\varepsilon}) \geq 0$. Во втором случае $\sigma(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) = 0$, а $(\sigma - \tilde{\sigma})\varepsilon \geq 0$ поскольку $-\tilde{\sigma}\varepsilon \geq 0$. Обратно, если выполняются неравенства (1.10), то в силу произвольности вариаций деформации и напряжения либо $\sigma = 0$, либо $\varepsilon = 0$.

Определяющие уравнения напряженно-деформированного состояния упругих композитов в терминах конечных линейных или нелинейных соотношений между тензорами напряжений σ и деформаций ε должны иметь потенциальное представление:

$$\sigma = \frac{\partial \Phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\partial \Psi(\sigma)}{\partial \sigma}. \quad (1.11)$$

здесь Φ и Ψ – это упругие потенциалы напряжений и деформаций, связанные между собой через преобразование Юнга:

$$\Psi(\sigma) = \sup_{\varepsilon} (\sigma : \varepsilon - \Phi(\varepsilon)), \quad (1.12)$$

$$\Phi(\varepsilon) = \sup_{\sigma} (\sigma : \varepsilon - \Psi(\sigma)), \quad (1.13)$$

где двоеточие обозначает двойную свертку тензоров.

Рассмотрим реологическую схему, описывающую поведение волокнистого композита. Будем предполагать, что в рассматриваемом диапазоне деформаций волокна не проскальзывают относительно матрицы и вслед-

ствие своих свойств и размеров не влияют на свойства композита при сжатии. В таком случае напряженно-деформированное состояние при сжатии описывается только модулями упругости матрицы, а при растяжении композит приобретает дополнительную жесткость за счет жесткости волокон. Такому поведению будет соответствовать схема, приведенная на рисунке 1.6, где σ — тензор действительных напряжений, σ' — тензор дополнительных напряжений, a — тензор модулей упругости при сжатии, b — тензор дополнительных модулей при растяжении.

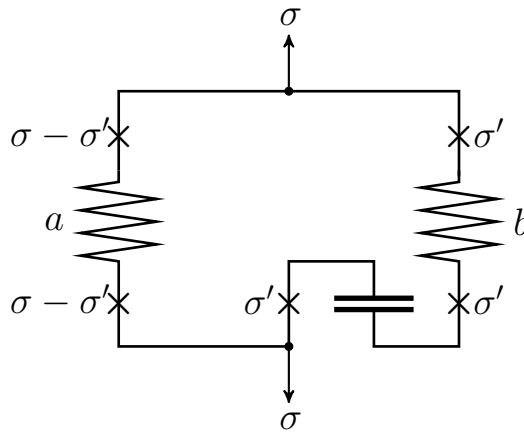


Рисунок 1.6 — Реологическая схема волокнистого композита

Рассмотрим случай одноосного растяжения-сжатия. Жесткий контакт сжимается ($-\sigma' < 0$) при растягивающем напряжении $\sigma > 0$. При сжимающем напряжении $\sigma < 0$ жесткие контактные пластины раздвигаются, поэтому напряжение σ' оказывается равным нулю. Сопротивление сжатию материала полностью определяется модулем упругости a , соответствующего матрице композита. При растяжении оба упругих элемента деформируются. Модуль упругости b характеризует дополнительное сопротивление растяжению, обусловленное действием волокон.

Получим определяющие уравнения общего вида, исходя из реологической схемы, изображенной на рисунке 1.6. Для тензора действительных напряжений σ , тензора дополнительных напряжений σ' и тензора собственных деформаций жесткого контакта ε' выполняются следующие уравнения:

$$\sigma - \sigma' = a : \varepsilon, \quad \sigma' = b : (\varepsilon - \varepsilon'). \quad (1.14)$$

Для жесткого контакта вариационное неравенство примет следующий вид:

$$\sigma' : \delta\varepsilon' \leq 0, \quad \varepsilon', \varepsilon' + \delta\varepsilon' \in C, \quad (1.15)$$

где $\delta\varepsilon'$ – произвольная допустимая вариация тензора деформаций ε' , C – конус в пространстве деформаций, который строится исходя из направлений волокон армирования. Конус строится в виде объединения полупространств пространства деформаций, определяемых направлениями волокон армирования и включает в себя все возможные деформированные состояния, при которых волокна не растягиваются. Для однонаправленного волокнистого композита с направлением укладки волокон n конус C равен:

$$C = \{\varepsilon \mid n \cdot \varepsilon \cdot n \leq 0\}. \quad (1.16)$$

В случае двухслойного композита с двумя направлениями армирования n и τ :

$$C = \{\varepsilon \mid n \cdot \varepsilon \cdot n \leq 0, \quad \tau \mid n \cdot \tau \cdot n \leq 0\}. \quad (1.17)$$

Подставив (1.14) в (1.15) получим вариационное неравенство

$$(\varepsilon' - \varepsilon) : b : \delta\varepsilon' \geq 0, \quad (1.18)$$

которое показывает, что тензор ε' является проекцией тензора ε на конус C по норме $|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon : b : \varepsilon}$. Обозначив проекцию как $\Pi(\varepsilon)$, получим определяющее уравнение общего вида:

$$\sigma = a : \varepsilon + b : (\varepsilon - \Pi(\varepsilon)). \quad (1.19)$$

Если деформация принадлежит конусу C , т.е. волокна армирования не растягиваются, то $\Pi(\varepsilon) = \varepsilon$ и уравнение (1.19) превращается в уравнение линейной теории упругости $\sigma = a : \varepsilon$. Если $\Pi(\varepsilon) = 0$, то уравнение (1.19) принимает вид $\sigma = (a + b)$ и учитывает повышение жесткости композита за счет растяжения волокон.

Покажем, что определяющее уравнение (1.19) представимо в потенциальной форме со следующим потенциалом напряжений:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon : a : \varepsilon + \frac{1}{2}(\varepsilon - \Pi(\varepsilon))^2. \quad (1.20)$$

Согласно формуле дифференцирования для оператора проектора [45]

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\varepsilon - \Pi(\varepsilon))^2 = 2b : (\varepsilon - \Pi(\varepsilon)),$$

следовательно

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = a : \varepsilon + b : (\varepsilon - \Pi(\varepsilon)),$$

что в точности равно (1.19). Выпишем потенциал деформаций, получить который можно с помощью преобразования двойственности:

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma : a^{-1} : \sigma - \frac{1}{2}\|\pi(\bar{\sigma})\|^2,$$

где $\pi(\bar{\sigma})$ – проекция тензора условных напряжений $\bar{\sigma}$ на конус, сопряженный к конусу C по норме $\|\sigma\|^2 = \sigma : (a^{-1} + b^{-1}) : \sigma$.

Существование потенциалов является существенным преимуществом обобщенного реологического метода построения определяющих уравнений, поскольку это гарантирует термодинамическую корректность полученных уравнений. Полученные определяющие уравнения позволяют получать устойчивые вычислительные процедуры для решения краевых задач квазистатического состояния и динамического деформирования волокнистых композитов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию.

1.3 Выводы по главе 1

Данная глава посвящена обзору моделей композитных материалов. Анализ литературы показывает, что построение определяющих уравнений для волокнистых композитов с различным сопротивлением сжатию и рас-

тяжению относится к проблемам, не решенным как в прикладном, так и в теоретическом плане. Особенность этой задачи состоит в том, что определяющие уравнения должны адекватно описывать имеющиеся экспериментальные данные по сжатию и растяжению образцов, а также должны быть представимы в потенциальном виде, таким образом гарантируя выполнение фундаментальных принципов термодинамики. В разделе 1.2 описан обобщенный реологический метод, который был разработан ранее для описания разнопрочных и зернистых сред. Применение обобщенного реологического метода к композитам позволяет строить определяющие уравнения, удовлетворяющие требуемым критериям и приводит к простым математическим моделям, способным к эффективной численной реализации на основе метода конечных элементов.

Глава 2. Сильный изгиб балки

2.1 Уточненное уравнение Эйлера

В классической механике широко известна задача о стационарных профилях упругой балки. Эту задачу впервые рассмотрел Леонард Эйлер и описал возможные стационарные профили, которые впоследствии назвали эластиками Эйлера. Для получения классического уравнения эластичности Эйлера, описывающего плоский изгиб тонкой гибкой балки прямоугольного сечения при произвольном прогибе, воспользуемся вариационным принципом Лагранжа. В соответствии с этим принципом состояние равновесия балки минимизирует на множестве вариаций, согласованных с главными краевыми условиями, интегральный функционал упругой энергии

$$J(x, y, \theta) = \int_0^l \left(\frac{1}{2} D(s) |\theta'|^2 - \mu g y \right) ds - F_x x(l) - F_y y(l) - M \theta(l). \quad (2.1)$$

Здесь l – длина балки; μ – погонная масса; g – ускорение свободного падения; F_x и F_y – проекции вектора изгибающей силы, приложенной к правому концу: $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = F \sin \alpha$; M – изгибающий момент; D – изгибная жесткость, зависящая, вообще говоря, от длины дуги s , где штрих означает производную по s . Для простоты левый конец балки будем считать закрепленным. Угол наклона $\theta(s)$ оси балки и координаты $x(s)$, $y(s)$ точки на оси не являются независимыми функциями. Они удовлетворяют геометрическим ограничениям:

$$x' = \cos \theta, \quad y' = \sin \theta. \quad (2.2)$$

Сформулируем граничные условия в следующем виде:

$$\theta(0) = x(0) = y(0) = 0,$$

означающие, что левый конец балки жестко закреплен. Это главные условия вариационной задачи, которым подчиняются варьируемые функции. Естественные граничные условия на правом конце получим в результате минимизации интеграла.

В основе рассматриваемой математической модели лежит предположение о том, что при сильном изгибе балки углы поворота линейных элементов конечные, а деформации малые, поэтому в соответствии с законом Гука изгибающий момент пропорционален кривизне: $m = D\varpi$ ($\varpi = \theta'$). Таким образом, вариационный принцип (2.1) соответствует физически линейной, но геометрически нелинейной модели изгиба гибкой балки.

Задача условной минимизации (2.1), (2.2) эквивалентна задаче о безусловном минимуме лагранжиана

$$L(x, y, \theta) = J(x, y, \theta) - \int_0^l \lambda_x (x' - \cos \theta) ds - \int_0^l \lambda_y (y' - \sin \theta) ds, \quad (2.3)$$

где $\lambda_x(s), \lambda_y(s)$ – множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (2.2). Варьируя функционал (2.3) по трем независимым аргументам, получим следующие уравнения:

$$(D(s) \theta')' = -\lambda_x \sin \theta + \lambda_y \cos \theta, \quad \lambda'_x = 0, \quad \lambda'_y = \mu g$$

и граничные условия на правом конце:

$$D(l) \theta'(l) = M, \quad \lambda_x(l) = -F_x, \quad \lambda_y(l) = -F_y.$$

Отсюда следует, что угол наклона оси балки является решением краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$(D(s) \theta')' = F \sin(\theta - \alpha) + \mu g (s - l) \cos \theta, \quad \theta(0) = 0, \quad D(l) \theta'(l) = M. \quad (2.4)$$

Форма упругой линии определяется через решение задачи (2.3) по уравнениям (2.2) с учетом граничных условий на левом конце.

Рассмотрим балку, изготовленную из однонаправленного волокнистого композита, с волокнами, расположенными вдоль балки. При изгибе балки деформация волокна по толщине распределяется линейно относительно некоторой линии в которой отсутствуют деформации. Найдем положение этой линии. Запишем выражение для деформации при изгибе балки:

$$\varepsilon = \frac{(R+z)d\phi - Rd\phi}{Rd\phi} = \frac{z}{R}. \quad (2.5)$$

В линейном приближении (2.5) примет вид

$$\varepsilon = -zw'', \quad (2.6)$$

где $w(x)$ — прогиб балки. Так как модули Юнга при растяжении E^+ и при сжатии E^- различны, то для напряжения σ справедливо следующее выражение:

$$\sigma = \begin{cases} -zw''E^+, & z \geq 0; \\ -zw''E^-, & z < 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Из условия равенства нулю продольных усилий находим

$$\int_0^{h_+} \sigma dz + \int_{-h_-}^0 \sigma dz = 0, \quad (2.8)$$

откуда следует, что:

$$E^+h_+^2 = E^-h_-^2, \quad (2.9)$$

где h_+ и h_- — толщина растягиваемой и сжимаемой части балки, а $h_+ + h_- = h$ — суммарная толщина балки. Из (2.9) получим

$$h_- = \sqrt{\frac{E^+}{E^-}}h_+, \quad h_+ \left(1 + \sqrt{\frac{E^+}{E^-}}\right) = h. \quad (2.10)$$

Отсюда

$$h_+ = \frac{\sqrt{E^-}h}{\sqrt{E^-} + \sqrt{E^+}}, \quad h_- = \frac{\sqrt{E^+}h}{\sqrt{E^-} + \sqrt{E^+}}. \quad (2.11)$$

Заметим, что эти толщины не зависят от кривизны балки, то есть от координаты x .

Для момента справедливо выражение:

$$M = \int_0^{h_+} \sigma z dz + \int_{-h_-}^0 \sigma z dz = -D\omega'', \quad (2.12)$$

где D — изгибная жесткость балки. Вынеся за скобки функцию изгиба, получим

$$D = \frac{E^+ h_+^3}{3} + \frac{E^- h_-^3}{3}. \quad (2.13)$$

2.2 Нейтральная линия в балке

Рассмотрим неоднородную по толщине балку. Пусть балка состоит из n слоев с известными модулями упругости для сжатия и растяжения. Слои абсолютно жестко связаны друг с другом и представляют из себя однонаправленный волокнистый композит. Покажем существование и единственность нейтральной линии. Пусть нейтральная линия проходит через $z_0 \in [0, h]$. Рассмотрим напряжение в произвольном сечении балки:

$$\sigma(z) = \begin{cases} E^+(z)\varepsilon(z), & \text{если } z \geq z_0, \\ E^-(z)\varepsilon(z), & \text{если } z < z_0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Деформация в точке z равна

$$\varepsilon(z) = \frac{z - z_0}{R}.$$

Поскольку балка находится в статическом состоянии, продольные усилия равны нулю. Введем в рассмотрение функцию $f(z_0)$ равную интегралу напряжений по толщине балки в зависимости от расположения нейтральной

ЛИНИИ:

$$f(z_0) = \int_0^h \sigma(z) dz = \int_0^{z_0} E^- \frac{z - z_0}{R} dz + \int_{z_0}^h E^+ \frac{z - z_0}{R} dz. \quad (2.15)$$

Покажем, что данная функция имеет единственное нулевое значение на отрезке $[0; h]$.

$$f(0) = \int_0^h E^+ \frac{z}{R} dz = E^+ \frac{h^2}{2R} > 0, \quad (2.16)$$

$$f(h) = \int_0^h E^- \frac{z - h}{R} dz = -E^- \frac{h^2}{2R} < 0, \quad (2.17)$$

$$f'(z_0) = \left(-\frac{E^-}{2R} z_0^2 + \frac{E^+}{2R} (z_0 - h)^2 \right)' = -\frac{E^-}{R} z_0 + \frac{E^+}{R} (z_0 - h) < 0. \quad (2.18)$$

Функция на концах отрезка принимает значения разных знаков, производная функции меньше нуля на всем отрезке и функция монотонно убывает на $[0; h]$, следовательно, $f(z_0)$ принимает нулевое значение в единственной точке на $[0; h]$. Так выражения (2.16)-(2.18) показывают, что при $E^+ > E^- > 0$ возможно единственное расположение нейтральной линии.

Теперь найдем положение нейтральной линии в многослойной балке. Для каждого слоя определим границы слоя (z_{i-1}, z_i) и модули упругости $E_i^+, E_i^-, i = 1 \dots n$. Пусть нейтральная линия находится в k -том слое, тогда выражение для продольных усилий примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} E_i^- \int_{z_{i-1}}^{z_i} (z - z_0) dz + E_k^- \int_{z_{k-1}}^{z_0} (z - z_0) dz + \\ + E_k^+ \int_{z_0}^{z_k} (z - z_0) dz + \sum_{i=k+1}^n E_i^+ \int_{z_{i-1}}^{z_i} (z - z_0) dz = 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем каждое слагаемое по отдельности:

$$\sum_{i=1}^{k-1} E_i^- \int_{z_{i-1}}^{z_i} (z - z_0) dz = \sum_{i=1}^{k-1} E_i^- \left(\frac{z_i^2 - z_{i-1}^2}{2} - z_0(z_i - z_{i-1}) \right),$$

$$E_k^- \int_{z_{k-1}}^{z_0} (z - z_0) dz = E_k^- \left(-\frac{z_0^2}{2} - \frac{z_{k-1}^2}{2} + z_0 z_{k-1} \right),$$

$$E_k^+ \int_{z_0}^{z_k} (z - z_0) dz = E_k^+ \left(\frac{z_0^2}{2} + \frac{z_k^2}{2} - z_0 z_k \right),$$

$$\sum_{i=k+1}^n E_i^+ \int_{z_{i-1}}^{z_i} (z - z_0) dz = \sum_{i=k+1}^n E_i^+ \left(\frac{z_i^2 - z_{i-1}^2}{2} - z_0(z_i - z_{i-1}) \right).$$

Полученное выражение является квадратным уравнением относительно z_0 :

$a_k z_0^2 + b_k z_0 + c_k = 0$, где

$$a_k = \frac{-E_k^- + E_k^+}{2},$$

$$b_k = \sum_{i=1}^{k-1} -E_i^-(z_i - z_{i-1}) + E_k^- z_{k-1} - E_k^+ z_k + \sum_{i=k+1}^n -E_i^+(z_i - z_{i-1}),$$

$$c_k = \sum_{i=1}^{k-1} E_i^- \left(\frac{z_i^2 - z_{i-1}^2}{2} \right) - E_k^- \frac{z_{k-1}^2}{2} + E_k^+ \frac{z_k^2}{2} + \sum_{i=k+1}^n E_i^+ \left(\frac{z_i^2 - z_{i-1}^2}{2} \right).$$

Из доказанного выше следует, что только для одного k уравнение будет иметь решение принадлежащее отрезку $[0; h]$. Таким образом, для всех n существует единственное k , при котором решение

$$z_0 = \frac{-b_k \pm \sqrt{b_k^2 - 4a_k c_k}}{2a_k}$$

принадлежит отрезку $[0; h]$.

Теперь найдем максимальную жесткость балки, которую можно получить при перестановке слоев волокнистого композита. Пусть балка состоит из n слоев и для каждого слоя заданы его границы (z_i, z_{i+1}) , а также модули

упругости E^+ и E^- . Для каждой возможной перестановки слоев определим положение нейтральной линии z_0 и номер слоя k , в котором она находится. Зная положение нейтральной линии вычислим изгибную жесткость балки по формуле:

$$D = \int_0^{z_0} E^- z^2 dz + \int_{z_0}^h E^+ z^2 dz.$$

Проинтегрировав по каждому слою отдельно получим следующее выражение:

$$D = \sum_{i=1}^k E_i^- \frac{(z_{i+1} - z_i)^3}{3} + E_k^- \frac{(z_0 - z_k)^3}{3} + E_k^+ \frac{(z_{k+1} - z_0)^3}{3} + \sum_{i=k+1}^n E_i^+ \frac{(z_{i+1} - z_i)^3}{3}.$$

Таблица 2.1

Характеристики отдельных слоев

Слой	E^+ , ГПа	E^- , ГПа
1	80	40
2	100	50
3	120	60
4	140	70
5	160	80
6	180	90
7	80	64
8	100	80
9	120	96
10	140	112
11	160	128
12	180	144

Для демонстрации работы программы была решена модельная задача по нахождению максимальной изгибной жесткости, получаемой путем перестановки слоев из композита с различными характеристиками. Рассматривались слои толщиной 1 мм, для которых в таблице 2.1 перечислены модули Юнга при растяжении и сжатии.

В 2.2 приведены результаты вычислительных экспериментов по нахождению положения нейтральной линии при изгибе балки, состоящей из

Максимальная расчетная жесткость

Слои	Порядок слоев	Изгибная жесткость
1,2,3,4,5,6	(1, 2, 3, 4, 5, 6)	0.18
7,8,9,10,11,12	(11, 9, 8, 12, 10, 7)	0.23
4,5,6,10,11,12	(12, 11, 10, 6, 5, 4)	0.27
1,2,3,7,8,9	(9, 8, 7, 3, 2, 1)	0.17

слоев различных композитных материалов: для каждого из наборов слоев получено максимально возможное значение изгибной жесткости D и соответствующий этому значению порядок слоев.

2.3 Обратная коэффициентная задача

Для того чтобы показать необходимость учета различного сопротивления растяжению и сжатию решим обратную задачу по определению модуля упругости волокнистого композитного материала при сжатии, считая, что модуль упругости композита при растяжении известен из физического эксперимента. Один из надежных способов определения модуля упругости при сжатии связан с задачей сильного изгиба тонкой длинной балки. Сопоставляя расчетные данные с измеренным прогибом балки, можно подобрать наиболее подходящее значение жесткости балки на изгиб, что позволяет однозначно определить искомый модуль упругости при сжатии. Этот метод был использован для анализа разносопротивляемости углепластиков — волокнистых композитов на основе эпоксидной матрицы с углеродными волокнами, применяемых в аэрокосмической промышленности.

Была проведена серия экспериментов [58] для получения изображений консольно закрепленной балки изогнутой под действием груза на свободном конце. Полученные фотографии обрабатывались для получения плоской проекции, после чего положение балки оцифровывалось. Данные о прогибе по длине балки использовались при решении обратной задачи определения изгибной жесткости D (жесткость считалась постоянной) по

методу наименьших квадратов. С помощью встроенных функций Matlab была решена задача минимизации среднеквадратичного отклонения:

$$\delta^2 = \sum_{k=1}^m |y(x_k) - \bar{y}_k|^2 \rightarrow \min_D!$$

Здесь $y(x_k)$ – расчетные значения прогиба балки в заданной системе точек по горизонтальной оси x_1, x_2, \dots, x_m ; \bar{y}_k – измеренные (оцифрованные) значения прогиба в этих же точках. Прямое решение задачи проводилось на основе уравнения эластики Эйлера:

$$(D\theta')' = F \sin(\theta - \alpha) + \mu g(s - l) \cos \theta \quad (2.19)$$

с граничными условиями

$$\theta(0) = 0, \quad D(l)\theta'(l) = M. \quad (2.20)$$

Здесь l – длина балки; μ – погонная масса; g – ускорение свободного падения; F – модуль вектора изгибающей силы, приложенной к правому концу, M – изгибающий момент; D – изгибная жесткость, где штрих означает производную по s , $x' = \cos \theta$, $y' = \sin \theta$, $x(0) = y(0) = 0$.

При решении краевой задачи (2.19), (2.20) предполагалось, что изгибная жесткость D произвольная, но одинаковая по всей длине балки. Для численного решения краевой задачи была использована разностная схема второго порядка точности. Введем вдоль оси балки равномерную сетку $s_j = (j + 1/2)\Delta s$ из n узлов с шагом $\Delta s = l/(n - 0.5)$. Приближим нелинейную правую часть уравнения с помощью одной итерации метода Ньютона. В качестве начального приближения возьмем безизгибное состояние балки с узловыми значениями угла наклона $\theta_j = 0$ или изгибное состояние с линейным распределением угла вдоль оси балки. Новое приближение θ^j определим через предыдущее θ_j из системы линеаризованных уравнений ($j = 1, \dots, n - 1$):

$$D_{j+1/2}(\theta^{j+1} - \theta^j) - D_{j-1/2}(\theta^j - \theta^{j-1}) = C_j (f(\theta_j) + (\theta^j - \theta_j) f_1(\theta_j)) ds^2 +$$

$$+\mu g(s_j - l)(\cos \theta_j - (\theta^j - \theta_j) \sin \theta_j) ds^2,$$

где $f(\theta)$ — правая часть уравнения (2.19), f_1 — первая производная от f по θ . В совокупности с граничными условиями

$$\theta^0 = 0, \quad D_{n+1/2}(\theta^{n+1} - \theta^n) = M \Delta s$$

эта система была решена методом трехдиагональной прогонки. В качестве критерия останова было использовано условие $\max |\theta^j - \theta_j| \leq \varepsilon \max |\theta^j|$, в котором ε — заданная погрешность вычислений. Согласно расчетам, из-

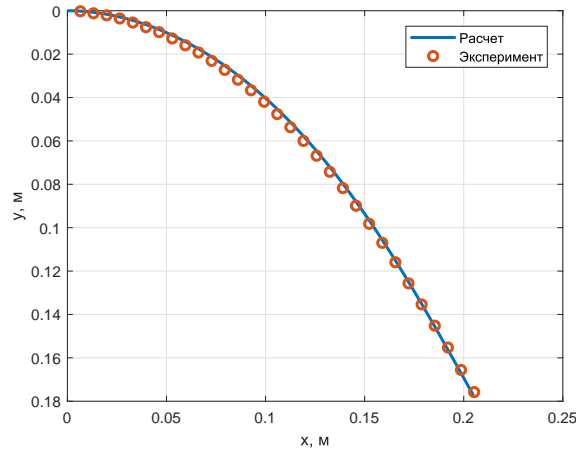


Рисунок 2.1 — Изгибное состояние балки

гибная жесткость, минимизирующая среднеквадратичное отклонение по системе из $m = 30$ равноотстоящих точек, для рассматриваемой балки равна $D = 0.0288 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$. Сравнение упругой линии, полученной после расчетов, с результатами измерений изображено на рисунке 2.1.

При расчетах изгиба выбиралось равным $\varepsilon = 10^{-7}$. Для достижения такой точности требовалось 5 итераций метода Ньютона. В теории изгиба разномодульных балок изгибная жесткость и модули Юнга на растяжение E^+ и на сжатие E^- связаны между собой следующими уравнениями:

$$h_+ = \frac{\sqrt{E^-} h}{\sqrt{E^-} + \sqrt{E^+}}, \quad h_- = \frac{\sqrt{E^+} h}{\sqrt{E^-} + \sqrt{E^+}},$$

$$D = \frac{E^+ h_+^3}{3} + \frac{E^- h_-^3}{3}, \quad (2.21)$$

где h_+ – высота растягиваемой части сечения балки, h_- – высота сжимаемой части. Из уравнений (2.21) по уже найденным D и E^+ было получено значение $E^- = 56.8 \text{ ГПа}$, которое составляет 49.8 % от E^+ . Таким образом, рассматриваемый композитный материал является существенно разномодульным. Дополнительные расчеты показали, что если принять модуль Юнга на сжатие равным экспериментальному модулю на растяжение, то это приведет к заниженному значению прогиба. Величина относительной ошибки при этом составит 16%.

Для проверки достоверности полученного значения изгибной жесткости была выполнена большая серия экспериментов по изгибу более коротких и более длинных балок из того же композита. В таблице А.1 приведены результаты лабораторных измерений стрелы консольного прогиба w балки, длина которой равна l , толщина 1.16 мм, ширина 2.86 мм, под действием силы P .

В другой серии экспериментов проводился консольный изгиб балки длиной $l = 400$ мм, шириной 2.86 мм при фиксированной силе $P = 0.6$ Н для балок различной толщины h . Результаты представлены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

Результаты лабораторных измерений стрелы консольного прогиба балок различной толщины

Эксперимент	1	2	3	4
h , мм	0.739	0.761	1.1	1.16
w , мм	327.5	300	257	239
w_{calc} , мм	335	331	267	253
δ	0.0229	0.1033	0.0389	0.0585

2.4 Выводы по главе 2

Во второй главе рассматривается задача изгиба тонкой композитной балки. К анализу изгиба тонкой балки из волокнистого композита применяется обобщенное уравнение эластичности Эйлера, учитывающее разное сопро-

тивление материала растяжению и сжатию. Разработан вычислительный алгоритм для решения статической задачи изгиба. Доказано существование единственной нейтральной линии при изгибе композитной балки, представлен алгоритм вычисления положения нейтральной линии и максимальной изгибной жесткости, получаемой перестановкой слоев многослойной композитной балки. Описана методика определения феноменологических параметров композита на основе фотосъемки изгибного состояния стержня под действием системы сил и моментов сил, а также методика решения обратной коэффициентной задачи. Выполнена валидация методики путем сравнения результатов расчетов с лабораторным физическим экспериментом. Показано, что для углепластика, применяемого в эксперименте, модули упругости при растяжении и при сжатии существенно различаются. Это означает, что использование равных модулей при определении жесткости на изгиб приводит к систематической ошибке в расчетах прогиба.

Глава 3. Плоское напряженное состояние многослойной композитной пластины

3.1 Уравнение плоского напряженного состояния пластины

Рассмотрим плоское напряженное состояние многослойной пластины из волокнистого композита. Для начала получим выражения, связывающие напряжения и деформации. Пусть ось x_1 декартовой системы координат Ox_1x_2 расположена по направлению укладки волокон. Будем считать, что при сжатии материал пластины описывается законом Гука для трансверсально изотропного тела, тогда первое уравнение системы (1.14) можно записать в следующем матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma'_{11} \\ \sigma_{22} - \sigma'_{22} \\ \sigma_{12} - \sigma'_{12} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где E_1 и E_2 – модули Юнга в направлении и перпендикулярно укладке волокон соответственно, ν_1 и ν_2 соответствующие коэффициенты Пуассона, а G модуль сдвига. В обозначениях введенных на схеме на рисунке 1.6 данное выражение связывает тензоры ε и $\sigma - \sigma'$ с помощью тензора модулей упругости матрицы a^{-1} . Поскольку тензор a симметричный и положительно определенный, выпишем ограничения на упругие постоянные:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{E_2}{E_1}, \quad E_1 > \nu_1^2 E_2, \quad E_2 > 0, \quad G > 0. \quad (3.2)$$

При растяжении волокон появляется дополнительное напряжение

$$\sigma'_{11} = b\varepsilon_{11},$$

которое вводится с помощью тензора b . Для того чтобы введенный тензор был невырожденным и положительно определенным введем малые положительные компоненты β и γ , которые впоследствии устремим к нулю. Запишем второе уравнения системы (1.14):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon_{22} - \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon_{12} - \varepsilon'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Конус деформаций C и сопряженный конус напряжений K для случая однонаправленного армирования примут следующий вид:

$$C = \{\varepsilon | \varepsilon_{11} \leq 0\}, \quad K = \{\sigma | \sigma_{11} \geq 0, \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0\}. \quad (3.4)$$

Норма связанная с тензором b будет равна:

$$|\varepsilon| = \sqrt{b\varepsilon_{11}^2 + \beta\varepsilon_{22}^2 + 4\gamma\varepsilon_{12}^2}, \quad (3.5)$$

а проекция тензора ε на конус C вычисляется следующим образом:

$$\Pi_{11} = \begin{cases} 0, & \text{при } \varepsilon_{11} > 0, \\ \varepsilon_{11}, & \text{при } \varepsilon_{11} \leq 0, \end{cases} \quad \Pi_{22} = \varepsilon_{22}, \quad \Pi_{12} = \varepsilon_{12}. \quad (3.6)$$

Подставив полученные выражения в (1.19), получим формулы для вычисления напряжений через деформации:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E_1(\varepsilon_{11} + \nu_2\varepsilon_{22})}{1 - \nu_1\nu_2} + b(\varepsilon_{11} - \Pi_{11}), \\ \sigma_{22} = \frac{E_2(\varepsilon_{22} + \nu_1\varepsilon_{11})}{1 - \nu_1\nu_2}, \\ \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \end{cases} \quad (3.7)$$

со следующим потенциалом напряжений:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1 - \nu_1\nu_2}{2} (E_1\varepsilon_{11}^2 + (\nu_1E_2 + \nu_2E_1)\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + E_2\varepsilon_{22}^2) + 2G\varepsilon_{12}^2 + \frac{b}{2}(\varepsilon_{11} - \Pi_{11})^2. \quad (3.8)$$

Далее выпишем тензор $a^{-1} + b^{-1}$ и представим его в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} + \frac{1}{b} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_2} + \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G} + \frac{1}{2\gamma} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Рассмотрим минор размера 2×2 матрицы $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$:

$$\frac{1}{(b + E_1)(\beta + E_2) - \nu_1\nu_2b\beta} \begin{pmatrix} b(\beta + E_2)E_1 & \nu_1b\beta E_2 \\ \nu_1b\beta E_2 & \beta(\pm E_1)E_2 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Перейдя к пределу при $\beta, \gamma \rightarrow 0$, получим матрицу с единственным ненулевым элементом $bE_1/(b + E_1)$. Таким образом компоненты тензора условных напряжений $\bar{\sigma}$ равны

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{E_1b}{b + E_1} \left(\frac{\sigma_{11}}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_{22}}{E_2} \right), \quad \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{12} = 0. \quad (3.11)$$

Проекцию тензора $\bar{\sigma}$ на конус K определим как

$$\pi_{11} = \begin{cases} \bar{\sigma}_{11}, & \text{при } \bar{\sigma}_{11} > 0, \\ 0, & \text{при } \bar{\sigma}_{11} \leq 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

и выпишем формулы для вычисления деформаций по заданным напряжениям

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - \pi_{11}}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_{22}}{E_2}, \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \nu_1 \frac{\sigma_{11} - \pi_{11}}{E_1}, \\ \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} \end{cases} \quad (3.13)$$

и соответствующий потенциал деформаций

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{11}^2}{E_1} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} + \frac{\nu_2}{E_2} \right) \sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{\sigma_{22}^2}{E_2} \right) + \frac{\sigma_{12}^2}{G} - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{b} \right) \frac{\pi_{11}^2}{2}. \quad (3.14)$$

Теперь рассмотрим пластину из однонаправленного волокнистого композита с волокнами расположенными под углом α к оси x_1 . Определяющие уравнения получим из уравнений (3.7) и (3.13) заменой векторов тензоров напряжений и деформаций в системе координат, связанной с направлением волокон по правилам преобразования тензорных компонент при повороте системы на угол α :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^\alpha \\ \sigma_{22}^\alpha \\ \sigma_{12}^\alpha \end{pmatrix} = (R^\alpha) \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^\alpha \\ \varepsilon_{22}^\alpha \\ \varepsilon_{12}^\alpha \end{pmatrix} = (R^\alpha) \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix},$$

где

$$(R^\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ -\frac{\sin 2\alpha}{2} & \frac{\sin 2\alpha}{2} & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Подставив в первое выражение напряжения, вычисленные через деформации в системе координат, связанной с волокнами, и домножив слева обе части выражения на $R^{-\alpha}$, получим выражение для напряжений в заданной системе координат:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = (R^{-\alpha}) \begin{pmatrix} \frac{E_1(\varepsilon_{11}^\alpha + \nu_2 \varepsilon_{22}^\alpha)}{1 - \nu_1 \nu_2} + b(\varepsilon_{11}^\alpha - \Pi_{11}^\alpha) \\ \frac{E_2(\varepsilon_{22}^\alpha + \nu_1 \varepsilon_{11}^\alpha)}{1 - \nu_1 \nu_2} \\ 2G\varepsilon_{12}^\alpha \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Обратно, вектор компонент тензора деформаций определяется через напряжения следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = (R^{-\alpha}) \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{11}^\alpha - \pi_{11}}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_{22}^\alpha}{E_2} \\ \frac{\sigma_{22}^\alpha}{E_2} - \nu_1 \frac{\sigma_{11}^\alpha - \pi_{11}}{E_1} \\ \frac{\sigma_{12}^\alpha}{2G} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Для многослойной пластины будем считать, что для каждого слоя задан угол армирования и толщина слоя, а слои при деформации не проскальзывают относительно друг друга и деформируются совместно. Пусть α_i и h_i угол армирования и толщина i -го слоя. Обозначим $\sigma^{(i)}$ напряжения заданные в несвязанной с волокнами системе координат, полученные по формуле (5.8). Тогда для всей пластины напряжения можно получить взвешенным суммированием напряжений для каждого слоя:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(i)} \\ \sigma_{22}^{(i)} \\ \sigma_{12}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

где h – общая толщина пластины.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть область Ω с границей Γ совпадает с сечением срединной плоскостью пластины из композитного материала, описанного выше. Граница Γ состоит из части Γ_u , на которой отсутствуют перемещения и не пересекающейся с ней части Γ_σ на которой задана распределенная нагрузка:

$$\begin{cases} u = 0 & \text{на } \Gamma_u, \\ \sigma n = q & \text{на } \Gamma_\sigma. \end{cases} \quad (3.18)$$

Требуется определить векторное поле перемещений $u(x)$ и тензорное поле $\sigma(x)$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\nabla \cdot \sigma = 0, \quad 2\varepsilon(u) = \nabla u + (\nabla u)^*,$$

удовлетворяющих вариационному уравнению

$$\sigma = a : \varepsilon + b : (\varepsilon - \Pi(\varepsilon)) \quad (3.19)$$

и граничным условиям (3.18). Компоненты тензора малых деформаций связаны с перемещениями следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right).$$

Сформулируем вариационные принципы, эквивалентные дифференциальной постановке рассматриваемой задачи. Искомое поле перемещений минимизирует интеграл

$$J(u) = \int_{\Omega} (\Phi(\varepsilon(u))) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} qu d\Gamma \quad (3.20)$$

на линейном пространстве U обобщенных функций $u \in H^1(\Omega)$.

Применим полученные определяющие уравнения к анализу плоского напряженного состояния композитной пластины нагруженной по краю статической самоуравновешенной системой напряжений. Воспользуемся методом начальных напряжений. Для этого заменим определяющее уравнение волокнистого композита в общем виде (3.19) следующей итерационной формулой:

$$\sigma^k = (a + b) : \varepsilon^k - \Delta\sigma^{k-1}, \quad \Delta\sigma^{k-1} = b : \Pi(\varepsilon^{k-1}). \quad (3.21)$$

На первом шаге будем решать задачу для ненапряженной пластины и считать тензор начальных напряжений $\Delta\sigma^0$ тождественно равным нулю. В этом случае тензор модулей упругости принимает значение $a + b$. На следующих шагах тензор $\Delta\sigma^{k-1}$ будем искать с использованием проекции тензора ε^{k-1} . Воспользовавшись вариационным методом Лагранжа, запишем функционал упругой энергии, который с учетом итерационной формулы, принимает следующий вид:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \nabla \vec{u} : (a + b) : \nabla \vec{u} - \Delta\sigma^{k-1} : \nabla \vec{u} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \vec{q} \cdot \vec{u} d\Gamma, \quad (3.22)$$

где \vec{u} – вектор перемещений в сечении пластины Ω срединной плоскостью, ∇ – оператор Гамильтона, \vec{q} – вектор напряжения на границе пластины Γ_σ . Для обеспечения единственности решения закрепим любую точку пластины и исключим поворот вокруг этой точки. Минимизируя функционал (3.22) на каждом шаге алгоритма, получим искомый вектор перемещений u .

Задача минимизации функционала (3.22) эквивалентна следующему вариационному уравнению:

$$\int_{\Omega} (\nabla \vec{u} : (a + b) : \delta \nabla \vec{u} - \Delta \sigma^{k-1} : \delta \nabla \vec{u}) d\Omega = \int_{\Gamma_\sigma} \vec{q} \cdot \delta \vec{u} d\Gamma. \quad (3.23)$$

Решение полученного уравнения будем производить методом конечных элементов. В качестве конечного элемента выберем треугольный элемент Лагранжа, степенями свободы которого являются узловые перемещения.

3.2 Результаты расчетов

Было проведено несколько серий вычислительных экспериментов, в которых рассматривалось плоское напряженное состояние тонкой прямоугольной пластины с круглым вырезом.

В первой серии экспериментов на пластину вдоль всей ее границы действовало равномерно распределенное касательное напряжение $\sigma_{12} = \tau$, а нормальные напряжения на границе отсутствовали. Также учитывалось различное сопротивление при сжатии и растяжении материала. Расчеты производились со следующими параметрами пластины: $l_1 = 150$; $l_2 = 100$ мм, толщина $h = 2,5$ мм, радиус окружности выреза $r = 30$ мм. Угол армирования α равен 45 на рисунке 3.1 и -45 на рисунке 3.2. Внешнее касательное напряжение $\tau = 0,15$ ГПа выбрано таким образом, чтобы уровень деформаций в обоих вариантах армирования не превышал 10%. Параметры упругости $E_1 = 56.8$; $E_2 = 6$; $G = 3.5$; $b = 57.2$ ГПа соответ-

стствует армированному углеродным волокном полимеру, используемому в вышеописанных экспериментах по сильному изгибу тонких длинных балок.

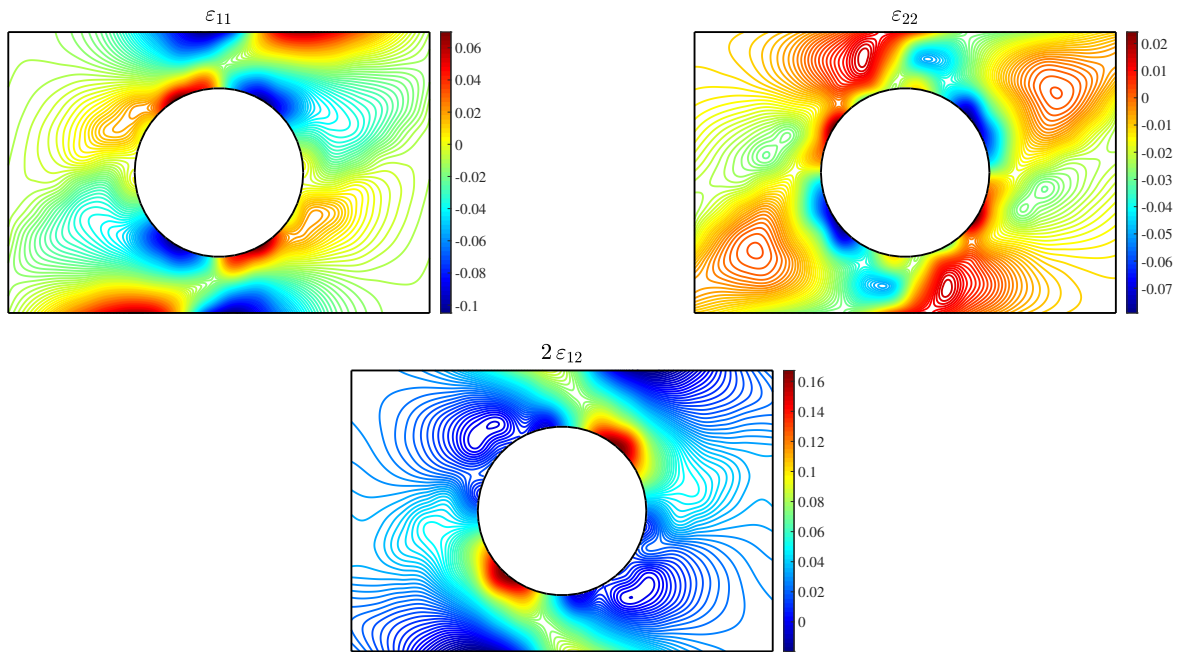


Рисунок 3.1 — Линии уровня деформаций в однослойной пластине с армированием под углом $\alpha = 45^\circ$ под действием касательных напряжений на границе

При такой схеме нагружения пластина после деформации принимает форму, близкую к параллелограмму. Волокна, расположенные под углом $\alpha = 45^\circ$, растягиваются, так как ориентированы в направлении главной диагонали параллелограмма, которая длиннее диагонали прямоугольника. Материал приобретает дополнительную жесткость при растяжении, поэтому деформация пластины происходит в основном за счет сжатия по оси x_1 . Противоположная ситуация наблюдается при армировании под углом $\alpha = -45^\circ$. В этом случае волокна ориентированы в направлении побочной диагонали параллелограмма, длина которой меньше длины диагонали прямоугольника. Волокна сжимаются, не обеспечивая дополнительной жесткости; поэтому преобладающая деформация пластины вдоль оси x_1 происходит за счет растяжения. То же самое наблюдается на качественном уровне при деформации пластины в направлении оси x_2 . Отметим, что диапазон изменения деформации сдвига в обоих вариантах практически одинаков. На рисунках 3.1 и 3.2 видно, что в направлениях поперек

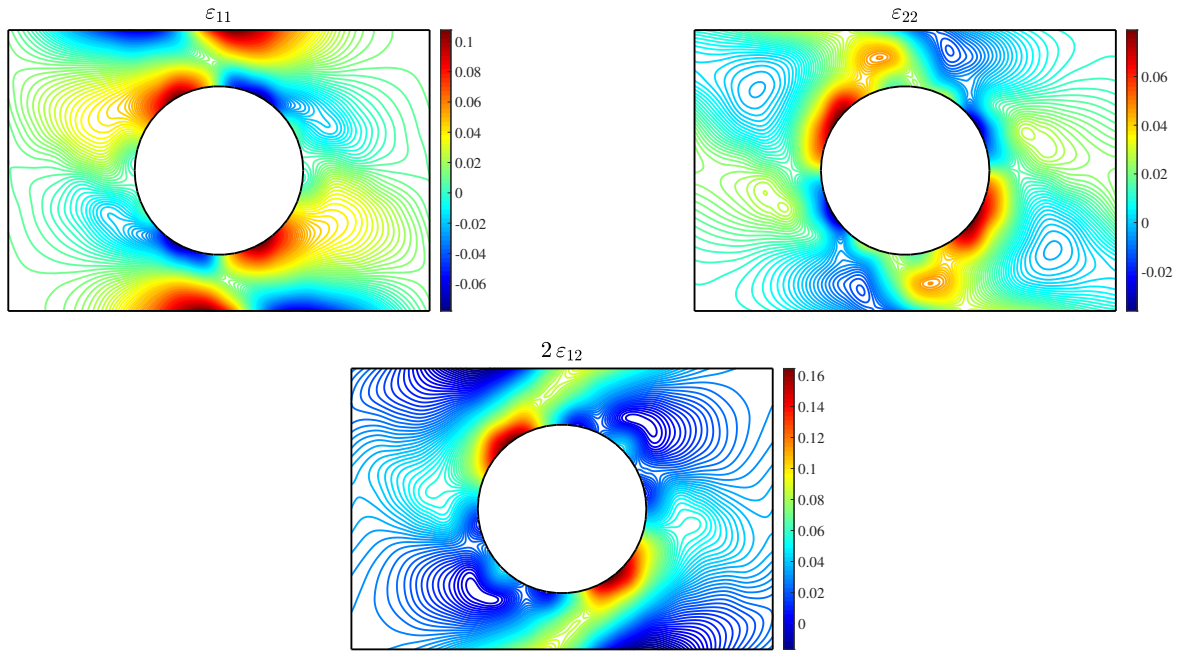


Рисунок 3.2 — Линии уровня деформаций в однослойной пластине с армированием под углом $\alpha = -45^\circ$ под действием касательных напряжений на границе

укладки волокна формируются полосы сдвига, которые соединяют горизонтальные стороны пластины с границей кругового реза. Направления полос сдвига согласованы с направлениями укладки волокон и различны при рассматриваемых углах армирования.

Покажем необходимость учета разномодульности. Вследствие симметрии задачи можно получить одну задачу из другой с помощью замены касательного напряжения τ на $-\tau$. Если не учитывать различное сопротивление композитного материала сжатию и растяжению, задача становится линейной. При этом осевые деформации ε_{11} ; ε_{22} для вариантов $\alpha_1 = 45^\circ$ и $\alpha_2 = -45^\circ$ должны быть противоположны по знаку, а деформации сдвига $2\varepsilon_{12}$ должны совпасть. Это свойство не согласуется с результатами, показанными на рисунках 3.1 и 3.2, что указывает на необходимость учета разных сопротивлений.

Расчеты пластины с двумя направлениями армирования $\alpha_1 = 45^\circ$ и $\alpha_2 = -45^\circ$ показали, что деформированное состояние в этом случае с небольшими отклонениями повторяет деформированное состояние, соот-

ответствующее углу армирования 45° . Этот эффект также объясняется различной устойчивостью армирующих волокон к сжатию и растяжению.

Результаты расчетов для пластины, армированной жесткими волокнами в направлении горизонтальной оси, представлены на рисунке 3.3. На

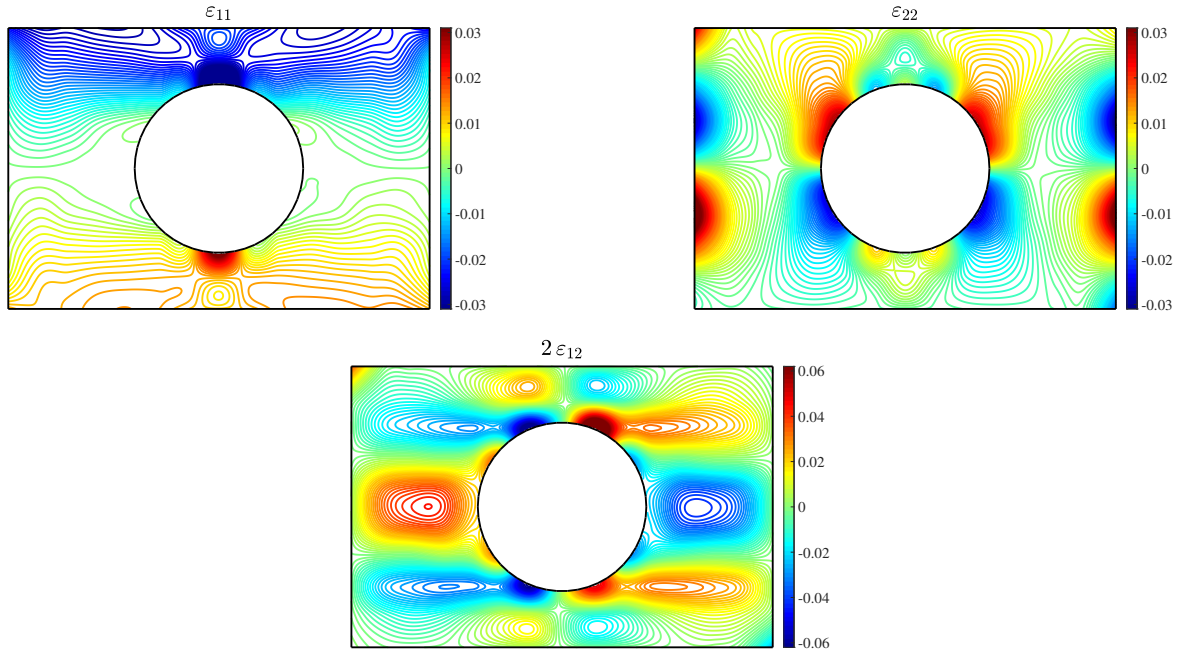


Рисунок 3.3 — Линии уровня деформаций в однослойной пластине, армированной волокнами под углом $\alpha = 0^\circ$, под действием нормальных напряжений σ_{11} на боковых сторонах пластины

боковых гранях пластины внешние напряжения в декартовых координатах, связанных с центром окружности, задаются следующими формулами:

$$\sigma_{11} = -\frac{2px_2}{l_2}, \quad \sigma_{12} = 0.$$

Верхняя и нижняя грани считаются свободными от напряжений, а нагрузка $p = 1.5\text{ГПа}$. На рисунке 3.3 представлены кривые уровня осевых деформаций ϵ_{11} ; ϵ_{22} и деформации сдвига $2\epsilon_{12}$, полученные с учетом разного сопротивления композита при сжатию и растяжению. Сравнение по деформации ϵ_{11} с расчетами, не учитывающими разное сопротивление, выявляет значительную разницу между результатами как в качественном, так и в количественном отношении. Это различие объясняется тем, что из-за разных модулей Юнга волокон при сжатию и растяжению деформации сжатия

в направлении оси x_1 в пластине примерно вдвое превышают деформации растяжения по абсолютной величине. Как показывают расчеты, линии уровня деформаций в направлении оси x_2 и линии уровня деформации сдвига различаются в меньшей степени, а разница между максимальными и минимальными значениями лежит в диапазоне 1%.

Аналогичные расчеты проводились для однослойной пластины с армированием под углом $\alpha = 45^\circ$, линии уровня деформаций которой изображены на рисунке 3.4. В этом случае разница в картинах деформирования по разным сопротивлениям менее заметна, так как деформация в пластине происходит в основном за счет сдвига податливой матрицы. Волокна, по сравнению с матрицей, изначально обладают десятикратным коэффициентом жесткости, и двукратное изменение жесткости при смене знака деформации на этом фоне оказывает слабое влияние.

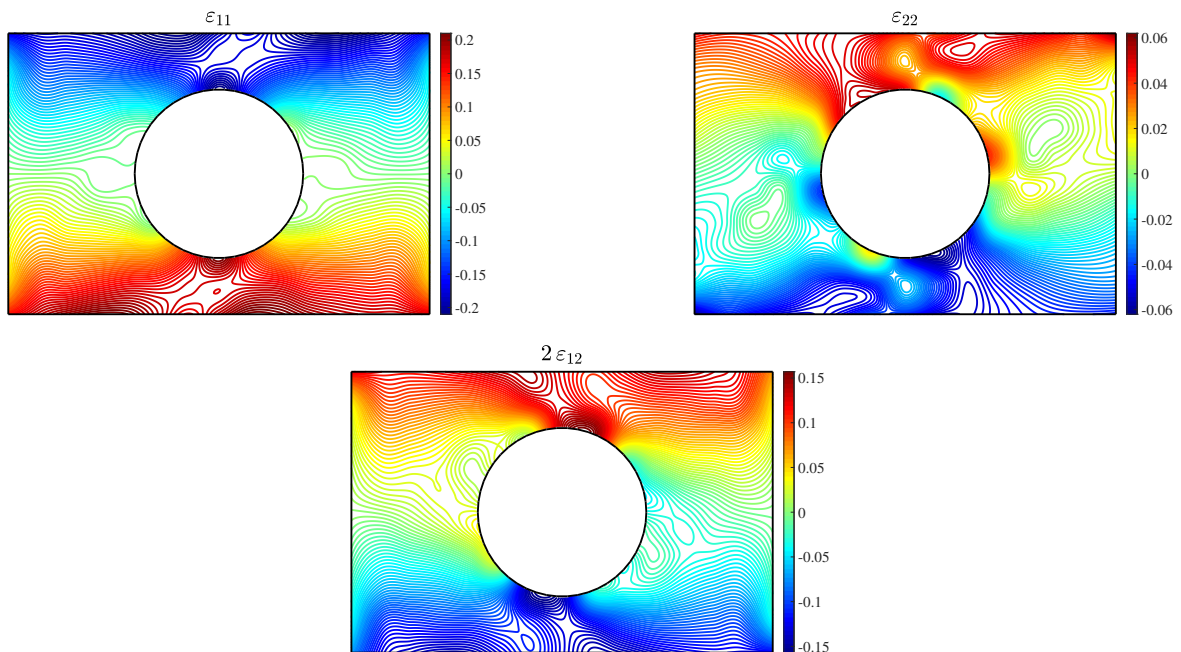


Рисунок 3.4 — Линии уровня деформаций в однослойной пластине, армированной волокнами под углом $\alpha = 45^\circ$, под действием нормальных напряжений σ_{11} на боковых сторонах пластины

Анализ плоского напряженного состояния двухслойной пластины, состоящей из слоев одинаковой толщины из одного материала с армированием под углами $\alpha_1 = 0^\circ$ и $\alpha_2 = 45^\circ$, представлен на рисунке 3.5. Дополнительные расчеты показывают, что дополнительно армирование под

углом уменьшает разницу между результатами, полученными с учетом и без учета разного сопротивления на сжатие и растяжение.

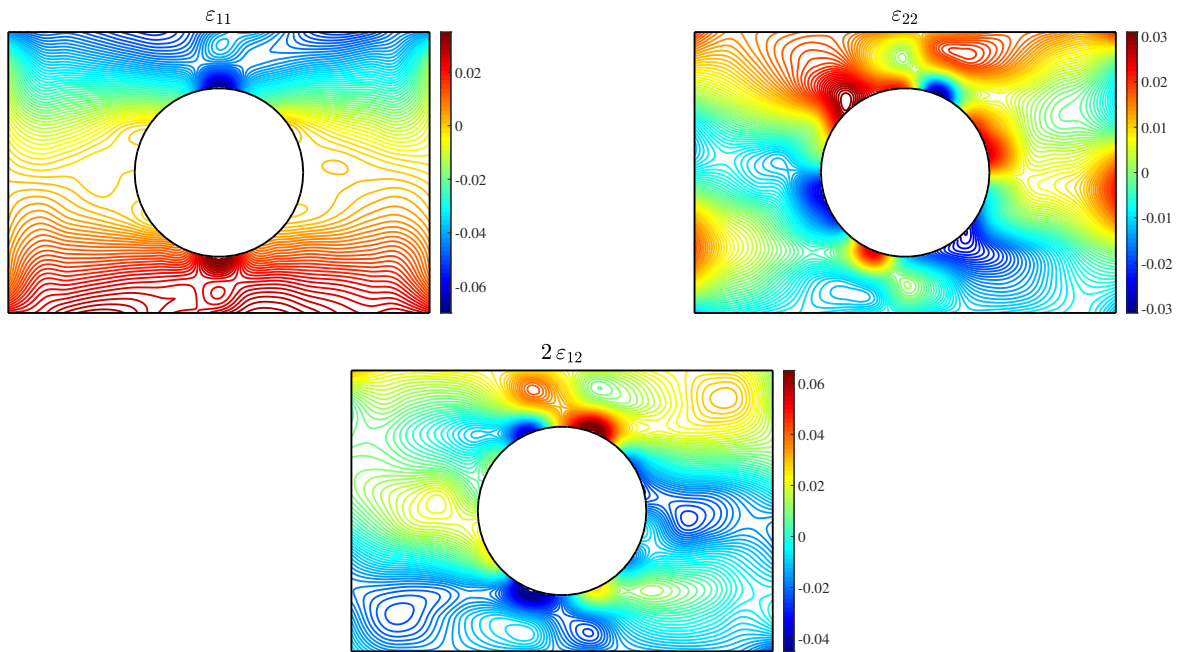


Рисунок 3.5 — Линии уровня деформаций в двухслойной пластине, армированной волокнами под углами $\alpha_1 = 0^\circ$ и $\alpha_2 = 45^\circ$, под действием нормальных напряжений σ_{11} на боковых сторонах пластины

Расчеты для трехслойной пластины с теми же параметрами упругости и толщиной слоев с углами армирования $\alpha_1 = 45^\circ$; $\alpha_2 = 0^\circ$ и $\alpha_3 = -45^\circ$ показывают также небольшую разницу между результатами, полученными с учетом и без учета различных сопротивлений. Линии уровня деформаций для этих расчетов представлены на рисунке 3.6.

3.3 Выводы по главе 3

В третьей главе рассматривается задача расчета плоского напряженного состояния многослойной композитной пластины. На основе реологической схемы построены определяющие уравнения плоского напряженного состояния пластины из однонаправленного волокнистого композита и мно-

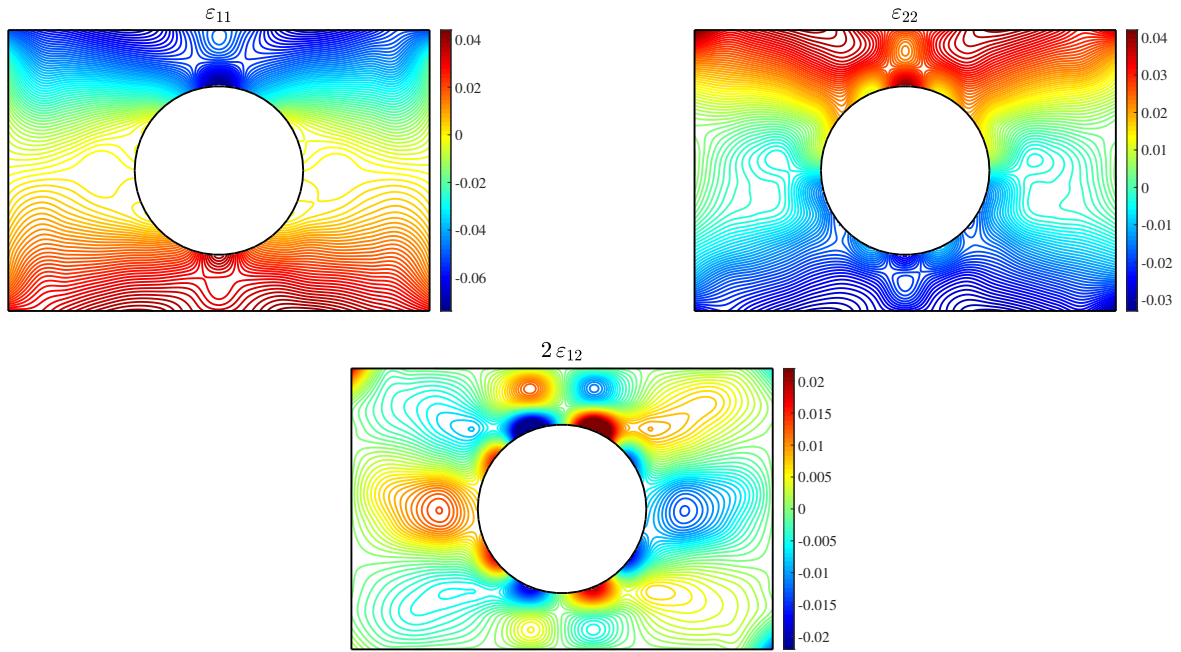


Рисунок 3.6 — Линии уровня деформаций в трехслойной пластине, армированной волокнами под углами $\alpha = 45^\circ, 0^\circ, -45^\circ$, под действием нормальных напряжений σ_{11} на боковых сторонах пластины

гослойной пластины, слои которой армированы в разных направлениях и выписаны соответствующие потенциалы.

С помощью метода конечных элементов в сочетании с методом начальных напряжений выполнен анализ распределения зон растяжения и сжатия в прямоугольной пластине из углепластика с круговым отверстием под действием напряжений на границе. Численные эксперименты по анализу плоского напряженного состояния пластин из волокнистых композитов с круговым отверстием демонстрируют эффективность подхода при качественном прогнозировании картины напряжений сжатия и растяжения.

Глава 4. Чистый изгиб пластин

4.1 Уравнение изгиба слоистой пластины

Рассмотрим однослойную композитную пластину, армированную однонаправленными тонкими волокнами. Такая пластина является трансверсально-изотропным материалом, поскольку существует плоскость симметрии перпендикулярно направлению волокон.

Будем считать, что для пластины выполняются гипотезы Кирхгофа и следующие допущения:

1. срединная плоскость испытывает только нормальные перемещения;
2. перемещения u_1 и u_2 линейны по переменной x_3 из-за малости толщины пластины;
3. для точек срединной плоскости сдвиги в вертикальных плоскостях равны нулю;
4. нормальными напряжениями в направлении, поперечном срединной плоскости пластины, допустимо пренебрегать.

Также предполагается, что в области пластины существует нейтральная плоскость, в которой отсутствуют деформации. В силу малости толщины пластины по сравнению с остальными размерами вектор перемещений может быть выписан следующим образом:

$$u_1 = -(x_3 - \eta) \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = -(x_3 - \eta) \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w(x_1, x_2), \quad (4.1)$$

где η – положение нейтральной плоскости. Выпишем ненулевые компоненты тензора малых деформаций:

$$\varepsilon_{11} = -(x_3 - \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \varepsilon_{22} = -(x_3 - \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad \varepsilon_{12} = -(x_3 - \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (4.2)$$

В классической теории пластин нейтральная плоскость совпадает с серединной, а в случае учета различного сопротивления растяжению и сжатию смещается в сторону повышения жесткости. Простой способ задания положения нейтральной плоскости, применимый при анализе изгиба пластин со свободным краем, вытекает из условия равенства нулю мембранного усилия в направлении укладки волокон:

$$\int_0^h \sigma_{11} dx_3 = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \int_0^\eta (\eta - x_3) dx_3 = \left(\frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} + b \right) \int_\eta^h (x_3 - \eta) dx_3.$$

Здесь предполагается, что зона растяжения расположена над зоной сжатия, то есть стрела прогиба направлена вверх. Отсюда

$$\eta = \frac{\kappa}{1 + \kappa} h, \quad \kappa = \sqrt{1 + (1 - \nu_1\nu_2) \frac{b}{E_1}}. \quad (4.3)$$

Заметим, что формула (4.3) не гарантирует, вообще говоря, отсутствие мембранных усилий в направлении, перпендикулярном направлению армирования. Чтобы деформированное состояние с вектором перемещений (4.1) и тензором деформаций (4.2) было совместным с условиями равновесия для напряжений, необходимо, чтобы на краях пластины действовала определенная система сил, которую можно определить по найденному прогибу. Вместе с тем существуют частные случаи изгиба пластин со свободными краями или с заданными изгибающими моментами и перерезывающими силами, но без мембранных усилий на краях, когда формула (4.3) применима. К ним относится, например, случай цилиндрического изгиба, при котором прогиб w не зависит от координаты x_2 .

Отметим также, что смена направления стрелы прогиба приводит к симметричному по толщине пластины смещению нейтральной плоскости.

Поэтому в задачах с переменным направлением изгиба, когда разные части пластины прогибаются в разные стороны, параметр η в формулах (4.1) должен меняться скачкообразно в зависимости от расположения зон растяжения и сжатия.

Рассмотрим многослойную пластину в произвольной системе координат $Ox_1x_2x_3$, не связанной с направлениями армирования. Пусть пластина состоит из k слоев, заданы h_k – толщина k -го слоя и α_k – угол армирования k -го слоя ($k = 1, 2, \dots$). Перейдем в систему координат $Ox'_1x'_2x'_3$, связанную с направлением армирования k -го слоя пластины в недеформированном состоянии так, что x'_1 направлена вдоль волокон армирования, а x'_3 перпендикулярно плоскости пластины.

Для каждого отдельного слоя в системе координат, связанной с волокнами армирования, можно записать закон Гука следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1^k \nu_2^k} \begin{pmatrix} E_1^k & \nu_1^k E_2^k & 0 \\ \nu_1^k E_2^k & E_2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - \nu_1^k \nu_2^k)G^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

где E_1^k – модуль Юнга вдоль волокон армирования, E_2^k – модуль Юнга в направлении перпендикулярном армированию с соответствующими коэффициентами Пуассона ν_1^k, ν_2^k , G^k – модуль сдвига.

Напряжения в системе $Ox_1x_2x_3$ и $Ox'_1x'_2x'_3$ связаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix} = R(\alpha_k) \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где $R(\alpha)$ – матрица поворота на угол α :

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ -\frac{\sin 2\alpha}{2} & \frac{\sin 2\alpha}{2} & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Аналогично выражаются деформации:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{pmatrix} = R(\alpha_k) \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Подставив (4.5) и (4.6) в (4.4), получим закон Гука в системе $Ox_1x_2x_3$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1^k \nu_2^k} R(-\alpha_k) \begin{pmatrix} E_1^k & \nu_1^k E_2^k & 0 \\ \nu_1^k E_2^k & E_2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - \nu_1^k \nu_2^k)G^k \end{pmatrix} R(\alpha_k) \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

Модуль Юнга в направлении волокон E_1^k может принимать значение модуля Юнга E_1^+ или E_1^- в зависимости от того в зоне растяжения или сжатия соответственно находится k -й слой. В общем виде определяющие уравнения упругой слоистой пластины принимают следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & G_{11} \\ E_{12} & E_{22} & G_{22} \\ G_{11} & G_{22} & G_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

где E_{ij} и G_{ij} являются кусочно-постоянными функциями по толщине пластины.

Для получения уравнения изгиба воспользуемся вариационным принципом Лагранжа, согласно которому действительное распределение прогибов пластины минимизирует на множестве вариаций, согласованных с главными краевыми условиями, функционал упругой энергии:

$$J(w) = \iint_{\Omega} \left(\int_0^h \Phi dx_3 - qw \right) dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left(\left(Q + \frac{\partial M_{\tau}}{\partial \tau} \right) w + M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds, \quad (4.8)$$

где $\Phi = \frac{1}{2}(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12})$ – потенциал напряжений, Ω – двумерная область с границей Γ занятая нижней стороной пластины, $q(x_1, x_2)$ – поперечная нагрузка, $Q(x_1, x_2)$, $M_n(x_1, x_2)$ и $M_{\tau}(x_1, x_2)$ – поперечное усилие, нормальный и касательный изгибающий момент на краях пластины,

$\partial/\partial n$ – оператор производной по направлению внешней нормали к границе, $\partial/\partial\tau$ – оператор производной по направлению касательной к границе, ds – элемент дуги. Главные краевые условия задаются в виде уравнений

$$w = w_0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \gamma_0(x_1, x_2), \quad (4.9)$$

которые определяют прогиб и угол поворота на границе. Для задания естественных граничных условий используем функции Q и M_n , которые должны быть определены в тех точках границы, где не заданы соответствующие главные граничные условия.

Подставив в выражение для потенциала выражения (4.7) и (4.2), получим следующий вид функционала (4.8):

$$\begin{aligned} J(w) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(D_{11} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right|^2 + D_{22} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right|^2 + 2 D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + F_{12} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 + \right. \\ & + 2 F_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 2 F_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - 2 q w \Big) dx_1 dx_2 - \\ & \left. - \int_{\Gamma} \left(\left(Q + \frac{\partial M_{\tau}}{\partial \tau} \right) w + M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds, \quad (4.10) \end{aligned}$$

где D_{ij} и F_{ij} – изгибные жесткости пластины, вычисляемые по формулам:

$$D_{ij} = \int_0^h (x_3 - \eta)^2 E_{ij} dx_3, \quad F_{ij} = \int_0^h (x_3 - \eta)^2 G_{ij} dx_3.$$

Остановимся подробнее на вычислении изгибных жесткостей. Поскольку E_{ij} и G_{ij} являются кусочно-постоянными функциями, а толщины слоев всей пластины и положение нейтральной линии заранее известны, интегралы (4.1) могут быть вычислены аналитически. Пусть пластина состоит из n слоев, нейтральная линия находится в k -ом слое, толщина пластины равна h , и для каждого слоя определены его границы (h_{l-1}, h_l) .

Распишем интеграл для D_{ij} по слоям:

$$D_{ij} = \sum_{l=1}^{k-1} E_{ij}^{-}(l) \int_{h_{i-1}}^{h_i} (x_3 - \eta)^2 dx_3 + E_{ij}^{-}(k) \int_{h_{k-1}}^{\eta} (x_3 - \eta)^2 dx_3 + \\ + E_{ij}^{+}(k) \int_{\eta}^{h_k} (x_3 - \eta)^2 dx_3 + \sum_{l=k+1}^n E_{ij}^{-}(l) \int_{h_{i-1}}^{h_i} (x_3 - \eta)^2 dx_3.$$

Для получения уравнения изгиба проварьируем функционал (4.10). Для удобства разобьем его на сумму интегралов и запишем вариационную производную для каждого слагаемого по отдельности:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \iint_{\Omega} D_{11} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right|^2 dx_1 dx_2 \right) = \iint_{\Omega} D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2.$$

Возьмем полученный интеграл два раза по частям:

$$\iint_{\Omega} D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_1 ds - \\ - \iint_{\Omega} D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_1 ds - \\ - \int_{\Gamma} D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \delta w n_1 ds + \iint_{\Omega} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} \delta w ds.$$

Повторим те же шаги для остальных слагаемых. Для слагаемого с коэффициентом D_{22} :

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{2} \iint_{\Omega} D_{22} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right|^2 dx_1 dx_2 \right) &= \iint_{\Omega} D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{\Gamma} D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_2} n_2 ds - \iint_{\Omega} D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \frac{\partial \delta w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{\Gamma} D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_2} n_2 ds - \int_{\Gamma} D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \delta w n_2 ds + \iint_{\Omega} D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} \delta w ds. \end{aligned}$$

Для слагаемого с коэффициентом D_{12} :

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{2} \iint_{\Omega} 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2 \right) &= \\ &= \iint_{\Omega} D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 &= \int_{\Gamma} D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_1 ds - \\ &- \iint_{\Omega} D_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^2 \partial x_1} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_1 ds - \\ &- \int_{\Gamma} D_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^2 \partial x_1} \delta w n_1 ds + \iint_{\Omega} D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} \delta w ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2 &= \int_{\Gamma} D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_2} n_2 ds - \\
&- \iint_{\Omega} D_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_2} n_2 ds - \\
&- \int_{\Gamma} D_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \delta w n_2 ds + \iint_{\Omega} D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \delta w ds.
\end{aligned}$$

Для слагаемого с коэффициентом F_{12} :

$$\begin{aligned}
\delta \left(\frac{1}{2} \iint_{\Omega} F_{12} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 dx_1 dx_2 \right) &= \iint_{\Omega} F_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = \\
&= \int_{\Gamma} F_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_2 ds - \iint_{\Omega} F_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \\
&= \int_{\Gamma} F_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_2 ds - \int_{\Gamma} F_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \delta w n_1 ds + \iint_{\Omega} F_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \delta w ds.
\end{aligned}$$

Для слагаемого с коэффициентом F_{11} :

$$\begin{aligned}
\delta \left(\frac{1}{2} \iint_{\Omega} 2F_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 \right) &= \\
&= \iint_{\Omega} F_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} F_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} F_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 &= \int_{\Gamma} F_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_1 ds - \\
&- \iint_{\Omega} F_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} F_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_1 ds - \\
&- \int_{\Gamma} F_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \delta w n_1 ds + \iint_{\Omega} F_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} \delta w ds;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} F_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 &= \int_{\Gamma} F_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_2 ds - \\
&- \iint_{\Omega} F_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} F_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_2 ds - \\
&- \int_{\Gamma} F_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \delta w n_1 ds + \iint_{\Omega} F_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} \delta w ds.
\end{aligned}$$

Для слагаемого с коэффициентом F_{22} :

$$\begin{aligned}
\delta \left(\frac{1}{2} \iint_{\Omega} 2F_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 \right) &= \\
&= \iint_{\Omega} F_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} F_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} F_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2 &= \int_{\Gamma} F_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_2} n_2 ds - \\
&- \iint_{\Omega} F_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^2 \partial x_1} \frac{\partial \delta w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} F_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_2} n_2 ds - \\
&- \int_{\Gamma} F_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^2 \partial x_1} \delta w n_2 ds + \iint_{\Omega} F_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^3 \partial x_1} \delta w ds;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} F_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 &= \int_{\Gamma} F_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_2 ds - \\
&- \iint_{\Omega} F_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} F_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_2 ds - \\
&- \int_{\Gamma} F_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \delta w n_1 ds + \iint_{\Omega} F_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^3 \partial x_1} \delta w ds.
\end{aligned}$$

Проварьрируем слагаемое с поперечной нагрузкой

$$\delta \left(\frac{1}{2} \iint_{\Omega} -2qw dx_1 dx_2 \right) = \iint_{\Omega} -q \delta w dx_1 dx_2$$

и правую часть

$$\delta \left(- \int_{\Gamma} \left(\left(Q + \frac{\partial M_{\tau}}{\partial \tau} \right) w + M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds \right) = - \int_{\Gamma} \left(\left(Q + \frac{\partial M_{\tau}}{\partial \tau} \right) \delta w + M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} \right) ds.$$

Теперь получим естественные граничные условия. Независимо можно задавать вариацию прогиба δw и вариацию угла поворота по нормали $\frac{\partial}{\partial n} \delta w$, в то время как поворот вдоль касательной $\frac{\partial}{\partial \tau} \delta w$ определяется заданием δw . Учитывая, что

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta w}{\partial n} = \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \delta w}{\partial x_2} n_2, \\ \frac{\partial \delta w}{\partial \tau} = -\frac{\partial \delta w}{\partial x_1} n_2 + \frac{\partial \delta w}{\partial x_2} n_1 \end{cases} \quad (4.11)$$

приведем подобные слагаемые и выразим значения $Q + \frac{\partial M_{\tau}}{\partial \tau}$ и M_n , которые должны быть заданы на той части границы, где не заданы главные

граничные условия:

$$\begin{aligned}
Q + \frac{\partial M_\tau}{\partial \tau} = & -D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} - D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} - D_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^2 \partial x_1} - D_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \\
& - F_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} - F_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} - F_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} - F_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^2 \partial x_1} \\
& - F_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} n_1 - F_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - F_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - F_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_n = & D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\
& + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + F_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + F_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

В результате варьирования функционала (4.10) получим следующее дифференциальное уравнение для прогиба:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + (2D_{12} + F_{12}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 2F_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 2F_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} = q,$$

которое обобщает уравнение Софи Жермен в классической теории пластин.

4.2 Вычислительный алгоритм

Вычислительный алгоритм разработан на основе метода конечных элементов. Покажем, что задача минимизации функционала (4.10) при некоторых дополнительных требованиях гладкости функций, входящих в граничные условия, корректна в пространстве Соболева $H^2(\Omega)$. Согласно теореме Лакса-Мильграма решение задачи минимизации функционала существует и единственно, если для функционала $J(w) = \frac{1}{2}a(w,w) - (f,w)$, $a(u,v)$ симметричная билинейная форма, непрерывная по обоим переменным, а (f,w) является непрерывным функционалом. Запишем функционал

(4.10) в матричной форме:

$$J(w) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & F_{11} \\ D_{12} & D_{22} & F_{22} \\ F_{11} & F_{22} & F_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} - \\ - qw \, dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left(Qw + M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds. \quad (4.14)$$

Функционал

$$(f, w) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} qw \, dx_1 dx_2 \quad (4.15)$$

является линейным и непрерывным в пространстве $H^2(\Omega)$, если $q(x_1, x_2)$ является регулярной функцией, например, кусочно-непрерывной. Допускается также случай, когда q содержит сингулярные слагаемые типа сосредоточенной силы (дельта-функции Дирака). Покажем коэрцитивность билинейной формы

$$a(u, v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & F_{11} \\ D_{12} & D_{22} & F_{22} \\ F_{11} & F_{22} & F_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} dx_1 dx_2.$$

Поскольку матрица жесткости положительно определена, то существует такая положительная константа α , что

$$a(w, w) \geq \alpha \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right) dx_1 dx_2.$$

Коэрцитивность билинейной формы

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (4.16)$$

показана в [91], следовательно, существует такая константа c , что

$$\iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right) dx_1 dx_2 \geq c \|w\|^2, \quad (4.17)$$

а значит

$$a(w, w) \geq \frac{c}{\alpha} \|w\|^2, \quad (4.18)$$

следовательно, билинейная форма $a(u, v)$ при выполнении условий закрепления на краю пластины коэрцитивна, а значит задача минимизации функционала (4.10) имеет единственное решение в пространстве $H^2(\Omega)$.

Возьмем качестве конечного элемента треугольный элемент Белла класса C^1 с 18-тью степенями свободы [61]. При численном решении задачи в области Ω строится нерегулярная треугольная сетка и вводится вектор обобщенных координат W размерностью $6n$, где n – число узлов сетки. Координатами этого вектора служат узловые значения прогиба и его производных первого и второго порядка. Функционал $J(w)$ представим в виде суммы интегралов по всем треугольникам сетки:

$$J(W) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \iint_{\Omega_l} (W^l)^T D_l^T K D_l W^l - Q^T W dx_1 dx_2,$$

где Ω_l – область l -го конечного элемента, W^l – локальный вектор обобщенных координат, K – матрица изгибных жесткостей, D_l – матрица дифференцирования, Q – глобальный вектор обобщенных сил, верхний индекс T означает транспонирование.

Глобальная матрица жесткости C составляется путем сложения в определенных позициях элементов локальных матриц жесткости $C_l = D_l^T K D_l$. В результате получим функционал:

$$J(W) = \frac{1}{2} W^T C W - Q W,$$

минимальное значение которого определяется системой уравнений, служащей для вычисления прогибов:

$$\frac{\partial J}{\partial W} \equiv C W - Q = 0. \quad (4.19)$$

4.3 Результаты расчетов чистого изгиба пластины

На рисунках 4.1 – 4.3 приведены примеры расчетов изгиба двухслойной пластины из углепластика с объемным содержанием армирующего углеграфитового волокна 50 %, размером 100×100 мм, с толщиной слоев 2.5 мм. Пластина жестко закреплена по двум боковым сторонам, противоположным по направлению оси x_1 . В центре пластины действует сосредоточенная поперечная нагрузка $q = 10$ кН.

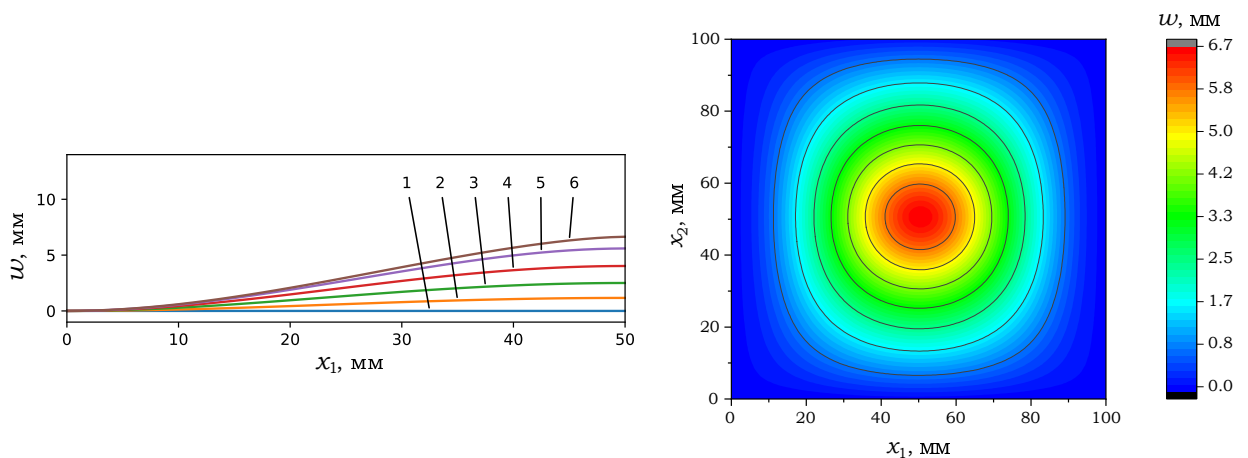


Рисунок 4.1 — Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев $(0^\circ, 90^\circ)$

На рисунке 4.1 изображены прогибы пластины с конфигурацией армирования слоев $(0^\circ, 90^\circ)$ и линии уровня прогиба с учетом разного сопротивления материала растяжению и сжатию. На рисунке 4.2 – аналогичные результаты с конфигурацией армирования $(90^\circ, 0^\circ)$. Порядок слоев указан, начиная с верхнего. Кривые “1”, “2”, ..., “6” на рисунках относятся к сечениям пластины $x_2 = 0, 10, \dots, 50$ мм.

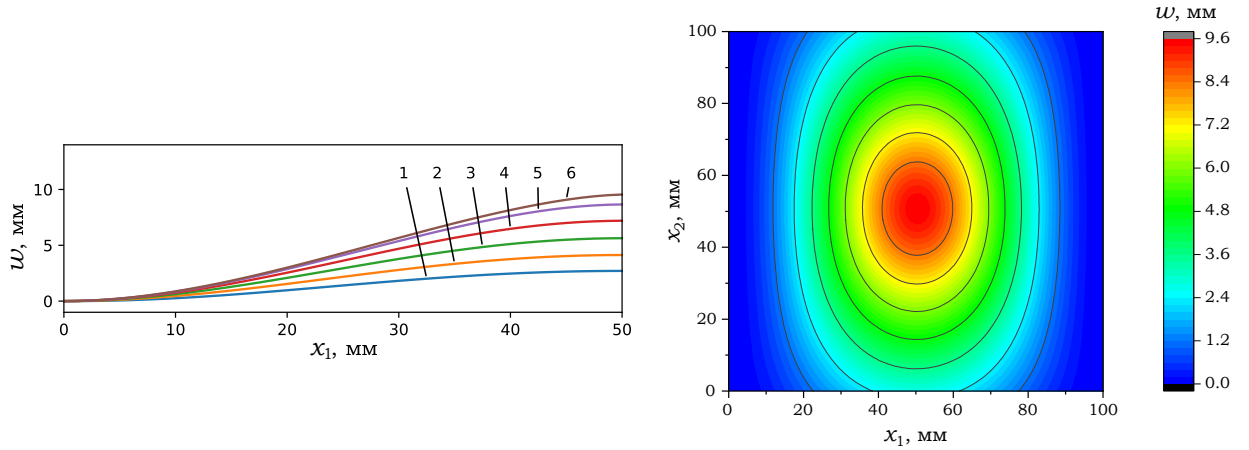


Рисунок 4.2 — Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев $(90^\circ, 0^\circ)$

Отметим, что величина прогиба значительно больше в случае армирования верхнего слоя под углом 90° к оси x_1 , поскольку пластина в этом случае закреплена в направлении, перпендикулярном направлению армирования растягиваемого слоя.

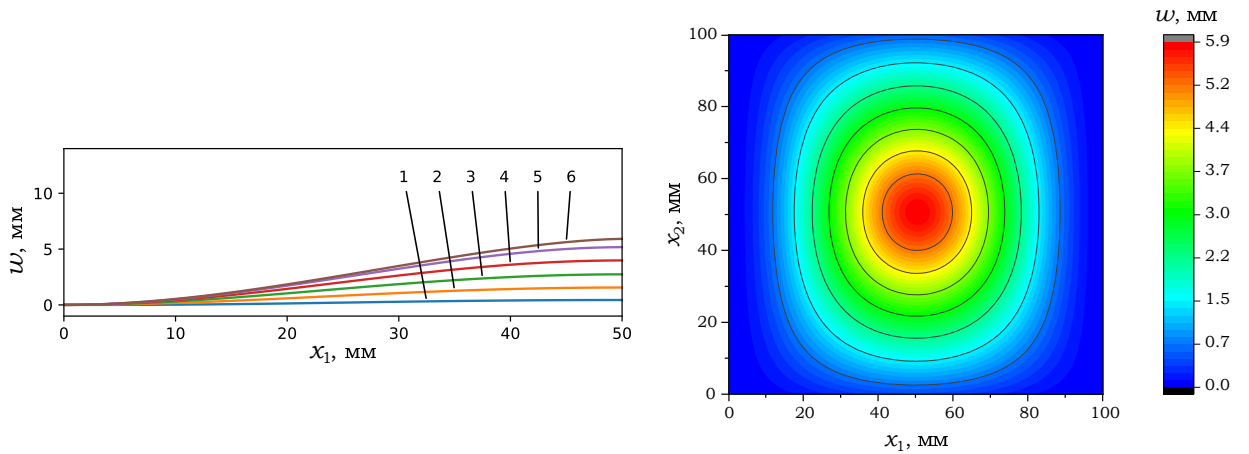


Рисунок 4.3 — Прогиб двухслойной пластины $(90^\circ, 0^\circ)$ без учета разномодульности

Чтобы показать необходимость учета разного сопротивления материала растяжению и сжатию, были проведены расчеты, в которых параметры упругости композита при сжатии считались равными параметрам упругости при растяжении. На рисунке 4.3 приведен прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев $(90^\circ, 0^\circ)$. В этом случае максимальная величина прогиба существенно меньше, чем на рисунке 4.1 и 4.2, так как жесткость пластины на изгиб без учета разного сопротивления повышается. Макси-

мальный прогиб при расчете без учета разномодульности равен 5.91 мм, что составляет приблизительно 62% от максимального прогиба с учетом разномодульности, равного 9.54 мм.

На рисунке 4.4 изображены примеры расчетов для пластины с теми же характеристиками, с конфигурацией армирования слоев $(90^\circ, 0^\circ)$ и нагрузкой $q = 10$ кН, действующей в точке $x_1 = 75$ мм, $x_2 = 25$ мм.

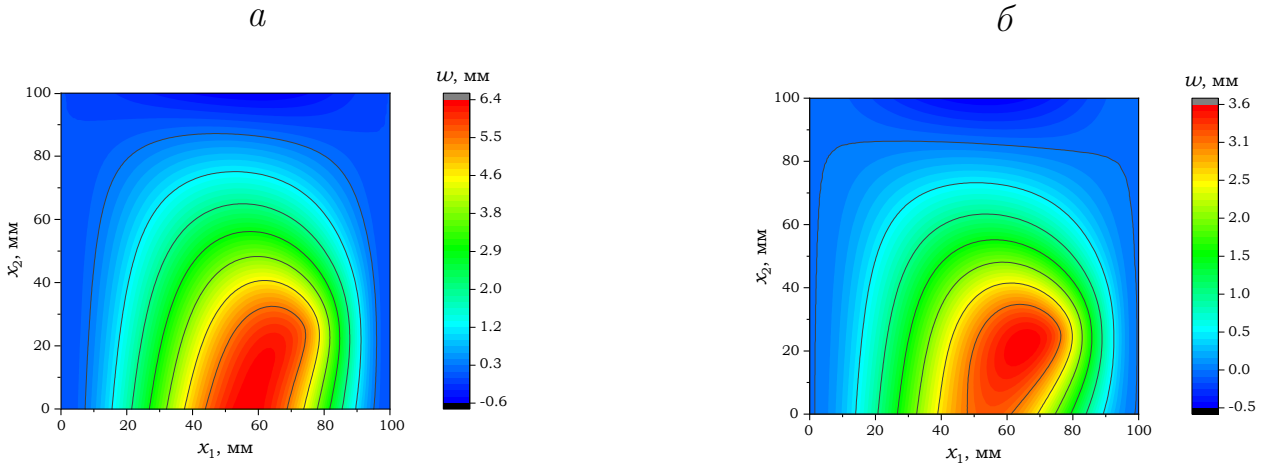


Рисунок 4.4 — Прогиб двухслойной пластины $(90^\circ, 0^\circ)$ со смещенной нагрузкой с учетом (а) и без учета (б) разного сопротивления материала

Величины прогибов в этом случае составили 6.35 мм и 3.55 мм при учете и без учета разномодульности, соответственно.

4.4 Изгиб пластины жестким штампом

Рассмотрим изгиб многослойной композитной пластины жестким штампом. Пусть на области Ω задана функция $\varphi(x, y)$, определяющая форму штампа. Штамп вдавливается в пластину без поворота. Для получения распределения прогибов пластины необходимо решить задачу минимизации функционала (4.10) с главными краевыми условиями (4.9) и ограничением в виде неравенства

$$w(x_1, x_2) \geq \varphi(x_1, x_2) \quad (4.20)$$

на всей области Ω .

Задача минимизации функционала (4.10) с ограничением в виде неравенства (4.20) при некоторых дополнительных требованиях гладкости функций, входящих в граничные условия, корректна в пространстве Соболева $H^2(\Omega)$. Существование и единственность минимума функционала (4.10) с ограничением (4.20), аналогично описанному в разделе 4.2, следует из леммы Лакса-Мильграма. Для численного решения задачи воспользуемся методом конечных элементов. В качестве конечного элемента будем использовать треугольный элемент Белла класса C^1 с 18-тью степенями свободы [61]. В области Ω строится нерегулярная треугольная сетка. Для прогибов вводится вектор обобщенных координат W размерности $6n$, где n – число узлов сетки. Координатами этого вектора служат узловые значения прогиба и его производных первого и второго порядка.

Для нахождения минимума функционала с заданными ограничениями воспользуемся методом множителей Лагранжа. Для множителей Лагранжа введем вектор Λ , а для функции определяющей, форму штампа вектор Φ размерностей n , где значения компонентов вектора Φ равны значениям в узлах сетки функции ϕ . Построим Лагранжиан $L(w, \lambda)$ в виде суммы интегралов по всем треугольникам сетки:

$$L(W, \Lambda) = \Lambda_0 \sum_{l=1}^m \iint_{\Omega_l} (W^l)^T D_l^T K D_l W^l - Q^T W + \Lambda^T (\Phi - W) dx_1 dx_2,$$

где Ω_l – область l -го конечного элемента, W^l – локальный вектор обобщенных координат, K – матрица изгибных жесткостей, D_l – матрица дифференцирования, Q – глобальный вектор обобщенных сил, где верхний индекс T означает транспонирование. Глобальная матрица жесткости C представима в виде суммы локальных матриц жесткости $C_l = D_l^T K D_l$. В результате получим функционал:

$$L(W, \Lambda) = \Lambda_0 W^T C W - Q W + \Lambda (\Phi - W).$$

Поскольку $L(W, \Lambda)$ является квадратичным функционалом по W , а матрица C обладает диагональным преобладанием и является положительно

определенной, то согласно теореме Куна-Таккера для того, чтобы W^* являлся минимумом $J(W)$, необходимо, чтобы для неотрицательных множителей Λ выполнялись условия дополняющей нежесткости и стационарности [70]. Для выполнения строгого неравенства $\Lambda_0 > 0$ достаточно выполнения условия Слейтера: должен существовать \tilde{W} , что $\Phi - \tilde{W} < 0$. Введем следующие требования для функции φ : $\varphi \in H^2(\Omega)$, $\exists c : w_0 \geq \varphi + c$. Если выбрать $\tilde{W} = w_0$ на границе Γ и $\tilde{w} = \varphi + c$ в области Ω , то условие Слейтера выполняется. Для определенности возьмем $\lambda_0 = 1$. При выполнении условия Слейтера, пара w^*, λ^* удовлетворяет всем перечисленным ограничением тогда и только тогда, когда является седловой точкой Лагранжиана $L(w, \lambda)$ [45].

Для нахождения седловой точки воспользуемся алгоритмом Удзавы [70]. Алгоритм заключается в последовательном вычислении $\Lambda^1, W^1, \Lambda^2, W^2, \dots$ и состоит из следующих шагов.

1. Выбирается произвольное начальное приближение Λ^0 .
2. При фиксированном Λ^i определим W^i , при котором достигается минимум Лагранжиана, как решение уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial W} = 0. \quad (4.21)$$

3. Определим Λ^{i+1} как решение уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial \Lambda} = 0. \quad (4.22)$$

Критерием останова итерационного процесса выберем условие $|\lambda^{i+1} - \lambda^i| \leq \tau \cdot \epsilon$, где ϵ заданная точность.

Для реализации второго шага алгоритма Удзавы будем использовать метод конечных элементов. Минимальное значение Лагранжиана при фиксированном векторе Λ^i определяется из решения системы уравнений относительно прогибов W^i :

$$\frac{\partial L}{\partial W} \equiv C W - Q - \Lambda^i = 0. \quad (4.23)$$

На третьем шаге алгоритма Удзавы вычисления производились с помощью метода простой итерации. При фиксированном W^i приравняем частную производную Лагранжиана по Λ к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial \Lambda} \equiv \Phi - W^i = 0. \quad (4.24)$$

Вычислим Λ^{i+1} по следующей формуле:

$$\Lambda^{i+1} = P_+(\Lambda^i + \tau(\Phi - W^i)), \quad (4.25)$$

где τ – итерационный параметр, P_+ – проекция на положительную часть числовой оси.

4.5 Результаты расчетов изгиба пластины жестким штампом

Компьютерная программа, реализующая метод конечных элементов и поиск седловой точки, реализована на языке программирования Python. Для решения системы уравнений (4.23) в ней используются встроенные библиотечные процедуры. Глобальная матрица жесткости является сильно разреженной, содержит около 95% нулей, поэтому для ее хранения применяются специальные структуры для работы с разреженными матрицами [41].

При проведении вычислительных экспериментов были рассмотрены двухслойные композитные пластины с толщиной слоев $h = 5$ мм. Параметры упругости, используемые в вычислительном эксперименте, соответствуют углепластику с объемным содержанием армирующего углеграфитового волокна 50 % [58]:

$$E_1^+ = 114, E_1^- = 57, E_2 = 6, G = 3.5 \text{ ГПа}, \nu_1 = 0.19, \nu_2 = 0.02.$$

На рисунках 4.5 – 4.6 изображены прогибы и линии уровня прогиба пластины с конфигурацией армирования слоев ($0^\circ, 90^\circ$) с учетом разного сопротивления материала растяжению и сжатию после воздействия штампа φ_1 заданного формулой

$$\varphi_1 = -2((x_1 - 0.05)^2 + (x_2 - 0.05)^2) + 0.002,$$

и штампа φ_2 :

$$\varphi_2 = -2000((x_1 - 0.05)^4 + (x_2 - 0.05)^4) + 0.002,$$

где x_1 и x_2 заданы в метрах. Для удобства, в точках, где $\varphi(x_1, x_2) < -0.001$, $\varphi(x_1, x_2)$ принята равной -0.001 . Пластина жестко закреплена по границе, углы поворота слоев указаны начиная с верхнего. Можно заметить, что в случае штампа φ_1 вся контактная площадка совпадает с поверхностью штампа, а в случае штампа φ_2 происходит потеря контакта в середине площадки.

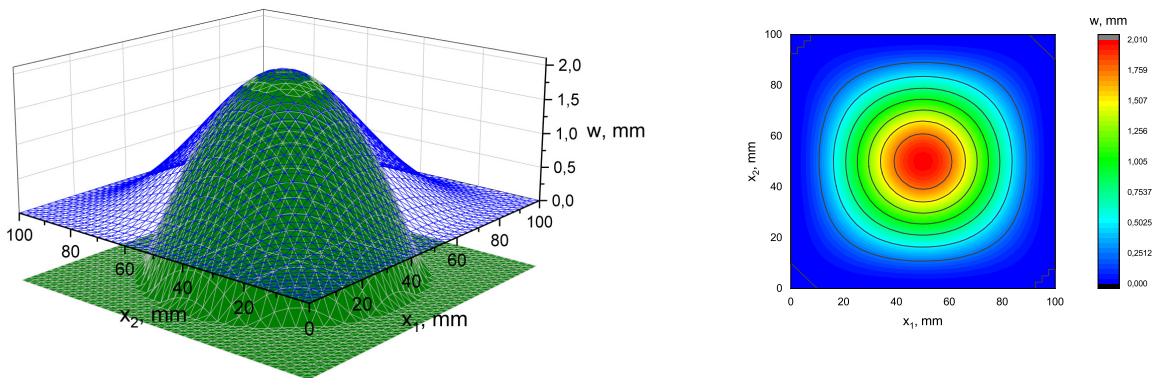


Рисунок 4.5 — Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев ($0^\circ, 90^\circ$) под действием штампа φ_1

Для того, чтобы показать важность учета разного сопротивления материала растяжению и сжатию, была проведена серия вычислительных экспериментов, в которых параметры упругости композита при сжатии считались равными параметрам упругости при растяжении.

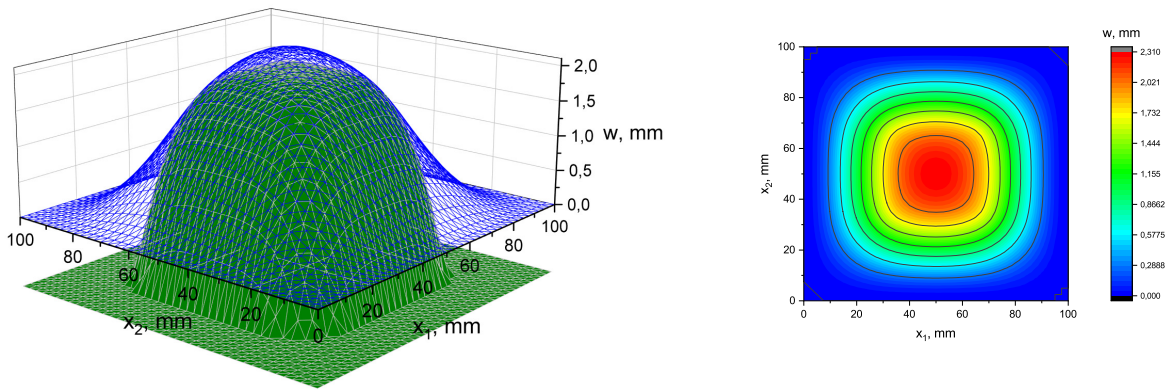


Рисунок 4.6 — Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев $(0^\circ, 90^\circ)$ под действием штампа φ_2

На рисунке 4.7 изображен прогиб пластины с конфигурацией слоев $(90^\circ, 0^\circ)$ под действием штампа $\varphi_3 = 0.002$ при $0.04 < x_1 < 0.06$, $0.04 < x_2 < 0.06$ и $\varphi_3 = -0.001$ в остальных точках. Пластина жестко закреплена по двум боковым сторонам. При расчёте модуль Юнга при сжатии считался равным 114 ГПа, то есть равный модулю при растяжении.

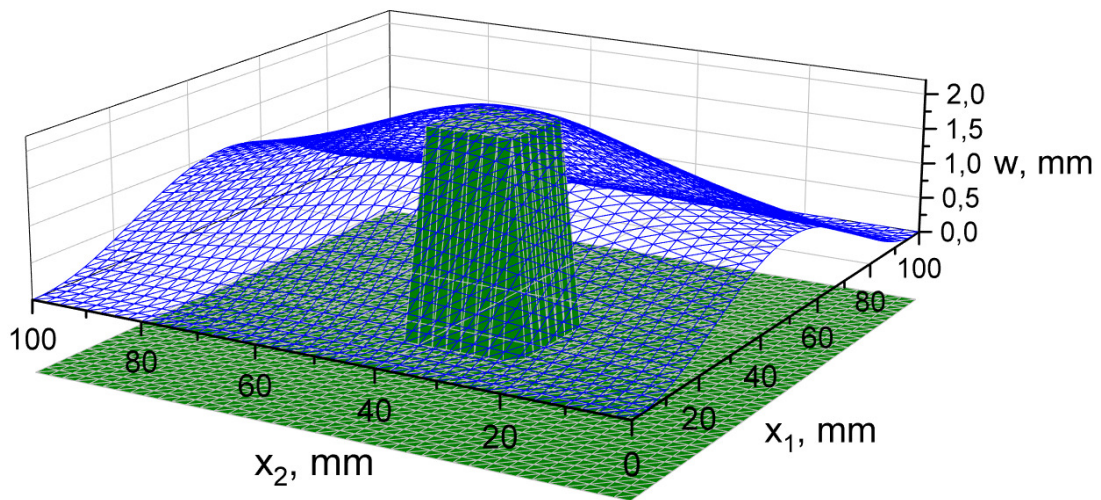


Рисунок 4.7 — Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев $(90^\circ, 0^\circ)$ под действием штампа φ_3 без учета разномодульности

На рисунке 4.8 показано сравнение линий уровня прогиба при расчетах с учетом разномодульности и без учета. В случае неучета, пластина считается более жесткой и прогиб от воздействия штампа уменьшается.

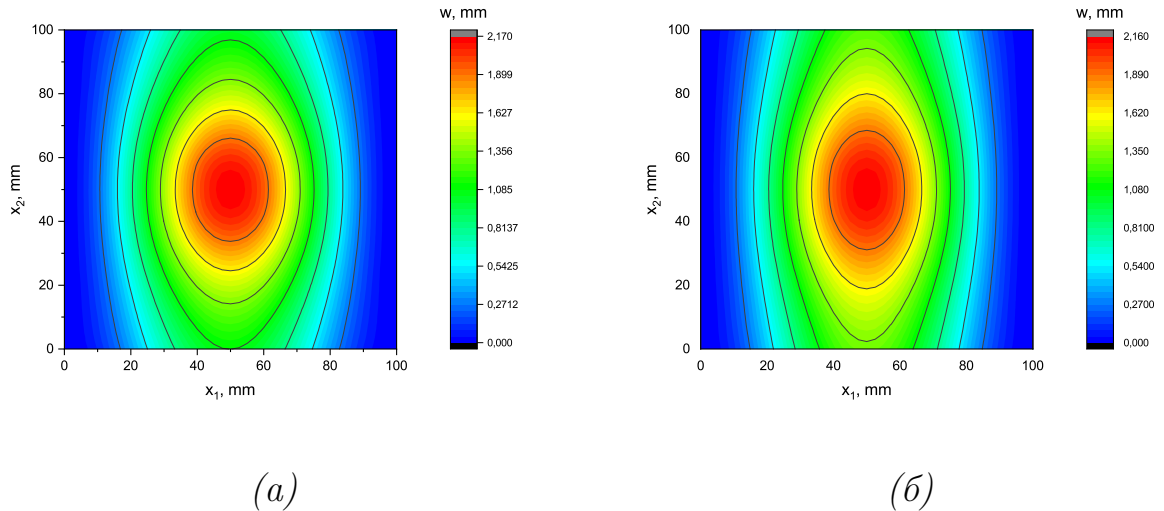


Рисунок 4.8 — Линии уровня прогиба без учета (а) и при учете (б) разномодульности

В последней серии вычислительных экспериментов было показано влияние направления армирования на прогиб пластины. Рассматривались пластины с углами армирования слоев $(0^\circ, 90^\circ)$ и $(90^\circ, 0^\circ)$ под действием штампа $\varphi_4 = 0.002$ при $0.03 < x_1 < 0.07$, $0.03 < x_2 < 0.07$ и $\varphi_4 = -0.001$ в остальных точках, жестко закрепленные во двум противоположным боковым сторонам. На рисунке 4.9 показан прогиб пластины с конфигурацией $(0^\circ, 90^\circ)$, а на рисунке 4.10 $(90^\circ, 0^\circ)$.

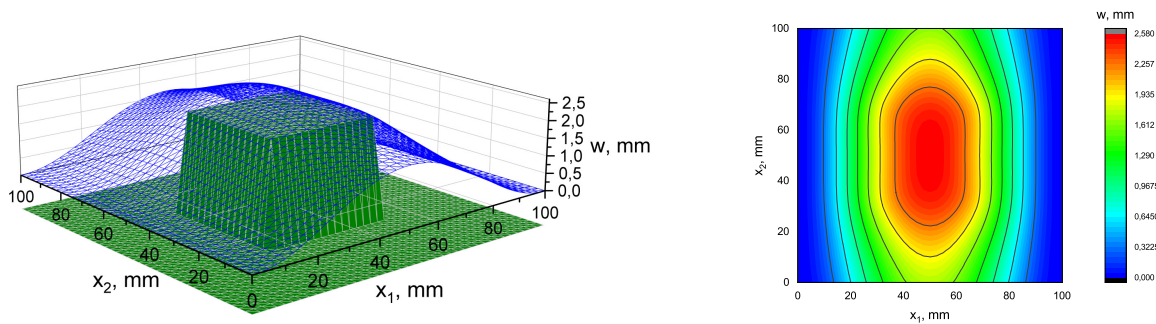


Рисунок 4.9 — Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев $(0^\circ, 90^\circ)$ под действием штампа φ_4

Отметим, что величина прогиба на свободной части границы значительно больше в случае армирования верхнего слоя под углом 90° к оси x_1 , поскольку пластина в этом случае закреплена в направлении, перпендикулярном направлению армирования растягиваемого слоя.

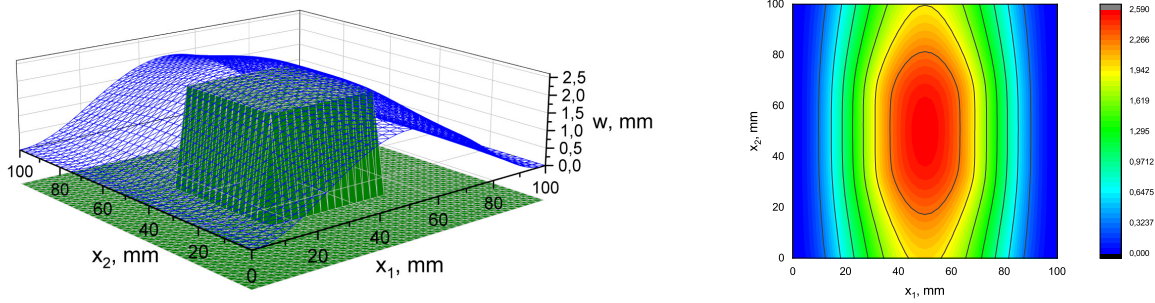


Рисунок 4.10 — Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев $(90^\circ, 0^\circ)$ под действием штампа φ_4

4.6 Выводы по главе 4

В четвертой главе рассматривается изгиб композитной пластины с предположением о существовании нейтральной поверхности. С помощью вариационного принципа Лагранжа получено дифференциальное уравнение прогиба, обобщающее уравнение Софи-Жермен. На основе метода конечных элементов с использованием треугольного элемента Белла получено численное решение уравнения прогиба и приводятся результаты расчетов изгиба слоистых пластин прямоугольной формы с разными направлениями укладки волокон. Описан вычислительный алгоритм решения контактной задачи для многослойной композитной пластины, учитывающий различное сопротивление материала растяжению и сжатию. Проведена серия вычислительных экспериментов, в результате которых показано влияние разномодульности и направления армирования на прогиб композитной пластины.

Глава 5. Напряженно-деформированное состояние пластины

5.1 Уравнение напряженно-деформированного состояния пластины

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние композитной пластины под действием произвольной системы сил. Такое состояние пластины будет объединять плоское напряженное состояние, рассмотренное в главе 3, и чистый изгиб, рассмотренный в главе 4. Аналогично описанному ранее будем считать, что пластина состоит из трансверсально-изотропных слоев и для нее выполняются следующие гипотезы Кирхгофа:

- прямые линии, перпендикулярные нейтральной поверхности, остаются прямыми после деформации;
- прямые линии, перпендикулярные нейтральной поверхности, остаются нормальными к нейтральной поверхности после деформации;
- толщина пластины не изменяется при деформации.

Поскольку в данном случае не предполагается наличие нейтральной поверхности в пластине, будем рассматривать совокупность деформаций срединной поверхности пластины и деформации, возникающие вследствие изгиба. Тогда вектор перемещений задается определяется образом:

$$u_1 = u(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = v(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w(x_1, x_2), \quad (5.1)$$

где $u(x_1, x_2), v(x_1, x_2), w(x_1, x_2)$ – функции, определяющие перемещение срединной плоскости. Компоненты тензора малых деформаций связаны с перемещениями следующей формулой:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Выпишем компоненты тензора малых деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Воспользуемся вариационным принципом Лагранжа и выпишем функционал упругой энергии:

$$\iint_{\Omega} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \Phi dx_3 - \vec{q}\vec{u} \right) dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left(\vec{Q}\vec{u} + M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds, \quad (5.3)$$

где Ω – двумерная область с границей Γ совпадающая с срединной поверхностью пластины, \vec{u} – вектор перемещений, $\vec{q}(x_1, x_2)$ – распределенная нагрузка, $\vec{Q}(x_1, x_2)$ – усилие на границе пластины, $M_n(x_1, x_2)$ – нормальный изгибающий момент на краях, $\partial/\partial n$ – оператор производной по направлению внешней нормали к границе, ds – элемент дуги со следующими главными краевыми условиями:

$$u = u_0(x_1, x_2), \quad v = v_0(x_1, x_2), \quad w = w_0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \gamma_0(x_1, x_2), \quad (5.4)$$

которые задают перемещения срединной поверхности пластины и углы поворота на границе.

Напомним результаты главы 3. Каждый отдельный слой композитной пластины при сжатии можно описать законом Гука для трансверсально изотропного материала

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma'_{11} \\ \sigma_{22} - \sigma'_{22} \\ \sigma_{12} - \sigma'_{12} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

и уравнением, описывающим связь дополнительных напряжений σ' , возникающих при растяжении композита вдоль волокон и собственных дефор-

маций жесткого контакта:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon_{22} - \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon_{12} - \varepsilon'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

На упругие постоянные действуют ограничения

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{E_2}{E_1}, \quad E_1 > \nu_1^2 E_2, \quad E_2 > 0, \quad G > 0 \quad (5.7)$$

в связи с требованиями положительной определенности и симметричности тензоров a и b .

Воспользовавшись определяющим уравнением композитного материала в общем виде (1.19) и подставив в него выражения для напряжений и деформаций, получим следующие формулы для связи напряжений и деформаций:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = (R^{-\alpha}) \begin{pmatrix} \frac{E_1(\varepsilon_{11}^\alpha + \nu_2 \varepsilon_{22}^\alpha)}{1 - \nu_1 \nu_2} + b(\varepsilon_{11}^\alpha - \Pi_{11}^\alpha) \\ \frac{E_2(\varepsilon_{22}^\alpha + \nu_1 \varepsilon_{11}^\alpha)}{1 - \nu_1 \nu_2} \\ 2G\varepsilon_{12}^\alpha \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = (R^{-\alpha}) \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{11}^\alpha - \pi_{11}}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_{22}^\alpha}{E_2} \\ \frac{\sigma_{22}^\alpha}{E_2} - \nu_1 \frac{\sigma_{11}^\alpha - \pi_{11}}{E_1} \\ \frac{\sigma_{12}^\alpha}{2G} \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

где

$$(R^\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ -\frac{\sin 2\alpha}{2} & \frac{\sin 2\alpha}{2} & \cos 2\alpha \end{pmatrix},$$

а также соответствующий потенциал напряжений:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1 - \nu_1\nu_2}{2} (E_1\varepsilon_{11}^2 + (\nu_1E_2 + \nu_2E_1)\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + E_2\varepsilon_{22}^2) + 2G\varepsilon_{12}^2 + \frac{b}{2}(\varepsilon_{11} - \Pi_{11})^2. \quad (5.10)$$

Норма, связанная с тензором b , равна:

$$|\varepsilon| = \sqrt{b\varepsilon_{11}^2 + \beta\varepsilon_{22}^2 + 4\gamma\varepsilon_{12}^2}, \quad (5.11)$$

а проекция тензора ε на конус C вычисляется следующим образом:

$$\Pi_{11} = \begin{cases} 0, & \text{при } \varepsilon_{11} > 0, \\ \varepsilon_{11}, & \text{при } \varepsilon_{11} \leq 0, \end{cases} \quad \Pi_{22} = \varepsilon_{22}, \quad \Pi_{12} = \varepsilon_{12}. \quad (5.12)$$

Покажем существование и единственность минимума функционала (5.3) в пространстве W_2^2 . Для этого воспользуемся теоремой Лакса-Мильграмма. Выпишем квадратичную часть функционала (5.3):

$$J_{\Pi}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon : (a + b) : \varepsilon - \varepsilon : b : \Pi(\varepsilon) dx_3 \right) dx_1 dx_2 \quad (5.13)$$

Поскольку оператор проекции в этой задаче определен как

$$\Pi_{11} = \begin{cases} 0, & \text{при } \varepsilon_{11} > 0, \\ \varepsilon_{11}, & \text{при } \varepsilon_{11} \leq 0, \end{cases} \quad \Pi_{22} = \varepsilon_{22}, \quad \Pi_{12} = \varepsilon_{12}. \quad (5.14)$$

можно рассмотреть две случая, когда $\Pi_{11} = 0$:

$$J_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon : a : \varepsilon dx_3 \right) dx_1 dx_2, \quad (5.15)$$

и при $\Pi_{11} = \varepsilon_{11}$:

$$J_2(\varepsilon) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon : (a + b) : \varepsilon dx_3 \right) dx_1 dx_2. \quad (5.16)$$

Матрица a

$$\begin{pmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 & 0 \\ \nu_1 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - \nu_1 \nu_2)G \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

является положительно определенной. Поскольку дополнительная жесткость появляется только при растяжении вдоль волокон, то матрица b имеет только один ненулевой коэффициент $b_{11} > 0$ и матрица

$$\begin{pmatrix} E_1 + b_{11} & \nu_2 E_1 & 0 \\ \nu_1 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - \nu_1 \nu_2)G \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

также положительно определена. Отсюда при любых ε

$$0 \leq \varepsilon : a : \varepsilon \leq \varepsilon : (a + b) : \varepsilon, \quad (5.19)$$

поэтому ограничим снизу (5.13) интегралом без использования проектора:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \iint_{\Omega} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon : a : \varepsilon dx_3 \right) dx_1 dx_2 \leq \\ &\leq \iint_{\Omega} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon : (a + b) : \varepsilon - \varepsilon : b : \Pi(\varepsilon) dx_3 \right) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon : a + b : \varepsilon dx_3 = \\ & = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} (E_1 \varepsilon_{11}^2 + (\nu_1 E_2 + \nu_2 E_1) \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + E_2 \varepsilon_{22}^2) + 2G \varepsilon_{12}^2 dx_3. \quad (5.21) \end{aligned}$$

Разобьем на отдельные слагаемые и проинтегрируем по x_3 . Слагаемое при ε_{11}^2 :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} E_1 \varepsilon_{11}^2 dx_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} E_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_3 = \\ &= h \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} E_1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Слагаемое при $\varepsilon_{11} \varepsilon_{22}$:

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} (\nu_1 E_2 + \nu_2 E_1) \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} dx_3 = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} (\nu_1 E_2 + \nu_2 E_1) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) dx_3 = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} (\nu_1 E_2 + \nu_2 E_1) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - x_3 \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \right. \\ & \left. + x_3^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) dx_3 = \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} (\nu_1 E_2 + \nu_2 E_1) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} h + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{h^3}{12} \right). \end{aligned}$$

Слагаемое при ε_{22}^2 :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} E_2 \varepsilon_{22}^2 dx_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} E_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_3 = \\ &= h \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} E_2 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Слагаемое при ε_{12}^2 :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} 2G \varepsilon_{12}^2 dx_3 &= G \int_{-h/2}^{h/2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 dx_3 = \\ &= G \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 - 2x_3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + x_3^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 dx_3 = \\ &= Gh \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + G \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = \\ &= Gh \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + Gh \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + 2Gh \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} + G \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Подставим вычисленный результат в интеграл по всей области Ω и разобьем его на два интеграла, содержащий слагаемые с функциями u и v , и содержащий функцию w :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} \left(E_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 h + (\nu_1 E_2 + \nu_2 E_1) \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} h + E_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 h \right) + \\ + Gh \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + Gh \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + 2Gh \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 dx_2; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2} \left(E_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 h + (\nu_1 E_2 + \nu_2 E_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{h^3}{12} + \right. \\ \left. + E_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 h \right) + G \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 dx_1 dx_2.$$

Вид полученных интегралов соответствует описанным А.М. Хлудневым в работе [91] для моделей анизотропных оболочек. В этой работе показано, что такие билинейные формы обладают свойством коэрцитивности, а поскольку функционал

$$\iint_{\Omega} \vec{q} \vec{u} dx_1 dx_2 \quad (5.22)$$

является линейным и непрерывным, то задача минимизации функционала (5.3) обладает единственным решением в пространстве W_2^2 .

Воспользуемся методом начальных напряжений и заменим определяющее уравнение итерационной формулой:

$$\sigma^k = (a + b) : \varepsilon^k - \Delta \sigma^{k-1}, \quad \Delta \sigma^{k-1} = b : \Pi(\varepsilon^{k-1}),$$

на первом шаге которой тензор $\Delta \sigma^0$ считается тождественно равным нулю.

На k -ом шаге алгоритма задача сводится к минимизации следующего интегрального функционала:

$$\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^k : (a + b) : \varepsilon^k - b : \Pi(\varepsilon^{k-1}) : \varepsilon^k dx_3 - 2\vec{q} \vec{u} \right) dx_1 dx_2 - \\ - \int_{\Gamma} \left(\vec{Q} \vec{u} + M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds. \quad (5.23)$$

Для дальнейшего перехода к методу конечных элементов обозначим матрицу $a + b$ как K и запишем функционал в перемещениях:

$$J(\hat{u}) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \hat{u}^T S^T K S \hat{u} - b \Pi (S \hat{u}^{k-1}) S \hat{u} dx_3 - 2\vec{q}\hat{u} \right) dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left(\vec{Q}\hat{u} + M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds, \quad (5.24)$$

где $\hat{u} = (u, v, w)$ – вектор перемещений срединной поверхности, S – дифференциальный оператор, связывающий перемещения и деформации, равный

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & -x_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & -x_3 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} & -x_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Такое представление является абстрактным, поскольку применение оператора S к матрице жесткости некорректно, но оно удобно для дальнейшего перехода к разностным операторам, получаемым с помощью метода конечных элементов.

Для численного решения воспользуемся методом конечных элементов. В качестве конечного элемента будем использовать треугольный элемент с 24-мя степенями свободы, тремя узлами и следующими величинами заданными в узлах: $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

Построим нерегулярную треугольную сетку в области Ω . Для искомого вводится вектор обобщенных координат U размерности $8n$, где n – число узлов сетки.

Перейдем к дискретному аналогу функционала (5.1). Представим интеграл в виде суммы интегралов по всем треугольникам сетки:

$$J(U) = \sum_{l=1}^m \iint_{\Omega_l} \int_{-h/2}^{h/2} (U_l^k)^T S^T K S U_l^k - b \Pi(SU_l^{k-1}) S U_l^k dx_3 - q_l U_l^k dx_1 dx_2, \quad (5.25)$$

где Ω_l — область l -го конечного элемента, U_l — локальный вектор обобщенных координат, S_l — локальная матрица связи перемещений и деформаций, K — матрица упругих постоянных, Q — глобальный вектор обобщенных сил, верхний индекс T означает транспонирование.

Поскольку вычисление оператора проектора зависит от x_3 , матрица жесткости зависит от текущей деформации пластины, поэтому интеграл по толщине пластины также вычисляется численно и в зависимости от того находится каждый слой пластины в состоянии сжатия или растяжения происходит учет дополнительной жесткости с помощью оператора проектора.

Компоненты тензора деформаций с предыдущего шага ε^{k-1} восстанавливаются по значениями вектора обобщенных координат, полученных на предыдущем шаге.

Также была решена задача деформации пластины жестким штампом с использованием описанной в этой главе модели. Напомним постановку задачи изгиба пластины жестким штампом. Воздействие штампа моделируется с помощью ограничения в виде неравенства

$$w(x_1, x_2) \geq \varphi(x_1, x_2), \quad (5.26)$$

где $w(x_1, x_2)$ перемещение по оси x_3 срединной поверхности пластины, а функция $\varphi(x_1, x_2)$ задает форму штампа. Для получения перемещений, решим задачу минимизации функционала (5.3) с главными краевыми условиями (5.4) и ограничением (5.26). Воспользуемся методом множителей Лагранжа и выпишем Лагранжиан в виде суммы интегралов по элементам

сетки:

$$J(U) = \sum_{l=1}^m \iint_{\Omega_l} \int_{-h/2}^{h/2} ((U_l)^T S^T K S U_l - b\Pi(SU_l^{k-1})SU_l) dx_3 - \\ - Q_l U_l + \Lambda^T (\Phi_l - U_l) dx_1 dx_2, \quad (5.27)$$

где Ω_l — область l -го конечного элемента, U^l — локальный вектор обобщенных координат, S_l — локальная матрица связи перемещений и деформаций, K — матрица упругих постоянных, Q — глобальный вектор обобщенных сил, Λ — вектор множителей Лагранжа, Φ — вектор значений функции определяющей форму штампа с элементами $\Phi_i = \varphi(x_i, y_i)$, верхний индекс T означает транспонирование. Корректность этой задачи показана в разделе 4.4 с помощью теоремы Куна-Таккера и выполнении условия Слейтера для U и Φ . Опишем алгоритм Удзавы для нахождения седловой точки. Алгоритм заключается в последовательном вычислении $\Lambda^1, U^1, \Lambda^2, U^2, \dots$, причем U^i получаем также итерационным алгоритмом минимизируя функционал (5.27).

1. Выбирается произвольное начальное приближение Λ^0 .
2. При фиксированном Λ^i определим U^i , при котором достигается минимум Лагранжиана, как решение уравнения:

$$\frac{\partial L}{\partial U} = 0. \quad (5.28)$$

Для этого воспользуемся методом начальных напряжений:

- (а) Возьмем перемещения U_l^0 равными нулю.
- (б) Получим U_l^k как решение системы

$$U^T S K S - b\Pi(SU^{k-1})S - Q_l - \Lambda = 0. \quad (5.29)$$

3. Определим Λ^{i+1} как решение уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial \Lambda} = 0. \quad (5.30)$$

Итерации шага 2 проводятся до выполнения условия $\max |U_i^k - U_i^{k-1}| < \epsilon_u$, а шагов 2 и 3 до выполнения условия $\max |\Lambda_i^k - \Lambda_i^{k-1}| < \epsilon_\Lambda$, где ϵ_U и ϵ_Λ заданные точности.

Преимуществом использования этой модели в задаче деформирования пластины жестким штампом в сравнении с моделью, описанной в предыдущей главе, также является возможность задания мембранных усилий, воздействующих на пластину.

5.2 Результаты вычислений

При проведении вычислительных экспериментов были рассмотрены однослойные и двухслойные композитные пластины с толщиной слоев $h = 5$ мм. Параметры упругости были взяты для углепластика с объемным содержанием армирующего углеграфитового волокна

$$E_1^+ = 114, E_1^- = 57, E_2 = 48, G = 3.5 \text{ ГПа}, \nu_1 = 0.19, \nu_2 = 0.02.$$

В первой серии экспериментов рассматривалось плоское напряженное состояние пластины. На рисунке 5.1 представлены перемещения по оси x для однослойной пластины размером 0.1×0.1 м. с консольным закреплением по левой стороне и нагружением по правой стороне пластины. Из рисунка видно, что величина максимального перемещения по оси x отличается приблизительно в два раза в зависимости от знака нагружения, что соответствует отношению модулей упругости при растяжении сжатии вдоль волокон.

Второй серией вычислительных экспериментов был расчет чистого изгиба консольно закрепленной по контуру квадратной пластины. Расчеты проводились для однослойной пластины толщиной 5 мм., размером 0.1×0.1 м., на центр которой действовала сосредоточенная сила величиной 3 кН.

Проведено сравнение с расчетом, в котором не проводились сдвиг нейтральной поверхности и перерасчет с учетом областей растяжения-сжатия.

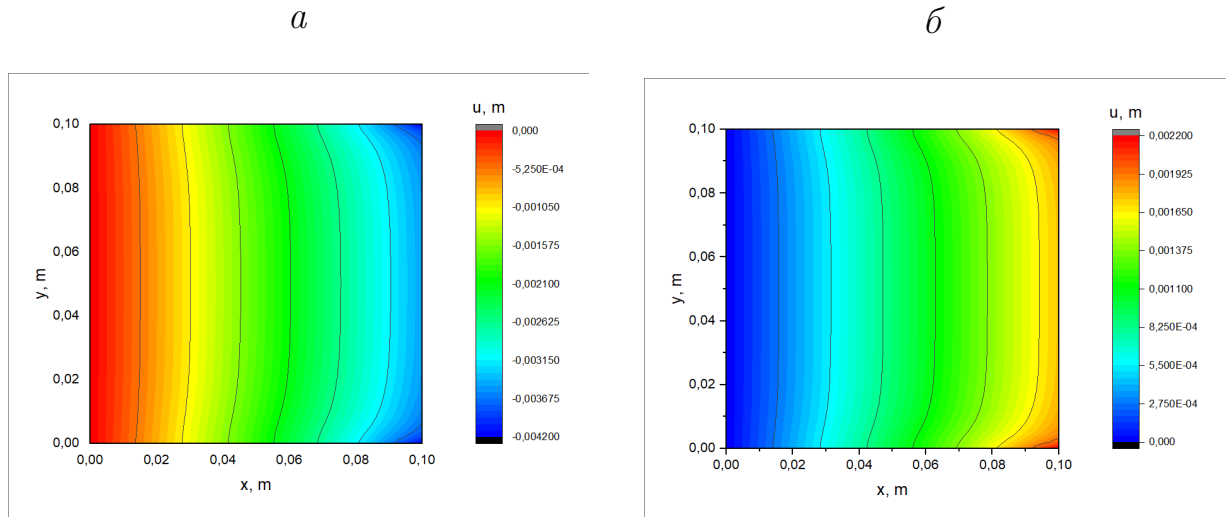


Рисунок 5.1 — Перемещение пластины в плоском случае при сжатии (*а*) и растяжении (*б*)

В этом случае пластина считалась более жесткой и прогиб уменьшается. Результаты вычислительного эксперимента приведены на рисунке 5.2. Прогиб пластины при неучете изменения областей растяжения-сжатия составил 82%.

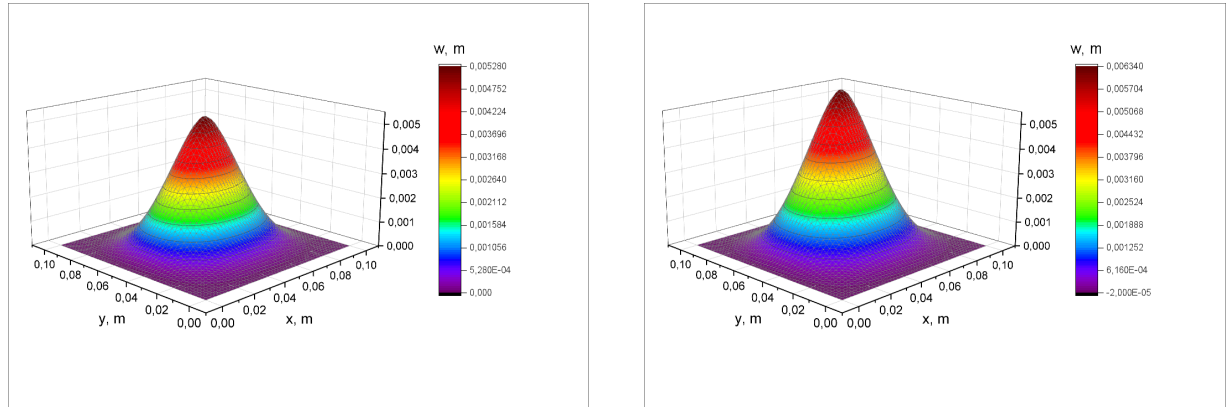


Рисунок 5.2 — Прогиб пластины без учета и при учете сдвига нейтральной поверхности

Проведено сравнение с результатами, полученными с помощью программного комплекса для расчетов методом конечных элементов Abaqus. Результаты расчета приведены на рисунке 5.3. Поскольку в Abaqus отсутствует возможность учета разномодульности, пластина из второй серии вычислительных экспериментов моделировалась как двухслойный композит со слоями толщиной 2.5 мм. Величина прогиба составила 76% от про-

гиба, полученного при расчете, учитывающем разномодульность и сдвиг нейтральной поверхности.

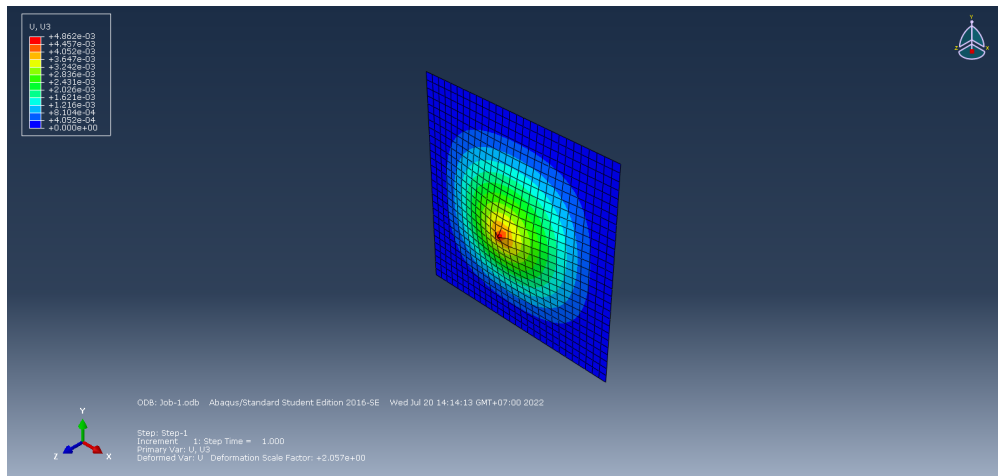


Рисунок 5.3 — Расчет чистого изгиба пластины в комплексе Abaqus

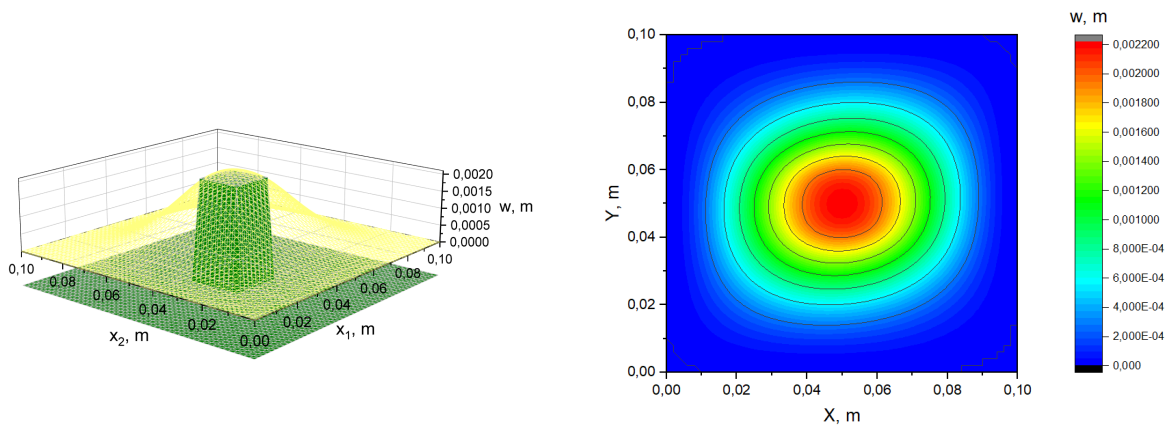


Рисунок 5.4 — Прогиб консольно-закрепленной пластины под действием жесткого штампа

В эту серию также входили расчеты деформации пластины жестким штампом. Пример расчета приведен на рисунке 5.4.

Следующей серией вычислительных экспериментов были расчеты для пластин под действием систем сил, при которых положение нейтральной поверхности различается в разных областях пластины или нейтральная поверхность отсутствует. На рисунке 5.5 показан график и линии уровня прогиба для консольно закрепленной однослойной пластины под действием двух сил. Для моделирования была выбрана однослойная пластина, толщиной 5 мм., размером 0.1×0.1 м., сосредоточенные силы величиной -30000 Н

и 30000 Н действуют на пластину в точках (0.025, 0.05) и (0.075, 0.05) соответственно.

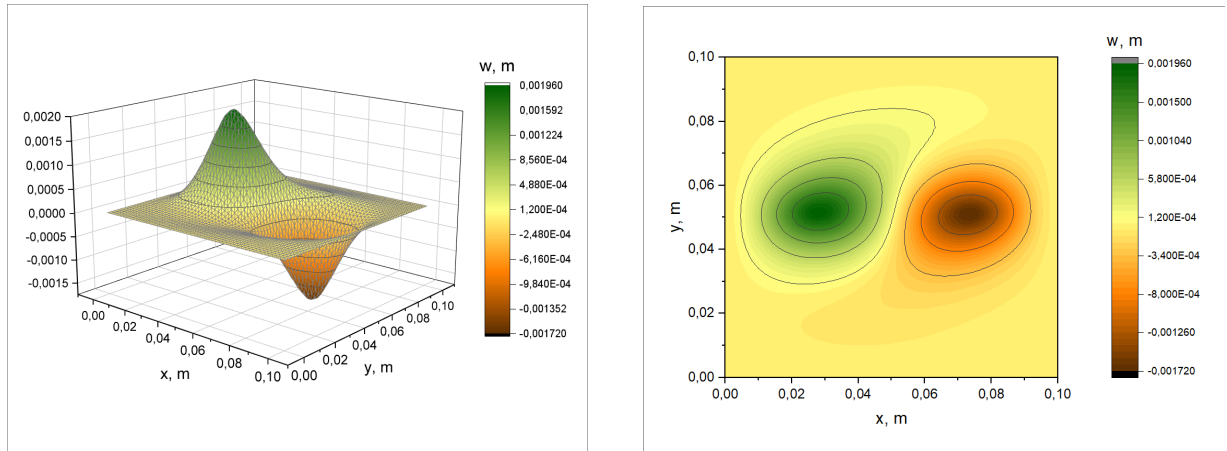


Рисунок 5.5 — Прогиб консольно-закрепленной пластины под действием двух сил

Проведено сравнение с расчетом в программном комплексе Abaqus. Результат расчета приведен на рисунке 5.6. Максимальное значение прогиба составило 150%. Такое расхождение объясняется невозможностью учета сдвига нейтральной поверхности и осреднением изгибных жесткостей в модели композита, используемой комплексом Abaqus.

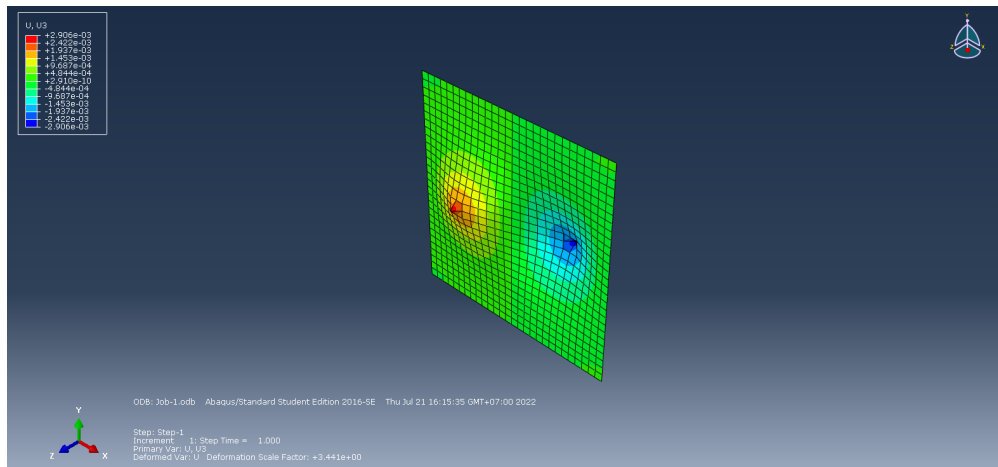


Рисунок 5.6 — Расчет прогиба консольно-закрепленной пластины под действием двух сил в комплексе Abaqus

Другой пример напряженно-деформированного состояния пластины, при котором положение нейтральной поверхности не постоянно, приведен на рисунке 5.7. На нем изображен график и линии уровня прогиба однослойной композитной пластины толщиной 5 мм., размером 0.1×0.1 м. с

закреплением вдоль прямой $x = 0.05$ под действием двух сосредоточенных сил в точках $(0, 0.05)$ и $(0.1, 0.05)$. Расчет в системе Abaqus приведен на рисунке 5.8.

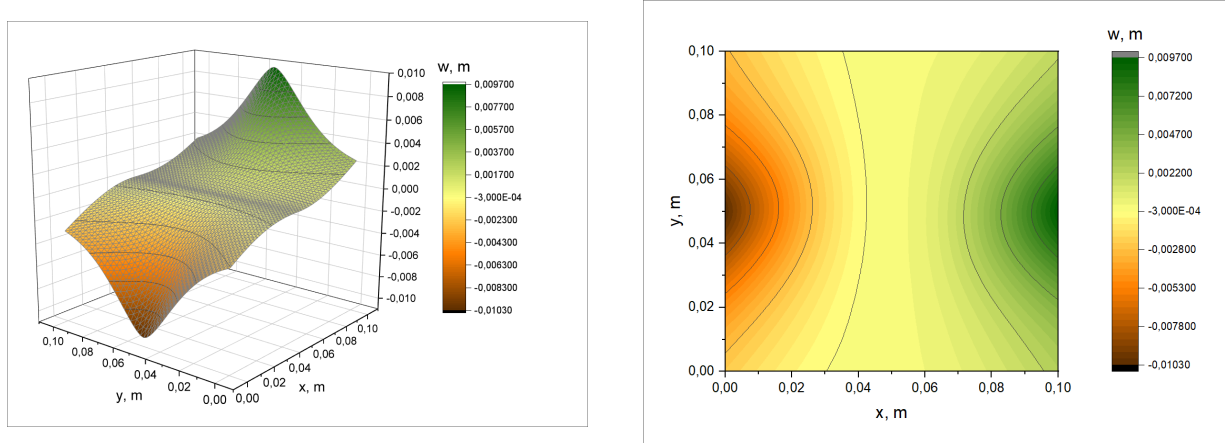


Рисунок 5.7 — Прогиб пластины с закреплением в центре под действием двух сил

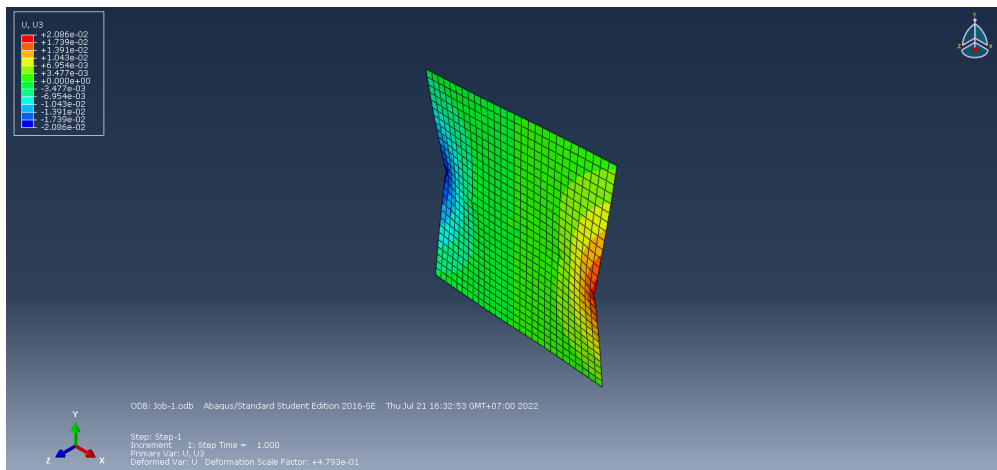


Рисунок 5.8 — Расчет прогиба пластины с закреплением в центре под действием двух сил в комплексе Abaqus

5.3 Выводы по главе 5

В пятой главе рассматривается напряженно-деформированное состояние композитной пластины под действием произвольной системы сил, при

которой деформация представляет собой совокупность деформации срединной поверхности и деформаций, возникающих вследствие изгиба пластины. В рассматриваемой постановке отсутствует предположение о существовании нейтральной поверхности, что позволяет описывать пластины под действием более сложных систем нагружения и не ограничивает класс задач.

На основе результатов предыдущих глав получен функционал упругой энергии с использованием проектора, учитывающий различное сопротивление композита растяжению и сжатию. При помощи метода начальных напряжений составлена схема расчета с использованием итерационной формулы минимизации функционала упругой энергии на каждом шаге. Численное решение задачи получено на основе метода конечных элементов. В качестве конечного элемента использовался треугольный элемент с тремя узлами и 24-мя степенями свободы.

Описаны серии вычислительных экспериментов, в которых проведены расчеты для плоского напряженного состояния пластины, чистого изгиба, а также расчеты напряженно деформированного состояния пластины под действием двух сил, при которых нейтральная поверхность не существует или ее положение не постоянно по толщине пластины. Проведено сравнение с результатами полученными с помощью программного комплекса для расчетов методом конечных элементов Abaqus.

Заключение

В рамках работы решены следующие задачи:

1. Предложена и реализована методика идентификации (калибровки) модуля Юнга волокнистого композитного материала при сжатии на основе регистрации упругой линии консольно изогнутого тонкого стержня в лабораторных условиях, численного решения задачи сильного изгиба с последующим решением обратной задачи определения цилиндрической жесткости стержня по методу наименьших квадратов. С помощью этой методики показано, что для углепластиков, применяемых в аэрокосмической промышленности, модули Юнга при сжатии и при растяжении могут значительно различаться.
2. Построены новые пространственные определяющие уравнения упругого композита, по-разному сопротивляющегося растяжению и сжатию, термодинамическая корректность которых обеспечивается наличием выпуклых потенциалов напряжений и деформаций. Разработан итерационный алгоритм для численного решения методом конечных элементов задач деформирования многослойных композитных пластин при плоском напряженном состоянии. В задаче для пластины с круговым вырезом проведено сравнение решений с учетом и без учета разнсопротивляемости, в результате которого установлено существенно разное распределение напряжений и деформаций вблизи выреза.
3. Разработаны конечноэлементные алгоритмы для расчета изгиба слоистых пластин с учетом различия сопротивлений материала растяжению и сжатию в рамках предположения о существовании нейтральной плоскости и при произвольном распределении внешних сил и моментов сил. Для демонстрации работоспособности алгоритмов выполнены методические расчеты серии задач изгиба пластин под действием системы сосредоточенных сил и контактных задач изгиба пластин штампами произвольной формы.

В дальнейшем предложенные методы возможно развивать с целью учета дополнительных эффектов, возникающих при деформации композита, разработки вязко-упругой модели композитного материала и моделирования механизмов разрушения.

Приложение А

Результаты лабораторных измерений стрелы консольного прогиба балок

Таблица А.1

Результаты лабораторных измерений стрелы консольного прогиба балок различных длин

Эксперимент	1	2	3	4	5	6	7
l , мм	400	231	200	151	126	111	100
P , Н	0.6	2.4	3.0	5.0	6.0	7.8	9.6
w , мм	239	154	131.5	96.5	82	75	65.5
w_{calc} , мм	253	159	135	100	79	70	63
δ	0.0585	0.0324	0.0266	0.0362	0.0365	0.066	0.0381

Приложение Б

Копия свидетельства о регистрации
программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022665584

**Расчет напряженно-деформированного состояния
композитной пластины с учетом разномодульности**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
научное учреждение "Федеральный исследовательский
центр "Красноярский научный центр Сибирского
отделения Российской академии наук" (RU)*

Автор(ы): *Петраков Игорь Евгеньевич (RU)*



Заявка № 2022664530

Дата поступления 04 августа 2022 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 18 августа 2022 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'Ю.С. Зубов'.

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



RU2022665584

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2022665584 Дата регистрации: 18.08.2022 Номер и дата поступления заявки: 2022664530 04.08.2022 Дата публикации и номер бюллетеня: 18.08.2022 Бюл. № 8 Контактные реквизиты: nggoryaeva@yandex.ru, 83912905482	Автор(ы): Петраков Игорь Евгеньевич (RU) Правообладатель(и): Федеральное государственное бюджетное научное учреждение "Федеральный исследовательский центр "Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук" (RU)
--	---

Название программы для ЭВМ:
Расчет напряженно-деформированного состояния композитной пластины с учетом разномодульности

Реферат:

Разработанная программа предназначена для проведения расчетов напряженно-деформированного состояния композитной пластины, состоящей из слоев однонаправленных волокнистых композитов. Программа позволяет получить деформации пластины под действием системы сил, заданных на границе пластины. В программе используется авторская модель волокнистого композита, основанная на обобщенном реологическом методе. Для численной реализации модели используется метод конечных элементов. Входные данные считываются из следующих файлов: "mesh.txt" - содержит информацию о конечно-элементной сетке, "load.txt" - описание системы сил, действующих на платину, "bound.txt" - описание граничных условий, "material.txt" - упругие характеристики пластины. Описание форматов файлов входных данных дано в файле "readme.txt". Программа требует следующие пакеты: math, scipy, numpy, matplotlib. Тип ЭВМ: IBM PC-совмест. ПК; ОС: Windows 8x86, Windows 8x64 и выше.

Язык программирования: Python

Объем программы для ЭВМ: 36 КБ

Список рисунков

1.1	Схема упругой среды	22
1.2	Модель Максвелла	23
1.3	Модель Кельвина-Фойгта	23
1.4	Жесткий контакт	24
1.5	Жесткий контакт с обратным включением	26
1.6	Реологическая схема волокнистого композита	27
2.1	Изгибное состояние балки	40
3.1	Линии уровня деформаций в однослойной пластине с армированием под углом $\alpha = 45^\circ$ под действием касательных напряжений на границе	50
3.2	Линии уровня деформаций в однослойной пластине с армированием под углом $\alpha = -45^\circ$ под действием касательных напряжений на границе	51
3.3	Линии уровня деформаций в однослойной пластине, армированной волокнами под углом $\alpha = 0^\circ$, под действием нормальных напряжений σ_{11} на боковых сторонах пластины	52
3.4	Линии уровня деформаций в однослойной пластине, армированной волокнами под углом $\alpha = 45^\circ$, под действием нормальных напряжений σ_{11} на боковых сторонах пластины	53
3.5	Линии уровня деформаций в двухслойной пластине, армированной волокнами под углами $\alpha_1 = 0^\circ$ и $\alpha_2 = 45^\circ$, под действием нормальных напряжений σ_{11} на боковых сторонах пластины	54
3.6	Линии уровня деформаций в трехслойной пластине, армированной волокнами под углами $\alpha = 45^\circ, 0^\circ, -45^\circ$, под действием нормальных напряжений σ_{11} на боковых сторонах пластины	55
4.1	Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев $(0^\circ, 90^\circ)$	69
4.2	Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев $(90^\circ, 0^\circ)$	70

4.3	Прогиб двухслойной пластины ($90^\circ, 0^\circ$) без учета разномодульности	70
4.4	Прогиб двухслойной пластины ($90^\circ, 0^\circ$) со смещенной нагрузкой с учетом (<i>a</i>) и без учета (<i>б</i>) разного сопротивления материала	71
4.5	Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев ($0^\circ, 90^\circ$) под действием штампа φ_1	75
4.6	Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев ($0^\circ, 90^\circ$) под действием штампа φ_2	76
4.7	Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев ($90^\circ, 0^\circ$) под действием штампа φ_3 без учета разномодульности	76
4.8	Линии уровня прогиба без учета (<i>a</i>) и при учете (<i>б</i>) разномодульности	77
4.9	Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев ($0^\circ, 90^\circ$) под действием штампа φ_4	77
4.10	Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев ($90^\circ, 0^\circ$) под действием штампа φ_4	78
5.1	Перемещение пластины в плоском случае при сжатии (<i>a</i>) и растяжении (<i>б</i>)	91
5.2	Прогиб пластины без учета и при учете сдвига нейтральной поверхности	91
5.3	Расчет чистого изгиба пластины в комплексе Abaqus	92
5.4	Прогиб консольно-закрепленной пластины под действием жесткого штампа	92
5.5	Прогиб консольно-закрепленной пластины под действием двух сил	93
5.6	Расчет прогиба консольно-закрепленной пластины под действием двух сил в комплексе Abaqus	93
5.7	Прогиб пластины с закреплением в центре под действием двух сил	94
5.8	Расчет прогиба пластины с закреплением в центре под действием двух сил в комплексе Abaqus	94

Список таблиц

2.1	Характеристики отдельных слоев	37
2.2	Максимальная расчетная жесткость	38
2.3	Результаты лабораторных измерений стрелы консольного прогиба балок различной толщины	41
A.1	Результаты лабораторных измерений стрелы консольного прогиба балок различных длин	98

Список литературы

1. Амбарцумян, С.А. К разномодульной теории упругости / С.А. Амбарцумян, А.А. Хачатрян // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1966. – №6. С. 64–67.
2. Амбарцумян, С.А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию / С.А. Амбарцумян, А.А. Хачатрян // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1966. – №2. – С. 44–53.
3. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. – 1982. – 320 с.
4. Амбарцумян, С.А. Осесимметричная задача о круговой цилиндрической оболочке из материалов с различной жесткостью на растяжение и сжатие // Известия Академии наук СССР. Механика. – 1965. – Т. 4. – С. 77-85.
5. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания / А.Н. Андреев, Ю.В. Немировский. – Новосибирск: Наука. – 2001. – 288 с.
6. Аннин, Б.Д. Механика деформирования и оптимальное проектирование слоистых тел: монография / Б.Д. Аннин. – Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики им. М. А. Лаврентьева. – Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики. – 2005. – 203 с.
7. Аннин, Б.Д. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций / Б.Д. Аннин, А.Л. Каламкаров, А.Г. Колпаков, В.З. Партон. – Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. – 1993. – 253 с.
8. Банщикова, И.А. Деформирование элементов конструкций из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в сдвиго-

- вом направлении / И.А. Банщикова, И.Ю. Цвелодуб, Д.М. Петров // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157. – №3. – С. 34-41.
9. Банщикова, И.А. Расчет пластин из упрочняющегося материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести / И.А. Банщикова, А.Е. Муравьева, И.Ю. Цвелодуб // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). – 2014. – №4(65). – С. 68-77.
 10. Батаев А.А., Батаев В.А. Композиционные материалы: строение, получение, применение / А.А. Батаев, В.А. Батаев. – Новосибирск: Изд-во НГТУ. – 2002. – 384 с.
 11. Бессонов, Д.Е. Разносопротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров / Д.Е. Бессонов, Ю.П. Зезин, Е.В. Ломакин // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, №4. – С. 9-13.
 12. Буланов, И.М. Технология ракетных и аэрокосмических конструкций из композиционных материалов / И.М. Буланов, В.В. Воробей. – М.:МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1998. – 516 с.
 13. Буренин, А.А. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / А.А. Буренин, В.М. Ярушина // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : к 75-летию со дня рождения академика Е.И. Шемякина : сб. науч. тр. – М.:ФИЗМАТЛИТ/ – 2006. – С. 100-106.
 14. Бушманов, С.Б. Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения / С.Б. Бушманов, Ю.В. Немировский // Механика композитных материалов. – 1983. – №2. – С. 278-284.
 15. Вильдеман, В.Э. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / В.Э. Вильдеман, Ю.В. Соколкин,

- А.А. Ташкинов. – Под ред. Ю. В. Соколкина. – М.: Наука. Физматлит. – 1997. – 288 с.
16. Вохмянин, И.Т. Вторые предельные состояния трехслойных круглых и кольцевых пластинок / И.Т. Вохмянин, Ю.В. Немировский // Безопасность и живучесть технических систем: Тр. III Всерос. науч. конф. (Красноярск, 21-25 сент. 2009 г.). – Красноярск:ИВМ СО РАН. – 2009. – С. 22-27.
 17. Голушко, С.К. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения / С.К. Голушко, Ю.В. Немировский. – М.:ФИЗМАТЛИТ. – 2008. – 432 с.
 18. Деревянко, Н.И. Свойство армированного полистирола при кратковременном растяжении, сжатию и изгибе / Н.И. Деревянко // Механика полимеров. – 1968. – №6. – С. 1059.
 19. Дзако, М. Механика разрушения композиционных материалов / М. Дзако, Т. Фудзии. Пер. с японск. М.: Мир. – 1982. – 232 с.
 20. Иванов, Д.А. Дисперсноупрочненные волокнистые и слоистые неорганические композиционные материалы / Д.А. Иванов. – М.:МГИУ. – 2010. – 228 с.
 21. Качанов, Л.М. Основы механики разрушения / Л.М. Качанов // М.: Наука. – 1974. – 312 с.
 22. Кончиков, В.В. Упругие и прочностные свойства пенопласта с искривленными ячейками / В.В. Кончиков, В.В. Гурьев // Механика композитных материалов. – 1983. – №1. – С. 3-6.
 23. Коробейников, С.Н. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатию / С.Н. Коробейников, Б.В. Горев, А.И. Олейников, К.С. Бормотин // Вычислительные методы и программирование. – 2008. – №9. – С. 346-365.

24. Кравчук, А.С. Механика полимерных композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы / А.С. Кравчук, В.П. Майборода, Ю.С. Уржумцев. – М.: Наука. Глав. ред физ.-мат. лит. – 1985. – 304 с.
25. Кристенсен, Р.М. Введение в механику композитов / Р.М. Кристенсен. – М.: Мир. – 1982. – 336 с.
26. Куперман, А. М. Высокопрочные армированные пластики / А. М. Куперман, Ю. А. Горбаткина, Р. А. Турусов // Химическая физика. – 2012. – Т. 31. – №8. – С. 50.
27. Ломакин, Е.В. Определяющие соотношения механики разномодульных материалов / Е.В. Ломакин // М.:ИПМ АН СССР. – 1980. – 64 с.
28. Ломакин, Е.В. Разномодульность композитных материалов / Е.В. Ломакин // Механика композитных материалов. – 1981. – №1. – С. 23-29.
29. Ломакин, Е.В. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного материала / Е.В. Ломакин, Ю.Н. Работнов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – №6. – С. 29–34.
30. Любин, Д. Справочник по композиционным материалам: В 2-х кн. Кн. 1 [Пер. с англ.] / Д.Любин. – М.: Машиностроение. 1988. – 448 с.
31. Малкин, А.Я. Реология. Концепции, методы, приложения / А.Я. Малкин, А.И. Исаев. – М.: Профессия. – 2007. – 560 с.
32. Матченко, Н.М. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах / Н.М. Матченко, Л.А. Толоконников // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1968. – №6. – С. 108–110.
33. Мешков, Е.В. Деформирование ортогонально армированных органо-пластиков при одноосном растяжении и сжатии / Е.В. Мешков, В.И. Кулик, З.Т. Упитис, А.С. Нилов // Механика композитных материалов. – 1987. – №4. – С. 609-615.

34. Мэтьюз, Ф. Композитные материалы. Механика и технология / Ф. Мэтьюз, Р. Ролингс. – М.: Техносфера. – 2004. – 408 с.
35. Немировский, Ю. В. Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова. – Сибирский федеральный университет. — Красноярск. – 2010. — 135 с.
36. Немировский Ю.В. Рациональное проектирование армированных конструкций / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский. – Новосибирск: Наука. – 2002. – 487 с.
37. Нужный, Г.А. Влияние расположения и содержания базальтового наполнителя на механические характеристики композиционных материалов на основе ледяной матрицы / Г.А. Нужный, Д.В. Гриневич, В.М. Бузник и др. // Материаловедение. – 2019. – №11. – С. 36-42.
38. Нужный, Г.А. Особенности испытания армированных материалов с ледяной матрицей / Г.А. Нужный, Д.В. Гриневич, В.М. Бузник, Д.Н. Ландик // XI Всероссийская конференция по испытаниям и исследованиям свойств материалов “ТестМат” по тематике “Физикомеханические испытания, прочность, надежность, высокотемпературные испытания”. – 2019. – С. 252-266.
39. Олейников, А.И. Моделирование процесса формобразования металлических изделий в процессе ползучести с учетом разных свойств материала при растяжении и сжатии в MSC.Marc и кластерные решения для высокопроизводительных вычислений / А.И. Олейников, С.Н. Коробейников, С.В. Серый, К.С. Бормотин // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. Труды международной научно-технической конференции. В двух томах. – М.: МИИТ. – Т. 2. – С. 311-315.
40. Олейников, А.И. О влиянии типа конечно-элементного представления при моделировании формобразования панелей из анизотропных разносопротивляющихся сплавов / А.И. Олейников, С.Н. Коробейников,

- К.С. Бормотин // XXXIII Дальневосточная математическая школа-семинар имени Е.В. Золотова: тезисы докладов. – Владивосток: Изд-во Дальнаука. – 2008. – С. 223.
41. Писанецки, С. Технология разреженных матриц / С. Писанецки. – М.: Мир. – 1988. – 410 с.
 42. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука. – 1979. – 744 с.
 43. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука. – 1966. – 752 с.
 44. Рейнер, М. Реология. Пер. с англ. / М. Рейнер. – М.: Наука. – 1965. – 224 с.
 45. Садовская, О.В. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О.В. Садовская, В.М. Садовский. М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2008. – 368 с.
 46. Соколкин, Ю.В. Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел / Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов. – М.: Наука. – 1984. – 115 с.
 47. Тарасюк, И.А. Сужение “вилки” Фойгта – Рейсса в теории упругих структурно неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов / И.А. Тарасюк, А.С. Кравчук // Arġiogi. Серия: Естественные и технические науки. – 2014. – №3. – С. 1–18.
 48. Толоконников, Л. А. Механика деформируемого твердого тела: учебное пособие для вузов / Л.А. Толоконников. – М.: Высшая школа. – 1979. – 318 с.
 49. Федорова Н.А. Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов / Н.А. Федорова. – Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. – Красноярск. – 2017.

50. Цвелодуб, И.Ю. О разномодульной теории упругости / И.Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49. – №1(287). – С. 157-164.
51. Цвелодуб, И.Ю. К построению определяющих уравнений ползучести ортотропных материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии / И. Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 53. – №6(316). – С. 98-101.
52. Шапиро, Г.С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию / Г.С. Шапиро // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1966. – №2. – С. 123–125.
53. Ярушина, В.М. К моделированию ползучести разносопротивляющихся материалов / В.М. Ярушина // Доклады Академии наук. – 2005. – Т. 403. – №2. – С. 198-200.
54. Adler, J.H. Energy minimization for liquid crystal equilibrium with electric and flexoelectric effects / J.H. Adler et al. // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2014. – Vol. 37. – №5. – P. 157-176.
55. Aitharaju, V.R. Three-dimensional properties of woven-fabric composites / V.R. Aitharaju, R.C. Averill // Compos. Sci. Technol. – 1999. – Vol. 59, №12. – P. 1901-1911.
56. Arjmandi, M. Finite element modelling of sliding wear in three-dimensional textile hydrogel composites / M. Arjmandi, M. Ramezani // Tribol Int. – 2019. – Vol. 133. – P. 88-100.
57. Altendorf, H. Influence of the fiber geometry on the macroscopic elastic and thermal properties / H. Altendorf, D. Jeulin, F. Willot // International Journal of Solids and Structures. – 2014. – Vol. 51. – P. 3807-3822.
58. Annin, B.D. Strong Bending of a Beam from a Fibrous Composite, Differently Resistant to Tension and Compression / B.D. Annin, V.M. Sadvovskii, I.E. Petrakov, A.Yu. Vlasov // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. – 2019. – Vol. 12. – №5. – P. 533-542.

59. Aruan, M.G. Comparison of strength and Young modulus of aligned discontinuous fibre PLA composites obtained experimentally and from theoretical prediction models / M.G. Aruan, K.L. Pickering // *Composite Structures*. – 2019. – Vol. 208. – P. 566-573.
60. Bayat, A. Characteristic Volume Element for Randomly Particulate Magnetoactive Composites / A. Bayat, F. Gordaninejad // *Journal of Engineering Materials and Technology*. – 2018. – Vol. 140, No 1. – P. 011003.
61. Bell, K. A refined triangular plate bending element / K. Bell // *Int. J. Numer. Methods Eng.* – 1969. – Vol. 1. – P. 101-122.
62. Bert, C.W. Model for fibrous composites with different properties in tension and compression / C.W. Bert // *J. Eng. Mater. Technol.* – 1997. – Vol. 99. – P. 344-349.
63. Car, E. An anisotropic elastoplastic constitutive model for large strain analysis of fiber reinforced composite materials / E. Car, S. Oller, E. Onate // *Comput. Methods. Appl. Mech.* – 2000. – Vol. 185, №2. – P. 245-277.
64. Challagulla, K.S. Asymptotic homogenization modeling of thin composite network structures / K.S. Challagulla , A.V. Georgiades, A.L. Kalamkarov // *Composite Structures*. – 2007. – Vol. 79, №3. – P. 432-444.
65. Christensen, R. *Mechanics of Composite Materials* / R. Christensen. – New York:Dover Publications. – 2005. – 356 p.
66. Costa-Mattos, H. A simple model of the mechanical behavior of ceramic-like materials / H. Costa-Mattos, M. Fremond, E.N. Mamiya // *Int. J. Solids Struct.* – 1992. – Vol. 29. – P. 3185-3200.
67. Curnier, A. Conewise linear elastic materials / A. Curnier, Q.C. He, P. Zysset // *J. Elast.* – 1995. – Vol. 37. – P. 1-38.
68. Deb, A. Chapter 11 - Crashworthiness design issues for lightweight vehicles / A. Deb // *Chapter in Materials, Design and Manufacturing for*

- Lightweight Vehicles (Second Edition). – Woodhead Publishing. – 2021. – P. 433-470.
69. Du, X. On the scaling from statistical to representative volume element in thermoelasticity of random materials / X. Du, M. Ostoja-Starzewski // Networks and Heterogeneous Media. – 2006. – Vol. 1, №2. – P. 259-274.
 70. Ekeland, I. Convex analysis and variational problems / I. Ekeland, R. Temam. – Philadelphia: SIAM. – 1999. – 402 p.
 71. Fahrenthold, E.P. Simulation of orbital debris impact on the Space Shuttle wing leading edge / E.P. Fahrenthold, R.J. Hernandez // International Journal of Impact Engineering. – 2006. – Vol. 33, P. 231-243.
 72. Firooz, S. Systematic study of homogenization and the utility of circular simplified representative volume element / S. Firooz et al. // Math. Mech. Solids. – 2019. – Vol. 24. – P. 2961–2985.
 73. Fuchs, C. Application of Halpin–Tsai equation to microfibril reinforced polypropylene/poly(ethylene terephthalate) composites/ C. Fuchs, D. Bhattacharyya, K. Friedrich, S. Fakirov // Composite Interfaces. – 2006. – Vol. 13. – P. 331-344.
 74. Ghosh, S. A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials / S. Ghosh, K. Lee, P. Raghavan // Int. J. Solids Struct. 2001. – Vol. 38, №14. – P. 2335-2385.
 75. Ginot, M. Benchmark of wrinkling formulae and methods for pre-sizing of aircraft lightweight sandwich structures / M. Ginot et al. // Composite Structures. – 2021. – Vol. 273. – P. 114387.
 76. Glude, R. Comparison of spherical and cubical statistical volume elements with respect to convergence, anisotropy, and localization behavior / R. Glude, M. Weber, A. Bertram // Computational Materials Science. – 2012. – Vol. 63. – P. 91-104.

77. Groeber, M.A. A framework for automated 3D microstructure analysis representation / M.A. Groeber et al. // Journal of Computer-Aided Materials Design. – 2007. – Vol. 14. – P. 63-74.
78. Grover, S.F. Chalmers B. The moduli of aluminum alloys in tension and compression / S.F. Grover, W. Munro W // J. Inst. Metals. – 1948. – Vol. 74. – P. 310-314.
79. Hashin, Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites / Z. Hashin // J. Appl. Mech. – 1980. – Vol. 47. – P. 329-334.
80. Hashin, Z. On elastic behaviour of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry / Z. Hashin // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1965. – Vol. 13, №3. – P. 119-134.
81. Hayakawa, K. An irreversible thermodynamics theory for elastic–plastic–damage materials / K. Hayakawa, S. Murakami, Y. Liu // Euro J. Mech. A – Solids. – Vol. 17, №1. – P. 13-32
82. Heinrich, C. The influence of the representative volume element (RVE) size on the homogenized response of cured fiber composites / C. Heinrich et al. // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. – 2012. – Vol. 20, №7. – P. 075007.
83. Hill, R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles / R. Hill // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1963. – Vol. 11, №5. – P. 357-372.
84. Hill, R. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials / R. Hill // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1965. – Vol. 13. – P. 189-198.
85. Hinton, M.J. Predicting failure in composite laminates: the background to the exercise / M.J. Hinton, P.D. Soden // Compos. Sci. Technol. – 1998. – Vol. 58, №7, P. 1001-1010.
86. Hoffman, O. The brittle strength of orthotropic material / O. Hoffman // J. Compos. Mater. – 1967. – Vol. 1, №2. – P. 200-206.

87. Hwu, Ch. Stroh-like formalism for general thin laminated plates and its application / Ch. Hwu // Chapter in *Mathematical Methods and Models in Composites*. – 2013. – P. 103-133.
88. Janmey, P.A. Negative normal stress in semiflexible biopolymer gels / P.A. Janmey et al. // *Nat. Mater.* – 2007. – Vol. 6. – P. 48-51.
89. Jones, R.M. Stress–strain relation for materials with different moduli in tension and compression / R.M. Jones // *AIAA J.* – 1977. – Vol. 15. – P. 16-23.
90. Kalamkarov, A.L. Asymptotic homogenization method and micromechanical models for composite materials and thin-walled composite structures / A.L. Kalamkarov // *Mathematical methods and models in composites*. – 2014. – P. 1-60.
91. Khludnev, A.M. *Modelling and Control in Solid Mechanics* / A.M. Khludnev, J. Sokolowski. – Berlin: Birkhauser. – 2012. – Vol. 122. – 369 p.
92. Krajcinovic, D. Creep of structures — a continuous damage mechanics approach / D. Krajcinovic // *J. Struct. Mech.* – 1983. – Vol 11, №1. – P. 1–11.
93. Lemaitre, J. *A course on damage mechanics* / J. Lemaitre // Berlin: Springer-Verlag. – 1996. – 228 p.
94. Lemaitre, J. *Mechanics of solid materials* / J. Lemaitre, J.L. Chaboche. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1990. – 556 p.
95. Li, H. Mathematical Simplification of the Tandon–Weng Approach to the Mori–Tanaka Model for Estimating the Young’s Modulus of Clay/Polymer Nanocomposites / H. Li, Y. Zare, K.Y. Rhee // *JOM*. – 2017. – Vol. 69, №12. – P. 2819-2824.
96. Li, Y. Evaluation of the out-of-plane response of fiber networks with a representative volume element model. / Y. Li, Z. Yu, S. Reese, J.-W. Simon // *TAPPI Journal*. – 2018. – Vol. 17, №6. – P. 329-339.

97. Liu, Y. Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys / Y. Liu et al. // *Acta Mater.* – 1998. – Vol. 46. – P. 4325-4338.
98. Lomakin, E.V. Difference in the modules of composite materials / E.V. Lomakin // *Mech. Compos. Mater.* – 1981. – Vol. 17, №1. – P. 18–24.
99. Ma, J. Nonlinear large deflection buckling analysis of compression rod with different moduli / J. Ma, T. Fang, W. Yao // *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* – 2019. – Vol. 26, №6. – P. 539-551.
100. Medri, G. A nonlinear elastic model for isotropic material with different behavior in tension and compression / G. Medri // *ASME. J. of Eng. Mater. and Tech.* – 1982. – Vol. 104. – P. 22-27.
101. Meola, C. Chapter 1 - Composite Materials in the Aeronautical Industry / C. Meola, S. Boccardi, G. Carlomagno // *Chapter in Infrared Thermography in the Evaluation of Aerospace Composite Materials.* – Woodhead Publishing. – 2017. – P. 1-24.
102. Moleiro, F. Deformations and stresses of multilayered plates with embedded functionally graded material layers using a layerwise mixed model / F. Moleiro, V.M. Franco Correia, A.L. Araújo, C.M. Mota Soares, A.J.M. Ferreira, J.N. Reddy // *Composites Part B: Engineering.* – 2019. – Vol. 156. – P. 274-291.
103. Murakami, S. Constitutive and damage evolution equations of elastic–brittle materials based on irreversible thermodynamics / S. Murakami, K. Kamiya // *Int. J. Mech. Sci.* – Vol. 39, №4. – P. 473-486.
104. Narayanaswami, R. Evaluation of the tensor polynomial and Hoffman strength theories for composite materials / R. Narayanaswami, H.M. Adelman // *J. Compos. Mater.* 1977. – Vol. 11, №4. – P. 366-377.
105. Nassef, A. New Bi-modular Material Approach to Buckling Problem of Reinforced Concrete Columns / A.S. Nassef, M.A. Dahim // *Mechanical Engineering Research.* – 2016. – Vol. 6, №1. – P. 19-28.

106. Oller, S. A hygro-thermo-mechanical constitutive model for multiphase composite materials / S. Oller, E. Onate // International journal of solids and structures. – 1996. – Vol. 33. – №20-22. – P. 3179-3186.
107. Oller, S. A plastic damage constitutive model for composite materials / S. Oller et al. // Int. J. Solids Struct. – 1996. – Vol. 33, №17. – P. 2501-2518.
108. Ostoja-Starzewski, M. Scale-Dependent Homogenization of Random Hyperbolic Thermoelastic Solids / M. Ostoja-Starzewski, L. Costa, S.I. Ranganathan // Journal of Elasticity. – 2015. – Vol. 118, №2. – P. 243-250.
109. Palacios, J.A. Dynamic response of Carbon-Nanotube-Reinforced-Polymer materials based on multiscale finite element analysis / J.A. Palacios, R. Ganesan // Compos. B. – 2019. – Vol. 166. – P. 497-508.
110. Patel, B.P. A new constitutive model for bimodular laminated structures: application to free vibrations of conical/cylindrical panels / B.P. Patel, K. Khan, Y. Nath // Compos. Struct. – 2014. Vol. 110. – P. 183-191.
111. Peng, X. A dual homogenization and finite element approach for material characterization of textile composites / X. Peng, J. Cao // Compos. B. – 2002. – Vol. 33, №1. – P. 45-56.
112. Phadnis, V.A. Drilling in carbon/epoxy composites: experimental investigations and finite element implementation / V.A. Phadnis, F. Makhdam, A. Roy, V.V. Silberschmidt // Compos. A Appl. Sci. Manuf. – 2013. – Vol. 47. – P. 41-51.
113. Ren, J.G. A new theory of laminated plate / J.G. Ren // Composites Science and Technology. – 1986. – Vol. 26, №3. – P. 225-239.
114. Reuss, A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung [Расчет предела текучести смешанных кристаллов на основе условия пластичности] / A. Reuss // Z. Angew. Math. Und Mech. – 1929. – Vol. 9, №1. – P. 49–58.

115. Ristinmaa, M. Viscoplasticity based on an additive split of the conjugated forces / M. Ristinmaa, N.S. Ottosen // Euro J. Mech. A — Solids. — 1998. — Vol. 17, №2. — P. 207-235.
116. Rosakis, P. A model for compression-weakening materials and the elastic fields due to contractile cells / P. Rosakis, J. Notbohm, G. Ravichandran // J. Mech. Phys. Solids. — 2014. — Vol. 85. — P. 16-32.
117. Sanei, S. Uncorrelated volume element for stochastic modeling of microstructures based on local fiber volume fraction variation / S. Sanei, R.S. Fertig // Composites Science and Technology. — 2015. — Vol. 117. — P. 191-198.
118. Sarfraz, M.S. Recent developments in the manufacturing technologies of composite components and their cost-effectiveness in the automotive industry: A review study / M.S. Sarfraz, H. Hong, S.S. Kim // Composite Structures. — 2021. — Vol. 266. — P. 113864.
119. Schapery, R.A. A theory of mechanical behavior of elastic media with growing damage and other changes in structure / R.A. Schapery // J. Mech. Phys. Solids. — 1990. — Vol. 38, №2. — P. 215-253.
120. Schonberg, W.P. Hole size and crack length models for spacecrafts walls under oblique hypervelocity projectile impact / W.P. Schonberg // Aerosp. Sci Technol. — 1999. — Vol. 3. — P. 461-471.
121. Soden, P.D. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates / P.D. Soden, J.M. Hinton, A.S. Kaddour // Compos. Sci. Technol. — 1998. — Vol. 58, №7. — P. 1225-1254.
122. Stroh, A.N. Dislocations and Cracks in Anisotropic Elasticity / A.N. Stroh // Philosophical Magazine. — 1958. — Vol. 3, №30. — P. 625-646.
123. Stroh, A.N. Steady State Problems in Anisotropic Elasticity / A.N. Stroh // Journal of Mathematics and Physics. — 1962. — Vol. 41. — P. 77-103.

124. Tan, P. Modeling approaches for 3D orthogonal woven composites / P. Tan, L. Tong, G.P. Steven // *J. Reinf. Plast. Compos.* – 1998. – Vol. 17, №6. – P. 545-577.
125. Tandon, G.P. The effect of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composites / G.P. Tandon, G.J. Weng // *Polymer Composites.* – 1984. – Vol. 5, №4. – P. 327-333.
126. Theocaris, P.S. Weighing failure tensor polynomial criteria for composites / P.S. Theocaris // *Int. J. Damage Mech.* – 1992. – Vol. 1, №1. – P. 4-46.
127. Trias, D. Determination of the critical size of a statistical representative volume element (SRVE) for carbon reinforced polymers / D. Trias et al. // *Acta Materialia.* – 2006. – Vol. 54, №13. – P. 3471-3484.
128. Tsai, S.W. A general theory of strength for anisotropic materials / S.W. Tsai, M. Wu // *J. Compos. Mater.* – 1971. – Vol. 5, №1. – P. 58-80.
129. Tsoukleri, G. Subjecting a Graphene Monolayer to Tension and Compression / G. Tsoukleri et al. // *Small.* – 2009. – Vol. 21, №5. – 2397-2402.
130. Vijayakumar K. Stress-strain relations for composites with different stiffness in tension and compression / K. Vijayakumar, K.P. Rao // *Comput. Mech.* – 1987. – Vol. 2. – P. 167-175.
131. Voigt, W. *Lehrbuch der Kristallphysik* / W. Voigt. – Berlin: Teubner. – 1928. – 936 p.
132. Wingender, D. Computational generation of statistical volume elements of biphasic asphalt concrete and its material behavior / D. Wingender, T. Schüler, R. Jänicke // *PAMM.* – 2017. – Vol. 17, №1. – 485-486.
133. Wang, B. Effect of heterogeneous interphase on the mechanical properties of unidirectional fiber composites studied by FFT-based method / B. Wang, G. Fang, S. Liu, J. Liang // *Composite Structures.* – 2019. – Vol. 220. – P. 642-651.

134. Wang, L. A multiscale approach for virtual testing of highly aligned short carbon fiber composites / L.Wang, G. Nygren, R.L. Karkkainen, Q. Yang // Composite Structures. – 2019. – Vol. 230. – P. 111462.
135. Wang, Z. Numerical analysis on viscoelastic creep responses of aligned short fiber reinforced composites / Z. Wang, D.E. Smith // Composite Structures. – 2019. – Vol. 229. – P. 111394.
136. Yao W.J., Ye Z.M. Analytical solution for bending beam subject to lateral force with different modulus // W.J. Yao, Z.M. Ye // Appl. Math. Mech. – 2004. – Vol. 25. – P. 1107-1117.
137. Yin, X. Statistical volume element method for predicting microstructure–constitutive property relations / X. Yin, W. Chen, A. To, C. McVeigh, W. Kam Liu // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2008. – Vol. 197. – P. 3516-3529.
138. Zhi, H.Z. Multi-scale design of composite materials and structures for maximum natural frequencies / H.Z. Zhi, H. Xiaodong, J.H. Rongb, Y.M. Xie // Materials and Design. – 2013. – Vol. 51. – P. 1023-1034.