

В диссертационный совет Д 999.055.04  
при ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре  
государственный технический университет»  
по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-  
Амуре, пр. Ленина, д.27

### ОТЗЫВ

официального оппонента, доктора физико-математических наук, профессора  
Петрова Игоря Борисовича на диссертационную работу  
Петровского Константина Александровича  
«Математическая модель треугольного оболочечного спектрального конечного элемента  
высокого порядка и ее реализация в системе инженерного прочностного анализа»,  
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ»

Диссертационная работа Петровского К.А. посвящена численному моделированию  
напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции с использованием  
математической модели треугольного конечного оболочечного элемента изменяемой  
толщины на основе метода спектральных элементов.

Разработка эффективных вычислительных моделей для нелинейного анализа  
оболочек является одним из важнейших направлений в исследованиях. Для адекватного  
моделирования поведения оболочек необходимо при построении математической модели  
учитывать большие упругие деформации и конечные вращения. Во многих инженерных  
приложениях представляют большой интерес оболочки из ламинированных композитов.

В последние годы значительное внимание уделяется формулировкам конечных  
элементов оболочек, учитывающим квадратичное или кубическое изменение  
перемещений по толщине. В таких формулировках могут быть использованы трехмерные  
определяющие соотношения без каких-либо допущений, например, без допущения о  
плоском напряженном состоянии оболочки. Такие формулировки обеспечивают разумные  
представления всех компонентов напряжённых состояний толщины тонких и толстых  
оболочечных структур.

Метод спектральных элементов (МСЭ) как численный метод известен в течение  
несколько десятилетий. Спектральный конечный элемент успешно принят различными  
физическими и прикладными науками, и в настоящее время его прикладные области  
охватывают не только гидродинамику, но и теплопередачу, акустику, сейсмологию и  
машиностроение. МСЭ исходит из применения спектральных рядов для решения  
уравнений в частных производных, и в то же время его базовые идеи аналогичны  
классическому конечно-элементному подходу. Его основным предположением является  
представление ортогональных многочленов в качестве функций аппроксимации,

определенных в соответствующих точках интегрирования. Вследствие этого матрица масс, полученная в этом спектральном подходе, является диагональной, что уменьшает общую стоимость численных расчетов. Кроме того, благодаря ортогональности аппроксимационных многочленов МСЭ характеризуется экспоненциальной сходимостью.

В области машиностроения МСЭ занял достойное место в качестве инструмента моделирования, используемого для исследования задач, связанных с распространением волн. С другой стороны, применимость этого подхода для решения статических задач не была широко представлена в литературе.

Таким образом разработка математической модели оболочечного элемента с учетом нелинейных эффектов, изменения толщины и с использованием современного численного метода является **актуальной научно-технической задачей**.

Основные результаты, полученные в диссертации:

1) разработана комплексная математическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние оболочки при конечных деформациях с учетом изменения толщины оболочечного элемента;

2) разработан спектральный оболочечный элемент высокого порядка, свободный от различных форм заклинивания;

3) модифицирована модель геометрически точного описания направляющего вектора оболочечного элемента для использования со спектральными интерполяционными функциями;

4) разработан алгоритм решения задач об определении напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции с помощью спектрального треугольного элемента;

5) на основе алгоритма решения задач об определении НДС оболочечной конструкции разработан программный модуль с возможностью интеграции в отечественный САЕ-пакет;

6) проведены численные эксперименты, подтверждающие эффективность использования 7-параметрической модели для оболочечного элемента высокого порядка. Проведено сравнение с решениями для известных оболочечных и трехмерных элементов.

Все перечисленные результаты являются **новыми**. Исходя из результатов, полученных автором, можно констатировать, что метод спектральных элементов является очень эффективным и надежным численным инструментом и может быть успешно использован не только для решения различных проблем распространения волн, но также может применяться для статических задач. В диссертационной работе показано, что применение разработанного спектрального конечного оболочечного элемента помогает уменьшить ошибки численного исследования, обеспечивая высокую точность, особенно по сравнению с методом конечных элементов и типичными конечными элементами, обычно используемыми для этих целей. **Практическая значимость** результатов, полученных в диссертации, заключается в разработке программного модуля для решения задач об определении напряженно-деформированного состояния оболочечной

конструкции или конструкций, покрытых оболочкой, с помощью спектрального треугольного конечного элемента. Данный модуль можно использовать в промышленной реализации для прочностных инженерных расчетов.

Достоверность полученных результатов основана на достоверности используемых соотношений нелинейной теории упругости и метода спектральных элементов. Результаты проведенных тестовых расчетов совпадают с аналитическими или с известными численными решениями.

#### **Оценка содержания диссертации, ее завершенность.**

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка публикаций автора, списка литературы и трех приложений. Диссертация изложена на 124 страницах и содержит 31 рисунок. Список литературы включает 212 источников.

Во введении обоснована актуальность и степень разработанности темы исследований, сформулированы цели работы и задачи исследования, указаны положения, выносимые на защиту, дано краткое содержание диссертационной работы.

В первой главе дан обзор литературы по использованию метода конечных элементов и метода спектральных элементов. Описываются преимущества использования конечных элементов высокого порядка. Приводится информация о точках Фекете, используемых в данной диссертации для описания модели оболочечного элемента. Дано описание основных известных математических моделей оболочечных элементов. Отмечаются положительные и отрицательные стороны существующих моделей, таким образом определяя набор необходимых качеств для построения новой математической модели оболочечного элемента.

Во второй главе определяются механическая и математическая постановки задачи, приводятся основные соотношения нелинейной теории упругости, используемые в данной диссертационной работе. Математическая постановка преобразовывается к виду обобщенной вариационной краевой задачи. Приводятся формулы для принципа виртуальных перемещений для уточненной формулировки Лагранжа. Приводятся формулировка интерполяционного базиса Дубинера, используемого для конечно-элементной аппроксимации поставленной задачи.

В третьей главе приводится математическая модель конечного оболочечного элемента на основе метода спектральных элементов. Дается описание геометрии треугольного спектрального оболочечного элемента. Описана 7-параметрическая модель аппроксимации перемещений оболочечного спектрального элемента с учетом конечных поворотов и модификации методов Симо и Фокса. Приведены выкладки расчета дифференциалов, используемых в обновленной формулировке Лагранжа, с учетом представленной модели аппроксимации перемещений. Дается описание модели анизотропных и ламинатных оболочек.

В четвертой главе описаны алгоритмы программной реализации используемых численных методов. Приводится алгоритм решения нелинейной задачи, основанный на итерационном процессе Ньютона-Рафсона. Также приведены критерии сходимости

итерационного процесса, используемые в программной реализации. Описывается адаптированный для параллельных вычислений алгоритм ассемблирования тангенциальной матрицы. Приводится алгоритм перестроения конечно-элементной сетки низкого порядка в сетку из спектральных треугольных оболочечных элементов. Дано описание механизма соединения трехмерных элементов и элементов оболочек, в котором передача моментов от оболочечной части конструкции осуществляется через дополнительный слой оболочечных элементов, лежащих в месте соединения на поверхности трехмерных элементов. Приводится численное решение ряда задач и сравнение результатов с аналитическими решениями и решениями с помощью конечных элементов низкого порядка.

**В заключении** представлены основные результаты работы.

Диссертационная работа Петровского К.А. представляет собой завершенное исследование. Содержание диссертации соответствует поставленной цели исследования. Автор диссертационной работы продемонстрировал необходимый квалификационный уровень владения темой, которой посвящена диссертация.

#### **Недостатки в содержании и оформлении диссертации.**

По содержанию диссертации можно сделать следующие замечания:

1. В формулировке целей диссертации говорится о том, что одной из целей является "разработка комплексной математической модели исследования напряженно-деформированного состояния оболочечного конечного элемента", однако не поясняется, в чем состоит комплексный характер модели.

2. Параграф 2.3 по содержанию относится скорее к Главе 3, чем к Главе 2.

3. В диссертации указывается диагональность матрицы масс как одно из преимуществ метода спектральных элементов, однако, в Главе 2 рассматривается постановка только статической нелинейной задачи.

4. На рисунках 4.17-4.21 поля перемещений имеют одинаковый цвет, хотя перемещения относительно центра модели должны иметь разный знак.

5. Согласно предложенной математической модели оболочечного элемента, толщина оболочки задается одинаковой во всех узлах одного элемента. Желательно пояснить, допускает ли данная модель задание разной толщины в пределах элемента?

Данные замечания не ставят под сомнение высокое качество данной диссертационной работы и не снижают положительную оценку в целом.

#### **Соответствие автореферата основному содержанию диссертации.**

Автореферат соответствует основному содержанию диссертации, содержит основные положения диссертационной работы и выводы. Диссертация и автореферат написаны грамотно и логически верно.

#### **Заключение**

Сделанные замечания не влияют на положительную оценку работы в целом. Диссертационная работа представляет собой законченную научно-квалификационную

работу, в которой исследованы численные методы и разработаны программы численного решения, что определяет вклад в развитие физико-математической отрасли знания. Работа апробирована на научных семинарах и конференциях различного уровня, включая международные.

Диссертационная работа Петровского К.А. соответствует всем требованиям постановления Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. N 842 "О порядке присуждения ученых степеней". Петровский Константин Александрович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

*Я даю согласие на включение моих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета, и их дальнейшую обработку.*

Официальный оппонент,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой информатики и вычислительной математики  
ФГАОУ ВО «Московский физико-технический  
институт (государственный университет)»

  
\_\_\_\_\_  
27.11.2017 Петров И.Б.

141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д.9  
Тел.: 8(495)408-66-95  
E-mail: petrov@mipt.ru  
Шифр специальности: 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Подпись д.ф.-м.н. И.Б. Петрова заверяю: 

Ученый секретарь МФТИ   
(должность)  (подпись)

Скалько Ю.И.  
(Фамилия И.О.)