

На правах рукописи

Прокудин

Прокудин Александр Николаевич

**ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ
НАЛИЧИИ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ**

1.1.8. — Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Комсомольск-на-Амуре — 2025

Работа выполнена в Институте машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук ФГБУН Хабаровского Федерального исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской академии наук

**Научный
консультант:**

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук ФГБУН Хабаровского Федерального исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Комсомольск-на-Амуре
Буренин Анатолий Александрович

**Официальные
оппоненты:**

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой «Теория упругости» ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова», г. Москва
Георгиевский Дмитрий Владимирович

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий отделом «Вычислительная механика деформируемых сред» Института вычислительного моделирования — обособленного подразделения ФГБУН «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук», г. Красноярск
Садовский Владимир Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Программное обеспечение и администрирование информационных систем» ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж
Артемов Михаил Анатольевич

**Ведущая
организация:**

ФГБУН «Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук», г. Новосибирск

Защита диссертации состоится _____ декабря 2025 г. в _____ на заседании диссертационного совета 24.2.316.03 при ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет» по адресу: 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, проспект Ленина, 27

С полным текстом диссертации можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет» и на сайте knastu.ru

Автореферат разослан «__» _____ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к. ф.-м. н., доцент



Григорьева А.Л.

Общая характеристика работы

Детали многих механизмов и машин в ходе эксплуатации находятся под действием центробежных сил, вызванных вращением вокруг собственной оси с постоянной или переменной скоростью. Такие детали являются неотъемлемым компонентом газовых и паровых турбин, компрессоров высокого давления, маховичных накопителей энергии, двигателей внутреннего сгорания, электродвигателей, механических трансмиссий, ветрогенераторов, центрифуг, гироскопов. Расчет напряженно-деформированного состояния во вращающихся цилиндрах и дисках представляет значительный теоретический и практический интерес и является одной из классических задач механики деформируемого твердого тела. К решению этой задачи в различных постановках обращались многие выдающиеся ученые. Необходимость учета необратимых деформаций в материалах вращающихся цилиндров отмечал Ю. Н. Работнов и его ученики: С. А. Шестериков, В. М. Локощенко, В. Г. Зубчанинов, Е. В. Ломакин, В. П. Радченко и др. Учет пластического деформирования сопряжен со своими трудностями, обозначенными Б. Д. Анниным, Г. П. Черепановым, А. Надаи и другими исследователями. Также необходимо отметить использование в подобных задачах подхода научной школы А. А. Ильюшина, его учеников и последователей: Б. Г. Победри, Д. В. Георгиевского, П. В. Трусова, А. А. Поздеева. Значительный прогресс в этой области расчета вращающихся цилиндров и дисков внесли А. М. Wahl, F. P. J. Rimrott, U. Gamer, N. S. Bhatnagar, W. Mack, V. K. Arya, U. Guven, A. N. Eraslan, T. Akis, E. Arslan, S.-Y. Leu, H. R. Zare, H. Darijani, M. Z. Nejad, V. Tvergaard, F. Aziz, R. Shufen, S. M. Kamal, M. Perl, A. M. Eldeeb, D. W. A. Rees, G. Ma, C. O. Horgan, В. И. Розенблюм, О. В. Соснин, А. Г. Костюк, М. И. Рынковская, Н. Александрова, В. М. Мирсалимов, М. А. Артемов, С. Е. Александров, Е. А. Лямина, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк и многие другие ученые. Вращающимся дискам посвящены специализированные монографии и учебные

пособия: И. В. Демьянушко и И. А. Биргера; А. В. Левина, К. Н. Боришанского и Е. Д. Консона; А. Г. Костюка; С. Е. Александрова. Несмотря на большое число публикаций, посвященных расчету вращающихся дисков и цилиндров, и значительный интерес научного сообщества, в этой области исследований сохраняются пробелы, которые в определенной степени заполняются диссертацией.

Цель диссертации — получение новых аналитических и численных решений, описывающих упругопластическое деформирование вращающихся цилиндров и дисков различного вида (сплошные, полые, с жестким включением), на основе моделей идеального, линейно- и нелинейно-упрочняемого упругопластического тела, включая расчет предельных скоростей вращения и полей остаточных напряжений.

Научная новизна диссертации.

1. В рамках условий текучести Треска и Ишлинского-Ивлева получены новые аналитические решения, описывающие напряженно-деформированное состояние вращающихся цилиндров из идеального упругопластического материала на стадиях нагрузки и разгрузки, включая повторное пластическое течение.

2. Построено универсальное аналитическое решение упругопластической задачи во вращающемся линейно-упрочняемом цилиндре в условиях плоской или обобщенной плоской деформации. Найденное решение основано на общем кусочно-линейном условии пластичности, учитывает влияние промежуточного главного напряжения на развитие пластического течения и подходит для расчета цилиндров с различными видами граничных/торцевых условий и широкого класса материалов.

3. На основе условия Треска получено точное решение задачи об упругопластическом деформировании вращающегося линейно-упрочняемого цилиндра с жестким включением при наличии стационарного температурного градиента между внутренней и внешней поверхностями.

4. Решена упругопластическая задача во вращающемся полом цилиндра с закрепленными концами при условии пластичности Треска и нелинейных законах изотропного упрочнения. Точные аналитические решения найдены для линейно-экспоненциального закона упрочнения, а также для нескольких частных случаев степенного параметра в степенном законе упрочнения. Вычисление остаточных напряжений в цилиндре после предварительного вращения с заданной максимальной скоростью проводилось с помощью численных методов.

5. Проведен анализ влияния эффекта снижения модуля Юнга после предварительного пластического деформирования на процесс ротационного автофретирования полого цилиндра с закрепленными торцами. Установлено, что данный эффект может оказывать заметное влияние на величину остаточных напряжений после ротационного автофретирования. Обнаружено, что учет падения модуля Юнга особенно важен для расчета толстостенных цилиндров и высоких скоростей автофретирования.

6. Получены новые решения, учитывающие вязкие эффекты материала (ползучесть и вязкопластичность) на процессы необратимого деформирования в цилиндре и диске при наличии центробежных сил. Найдены аналитические решения для установившегося вязкопластического течения во вращающемся полом цилиндра с закрепленными и свободными торцами, а также разработан численный алгоритм для расчета упруговязкопластического деформирования. Разработаны численные схемы расчета необратимых деформаций во вращающемся диске с граничными условиями различного вида (полый диск и диск с жестким включением) с учетом углового ускорения.

7. Найдены новые аналитические решения, позволяющие для заданных нагрузок на внешней и внутренней поверхностях построить вращающийся цилиндр/диск равной прочности. Для цилиндра в качестве управляющего параметра использовалась зависимость модуля Юнга от

радиуса, а для диска — его профиль. Проанализировано влияние анизотропии и асимметрии при растяжении и сжатии на профиль равнопрочного вращающегося диска. Установлено, что равнопрочный профиль диска может не существовать и может быть не единственным.

Методы и подходы. Все научные результаты диссертации получены с использованием известных моделей механики деформируемого твердого тела и методов решения дифференциальных уравнений. В постановке упругопластических задач использовались кусочно-линейные пластические потенциалы, что позволило во многих случаях получить аналитические решения в замкнутом виде. Расчет координат границ между областями различного типа (упругие и пластические области) проводился с помощью численных методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений. При использовании нелинейных законов упрочнения применялись методы численного интегрирования. В некоторых случаях решение упругопластических задач выполнялось численно (применялся метод конечных разностей и метод Рунге-Кутты).

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием фундаментальных уравнений механики деформируемого твердого тела. Многие решения, полученные в диссертации, представлены в замкнутом аналитическом виде, их достоверность обусловлена корректностью постановки начально-краевых задач. В ряде случаев для оценки достоверности полученных результатов использовалось сравнение с аналитическими и численными решениями других авторов.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования результатов при проектировании элементов машин и механизмов, находящихся под действием центробежных сил. Данные упругопластического анализа могут найти применение для расчета предельно допустимой скорости вращения в деталях цилиндрической геометрии. Найденные решения упругопластических задач могут

использоваться при проектировании технологий упрочнения цилиндрических деталей на основе ротационного автофретирования. Полученные зависимости для цилиндра и диска равной прочности имеют большое значение в оптимальном проектировании маховичных накопителей энергии.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

- III Дальневосточная школа-семинар «Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций», г. Комсомольск-на-Амуре, 2018 г.,
- V Дальневосточная конференция с международным участием «Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении», г. Комсомольск-на-Амуре, 2018 г.,
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, г. Уфа, 2019 г.

Научные исследования, проведенные в диссертации, выполнялись в рамках государственного задания Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН, а также грантов Российского фонда фундаментальных исследований и Российского научного фонда:

- №18-01-00038 «Учет теплофизических и реологических эффектов при интенсивном формоизменении материалов и упругом последствии» (РФФИ, 2018–2020 гг.),
- №20-01-00147 «Расчёты процессов сборки конструкций из упруговязкопластических деталей и их последующей функциональной эксплуатации» (РФФИ, 2020–2022 гг.),
- №22-11-00163 «Нелинейные задачи механики твердого тела для материалов со свойствами, зависящими от напряженного-деформированного состояния», (РНФ, 2022–2024 гг.).

Публикации. Результаты диссертации исследования представлены в работах [1–26], опубликованных в ведущих российских и зарубежных журналах, сборниках статей и материалов научных конференций. Из упомянутых выше работ 23 опубликованы в изданиях, рекомендуемых ВАК РФ и/или индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus. Среди 14 статей [1, 2, 5–11, 14–18], проиндексированных в базе данных Web of Science, 1 опубликована в журнале категории Q1 (ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik) и 2 — в журналах категории Q2 (Acta Mechanica, Journal of applied and computational mechanics).

Личный вклад автора. Работы [5, 6, 11, 13–16, 18, 20, 26] выполнены автором диссертации самостоятельно. В [3, 4, 8, 9, 12, 17, 19, 21–25] автор выполнил постановку задач и разработку методов решения, анализ результатов проводился совместно с А. А. Бурениным и С. В. Фирсовым. В [1, 2, 7, 10] автор участвовал в постановке задач и построении решений, анализ результатов проводился совместно с А. А. Бурениным, Л. В. Ковтанюк, А. С. Бегун, Г. Л. Панченко и С. В. Белых.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Каждая из глав начинается кратким введением и литературным обзором. Общее количество страниц диссертации — 271, рисунков — 90, таблиц — 3. Список литературы содержит 252 источника.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационного исследования, сформулирована цель работы, перечислены основные научные результаты диссертации и их практическая значимость, приведены методы и подходы, использованные в проведенных исследованиях, кратко изложена структура диссертации.

Первая глава посвящена постановке и решению задачи об упруго-пластическом деформировании вращающегося сплошного цилиндра и

цилиндра с жестким включением в рамках модели идеального тела.

Раздел 1.1 посвящен литературному обзору исследований, наиболее близких к содержанию первой главы.

В разделе 1.2 решается задача об упругопластическом деформировании вращающегося цилиндра с жестким включением. Внутренний и внешний радиус цилиндра обозначены, как r_{in} и r_{out} соответственно. Цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω , угловое ускорение полагается нулевым. В условиях плоской деформации и осевой симметрии вектор перемещений в цилиндре имеет одну ненулевую компоненту u_r . Введена цилиндрическая система координат r, θ, z и система безразмерных величин и параметров:

$$\begin{aligned} \delta = \frac{r_{in}}{r_{out}}, \beta = \frac{r}{r_{out}}, \bar{u} = \frac{E}{\sigma_y} \frac{u_r}{r_{out}}, \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_y}, \Omega = \frac{\rho r_{out}^2}{\sigma_y} \omega^2, \\ \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{E}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{E}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}^e, \bar{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{E}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}^p, \bar{\varepsilon}_{ij}^{pr} = \frac{E}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}^{pr}, \bar{\varepsilon}_{ij}^{sp} = \frac{E}{\sigma_y} \varepsilon_{ij}^{sp}, \end{aligned} \quad (1)$$

где E — модуль Юнга, σ_y — предел текучести, ρ — плотность, σ_{ij} — напряжения, $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p, \varepsilon_{ij}^{sp}$ — полные, упругие, пластические и вторичные пластические деформации. Символ подчеркивания далее опущен. Система безразмерных переменных (1) с некоторыми отличиями используется во всем тексте диссертационной работы.

Деформации ε_{ij} в цилиндре предполагаются малыми и представляют собой сумму упругих ε_{ij}^e и пластических деформаций ε_{ij}^p . Напряжения связаны с упругими деформациями законом Гука, ν — коэффициент Пуассона. Единственное нетривиальное уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\beta} = -\Omega \beta, \quad (2)$$

Условие пластичности Треска имеет вид:

$$f = \max(|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|, |\sigma_{rr} - \sigma_{zz}|, |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|) = 1. \quad (3)$$

Ассоциированный закон пластического течения:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda df / d\sigma_{ij}, \quad (4)$$

здесь λ — положительный множитель. Если напряженное состояние в пластической области соответствует ребру условия пластичности (3), то вместо закона (4) используется его обобщение

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_1 \frac{df_1}{d\sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{df_2}{d\sigma_{ij}}, \quad (5)$$

где $d\lambda_1$ и $d\lambda_2$ — положительные множители, f_1 и f_2 — пластические потенциалы, соответствующие граням условия (3), на пересечении которых лежит рассматриваемое ребро. Предполагается, что процесс нагружения является монотонным. Граничные условия задачи имеют вид:

$$u(\delta) = 0, \quad \sigma_{rr}(1) = 0. \quad (6)$$

Условие пластичности впервые выполнится на внутренней поверхности $\beta = \delta$ цилиндра, где напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$. Условие (3) запишется в виде: $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$, $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 1$.

Скорость Ω_p , при которой на поверхности $\beta = \delta$ начнется пластическое течение, определяется следующим выражением:

$$\Omega_p = 4 \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{(1+(1-2\nu)\delta^2)}{(3-2\nu-2\delta^2-\delta^4(1-2\nu))}. \quad (7)$$

Когда скорость вращения Ω достигает значения Ω_p на внутренней поверхности $\beta = \delta$ цилиндра выполняется условие пластичности (3). Вследствие этого в цилиндре появляются две области пластического течения, которые обозначаются римскими цифрами I и II. Первая из областей соответствует ребру призмы Треска, а вторая — ее грани. Напряжения в области I ($\delta \leq \beta \leq \beta_1$) удовлетворяют $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$, а в области II ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$) неравенству $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$. Также в цилиндре сохраняется упругая область ($\beta_2 \leq \beta \leq 1$). Далее ($\Omega = \Omega_1$) на внешней границе

цилиндра $\beta=1$ выполнится условие Треска в виде $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$, вследствие чего появится новая область пластического течения (область III). Затем ($\Omega=\Omega_2$) на упругопластической границе $\beta=\beta_2$ напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ сравнивается с σ_{rr} и условие пластичности примет вид $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1$, $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$. Геометрически это означает переход с грани призмы Треска на ребро. В результате появятся области IV и V. С увеличением скорости вращения Ω упругая область уменьшается и, когда скорость достигает значения Ω_{fp} границы областей V и III встречаются ($\beta_4 = \beta_5$), в результате чего цилиндр полностью переходит в состояние пластичности. Кроме того, в точке $\beta = \beta_4 = \beta_5$ появляется пластическая область, соответствующая ребру условия Треска в форме $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1, \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = 1$. Последующее увеличение скорости вращения не приводит к появлению новых областей, но границы между существующими будут менять свое положение.

Для каждой из возможных областей пластического течения найдено точное аналитическое решение определяющей системы уравнений. Весь процесс накопления пластических деформаций состоит из четырех стадий: (Ω_p, Ω_1) , (Ω_1, Ω_2) , (Ω_2, Ω_{fp}) , $(\Omega_{fp}, \Omega_{max})$, каждая из которых отличается своей конфигурацией областей. Решение на каждом этапе пластического течения содержит неизвестные константы интегрирования и координаты β_i границ между областями. Для вычисления указанных величин используются граничные условия задачи (6), а также по 3 условия непрерывности на каждой границе. Подходящий выбор трех условий на границе обеспечивает на ней непрерывность всех функций.

На стадии разгрузки пластические деформации, предварительно накопленные при активном нагружении, в дальнейшем уже не меняются. При повторном пластическом течении пластические деформации ε_{rr}^p состоят из вторичных ε_{rr}^{sp} и накопленных на стадии нагрузки пластических

деформаций: $\varepsilon_{rr}^p = \varepsilon_{rr}^{sp} + \varepsilon_{rr}^{pr}$; $\varepsilon_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\theta\theta}^{sp} + \varepsilon_{\theta\theta}^{pr}$; $\varepsilon_{zz}^p = \varepsilon_{zz}^{sp} + \varepsilon_{zz}^{pr}$ ($\varepsilon_{rr}^{pr} = \varepsilon_{rr}^p(\Omega_{\max})$)

В общем случае при повторном пластическом течении, как и при нагружении, появляется 6 пластических областей, которые занимают весь цилиндр. Эти области обозначаются римскими цифрами от VII до XII.

В качестве примера рассматриваются параметры задачи: $\delta = 0.2, \nu = 0.3$. Установлено, что $\Omega_{\max} = 18.5597$, $\Omega_p \cong 3.0664$. Эволюция пластических областей изображена на рис. 1. Напряжения и пластические деформации после остановки показаны на рис. 2.

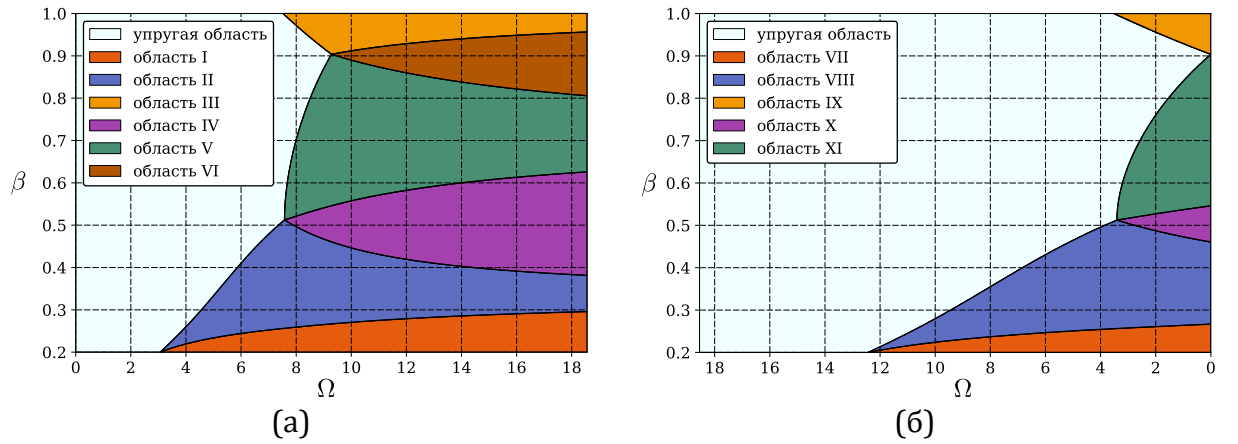


Рис. 1 — Эволюция пластических областей на стадиях (а) нагружки и (б) разгрузки.

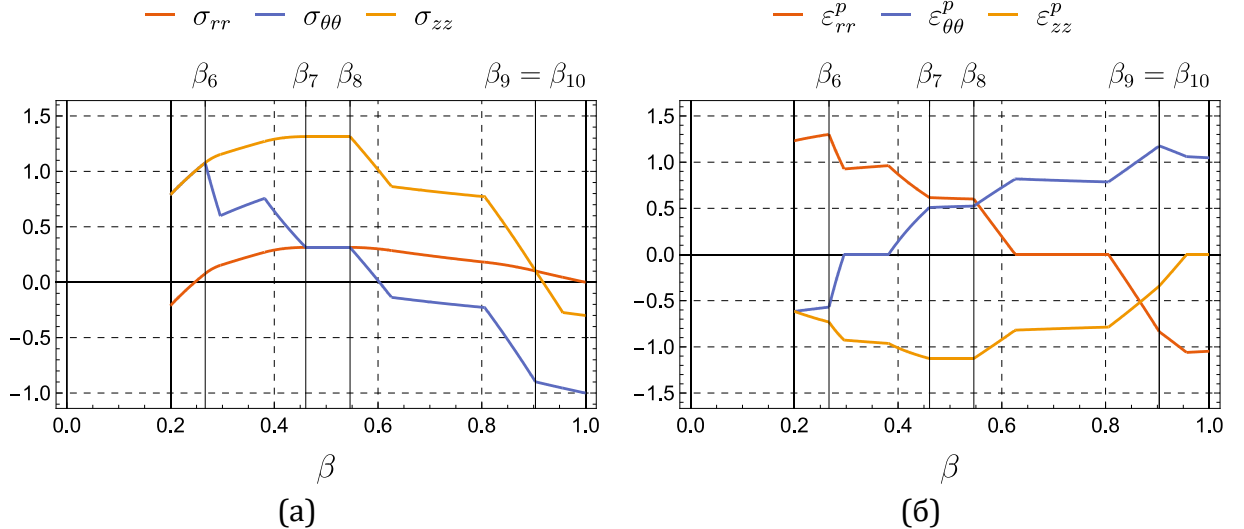


Рис. 2 — Напряженно-деформированное состояние при $\Omega = 0$ (остановка цилиндра): (а) напряжения; (г) пластические деформации.

В разделе 1.3 рассматривается сплошной цилиндр с закрепленными концами (плоская деформация). Для решения используется постановка задачи аналогичная использованной в предыдущем разделе.

Определяющая система уравнений включает кинематические соотношения, закон Гука, уравнение равновесия (2) и ассоциированный закон пластического течения (4). Условие пластичности Ишлинского-Ивлева:

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) &= 1, \text{ если } \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \\ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 &= 1, \text{ если } \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2,\end{aligned}\tag{8}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения, упорядоченные по убыванию.

Граничные условия задачи имеют вид $u(0)=0, \sigma_{rr}(1)=0$. При $\Omega = \Omega_p$ в центре цилиндра $\beta=0$ впервые выполняется условие пластичности (8), в результате чего появляется область пластического течения I. Дальнейшее увеличение параметра Ω приводит к уменьшению области упругого деформирования и при $\Omega = \Omega_{p2}$ на поверхности $\beta=1$ появляется пластическая область II. Напряженное состояние в областях I и II соответствует разным граням призмы Ивлева. Когда Ω достигает значения Ω_{fp} упругая область исчезает, весь цилиндр переходит в состояние пластичности, а между областями I и II появляется пластическая область III, напряжения в которой лежат на ребре призмы Ивлева. Далее при $\Omega = \Omega_{fp2}$ напряжения на поверхности $\beta=1$ переходят на ребро призмы Ивлева, в результате чего возникает пластическая область IV. При последующем увеличении параметра нагружения $\Omega > \Omega_{fp2}$ новые области не появляются, но границы между существующими меняют свое положение, при этом увеличиваются области III и IV, соответствующие ребрам поверхности (8).

Как только параметр Ω начинает уменьшаться весь цилиндр вновь ведет себя, как упругое тело, но с накопленными пластическими деформациями, которые в процессе разгрузки уже не меняются. Если максимальное значение параметра нагружения Ω_{max} было достаточно

высоким, то в ходе разгрузки при $\Omega = \Omega_{sp}$ в центре цилиндра может начаться повторное (или вторичное) пластическое течение. В общем случае возможно появление четырех вторичных пластических областей V–VIII в том же порядке, в котором появлялись первичные области I–IV. Заметим, что области первичного и вторичного пластического течения соответствуют противоположным граням и ребрам призмы Ивлева. Значение Ω_{max} выбрано таким образом, чтобы в момент остановки $\Omega = 0$ цилиндр полностью переходил в состояние повторного течения.

Используется значение коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$. Пластическое течение начнется при $\Omega_p \cong 3.066$. Максимальное значение параметра нагружения $\Omega_{max} \cong 18.534$ определено численно. Безразмерным величинам Ω_p и Ω_{max} соответствуют угловые скорости $\omega_p \cong 3115 \text{ c}^{-1}$ и $\omega_{max} \cong 7659 \text{ c}^{-1}$. Установлено, что разница в значениях величин Ω_{fp} и Ω_{max} , вычисленных для условий Треска и Ишлинского-Ивлева, составляет около 10%. Качественная картина напряженно-деформированного состояния для критериев Треска и Ишлинского-Ивлева имеет существенные отличия. Наибольшим остаточным напряжением является осевое, а наименьшим — тангенциальное. После повторного течения качественная картина распределения пластических деформаций почти не меняется, однако их величина уменьшается примерно в два раза.

В разделе 1.4 рассматривается упругопластическая задача для вращающегося цилиндра с жестким включением (рис. 1). Для решения используется постановка задачи из раздела 1.3. Граничные условия задачи имеют вид (6). В общем случае для достаточно высоких значений Ω_{max} в цилиндре возможно появление 6 пластических областей, соответствующих разным граням и ребрам призмы Ивлева (8). При $\Omega = \Omega_p$ на внутренней поверхности цилиндра $\beta = \delta$ выполняется условие пластичности (8) в виде, соответствующем грани призмы Ивлева $\sigma_1 = \sigma_{rr}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ и

появляется область пластического течения I. С увеличением параметра Ω упругопластическая граница $\beta = \beta_1$ движется в сторону внешней поверхности цилиндра $\beta = 1$. Далее при $\Omega = \Omega_1$ напряженное состояние на упругопластической границе переходит на ребро $\sigma_{\theta\theta} = (\sigma_{rr} + \sigma_{zz})/2$ призмы Ивлева. В результате этого в указанном месте появляются две новые пластические области II и III. В первой из них напряженное состояние соответствует ребру $\sigma_{\theta\theta} = (\sigma_{rr} + \sigma_{zz})/2$, а во второй — грани $\sigma_3 = \sigma_{zz}, \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ призмы Ивлева. При последующем увеличении параметра Ω размеры пластических областей I-III увеличиваются, а размеры упругой области уменьшаются. В момент $\Omega = \Omega_2$ на внешней поверхности цилиндра выполняется условие пластичности (8) в виде, соответствующем грани $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Это приводит к появлению пластической области V. С увеличением параметра Ω упругая область между пластическими областями III и V уменьшается. При $\Omega = \Omega_{fp}$ упругая область исчезает, весь цилиндр полностью переходит в пластическое состояние, а между областями III и V появляется пластическая область IV, напряжения в которой соответствуют ребру $\sigma_{rr} = (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})/2$ призмы Ивлева. Решение поставленной задачи существует и для $\Omega > \Omega_{fp}$. При $\Omega = \Omega_{fp2}$ напряжения на внешней поверхности цилиндра переходят с грани $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}, \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ на ребро $\sigma_{zz} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2$ призмы (8), что приводит к зарождению области VI.

На стадии разгрузки предполагается, что параметр нагружения Ω монотонно убывает от $\Omega_{\max}$ вплоть до полной остановки цилиндра. Если максимальная скорость вращения $\Omega_{\max}$ была достаточно высокой, то при $\Omega = \Omega_{sp}$ на внутренней поверхности цилиндра возникает вторичное (повторное) пластическое течение. В общем случае для достаточно высоких значений $\Omega_{\max}$ в цилиндре возможно появление 6 вторичных

пластических областей, соответствующих разным граням и ребрам призмы Ивлева. Области вторичного течения обозначаются римскими цифрами от VII до XII в порядке их расположения в цилиндре. Вторичное пластическое течение в цилиндре в целом развивается аналогично первичному пластическому течению на стадии нагрузки. Однако, области I-VI первичного и области повторного VII-XII пластического течения соответствуют противоположным граням и ребрам призмы Ивлева.

Рассмотрим значения параметров: $\nu = 0.3, \delta = 0.2$. Предельная упругая скорость вращения (7) $\Omega_p = 3.07$. Переходные скорости вращения $\Omega_1 \cong 6.46, \Omega_2 \cong 8.83, \Omega_{fp} \cong 10.62, \Omega_{fp2} \cong 13.16$. Максимальная скорость вращения $\Omega_{\max} \cong 21.23$. Для условия Треска: $\Omega_{fp} \cong 9.28, \Omega_{\max} \cong 18.56$. Результаты расчетов из **разделов 1.2 и 1.4** показали, что в цилиндре с жестким включением напряжения достигают максимума на внутренней поверхности цилиндра. В окрестности жесткого включения наибольшим является радиальное напряжение, в центре цилиндра — радиальное и тангенциальное, а в оставшейся части — тангенциальное. Пластические деформации достигают наибольших по модулю значений в окрестности жесткого включения. При одинаковой скорости условия Треска и Ишлинского-Ивлева предсказывают существенно разные распределения для напряжений и пластических деформация, однако их максимумы оказываются достаточно близкими. Критическая скорость, при которой весь цилиндр переходит в пластическое состояние, выше для условия Ишлинского-Ивлева. В случае сплошного цилиндра разница составляет около 10%, а для цилиндра с жестким включением при $\delta = 0.2$ — около 14%.

В разделе 1.5 перечислены основные выводы по главе.

Вторая глава посвящена анализу влияния промежуточного главного напряжения, а также изотропного упрочнения (линейного и нелинейного) на упругопластический отклик вращающихся цилиндров.

В разделе 2.1 представлен литературный обзор по второй главе.

Раздел 2.2 посвящен построению универсального аналитического решения для общего кусочно-линейного условия пластичности в условиях обобщенной плоской деформации и осевой симметрии. Общее кусочно-линейное условие имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \frac{\alpha}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t, \quad \text{если } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha}, \\ \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t, \quad \text{если } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha}, \alpha = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}, \quad b = \frac{(1+\alpha)\tau_0 - \sigma_t}{\sigma_t - \tau_0} \end{aligned} \quad (9)$$

где $\sigma_t, \sigma_c, \tau_0$ — предел текучести при одноосном растяжении, одноосном сжатии и на сдвиг соответственно. Выражение (9) определяет не одно, а множество кусочно-линейных условий пластичности, зависящее от параметров α и b . Эти параметры определяются из базовых одноосных экспериментов и могут рассматриваться в качестве механических характеристик материала. В частных случаях условие (9) описывает многие известные условия пластичности. Например, при $\alpha=1$ и $b=0$ условие (9) сводится к условию Треска, при $\alpha=1$ и $b=1$ к условию Ишлинского-Ивлева. В целом при $\alpha=1$ условие (9) описывает материалы, чьи пластические свойства одинаковы при растяжении и сжатии. Подходящим выбором коэффициентов α и b из общего кусочно-линейного условия (9) можно получить достаточно точные аппроксимации нелинейных условий. Общее кусочно-линейное условие (9) описывает чрезвычайно широкий класс материалов. В работе рассматривается частный случай $\alpha=1$ общего кусочно-линейного условия пластичности.

Значение параметра b зависит от отношения λ предела текучести материала при чистом сдвиге τ_0 к пределу текучести при одноосном/растяжении сжатии σ_0 : $b = (2\lambda - 1)/(1 - \lambda)$, $\lambda = \tau_0/\sigma_t$. Предполагается, что в процессе изотропного упрочнения материала величина λ , и, следовательно, b , остается постоянной. Частный случай $b = (\sqrt{3} - 1)/2$ условия (9) в девиаторной плоскости представляет собой правильный 12-угольник,

вписанный в окружность, соответствующую условию Мизеса и может служить кусочно-линейной аппроксимацией условия Мизеса. Другой аппроксимации условия Мизеса соответствует $b = 1/2$.

Пластическая составляющая деформации определяется ассоциированным законом пластического течения (4) или (5). Предел текучести является линейной функцией эквивалентной пластической деформации $\sigma_y = 1 + H\varepsilon_{eq}^p$. Нагружение цилиндра предполагается монотонным, а эквивалентная пластическая деформация определяется из соотношения:

$$\sigma_y d\varepsilon_{eq}^p = \sigma_{rr} d\varepsilon_{rr}^p + \sigma_{\theta\theta} d\varepsilon_{\theta\theta}^p + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz}^p. \quad (10)$$

Заранее неизвестно какие из возможных 24 пластических областей возникнут при деформировании цилиндра. Конфигурация пластических областей во вращающемся цилиндре в общем случае зависит от граничных и торцевых условий, механических характеристик материала и геометрического параметра δ . Поэтому вместо решения определяющей системы уравнений для конкретной грани или ребра поверхности текучести рассматривается произвольная пластическую область, соответствующую общему кусочно-линейному условию пластичности (9). Такое общее решение может использоваться для анализа вращающихся цилиндров с любыми граничными и торцевыми условиями.

Рассматривались четыре различных случаях: вращающийся сплошной цилиндр с закрепленными концами, вращающийся сплошной цилиндр со свободными концами, вращающийся полый цилиндр с закрепленными концами и вращающийся полый цилиндр со свободными концами. Для каждого случая установлены закономерности развития пластического течения и получены точные решения в замкнутом виде для всех возможных режимов пластического течения. Полученное единое решение может быть использовано с другими типами граничных условий, например, для цилиндров с закрепленной боковой поверхностью. Кроме того, легко учитывается влияние внутренних и внешних давлений.

Ранее опубликованные результаты, основанные на критериях Треска и Ишлинского-Ивлева, являются частными случаями данного решения. Установлено, что промежуточное главное напряжение оказывает заметное влияние на упругопластический отклик вращающихся сплошных и полых цилиндров. Проведенный анализ предсказывает значительное увеличение предельной угловой скорости пластической деформации с увеличением параметра b , что особенно заметно при больших значениях параметра упрочнения H . Последний эффект наблюдается как для сплошных, так и для полых цилиндров, и для обоих типов торцевых условий. Полученные результаты подчеркивают необходимость использования параметра b при проектировании вращающихся машин. Сравнение полученного решения для случая $b=1/2$ с известными численными расчетами, основанными на условии Мизеса, показывает хорошее совпадение. Таким образом, точные решения, основанные на кусочно-линейной аппроксимации критерия текучести Мизеса могут быть более быстрой альтернативой трудоемким численным алгоритмам, использующим нелинейное условие Мизеса. Для удобства полученное универсальное решение может быть реализовано в системах компьютерной алгебры в виде простых алгоритмов. Благодаря универсальности общего условия полученное решение охватывает широкий класс изотропных материалов с идеально пластическим или линейным упрочнением и эффектом промежуточного главного напряжения. Полученные результаты не подходят для анизотропных материалов и материалов с эффектом разной прочности при растяжении/сжатии.

Раздел 2.3 посвящен термоупругопластическому анализу вращающегося цилиндра с жестким включением. В цилиндре присутствует неравномерное стационарное температурное поле, вызванное разностью температур на внутренней и внешней поверхностях. Для удобства в данном подразделе используется система безразмерных величин,

включающая в себя параметры (1), а также температурные параметры

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^t = \frac{E}{\sigma_0} \varepsilon_{ij}^t, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_0} - 1, \quad \bar{\alpha} = \frac{ET_0}{\sigma_0} \alpha, \quad (11)$$

ε_{ij}^t — температурные деформации, T — температура, T_0 — отсчетная температура, α — коэффициент линейного теплового расширения. Механические и теплофизические параметры материала предполагаются не зависящими от температуры

В качестве условия пластичности используется условие Треска вместе с линейным законом изотропного упрочнения

$$\max(|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|, |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|, |\sigma_{zz} - \sigma_{rr}|) = 1 + H\varepsilon_{eq}^p, \quad (12)$$

Граничные условия задачи определяются соотношениями (6). В свою очередь граничные условия по температуре имеют вид

$$T(\delta) = T_{in}, \quad T(1) = T_{out}, \quad T_{out} \geq T_{in}. \quad (13)$$

Физические соотношения в условиях плоской деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)\alpha T); \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu\varepsilon_{rr} + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)\alpha T); \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \alpha T. \end{aligned}$$

Установлено, что при воздействии только температурного градиента пластическое течение зарождается на внешней поверхности цилиндра $\beta = 1$, а соответствующее значение градиента ΔT_p имеет вид

$$\Delta T_p = \alpha \frac{2(1-\nu)(1+\delta^2(1-2\nu))\ln\delta}{(2(1-\nu+\delta^2(1-2\nu))\ln\delta - \nu(1-\delta^2))}. \quad (14)$$

Считается, что действия лишь температурного градиента недостаточно для начала течения, т.е. $\Delta T < \Delta T_p$. Предполагая, что условие пластичности впервые выполнится на внутренней поверхности цилиндра $\beta = \delta$ в форме $\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 1$ можно получить скорость вращения

$$\Omega_p = \frac{4(1-\nu)(1+(1-2\nu)\delta^2)}{(1-2\nu)S} - \frac{2\alpha(1-\delta^2+2\ln\delta)}{S \ln\delta} \Delta T, \quad (15)$$

$$S = (1-\delta^2)(3-2\nu+(1-2\nu)\delta^2).$$

Установлено, что пластическое течение может возникнуть внутри цилиндра, а не на внутренней боковой поверхности, как и в изотермическом случае. В общем случае в цилиндре формируются 6 пластических областей, соответствующих разным граням и ребрам призмы Треска. На эволюцию пластического течения существенное влияние оказывают геометрические и механические параметры, а также величина температурного градиента. Для не слишком высоких значений ΔT пластическое течение начинается на внутренней поверхности цилиндра, а соответствующую скорость Ω_p можно вычислить с помощью (15). В результате на внутренней поверхности цилиндра зарождаются пластические области I и II, напряженное состояние в которых удовлетворяет неравенствам $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$ и $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$ соответственно. Разумеется, с увеличением скорости вращения размеры пластических областей увеличиваются, а границы между областями I и II, и между областью II и упругой областью движутся в сторону внешней поверхности цилиндра. Далее при $\Omega = \Omega_1$ на внешней поверхности цилиндра зарождается пластическая область VI, соответствующая грани $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$ поверхности Треска (12). После этого, при $\Omega = \Omega_2$ на упругопластической границе между областью II и упругой областью выполняется равенство $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$, в результате чего в указанной точке появляются пластические области III и IV, напряженное состояние в которых удовлетворяет неравенствам $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$ и $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$ соответственно. Наконец, при $\Omega = \Omega_{fp}$ упругая область между областями IV и VI исчезает, а на ее месте формируется область V, соответствующая ребру $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} = \sigma_{zz}$ поверхности текучести Треска. Для каждой области найдено решение определяющей системы.

В качестве примера рассматривается цилиндр, геометрический параметр которого равен $\delta = 0.25$. В качестве отсчетной температуры принято $T_0 = 300\text{ K}$. Цилиндр изготовлен из алюминиевого сплава: $E = 66\text{ ГПа}$, $\sigma_0 = 237\text{ МПа}$, $H = 6.195\text{ ГПа}$, $\alpha = 2.32 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$, $\nu = 0.33$.

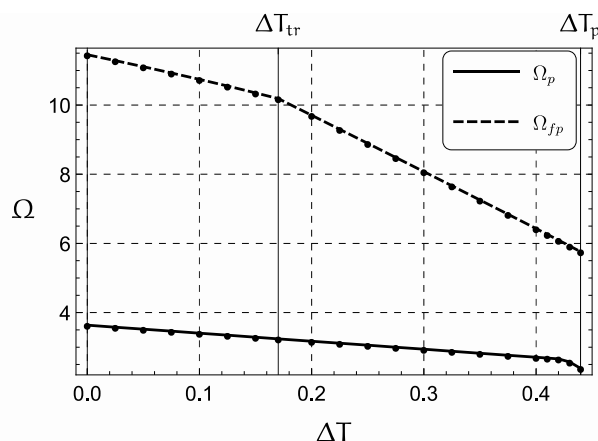


Рис. 4 — Скорости начала пластического течения Ω_p и полного перехода в состояние пластичности Ω_{fp} в зависимости от температурного градиента ΔT .

Численные зависимости скоростей вращения Ω_p и Ω_{fp} от градиента температуры ΔT представлены на рис. 4. Видно, что и Ω_p и Ω_{fp} снижаются с увеличением ΔT от 0 до ΔT_p на 34% и 50% соответственно. Зависимость $\Omega_{fp}(\Delta T)$ состоит из двух практически линейных участков, а для $\Delta T > \Delta T_{tr}$ скорость падения Ω_{fp} увеличивается.

Из рис. 5 видим, что температурный градиент значительно ускоряет распространения пластического течения. Кроме того, как и в чисто упругом состоянии, абсолютная величина напряжений и пластических деформаций существенно возрастает с увеличением температурного градиента. Для достаточно больших значений температурного градиента и скоростей вращения вблизи внешней поверхности цилиндра появляется область отрицательных осевых напряжений. В то время как в изотермическом случае все напряжения остаются положительными.

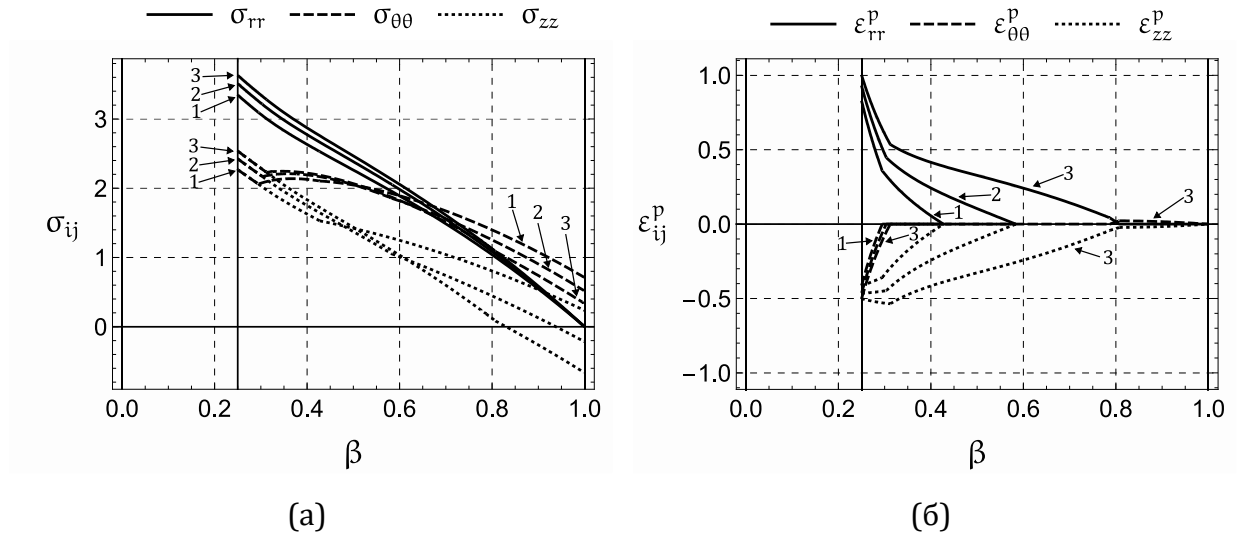


Рис. 5 — Распределение напряжений (а) и пластических деформаций (б) при $\Omega=6.428$ для различных значений градиента температуры:
1) $\Delta T=0.0$; 2) $\Delta T=0.2$; 3) $\Delta T=0.4$.

Раздел 2.4 посвящен расчету ротационного автофретирования полого цилиндра из нелинейно-упрочняющегося материала. В разделе используется следующая система безразмерных величин (1), дополненная параметром упрочнения $H=K(\sigma_0/E)^n$, где K, n — параметры, характеризующие упрочнение материала. В качестве условия пластичности используется условие Треска и степенной закон упрочнения

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = 1 + H\epsilon_{eq}^n, \quad (16)$$

Распределение перемещений и напряжений в области упругого деформирования ($\beta \in [\beta_{ep}, 1]$) имеет вид:

$$\begin{aligned} u^{el} &= \frac{(1+\nu)d_1}{2\beta} + (1+\nu)(1-2\nu)d_2\beta - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Omega \beta^3, \\ \sigma_{rr}^{el} &= -\frac{d_1}{2\beta^2} + d_2 - \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega \beta^2, \quad \sigma_{\theta\theta}^{el} = \frac{d_1}{2\beta^2} + d_2 - \frac{(1+2\nu)}{8(1-\nu)} \Omega \beta^2, \end{aligned} \quad (17)$$

где d_1, d_2 — константы интегрирования, которые определяются из решения системы уравнений $\sigma_{\theta\theta}^{el}(\beta_{ep}) - \sigma_{rr}^{el}(\beta_{ep}) = 1$, $\sigma_{rr}^{el}(1) = 0$.

Распределение перемещений и напряжений в пластической области ($\beta \in [\beta_{ep}, 1]$) определяются следующими соотношениями

$$\begin{aligned}
u^{pl} &= \frac{(1+\nu)c_1}{2\beta} + (1+\nu)(1-2\nu)c_2\beta - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^3 - \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\beta \int_{\delta}^{\beta} \frac{\varepsilon_{eq}}{\beta} d\beta, \\
\sigma_{rr}^{pl} &= -\frac{c_1}{2\beta^2} + c_2 - \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^2 - \frac{1}{1-\nu^2} \int_{\delta}^{\beta} \frac{\varepsilon_{eq}}{\beta} d\beta, \\
\sigma_{\theta\theta}^{pl} &= \frac{c_1}{2\beta^2} + c_2 - \frac{(1+2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^2 - \frac{1}{1-\nu^2} \left(\int_{\delta}^{\beta} \frac{\varepsilon_{eq}}{\beta} d\beta - \varepsilon_{eq} \right), \\
c_1 &= \beta_{ep}^2 - \frac{(1-2\nu)}{4(1-\nu)}\Omega\beta_{ep}^4, \quad c_2 = \frac{\beta_{ep}^2}{2\delta^2} - \frac{(1-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\frac{\beta_{ep}^4}{\delta^2} + \frac{(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\delta^2.
\end{aligned}$$

Координата упругопластической границы определяется из условия $u^{el}(\beta_{ep}) = u^{pl}(\beta_{ep})$, которое после преобразований примет вид:

$$(1-2\nu)\Omega\beta_{ep}^4 - 4(1-\nu)\beta_{ep}^2 + \frac{8\delta^2}{(1-\delta^2)(1+\nu)} \int_{\delta}^{\beta_{ep}} \frac{\varepsilon_{eq}}{\beta} d\beta + (3-2\nu)\Omega\delta^2 = 0. \quad (18)$$

Вышеприведенное уравнение нелинейно относительно β_{ep} и его решение для выбранных значений параметров задачи и скорости вращения ($\Omega > \Omega_p$) производится методом Ньютона. При полном переходе цилиндра в состояние пластичности выполняется условие $\beta_{ep} = 1$, а уравнение (18) запишется следующим образом:

$$((1-2\nu) + (3-2\nu)\delta^2)\Omega_{fp} + \frac{8\delta^2}{(1-\delta^2)(1+\nu)} \int_{\delta}^1 \frac{\varepsilon_{eq}}{\beta} d\beta - 4(1-\nu) = 0.$$

Полученное решение справедливо для любого закона изотропного упрочнения. Если функция $\varepsilon_{eq}(\beta)$ известна, то распределение перемещений и напряжений в цилиндре может быть легко получено для любой скорости в диапазоне $\Omega_p < \Omega \leq \Omega_{fp}$. Последним шагом является определение пластической деформации ε_{eq} из уравнения

$$\varepsilon_{eq} + H_0 \varepsilon_{eq}^n + \nu_0 \Psi = 0, \quad \nu_0 = 1 - \nu^2, \quad H_0 = \nu_0 H, \quad \Psi = 1 - \frac{c_1}{\beta^2} - \frac{(1-2\nu)}{4(1-\nu)}\Omega\beta^2. \quad (19)$$

Уравнение (19) в общем случае является трансцендентным и не имеет общего решения для произвольного $n \in \mathbb{R}$. Если же $n \in \mathbb{Q}$, то

уравнение (19) сводится к алгебраическому. Как известно из теоремы Абеля — Руффини, общее решение в радикалах имеют алгебраические уравнения степени не выше четвертой. Следовательно, точное решение уравнения (19) существует для $n=1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1, 4/3, 3/2, 2, 3, 4$. Результаты экспериментов показывают, что значение n для металлов не превосходит 1, поэтому найденные решения ограничены значениями $n=1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1$. Например, для $n=1/2$ уравнение (19) имеет два корня, один из них удовлетворяет условию $\varepsilon_{eq}(\beta_{ep})=0$, этот корень:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{H_0^2 - 4\nu_0 \Psi} - H_0 \right)^2.$$

Для случая $n=1/2$ интеграл $\int \varepsilon_{eq} / \beta d\beta$ выражается аналитически с помощью эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода, которые поддерживаются большинством систем компьютерной алгебры.

Зависимости для остаточных напряжений в цилиндре имеют вид

$$\sigma_{rr}^{res} = \begin{cases} \frac{c_3}{\beta^2} - \frac{c_4}{\delta^2} - \frac{1}{1-\nu^2} \int_{\delta}^{\beta} \frac{\hat{\varepsilon}_{eq}}{\beta} d\beta, & (\delta \leq \beta \leq \hat{\beta}_{ep}); \\ \frac{c_3}{\beta^2} - c_4, & (\hat{\beta}_{ep} \leq \beta \leq 1). \end{cases}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{res} = \begin{cases} -\frac{c_3}{\beta^2} - \frac{c_4}{\delta^2} - \frac{1}{1-\nu^2} \left(\int_{\delta}^{\beta} \frac{\hat{\varepsilon}_{eq}}{\beta} d\beta - \hat{\varepsilon}_{eq} \right), & (\delta \leq \beta \leq \hat{\beta}_{ep}); \\ -\frac{c_3}{\beta^2} - c_4, & (\hat{\beta}_{ep} \leq \beta \leq 1). \end{cases}$$

$$c_3 = -\frac{\hat{\beta}_{ep}^2}{2} + \frac{(3-2\nu)\delta^2 + (1-2\nu)\hat{\beta}_{ep}^4}{8(1-\nu)} \Omega_{\max}, \quad \hat{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq}(\Omega_{\max}).$$

Зависимость критической скорости Ω_{fp} от параметров упрочнения n и H представлена на рис. 6. Видно, что величина растет с увеличением H и этот эффект более выражен для малых значений n . В частности, если $n=1$, то увеличение Ω_{fp} в диапазоне $H \in [0, 1]$ составляет $\approx 29\%$. С другой стороны, для $n=1/4$ увеличение уже $\approx 42\%$.

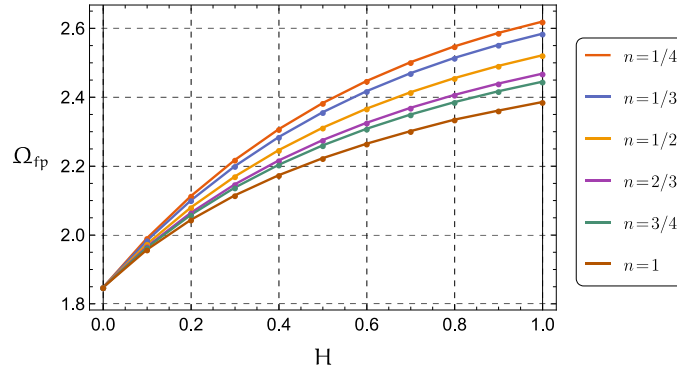


Рис. 6 — Зависимость $\Omega_{fp}(H)$ для нескольких значений n .

Распределение остаточных напряжений (рис. 7) в цилиндре рассмотрено на примере алюминия 2024-T3 со следующими значениями параметров: $\nu = 0.3, \sigma_0 = 200 \text{ МПа}, K/\sigma_0 = 2.8, E/\sigma_0 = 360, n = 0.25$.

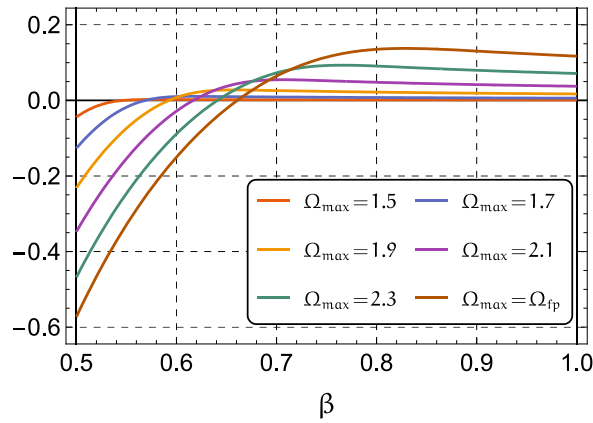


Рис. 7 — Распределение остаточных тангенциальных напряжений для нескольких значений Ω_{max} .

Раздел 2.5 посвящен анализу влияния падения модуля на остаточные напряжения, вызванные ротационным автофретированием полого цилиндра с закрепленными торцами. У многих конструкционных материалов после предварительного пластического деформирования наблюдается снижение модуля Юнга, которое может достигать десятков процентов. Известно, что учет этого эффекта существенно повышает точность расчета итоговой геометрии детали для технологических процессов, связанных с интенсивным пластическим деформированием. Для решения дополнительно введены следующие безразмерные величины:

$$\bar{H} = \frac{H}{E_0}, \bar{\sigma}_\infty = \frac{\sigma_\infty}{\sigma_0}, \bar{\gamma} = \frac{\sigma_0}{E_0} \gamma, \bar{E}_u = \frac{E_u}{E_0}, \bar{E}_\infty = \frac{E_\infty}{E_0}, \bar{\zeta} = \frac{\sigma_0}{E_0} \zeta,$$

H, σ_∞, γ — параметры, характеризующие изотропное упрочнение, E_∞, ζ — параметры, характеризующие изменение модуля Юнга.

В качестве условия пластичности используется условие Треска, в котором предел текучести σ_y определяется линейно-экспоненциальный законом упрочнения

$$\sigma_y = 1 + H\varepsilon_{eq}^p + (\sigma_\infty - 1)(1 - e^{-\gamma \varepsilon_{eq}^p}), \quad (20)$$

где σ_∞ — максимальное значение предела текучести, γ — параметр, характеризующий скорость увеличения предела текучести с ростом пластической деформации, ε_{eq}^p — эквивалентная пластическая деформация.

При разгрузке модуль Юнга определяется накопленной пластической деформацией в соответствии с законом

$$E_u(\hat{\varepsilon}_{eq}^p) = 1 - (1 - E_\infty)(1 - e^{-\zeta \hat{\varepsilon}_{eq}^p}), \quad (21)$$

где E_∞ — предельное значение модуля Юнга при пластической деформации, стремящейся к бесконечности, ζ — параметр материала, характеризующий скорость уменьшения модуля Юнга с ростом пластической деформации, $\hat{\varepsilon}_{eq}^p$ — эквивалентная пластическая деформация, накопленная на стадии нагрузки ($\hat{\varepsilon}_{eq}^p = \varepsilon_{eq}^p(\Omega_{\max})$). Для сравнения полученных результатов также используется классическая модель ($E_u = 1$).

Пластическая деформация определяется из уравнения

$$k(\sigma_\infty - 1)e^{-\gamma \varepsilon_{eq}^p} - \varepsilon_{eq}^p = k f(\beta), \quad (22)$$

$$k = \frac{1 - \nu^2}{1 + H - H\nu^2}, \quad f(\beta) = \sigma_\infty - c_1 \beta^{-2} - \frac{(1 - 2\nu)}{4(1 - \nu)} \Omega \beta^2.$$

Решение уравнения (22) можно представить в форме:

$$\varepsilon_{eq}^p(\beta) = \frac{W((\sigma_\infty - 1)k\gamma e^{k\gamma f(\beta)})}{\gamma} - k f(\beta). \quad (23)$$

В (23) $W(x)$ — главная ветвь функции Ламберта.

Остаточные перемещения определяются уравнением

$$\frac{\partial^2 u^{res}}{\partial \beta^2} + k_1 \frac{\partial u^{res}}{\partial \beta} + k_2 u^{res} = \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left(k_3 \hat{\varepsilon}_{eq}^p + \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{eq}^p}{\partial \beta} \right),$$

$$M = \frac{E'_u}{E_u}, \quad k_1 = \beta^{-1} + M, \quad (24)$$

$$k_2 = \frac{\nu}{1-\nu} M \beta^{-1} - \beta^{-2}, \quad k_3 = 2\beta^{-1} + M.$$

Уравнение (24) решается с помощью неявного метода Рунге-Кутты.

Результаты расчетов показали, что эффект снижения модуля Юнга может оказывать заметное влияние на величину остаточных напряжений после ротационного автофретирования — процесса, который не связан с накоплением больших деформаций. Обнаружено, что учет падения модуля Юнга особенно важен для расчета толстостенных цилиндров и высоких скоростей автофретирования. Также следует отметить, что вышесказанное справедливо только для материалов с выраженным снижением модуля Юнга после пластического деформирования. Результаты расчетов для материалов AA6022 и DP980 проиллюстрированы на рис. 8, где показана разница в значении тангенциального остаточного напряжения на внутренней поверхности цилиндра при постоянном и меняющемся по закону (21) модуле Юнга.

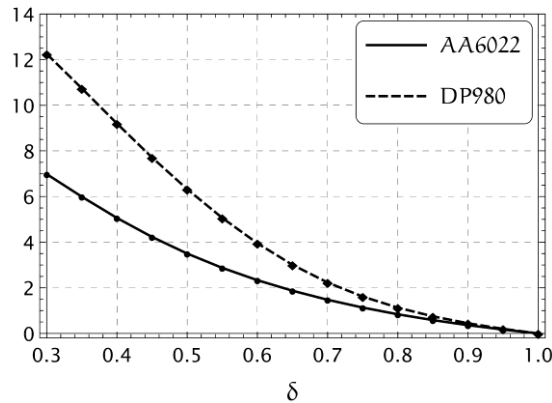


Рис. 8 — Снижение (в процентах) тангенциального остаточного напряжения на внутренней поверхности цилиндра при скорости автофретирования $\Omega_{\max} = \Omega_{fp}$

В разделе 2.6 приведены основные выводы по 2-ой главе.

В третьей главе изучается влияние вязких свойств материала на

напряженно-деформирование вращающихся дисков и цилиндров. На практике срок эксплуатации вращающихся цилиндров и дисков может составлять десятки лет и на таком временном масштабе проявляются вязкие свойства материала: ползучесть (вязкоупругость) и вязкопластичность. Конструкция может быть спроектирована с большим запасом прочности по отношению к мгновенному действию нагрузок, однако даже при небольшом уровне напряжений в теле неизбежно происходит медленное накопление деформаций ползучести, которое в конечном итоге может привести к потере эксплуатационных свойств конструкции и даже разрушению. Известно, что рост интереса к явлению ползучести в середине 20-го века был связан с необходимостью расчета деталей паровых турбин (дисков и лопаток), находящихся под действием именно центробежных сил и работающих в условиях высокой температуры.

Раздел 3.1 посвящен литературному обзору, основных работ по ползучести и вязкопластичности вращающихся цилиндров.

В разделе 3.2 рассматривается вязкопластическое течение во вращающемся цилиндре. В качестве условия текучести выбрано обобщение условия Мизеса следующего вида:

$$\Phi(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) = \left(s_{ij} - \frac{\eta}{\sigma_y} \epsilon_{ij}^p \right) \left(s_{ji} - \frac{\eta}{\sigma_y} \epsilon_{ji}^p \right) = \frac{2}{3}.$$

где η — вязкость, s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений, ϵ_{ij}^p — компоненты девиатора тензора скоростей пластических деформаций.

В стационарном случае напряжения и скорости пластических деформаций постоянны. Тогда полные скорости деформаций среды равны скоростям пластических деформаций, и как следствие пластической несжимаемости можно найти скорости пластической деформации и далее определить напряженное состояние:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{\Omega}{2}(1-\beta^2) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1-\delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right) \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \beta; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\Omega}{2}(1-\beta^2) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1-\delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right) \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} (\ln \beta + 1); \\ \sigma_{zz} &= \frac{\Omega}{2}(1-\beta^2) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\delta^2}{1-\delta^2} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} \Omega \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \ln \beta + 1);\end{aligned}$$

Аналогично для случая обобщенной плоской деформации

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{\Omega}{2}(1-\beta^2) + \frac{c}{Z} \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) + N(\beta), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\Omega}{2}(1-\beta^2) + \frac{c}{Z} \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{4c}{\sqrt{3} \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4}} + N(\beta), \\ \sigma_{zz} &= \frac{\Omega}{2}(1-\beta^2) + \frac{c}{Z} + \frac{3\varepsilon_{zz}}{2Z} + \frac{2c + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^2}{\sqrt{3} \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4}} + N(\beta), \\ N(\beta) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \beta + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2}}{2c + \sqrt{4c^2 + 3\varepsilon_{zz}^2 \beta^4}} \right).\end{aligned}$$

Для определения константы c и скорости осевой деформации ε_{zz} необходимо использовать граничное условие на внутренней поверхности цилиндра и условие на осевую силу.

Упруговязкопластическая задача решается с помощью разработанной численной схемы на основе метода конечных разностей. Рассматривается вращение цилиндра по следующему закону: сначала скорость вращения растет от Ω_p до $\Omega_{\max}$, далее остается постоянной:

$$\Omega(\tau) = \begin{cases} \frac{(\Omega_{\max} + \Omega_p)}{2} + (\Omega_{\max} - \Omega_p) \sin\left(2\pi\tau - \frac{\pi}{2}\right), & 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ \Omega_{\max}, & \frac{1}{2} < \tau \leq 1 \end{cases}$$

$\Omega_{\max} = 1.05\Omega_{fp}$, Ω_{fp} , разумеется, имеет разные значения для плоской деформации и обобщенной плоской деформации. Для параметров задачи приняты значения: $\delta = 0.2$, $\sigma_y = 2.5 \cdot 10^8$ Па, $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $\sigma_y/E \cong 0.00119$,

$\nu = 0.3$, $X = \sigma_y T / \eta = 0.1$. Для проведения численных расчетов использовалась сетка, состоящая из 2000 узлов и 5000 шагов по времени. На рис. 9а представлен график движения упругопластической границы. Из графика видим, что в свободном цилиндре пластическое течение распространяется быстрее, чем в закрепленном, и уже к середине процесса занимает цилиндр полностью.

Рассмотрим развитие напряжений в ходе процесса. Графики тангенциальных напряжений для моментов времени $\tau = 0.0, 0.25, 0.5, 1.0$ представлены на рис. 9. При упруговязкопластическом деформировании напряжения в закрепленном и свободном цилиндре ведут себя в целом схожим образом, но абсолютные величины напряжений в свободном цилиндре ниже. Наибольшими являются напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (рис. 9), их величина в закрепленном цилиндре достигает $\approx 2\sigma_y$, а в свободном $\approx 1.7\sigma_y$.

Распределение напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ существенно меняется в ходе процесса.

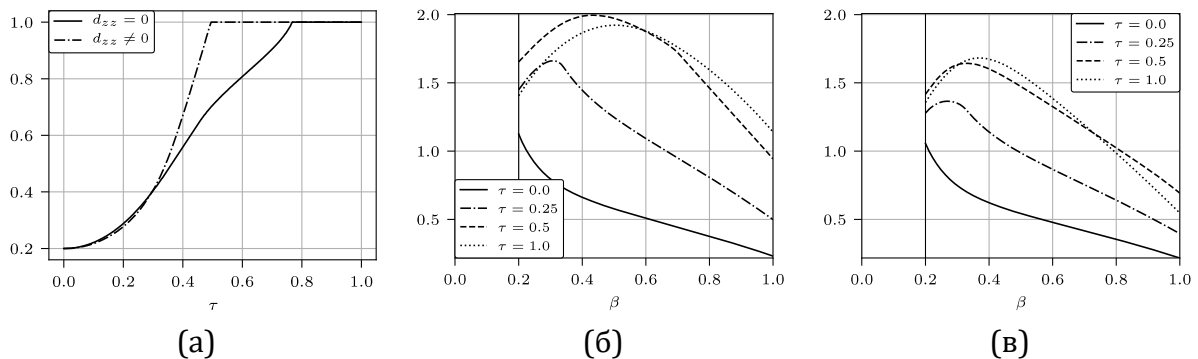


Рис. 9 — (а) эволюция упругопластической границы; напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ в разные моменты времени: (б) плоская деформация, (в) обобщенная плоская деформация.

В закрепленном цилиндре осевые пластические деформации на два порядка меньше других компонент. В свободном цилиндре осевые пластические деформации существенно больше по сравнению с закрепленным, но примерно на порядок меньше других компонент деформаций. Максимальные значения деформаций достигается на внутренней поверхности. Максимальные значения перемещений в закрепленном цилиндре имеют место на внутренней поверхности области. При этом в свободном цилиндре распределение перемещений меняется с течением

времени. На первых шагах максимум достигается на внешней поверхности цилиндра, а примерно с середины процесса — на внутренней. В среднем перемещения в закрепленном цилиндре выше. Для проверки корректности разработанного численного алгоритма использовалось точное вязкопластическое решение. После $\tau > 0.5$ напряжения и скорости пластических деформаций быстро стабилизируются и далее меняются незначительно. Имеет место хорошее совпадение с точным решением.

Раздел 3.3 посвящен расчету ползучести и вязкопластического течения во вращающемся диске переменной толщины. Материал диска обладает как упругими, так и вязкими и пластическими свойствами. Термодинамическими параметрами, задающими текущее состояние деформируемого тела, считаются обратимые и необратимые деформации.

До пластического течения накопление необратимой составляющей деформаций связано с процессом ползучести. Для определения скоростей деформаций ползучести используется законом Нортона:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^v &= \frac{1}{2} B n (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^v = \frac{1}{2} B n (2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) Q^{\frac{n}{2}-1}, \\ \varepsilon_{zz}^v &= -\frac{1}{2} B n (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad \varepsilon_{r\theta}^v = \frac{3}{2} B n \sigma_{r\theta} Q^{\frac{n}{2}-1}, \quad Q = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\sigma_{r\theta}^2.\end{aligned}$$

В качестве пластического потенциала используется обобщенный потенциал Мизеса. Скорости пластических деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^p &= \frac{1}{3\eta} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right), \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{1}{3\eta} (2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) \left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right), \\ \varepsilon_{zz}^p &= -\frac{1}{3\eta} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right), \quad \varepsilon_{r\theta}^p = \frac{\sigma_{r\theta}}{\eta} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{Q}}\right).\end{aligned}$$

При вращении с переменной скоростью на каждую точку диска помимо ускорения $r\omega^2$ будет действовать вращательное ускорение $r d\omega/dt$. Тогда уравнения равновесия в диске примут вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\rho r \omega^2, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = \rho r \frac{d\omega}{dt}.$$

Разработаны численные схемы расчета необратимых деформаций во вращающемся диске с граничными условиями различного вида (полый диск и диск с жестким включением) с учетом углового ускорения. Рассматривались модели вязкоупругого (деформации разделяются на упругие и деформации ползучести) и упруго-вязкопластического (деформации разделяются на упругие и вязкопластические) материалов, а также их комбинация (в момент начала течения в точке происходит смена физического механизма накопления необратимых деформации с ползучести на вязкопластичность). Кроме того, рассмотрен случай идеального пластического материала (с нулевой вязкостью). Численные схемы построены с использованием функции напряжений Эйри и условий совместности разрывов Адамара. Изучены закономерности развития области пластического деформирования для каждой из использованных моделей материала. Установлено, что при постоянной угловой скорости область вязкопластического течения уменьшается, затем стабилизируется и выходит на асимптоту, снижение скорости вращения диска приводит к сокращению области вязкопластического течения, за которым следует ее исчезновение. Проведенные расчеты и анализ напряженно-деформированного состояния диска в различные моменты времени позволяют сделать вывод, что деформирование в режиме ползучести может оказывать существенное влияние на зарождение и эволюцию вязкопластического течения во вращающемся диске. Распределения напряжений по радиусу в различные моменты времени показаны на рис. 10.

Следует отметить, что в подавляющем большинстве работ, посвященных упругопластическому анализу вращающихся цилиндров и дисков, рассматривалась только центробежная сила, тогда как угловое ускорение обычно принималось равным нулю. Расчеты, проведенные в данной главе, показали, что угловое ускорение может приводить к заметному росту эквивалентного напряжения и скоростей пластических

деформаций в процессе необратимого деформирования вращающегося диска. Если условия эксплуатации подразумевают постоянное ускорение и торможение диска, как происходит, например, в маховичных накопителях энергии, то в расчетную модель следует включать помимо центробежной силы также и угловое ускорение.

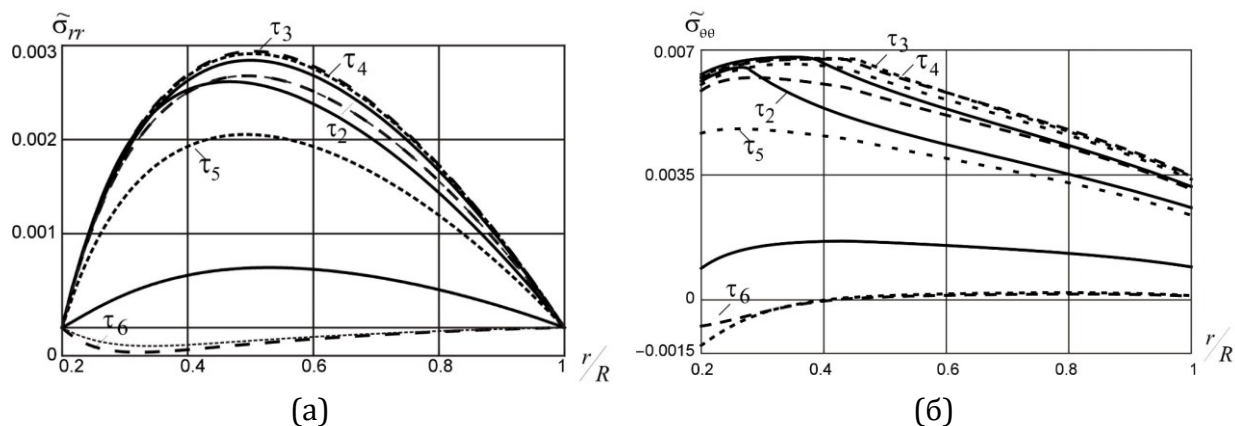


Рис. 10 — Распределение напряжений в полем диске в различные моменты времени: (а) радиальное напряжение; (б) тангенциальное напряжение.

В разделе 3.4 перечислены основные выводы по 3-ей главе.

Четвертая глава посвящена построению равнопрочных цилиндра и диска, находящихся под действием центробежных сил и заданный усилий на внутреннем и внешнем контуре. Для цилиндра искомой функцией является радиальное распределение модуля Юнга, а для диска — радиальное распределение толщины (профиль). Под равнопрочным состоянием в цилиндре понимаются следующие варианты: постоянное тангенциальное напряжение, постоянная разность между тангенциальным и радиальным напряжением, а также постоянная линейная комбинация тангенциального и радиального напряжений. Прочность материала диска характеризуются анизотропией и асимметрией при растяжении/сжатии, а в качестве критерия прочности выбрано квадратичное условие общего вида, которое в частных случаях сводится ко многим известным критериям прочности (Мизеса, Хилла, Друкера-Прагера).

В разделе 4.1 приведен литературный обзор, посвященный оптимальному проектированию вращающихся деталей машин.

В разделе 4.2 рассматривается тонкий осесимметричный диск переменной толщины. Внутренний и внешний радиусы диска обозначим r_{in} и r_{out} соответственно. Диск вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω , а на его боковых поверхностях заданы усилия P_{in} и P_{out} . Геометрия диска и схема нагружения изображены на рис. 11.

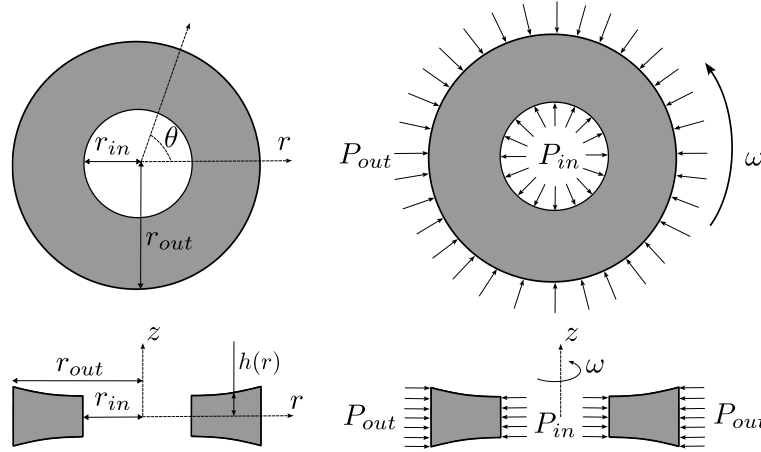


Рис. 11 — Геометрия вращающегося диска и схема нагружения.

Диск изготовлен из однородного и ортотропного упругого материала, а главные оси анизотропии совпадают с координатными поверхностями. Единственным нетривиальным уравнением равновесия в диске является уравнение в радиальном направлении, которое имеет вид

$$\frac{d}{dr}(h(r)r\sigma_{rr}) - h(r)\sigma_{\theta\theta} + h(r)\rho\omega^2 r^2 = 0,$$

где $h(r)$ — толщина (рис. 11). h_{in} — толщина на внутреннем контуре.

Прочностные свойства материала проявляют эффекты анизотропии и асимметрии при растяжении и сжатии. В качестве критерия прочности используется общее квадратичное условие

$$A\sigma_{rr}^2 + B\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + C\sigma_{\theta\theta}^2 + D\sigma_{rr} + E\sigma_{\theta\theta} \leq 1, \quad (25)$$

где A, B, C, D, E — экспериментально определяемые параметры материала. В качестве единственного ограничения требуется эллиптичность функции в левой части (25), т.е. должно выполняться $B^2 - 4AC < 0$. Условие (25) в частных случаях сводится ко многим известным критериям

прочности (Мизеса, Цая-Ву, Хилла). Краевая задача (в безразмерной форме) относительно неизвестных функций σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ и h имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta}(h(\beta)\beta\sigma_{rr}) - h(\beta)\sigma_{\theta\theta} + h(\beta)\Omega\beta^2 &= 0, \\ \frac{d}{d\beta}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) + \frac{(1+\nu)\sigma_{\theta\theta} - (\mathbb{O}^{-1} + \nu)\sigma_{rr}}{\beta} &= 0, \\ \sigma_{rr}(\delta) &= -P_{in}, \quad \sigma_{rr}(1) = -P_{out}, \quad h(\delta) = 1. \end{aligned} \quad (26)$$

В (26) $\mathbb{O}$ — параметр ортотропии. Задача построения равнопрочного в соответствии с условием (25) диска формулируется следующим образом: найти решение краевой задачи (26) такое, что для заданного $\tilde{\sigma}_{eq} \in (0, 1]$ справедливо $\sigma_{eq}(\beta) = \tilde{\sigma}_{eq}$, $\forall \beta \in [\delta, 1]$.

Для решения условие прочности (26) записывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^2 + N\sigma_{rr}s_{\theta\theta} + s_{\theta\theta}^2 + M\sigma_{rr} + Ls_{\theta\theta} &= K, \\ s_{\theta\theta} &= Y\sigma_{\theta\theta}, Y = \frac{C}{A}, N = \frac{B}{\sqrt{AC}}, M = \frac{D}{A}, L = \frac{E}{\sqrt{AC}}, K = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2}{A}. \end{aligned} \quad (27)$$

Условие (27) можно удовлетворить с помощью замены

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{1}{\kappa}(\gamma + 2\chi\sin\varphi), \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{1}{\kappa Y}(\psi + \sqrt{\kappa}\chi\cos\varphi - N\chi\sin\varphi); \\ \chi &= \sqrt{M^2 + L^2 - MLN + K\kappa}, \quad \kappa = 4 - N^2, \quad \gamma = 2M - LN, \quad \psi = 2L - MN. \end{aligned} \quad (28)$$

В (28) $\varphi = \varphi(\beta)$ — неизвестная функция. Граничные условия по напряжениям сводятся к системе уравнений:

$$\sin\varphi_\delta = \frac{\kappa P_{in} - \gamma}{2\chi}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{\kappa P_{out} - \gamma}{2\chi} \quad (\varphi_\delta = \varphi(\delta), \varphi_1 = \varphi(1)) \quad (29)$$

Второе из уравнений (26) преобразовывается с помощью (28), полученное уравнение из неизвестных содержит только функцию $\varphi(\beta)$ и может быть решено в неявном виде. φ можно принять в качестве новой независимой переменной, а $\beta(\varphi)$ — в качестве неизвестной функции. Решение этого уравнения должно удовлетворять граничным условиям

$$\beta(\varphi_\delta) = \delta, \quad \beta(\varphi_1) = 1. \quad (30)$$

Для восстановления напряженного состояния необходимо решить четыре алгебраических уравнения (29) и (30). Однако число неизвестных в этих уравнениях равно трем (константа интегрирования, φ_δ и φ_1). Отсюда следует, что для произвольных значений механических параметров материала $\mathbb{O}, \nu, A, \dots, E$, геометрического параметра δ , внешних нагрузок P_{in}, P_{out} и желаемого эквивалентного напряжения $\tilde{\sigma}_{eq}$ построить диск равной прочности невозможно. Какой-либо из этих параметров должен вычисляться через остальные с помощью одного из уравнений (29), (30). В качестве такого параметра выбран параметр δ . Граничным условиям задачи можно удовлетворить четырьмя различными способами. Однако некоторые из них (и даже все) могут не иметь физического смысла.

Следующим шагом решения является определение профиля диска $h(\beta)$ с помощью первого из уравнений (31). В завершении проверяется справедливость гипотезы о плоском напряженном состоянии. Толщина диска должна меняться достаточно плавно, откуда следует условие вида

$$\left| \frac{dh}{dr} \right| \leq \Delta \quad \text{или} \quad \left| \frac{d\bar{h}}{d\beta} \right| \leq \frac{r_{out}}{h_{in}} \Delta. \quad (32)$$

В левом из неравенств (32) используются размерные величины, а в правом — безразмерные; Δ — некоторое заданное число. Из представленного решения не составляет труда определить производную $d\bar{h}/d\beta$. Справедливость неравенства (32) проверяется в каждой точке диска. В спорных случаях необходимо применять конечно-элементный анализ на основе двумерной модели диска.

В частном случае $\varphi'(\beta) = 0$ имеем

$$h(\beta) = \exp \left(\frac{\Omega}{2\sigma_{rr}} (\delta^2 - \beta^2) \right) \left(\frac{\beta}{\delta} \right)^{\frac{\mathbb{O}-1}{1+\nu}}. \quad (33)$$

Если пренебречь свойствами анизотропии и асимметрии, то $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\tilde{\sigma}_{eq}$, а (33) сводится к классическому решению Ю.Н. Работнова.

Раздел 4.3 посвящен проектированию равнопрочных вращающихся цилиндров. Материал цилиндра считается неоднородным в отношении модуля Юнга, остальные физико-механические параметры: плотность, коэффициент Пуассона и предел текучести приняты постоянными. Целью раздела является определение функции распределения модуля Юнга $E(\beta)$, которая бы приводила к желаемому напряженному состоянию во вращающемся цилиндре. Под таким состоянием понимается: а) $\sigma_{\theta\theta} = const$; б) $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = const$; в) $\sigma_{\theta\theta} + k\sigma_{rr} = const (k \neq -1)$.

Случай $\sigma_{\theta\theta} = const$. Во вращающемся сплошном и полом цилиндре со свободными поверхностями тангенциальное напряжение является наибольшим. Поэтому цилиндр, где $\sigma_{\theta\theta} = const$ является равнопрочным в соответствии с критерием максимального главного напряжения. В случае плоской деформации распределение напряжений имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_1 + \frac{c_2}{\beta} - \frac{\Omega}{3}\beta^2; \quad \sigma_{\theta\theta} = c_1; \quad \sigma_{zz} = 2\nu c_1 + \frac{\nu c_2}{\beta} - \frac{\nu}{3}\Omega\beta^2, \\ c_1 &= \frac{1}{3}(1 + \delta + \delta^2)\Omega, \quad c_2 = -\frac{1}{3}(\delta + \delta^2)\Omega.\end{aligned}\tag{34}$$

Распределение модуля Юнга следует из уравнения совместности деформаций с учетом (34)

$$\begin{aligned}E(\beta) &= \exp \int \frac{t m + (3+m)\beta^3}{\beta^4 + n\beta^2 + t\beta} d\beta, \\ t &= \delta(1 + \delta), w = \nu^{-1} - 2, m = (1 + w), n = (1 + t)w.\end{aligned}\tag{35}$$

В (35) интеграл под знаком экспоненты вычисляется в элементарных функциях. Для обобщенной плоской деформации решение определяется схожим образом, распределение напряжений записывается как:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_1 + \frac{c_2}{\beta} - \frac{\Omega}{3}\beta^2, \quad \sigma_{\theta\theta} = c_1, \quad \sigma_{zz} = d + 2\nu c_1 + \frac{\nu c_2}{\beta} - \frac{\nu}{3}\Omega\beta^2, \\ c_1 &= \frac{1}{3}(1 + \delta + \delta^2)\Omega, \quad c_2 = -\frac{1}{3}(\delta + \delta^2)\Omega, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{2}(1 + \delta^2)\nu\Omega.\end{aligned}$$

Решение (35) остается справедливым за исключением того, что

$$n = \frac{(2(1+\delta(1+\delta))(1-\nu) - (1+\delta(4+\delta))\nu^2)}{2\nu(1+\nu)}.$$

В случае сплошного цилиндра $\delta=0$. Константы примут значения $c_1 = \Omega/3, c_2 = 0, \varepsilon_{zz} = -\nu\Omega/2$. Распределение модуля Юнга для случая плоской деформации:

$$E(\beta) = \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\beta^2\right)^{(1+2\nu)/2\nu},$$

и для случая обобщенной плоской деформации

$$E(\beta) = \left(1 + \frac{2\nu(1+\nu)}{2-\nu(2+\nu)}\beta^2\right)^{(1+2\nu)/2\nu}.$$

Случай $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = c_1$. Вращающийся полый цилиндр, в котором разность напряжений $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ постоянна, является равнопрочным в соответствии с критерием Треска. Для плоской деформации имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_2 + c_1 \ln \beta - \frac{\Omega}{2}\beta^2, \quad \sigma_{\theta\theta} = c_2 + c_1 (\ln \beta + 1) - \frac{\Omega}{2}\beta^2, \\ \sigma_{zz} &= \nu(c_1 + 2c_2) + 2\nu c_1 \ln \beta - \nu\Omega\beta^2, \quad c_1 = -\frac{1-\delta^2}{2\ln \delta}\Omega, \quad c_2 = \frac{\Omega}{2}.\end{aligned}$$

Распределение модуля Юнга в цилиндре

$$E(\beta) = \exp\left(2\int_{\delta}^{\beta} \frac{\nu + bx^2}{bx^3 + cx \ln x + (v-b)x} dx\right),$$

Для случая обобщенной плоской деформаций:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_2 + c_1 \ln \beta - \frac{\Omega}{2}\beta^2, \quad \sigma_{\theta\theta} = c_2 + c_1 (\ln \beta + 1) - \frac{\Omega}{2}\beta^2, \\ \sigma_{zz} &= \varepsilon_{zz} + \nu(c_1 + 2c_2) + 2\nu c_1 \ln \beta - \nu\Omega\beta^2, \\ c_1 &= -\frac{1-\delta^2}{2\ln \delta}\Omega, \quad c_2 = \frac{\Omega}{2}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{2}\nu(1+\delta^2)\Omega.\end{aligned}$$

Распределение модуля Юнга:

$$E(\beta) = \exp\left(2\int_{\delta}^{\beta} \frac{\nu + bx^2}{bx^3 + cx \ln x + qx} dx\right), \quad q = \nu - \frac{1-\nu-(1-\delta^2)\nu^2}{1+\nu} \ln \delta.$$

Случай $\sigma_{\theta\theta} + k\sigma_{rr} = c_1$ ($k \neq -1$). Напряженное состояние в условиях плоской деформации определяется как

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{c_1}{1+k} + c_2\beta^{-1-k} - \frac{\Omega}{3+k}\beta^2; \quad \sigma_{\theta\theta} = \left(1 + \frac{k}{1+k}\right)c_1 + kc_2\beta^{-1-k} - \frac{k\Omega}{3+k}\beta^2; \\ \sigma_{zz} &= 2\nu c_1 + (1+k)\nu c_2\beta^{-1-k} - \frac{(1+k)\nu\Omega}{3+k}\beta^2; \\ c_1 &= \frac{(1+k)(1-\delta^{3+k})}{(3+k)(1-\delta^{1+k})}\Omega; \quad c_2 = -\frac{\delta^{1+k}(1-\delta^2)}{(3+k)(1-\delta^{1+k})}\Omega\end{aligned}\tag{36}$$

Модуль Юнга:

$$E(\beta) = \exp \int_{\delta}^{\beta} \frac{(1+3k+2(1-k)\nu)(1-\delta^{k+1})x^{3+k} + (1-k^2)\delta^{1+k}(1-\delta^2)(1-\nu)}{\left((k(1-\nu)+\nu)\left((1-\delta^{1+k})x^{4+k} + \delta^{1+k}(1-\delta^2)x\right) + (1-2\nu)(1-\delta^{k+3})x^{2+k}\right)} dx.$$

Для обобщенной плоской деформации справедливо, но константы интегрирования:

$$c_1 = \frac{(1+k)(1-\delta^{3+k})}{(3+k)(1-\delta^{1+k})}\Omega; \quad c_2 = -\frac{\delta^{1+k}(1-\delta^2)}{(3+k)(1-\delta^{1+k})}\Omega; \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{2}\nu(1+\delta^2)\Omega.$$

Распределение модуля Юнга определяется как

$$\begin{aligned}E(\beta) &= \exp \left\{ \int_{\delta}^{\beta} \frac{\left((1-k^2)\delta^{1+k}(1-\delta^2)(1-\nu) + (1-\delta^{1+k})(1+3k+2(1-k)\nu)x^{3+k}\right)}{\left((k(1-\nu)+\nu)\left((1-\delta^{1+k})x^{4+k} + \delta^{1+k}(1-\delta^2)x\right) + px^{2+k}\right)} dx \right\}, \\ p &= \frac{\nu^2(3+k)(\delta^2 - \delta^{1+k}) + (2-\nu(2+(1-k)\nu))(1-\delta^{3+k})}{2(1+\nu)}.\end{aligned}$$

Для сплошного цилиндра $c_1 = \frac{1+k}{3+k}\Omega$; $c_2 = 0$; $\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{2}\Omega$. Откуда

$$E(\beta) = \left(1 + \frac{(k(1-\nu)+\nu)}{1-2\nu}\beta^2\right)^{\frac{1+2\nu+k(3-2\nu)}{2(\nu+k(1-\nu))}}$$

и обобщенной плоской деформации

$$E(\beta) = \left(1 + \frac{2(\nu+k(1-\nu))(1+\nu)}{2-\nu(2+(1-k)\nu)}\beta^2\right)^{\frac{1+2\nu+k(3-2\nu)}{2(\nu+k(1-\nu))}}.$$

Найденное решение для случая $\sigma_{\theta\theta} = const$ показано на рис. 12

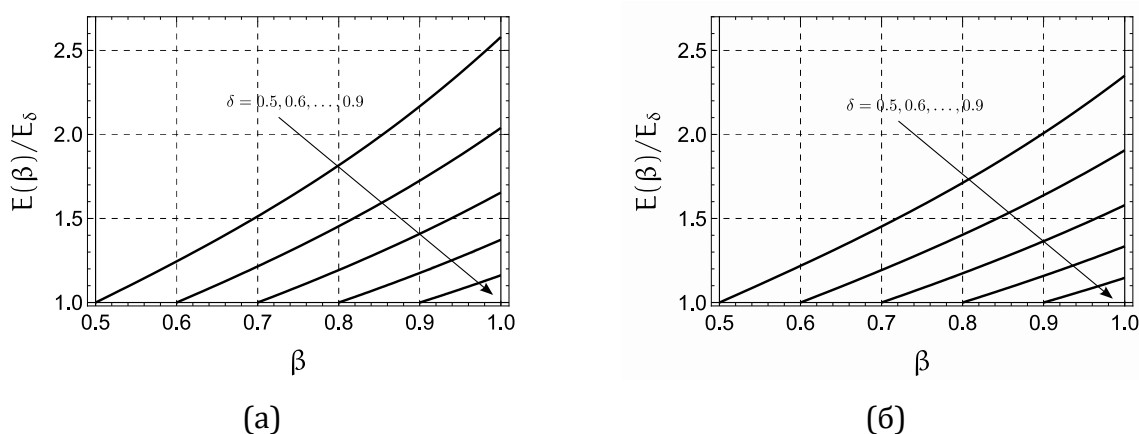


Рис. 12 — Распределение модуля Юнга в цилиндре с постоянным тангенциальным напряжением для нескольких значений δ : (а) п. д. деформация, (б) о. п. д.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в журналах, индексируемых в WoS и/или Scopus

1. Белых С. В., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Прокудин А. Н. Об учете вязких свойств материалов в теории больших упругопластических деформаций // Чебышевский Сборник. 2017. Т. 18, № 3 (63). С. 108–130. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-3-109-130>
2. Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L., Prokudin A. N. On the Irreversible Deformations Growth in the Material with Elastic, Viscous, and Plastic Properties and Additional Requirements to Yield Criteria // Mechanics for Materials and Technologies. Advanced Structured Materials, vol. 46 / edited by H. Altenbach, R. V. Goldstein, E. Murashkin. Cham: Springer International Publishing, 2017. P. 133–151. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56050-2_6
3. Фирсов С. В., Прокудин А. Н., Буренин А. А. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся цилиндре с жестким включением // Сибирский Журнал Индустриальной Математики. 2019. Т. 22, № 4 (80). С. 121–133. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2019.22.412>
4. Prokudin A. N., Firsov S. V. Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid casing // PNRPU Mechanics Bulletin. 2019. no. 4. P. 120–135. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.12>
5. Прокудин А. Н. Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра при условии максимальных приведенных напряжений // Вестник СамГТУ. Серия «Физико-математические науки». 2020. Т. 24, № 1. С. 74–94. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1737>
6. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // ZAMM. 2020. Vol. 100, no. 3. e201900213. <https://doi.org/10.1002/zamm.201900213>
7. Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Прокудин А. Н. О последовательной сменяемости в механизмах производства больших

- необратимых деформаций // ПММ. 2021. Т. 85, № 1. С. 106–120. <https://doi.org/10.31857/S003282352006003X>
8. Прокудин А. Н., Буренин А. А. Упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра из линейно-упрочняющегося материала // ПММ. 2021. Т. 85, № 2. С. 172–192. <https://doi.org/10.31857/S0032823521020077>
 9. Прокудин А. Н., Буренин А. А. Анализ упругопластического деформирования вращающегося сплошного цилиндра при общем кусочно-линейном условии пластичности // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 5 (369). С. 68–79. <https://doi.org/10.15372/PMTF20210507>
 10. Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. Irreversible deformation of a rotating disk having angular acceleration // Acta Mech. 2021. Vol. 232, no. 5. P. 1917–1931. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-02942-5>
 11. Prokudin A. Schmidt-Ishlinskii Yield Criterion and a Rotating Cylinder with a Rigid Inclusion // J. Appl. Comput. Mech. 2021. Vol. 7, no. 2. P. 858–869. <https://doi.org/10.22055/jacm.2020.35648.2704>
 12. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Упругопластические деформации во вращающемся полом цилиндре с жёстким внешним покрытием при условии максимальных приведённых напряжений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2022. Т. 25, № 2. С. 58–82. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.25.205>
 13. Прокудин А. Н. Влияние переменного модуля Юнга на остаточные напряжения, вызванные ротационным автофретированием полого цилиндра с закрепленными торцами // Вестник ПНИПУ. Механика. 2023. № 6. С. 91–103. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.6.09>
 14. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating hollow cylinder made of power-law hardening material // Mater. Phys. Mech. 2023. Vol. 51, no. 2. С. 96–111. https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_9
 15. Прокудин А. Н. Расчет профиля равнопрочного вращающегося диска переменной толщины с учетом анизотропии и разной прочности при растяжении и сжатии // Вестник СамГТУ. Серия «Физико-математические науки». 2024. Т. 28, № 4. С. 701–720. <https://doi.org/10.14498/vsgtu2108>
 16. Прокудин А. Н. Упругопластический анализ вращающегося полого цилиндра, жестко посаженного на вал, при наличии температурного градиента // Вестник СамГТУ. Серия «Физико-математические науки». 2024. Т. 28, № 3. С. 462–488. <https://doi.org/10.14498/vsgtu2050>
 17. Prokudin A. N., Burenin A. A. Design of Equi-Strength Nonhomogeneous Rotating Shafts // Mech. Solids. 2024. Vol. 59, no. 7. P. 3704–3711. <https://doi.org/10.1134/S0025654424606232>

18. Prokudin A. N. Elastoplastic analysis of linearly hardening rotating hollow and solid cylinders with respect to unified yield criterion // Iran. J. Sci. Technol. - Trans. Mech. Eng. 2025. <https://doi.org/10.1007/s40997-025-00919-6>

Статьи в журналах из перечня ВАК

19. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра // ДВМЖ. 2018. Т. 18. № 2. С. 242–260.
20. Прокудин А. Н. Вязкопластическое течение во вращающемся диске // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3 (37). С. 91–99.
21. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Расчет ползучести вращающегося цилиндра со свободными концами // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 1 (35). С. 63–73.
22. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Упругопластическое деформирование вращающегося полого цилиндра с жестким покрытием на внутренней и внешней стенках // Вестник Инженерной Школы ДВФУ. 2019. № 4 (41). С. 12–28. <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2019-4-2>
23. Фирсов С. В., Прокудин А. Н. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся полом цилиндры // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 4 (42). С. 45–55. <https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.42.4.005>

Статьи в сборниках материалов конференций

24. Фирсов С. В., Прокудин А. Н. Обобщённая плоская деформация вращающегося цилиндра // Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций. Материалы докладов III дальневосточной школы-семинара / под. ред. А. И. Евстегнеева. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 2018. С. 77–81.
25. Фирсов С. В., Прокудин А. Н. Необратимое деформирование цилиндра, вращающегося с переменной скоростью // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении. Материалы V Дальневосточной конференции с международным участием / под. ред. А. И. Евстегнеева. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 2018. С. 107–111.
26. Прокудин А. Н. Упругопластические деформации во вращающемся цилиндре с жестким включением // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах. Уфа: Башкирский государственный университет, 2019. С. 356–358.

Александр Николаевич Прокудин

**ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ
НАЛИЧИИ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ**

1.1.8. — Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано к печати __.__.2025. Заказ № __-2025. Тираж 100 экз.

Отпечатано на участке оперативной печати ИМиМ ДВО РАН
681005, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Metallургов, д.1.