



Севастьянов Георгий Мамиевич

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ, ДОПУСКАЮЩИХ
БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ

Специальность 1.1.8

«Механика деформируемого твердого тела»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Работа выполнена в Институте машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук Федерального государственного бюджетного учреждения науки Хабаровского Федерального исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИМиМ ДВО РАН)

Научный консультант:

Буренин Анатолий Александрович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института машиноведения и металлургии, ФГБУН Хабаровский Федеральный исследовательский центр ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

Официальные оппоненты:

Левин Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной механики механико-математического факультета, ФГБОУ ВО Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Роговой Анатолий Алексеевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории нелинейной механики деформируемых твердых тел Института механики сплошных сред УрО РАН, ФГБУН Пермский Федеральный исследовательский центр УрО РАН, г. Пермь

Шутов Алексей Валерьевич, доктор физико-математических наук (Dr. habil.), и.о. заведующего лабораторией механики композитов, ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск

Ведущая организация:

ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, г. Москва

Защита диссертации состоится «__» декабря 2025 г. в __-__ на заседании диссертационного совета 24.2.316.03 при ФГБОУ ВО «Комсомольском-на-Амуре государственном университете» по адресу 681013, Россия, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Комсомольского-на-Амуре государственного университета»,
<http://www.knastu.ru>

Автореферат разослан «___» _____ 2025 г.

Учёный секретарь диссертационного совета 24.2.316.03 при КНАГУ

кандидат физико-математических наук



Григорьева А.Л.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Механика деформируемого твердого тела (МДТТ) как дисциплина начиналась с задач упругого нагружения тел и прогнозирования разрушения различных (в основном строительных) конструкций. Развитие методов обработки и упрочнения металлических изделий потребовало создания математического аппарата теории пластичности. В первой половине XX века были получены решения многих важных прикладных задач, в основном в рамках модели жестко-пластического тела. Здесь можно упомянуть работы, которые выполнили Н. Hencky, R. Hill, P. Naghdi, W. Prager, Д.Д. Ивлев, А.А. Ильюшин, А.Ю. Ишлинский, А.А. Поздеев, В.В. Соколовский, Л.А. Толоконников и многие другие выдающиеся учёные-механики. Учёт упругой деформации материалов наряду с пластическим течением, как правило, сильно усложняет задачи механики, точные решения таких задач достаточно редки (в их числе, например, работы Б.Д. Аннина, Л.А. Галина, Г.П. Черепанова).

Одновременно с развитием теории пластичности (начиная с идеально-пластических тел с условиями текучести Мизеса, Треска, Шмидта – Ишлинского, Ивлева и др.) развивается теория нелинейной упругости. Возникают вопросы о том, как и на каких основаниях полная деформация сплошной среды может быть разделена на обратимую (упругую) и необратимую (пластическую деформацию, деформацию ползучести) составляющие (в теории малых деформаций тензор полной деформации есть сумма тензоров упругой и пластической деформации; в геометрически нелинейных теориях от этого положения приходится отказаться).

Параллельно с этим усложняются физические уравнения теории упруго-пластических задач. Условия пластического течения обобщаются на случаи изотропного, кинематического, комбинированного упрочнения; на случаи, когда по тем или иным причинам необходим учет влияния скорости деформирования на механические характеристики материалов; разрабатываются модели, которые учитывают несимметричное поведение материалов при сжатии – растяжении (Н. Altenbach, F. Barlat, O. Cazacu, A. Zolochovsky, И.А. Банщикова, В.П. Мясников, А.И. Олейников, И.Ю. Цвелодуб и др.); модели, учитывающие влияние высоких давлений на характеристики материа-

лов, а также совместное действие высокого давления и пластической деформации на фазовые превращения в материалах, которые меняют их свойства (V.I. Levitas).

Начиная с последней четверти XX века интенсивно развиваются программные комплексы на базе МКЭ, которые становятся основным инженерным инструментом МДТТ. Развитию моделей МДТТ, методов решения задач (как аналитических, так и численных) посвящены работы, которые выполнили E.C. Aifantis, H. Altenbach, O. Bruhns, D. Durban, N. Fleck, X.-L. Gao, E. van der Giessen, J.W. Hutchinson, J.-B. Leblond, A.I. Leonov, V.I. Levitas, V. Lubarda, A. Needleman, S. Nemat-Nasser, G. Perrin, J.C. Simo, V. Tvergaard, G. Voyiadjis, H. Xiao, A. Zolochovsky, С.Е. Александров, Б.Д. Аннин, К.С. Бормотин, Г.Л. Бровко, А.А. Буренин, Г.П. Быковцев, А.И. Голованов, П.А. Жилин, Д.Д. Ивлев, Л.В. Ковтанюк, В.И. Кондауров, С.Н. Коробейников, В.А. Левин, В.П. Мясников, Ю.Н. Радаев, А.А. Роговой, В.М. Садовский, Л.И. Седов, П.В. Трусков, А.В. Шутов и многие другие.

Вместе с тем, аналитические решения нетривиальных задач МДТТ, которые бы включали геометрическую нелинейность соотношений (конечные деформации) и приближенные к реальности физические соотношения (деформационное упрочнение, температурное разупрочнение, нелинейность упругих свойств, масштабные эффекты и др.) до сих пор очень мало.

Такие решения могли бы использоваться для тестирования алгоритмов численного интегрирования задач, для построения усложненных моделей материалов, для нахождения функциональных зависимостей характеристик материалов (например, законов упрочнения) на основе механических тестов.

Цель работы: построение новых аналитических решений нелинейной механики деформирования. **Задачи работы** – физически корректная постановка ряда проблем и построение их точных и приближенных аналитических решений, верификация этих решений и анализ результатов.

Научная новизна работы. В работе получены новые аналитические решения ряда проблем нелинейной механики деформирования.

Положения, выносимые на защиту:

1) аналитическое решение задачи об упруго-пластическом деформировании материала в окрестности одиночной сферической полости под действием

удаленной гидростатической нагрузки (как сжатия, так и растяжения); материал несжимаемый, гиперупругий с произвольным законом, изотропно упрочняющийся и температурно разупрочняющийся в пластике по произвольному закону, в том числе материал с асимметрией отклика на сжатие / растяжение; решение может учитывать динамические эффекты;

2) новая модель индентации коническим индентором, включающая произвольное деформационное упрочнение материала, а также масштабные эффекты; модель является комбинацией модели расширяющейся полости и жестко-пластического решения о сдвиге тороидального клина;

3) аналитическое решение задачи упруго-пластического кручения кругового цилиндра с закрепленными торцами; сравнение моделей Треска (решение получено для материала с упругой моделью Муни – Ривлина) и Мизеса (здесь решение получено для упругой модели обобщенного неогуковского материала), в обоих случаях рассматривается материал с изотропным упрочнением и температурным разупрочнением в пластическом диапазоне по произвольным законам;

4) аналитическое решение для предельного состояния материала с ограниченным упрочнением при интенсивном упруго-пластическом кручении, включающее крутящий момент и осевое напряжение (эффект Свифта); решение получено для общей гиперупруго-пластической модели, включающей произвольный упругий потенциал несжимаемого тела, условие пластичности и пластический потенциал в виде произвольных гладких функций инвариантов девиатора J_2 и J_3 ;

5) приближенное аналитическое решение для упруго-пластического кручения при высоком давлении, которое включает неассоциированную модель пластического течения с зависимостью предела текучести от гидростатического давления;

6) аналитическое решение для упруго-пластической деформации полой круговой трубы, вывернутой наизнанку; это решение обобщает известное универсальное решение нелинейной теории упругости и включает произвольное изотропное деформационное упрочнение материала;

7) аналитические решения для кругового и антиплоского сдвига изотропно упрочняемого материала в упруго-пластической постановке;

- 8) аналитическое решение о релаксации напряжений в нелинейном вязкоупругом закрученном стержне для широкого класса моделей вязкоупругости;
- 9) аналитические решения о релаксации напряжений в изогнутой пластине, обладающей свойством разносопротивляемости вязкой деформации;
- 10) новая микромеханическая модель волокнистого композита с гиперупругой матрицей.

Все решения получены без ограничения на величину деформаций.

Методология и методы исследования. Использованы уравнения и положения механики деформируемого твердого тела (нелинейной теории упругости, вязкоупругости и пластичности), аналитические методы теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Достоверность результатов основана на использовании точных математических методов и физически корректных постановок задач; на совпадении полученных результатов при предельном переходе с известными решениями для модели малых деформаций; на соответствии аналитических результатов известным результатам МКЭ-моделирования и экспериментальным данным.

Теоретическая значимость работы заключается в получении точных и приближенных аналитических решений ряда ключевых проблем нелинейной механики деформирования, где такие решения достаточно редки. **Практическая значимость работы** заключается в получении аналитической связи между параметрами материалов, кинематическими и силовыми характеристиками процессов деформирования. Эта связь дает удобный способ для установления механических параметров материалов (в частности, законов упрочнения) по результатам простых тестов. Кроме того, аналитические решения ряда рассмотренных задач дают более глубокое понимание относительно неоднородного напряженно-деформированного состояния материалов при нагружении.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертации докладывались на III Дальневосточной школе-семинаре «Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций» (Комсомольск-на-Амуре, 2018); 6-ой Дальневосточной конференции с международным участием «Фундаменталь-

ные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении» (Комсомольск-на-Амуре, 2022); а также на регулярных семинарах ИМиМ ДВО РАН (Комсомольск-на-Амуре) с 2018 по 2025 годы.

Участие в научно-исследовательских проектах. Часть результатов диссертации получена при выполнении соискателем проектов РФФ 21-11-00165, 22-11-00163 в качестве основного исполнителя.

Публикации. Результаты диссертационной работы опубликованы в 15 статьях в ведущих рецензируемых журналах, входящих в базы цитирования Web of Science и Scopus. Работы [1–9] выполнены в единоавторстве; в работах [10–15] автор диссертации ответственен за концептуализацию, методологию и формальный анализ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 312 наименования. Диссертация содержит 364 листа машинописного текста, в том числе 71 рисунок и 6 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даётся общая характеристика работы, обосновывается актуальность темы, формулируется цель и задачи исследования, определяются научная новизна и положения, выносимые на защиту. Приводятся сведения о публикациях соискателя, теоретической и практической значимости результатов работы.

В первой главе приводятся основные уравнения и теоретические положения, используемые в последующих главах и разделах.

Кинематика конечного упруго-неупругого деформирования может быть построена на основе мультипликативного разложения тензора деформации Фингера $\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}$ на обратимую и необратимую составляющие:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{c}^i (\mathbf{c}^e)^{1/2}$$

Индексом «e» (elastic) обозначены упругие составляющие, индексом «i» (inelastic) – необратимые (неупругие) составляющие, появление которых обу-

словлено диссипативными процессами (пластическое течение или вязкая деформация). Если тело деформируется чисто упруго, то $\mathbf{c}^e = \mathbf{c}$, $\mathbf{c}^i = \mathbf{I}$; если упругие деформации пренебрежимо малы, то $\mathbf{c}^i \approx \mathbf{c}$, $\mathbf{c}^e \approx \mathbf{I}$.

Это разделение для изотропного материала приводит к уравнению эволюции для тензора упругих деформаций в области пластического течения

$$\frac{D_{CR} \mathbf{c}^e}{Dt} \stackrel{def}{=} \dot{\mathbf{c}}^e + \mathbf{l}^T \mathbf{c}^e + \mathbf{c}^e \mathbf{l} = 2\mathbf{c}^e \mathbf{D}^i$$

или для левого тензора деформаций Коши – Грина

$$\frac{D_{Old} \mathbf{B}^e}{Dt} \stackrel{def}{=} \dot{\mathbf{B}}^e - \mathbf{B}^e \mathbf{l} - \mathbf{l}^T \mathbf{B}^e = -2\mathbf{B}^e \mathbf{D}^i$$

Здесь точка над величиной означает полную производную по времени; $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ есть градиент скорости, $\mathbf{D}^i$ есть тензор скорости неупругой деформации. Альтернативно, эти уравнения можно получить, используя мультипликативное разделение тензора градиента деформации $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^i$, если предположить, что $\mathbf{F}^i \in \text{sym}$.

Определяющие соотношения. Вязкоупругий закон

$$\mathbf{D}^c = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

где Φ потенциал ползучести, $\sigma_{eq} = \sqrt{J_2}$ (по Мизесу) или $\sigma_{eq} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ (по Треска), или более сложные конструкции.

Пластическое течение: условие текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$; пластический потенциал $g(\boldsymbol{\sigma})$, $\mathbf{D}^p = \Lambda \partial g / \partial \boldsymbol{\sigma}$. Функция f содержит механические характеристики материала, в частности предел текучести, который может зависеть от температуры T , а также от накопленной пластической деформации q . Последняя в свою очередь определяется уравнением $\dot{q} = \sqrt{(2/3) \text{tr}(\mathbf{D}^p)^2}$. Нагрев материала происходит за счет пластической диссипации; в адиабатическом приближении уравнение Фурье – Кирхгофа имеет вид $\rho C \dot{T} = \beta_{TQ} \text{tr}(\mathbf{D}^p \boldsymbol{\sigma})$; коэффициент Тейлора – Куинни β_{TQ} определяет долю пластической работы, преобразованной в тепло.

Нелинейно-упругие соотношения

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} - 2\mathbf{c}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e}, \det \mathbf{c}^e = 1 \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e}, \det \mathbf{B}^e = 1,$$

где Ψ есть упругий потенциал.

Вторая глава посвящена построению точных и приближенных аналитических решений задач упруго-пластического деформирования.

В разделе 2.1 рассмотрен эффект адиабатического нагрева при упруго-пластическом сжатии / расширении сферической полости в изотропном несжимаемом материале под действием удаленной гидростатической нагрузки. Задача о радиальной сферической деформации часто возникает в различных приложениях. В частности, напряженно-деформированное состояние в окрестности конического индентора приближенно соответствует картине радиальной деформации. Также различные аналитические решения для радиальной деформации используются при построении моделей пористых сред, в различных моделях пробития преград, а также для оценки напряженного состояния материалов, содержащих одиночные инородные включения, изменяющие свой объём при термомеханическом нагружении.

В диссертации проведено аналитическое исследование проблемы радиальной сферически симметричной деформации для широкого круга моделей материалов, которые включают нелинейно упругие свойства и различные физические эффекты в пластичности (изотропное деформационное упрочнение, температурное разупрочнение, разносопротивляемость нагрузке сжатия / растяжения, нагрев материала вследствие пластической диссипации).

Есть ряд ограничений, в рамках которых проведено исследование. Во-первых, рассматривается модель несжимаемого материала. Это достаточно серьезное ограничение, однако известные численные и аналитические исследования демонстрируют, что значение коэффициента Пуассона для линейно-упругих материалов не слишком сильно влияет на процесс кавитации для плотных материалов. Во-вторых, представленное исследование пренебрегает термоупругой деформацией (тепловым расширением), поскольку это, как

правило, малая величина. В-третьих, используется адиабатическое приближение, то есть процесс деформации и процесс тепловыделения, вызванный пластической диссипацией, происходят намного быстрее, чем процесс теплопроводности. В-четвертых, не рассмотрены такие нелинейно-упругие эффекты, как неоднозначность или несуществование решения, которые характерны для некоторых вариантов упругих потенциалов, как правило, при больших значениях упругой деформации.

Рассмотрены два варианта задания гиперупругих соотношений:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{I} - 2\frac{\partial\Psi^c}{\partial\mathbf{c}^e}\mathbf{c}^e = -p\mathbf{I} - 2\left(\frac{\partial\Psi^c}{\partial I_1^e} + \frac{\partial\Psi^c}{\partial I_2^e}\text{tr}\mathbf{c}^e\right)\mathbf{c}^e + 2\frac{\partial\Psi^c}{\partial I_2^e}(\mathbf{c}^e)^2 \\ \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{I} + \frac{\partial\Psi^h}{\partial\mathbf{h}^e} = -p\mathbf{I} + \frac{\partial\Psi^h}{\partial I_2^h}\frac{\partial I_2^h}{\partial\mathbf{h}^e} + \frac{\partial\Psi^h}{\partial I_3^h}\frac{\partial I_3^h}{\partial\mathbf{h}^e} = \\ &= -p\mathbf{I} - \frac{\partial\Psi^h}{\partial I_2^h}\mathbf{h}^e + \frac{\partial\Psi^h}{\partial I_3^h}\left[(\mathbf{h}^e)^2 - \frac{1}{2}\mathbf{I}\text{tr}(\mathbf{h}^e)^2\right]\end{aligned}$$

Первый – на основе упругой части тензора деформации Фингера $\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}$ (либо на основе упругой части левого тензора деформации Коши – Грина $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$); второй – на основе упругой части логарифмического тензора деформации Генки $\mathbf{h} = (1/2)\ln\mathbf{B} = -(1/2)\ln\mathbf{c}$. Упругие потенциалы $\Psi^c = \Psi^c(I_1^c, I_2^c)$, $\Psi^h = \Psi^h(I_2^h, I_3^h)$.

Принято обобщенное условие пластичности вида $f(J_2, J_3) = 0$ и ассоциированный с ним закон течения $\mathbf{D}^p = \Lambda \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$. Функция f содержит механические характеристики материала, в частности предел текучести, который может быть функцией температуры T , а также накопленной пластической деформации q .

Получено решение проблемы для любой модели температурного разупрочнения, которая описывает изменение пластических и упругих характеристик материала при изменении температуры, а также для произвольного изотропного деформационного упрочнения, в том смысле, что задача сводит-

ся к интегрированию одного нелинейного ОДУ первого порядка, отысканию определенных интегралов при вычислении напряженного состояния и обращению алгебраических выражений. В частных случаях, когда предел текучести является функцией температуры и накопленной пластической деформации формы $\tau_y(T, q) = \tau_{yT}(T) \tau_{yq}(q)$, а остальные параметры материала, включенные в условие текучести, являются постоянными, упомянутое нелинейное ОДУ есть уравнение с разделяющимися переменными. В тексте диссертации приведены примеры, иллюстрирующие полученное универсальное решение. В одном из них рассмотрена модель линейного температурного разупрочнения, в другом – модель линейного температурного разупрочнения и линейного деформационного упрочнения $\tau_y(\tilde{T}, q) = \tau_{y0}(1 + \chi q) \tilde{T}$, $\tilde{T} = (T_g - T)(T_g - T_0)^{-1}$. Обе модели также учитывают асимметрию растяжения / сжатия в пластичности по модели Cazacu and Barlat, 2004 $f = \left[(J_2)^{3/2} - (3\sqrt{3}/2) \alpha J_3 \right]^{1/3} - \tau_y = 0$; в качестве гиперупругих соотношений принят несжимаемый вариант модели Генки. Рассмотрены две краевые задачи: задача о полном закрытии полости при сжатии и задача о стационарном расширении полости при удаленном растяжении. В обеих задачах определена нагрузка на бесконечном расстоянии от полости. Граничные условия для этих задач: $\sigma_{rr} = 0$ при $r = r_a$ и $\sigma_{rr} \rightarrow \sigma_{rr}^\infty$ при $r \rightarrow \infty$. Здесь r_a расстояние от внутренней поверхности деформируемой полости до ее центра. При удаленном растяжении ($\sigma_{rr}^\infty > 0$) полость расширяется, при удаленном сжатии ($\sigma_{rr}^\infty < 0$) полость сжимается. В первом случае, когда внешняя нагрузка достигает критического значения $\sigma_{rr}^\infty = \sigma_{cr}^+$, процесс становится стационарным, полость неограниченно расширяется под действием постоянной внешней нагрузки. Во втором случае при внешней нагрузке $\sigma_{rr}^\infty = \sigma_{cr}^-$ полость полностью закрывается. При изотермической деформации полное закрытие полости не происходит при конечном значении внешней нагрузки. Ниже представлены некоторые результаты. Рисунки 1–3

относятся к деформационно неупрочняющемуся материалу, рисунок 4 – к материалу с линейным деформационным упрочнением.

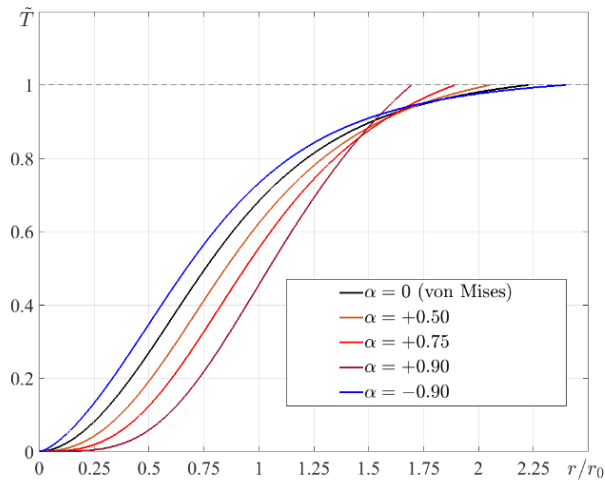


Рисунок 1, а – Безразмерная температура в пластической области в момент, когда сферическая полость начальным радиусом r_0 полностью закроется при сжатии

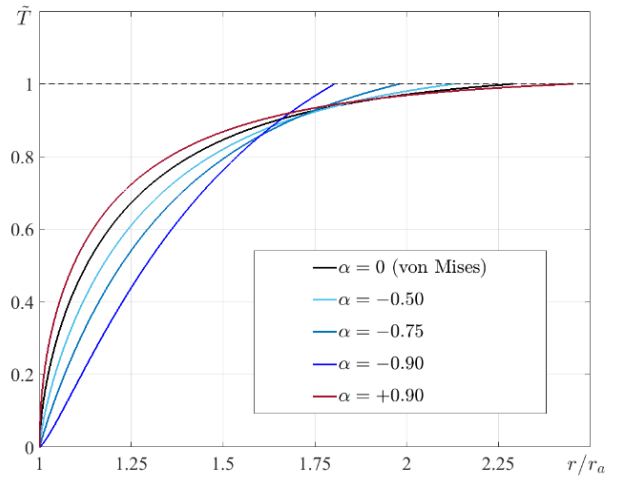


Рисунок 1, б – Безразмерная температура в пластической области при установившемся расширении полости (r_a – актуальный радиус полости)

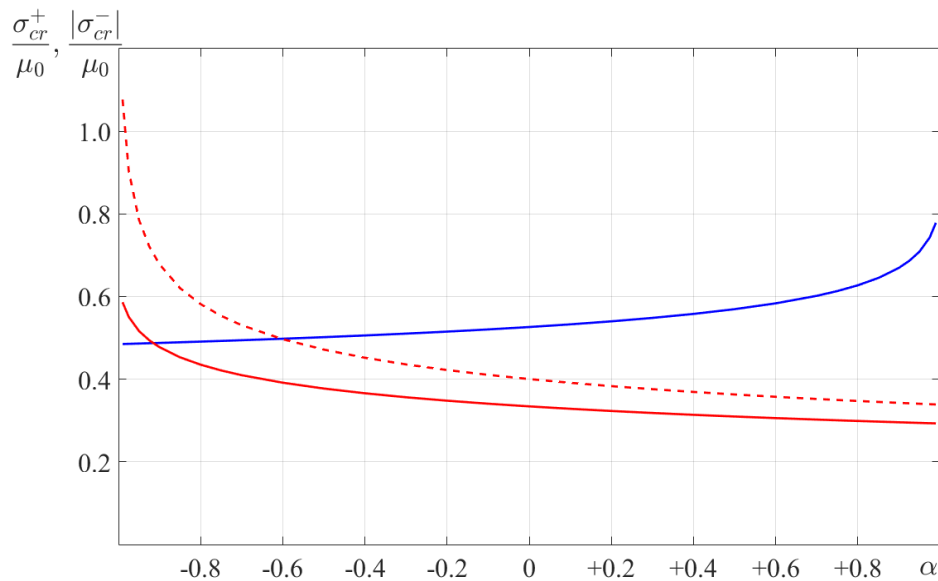


Рисунок 2 – Безразмерные критические нагрузки σ_{cr}^+ (красная линия) и $|\sigma_{cr}^-|$ (синяя линия) в зависимости от параметра разносопротивляемости α ; штриховая линия соответствует изотермическому приближению для σ_{cr}^+

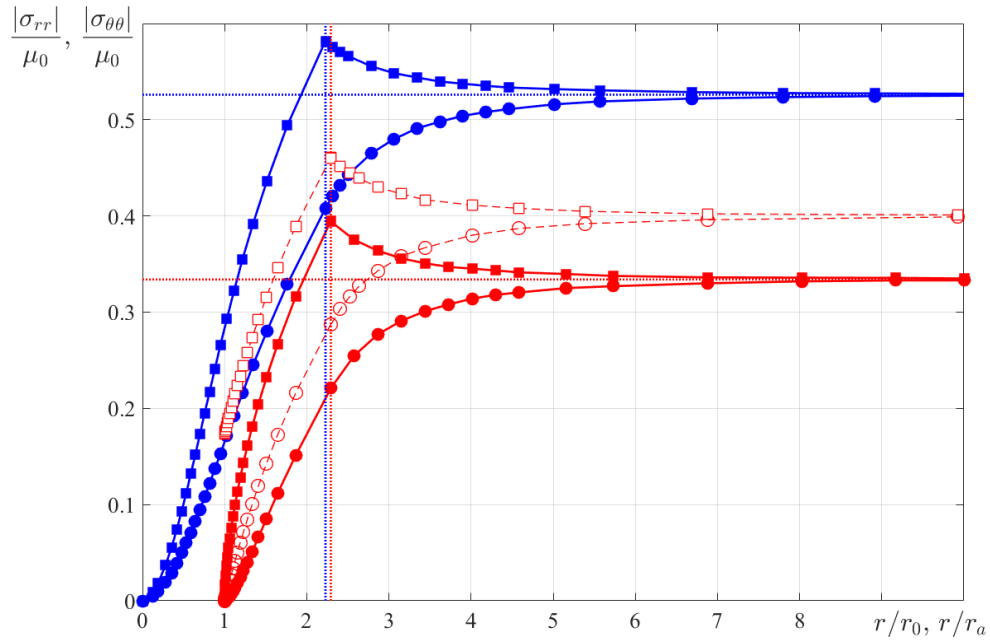


Рисунок 3 – Распределение напряжений (модель Мизеса): красная линия соответствует установившейся кавитации при растяжении материала; голубая линия соответствует полностью закрывшейся полости при сжатии; штриховая линия соответствует изотермическому приближению; квадратный маркер означает кривые $|\sigma_{\theta\theta}/\mu_0|$, круговой маркер означает кривые $|\sigma_{rr}/\mu_0|$; вертикальные линии соответствуют позиции упруго-пластической границы

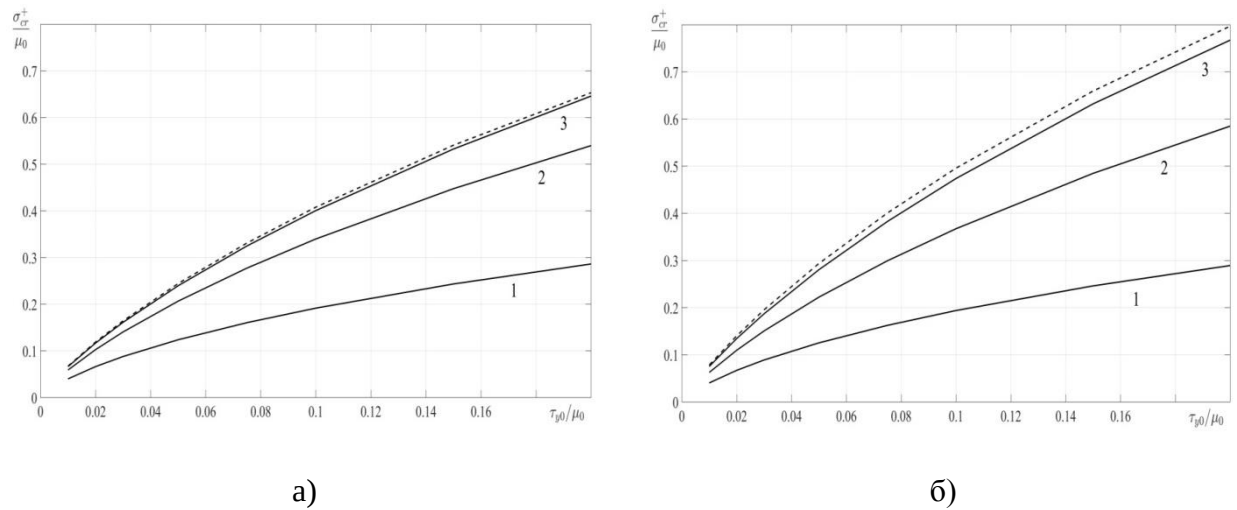


Рисунок 4 – Критическая нагрузка для установившейся кавитации в линейно-упрочняющемся упруго-пластическом теле: а) $\chi = 0.1$, б) $\chi = 1.0$. Штриховая линия соответствует решению деформационной теории пластичности. Цифры возле кривых соответствуют различным значениям параметра температурной связности $B = \delta(1 - \delta\alpha)^{1/3} \left(\sqrt{3}/2 \right) \rho C (T_g - T_0) (\tau_{y0})^{-1}$, $1 - |B| = 0.173$, $2 - |B| = 1.73$, $3 - |B| = 17.3$. Нагрев материала, вызванный пластической диссипацией, может иметь сильное влияние на процесс кавитации, возможно, даже более сильное, чем эффект деформационного упрочнения

Раздел 2.2 посвящен построению новой модели расширяющейся полости (Expanding Cavity Model, ECM) для описания конической индентации и её приложению для определения внутреннего параметра градиентной теории пластичности полимерных материалов.

Часто бывает так, что получить свойства материалов тестами макрообразца на сжатие, растяжение и т.д. невозможно – допустим, если необходимо узнать свойства нанесенного покрытия, которое нельзя отделить от подложки, не повредив. В таких случаях обычно используют индентацию – определяют твердость материала. Однако твердость – это некий комплекс свойств, ее значение нельзя использовать в механических расчетах. Для оценки прочности, износостойкости и других свойств покрытия, подвергающегося внешним нагрузкам, нужны механические параметры – в частности, предел текучести материала. Для того чтобы связать измеряемую твердость с упругими и пластическими параметрами материалов существует много механических моделей, и среди них есть достаточно точные. Все существующие модели индентации (и в том числе представленная в диссертационном исследовании) исходят из того, что под индентором находится полупространство. Иными словами, глубина проникновения во много раз меньше толщины слоя, в который погружается индентор. Но есть одна особенность индентации покрытий – их толщина может быть очень маленькой. В этом случае глубина погружения индентора может составлять от нескольких десятков нанометров до нескольких микрон. А в таких условиях материалы начинают проявлять масштабные эффекты – чем меньше глубина индентации, тем выше измеренная твердость. Представленная в диссертации модель обладает двумя важными свойствами – она корректно оценивает твердость на макроуровне и способна описать масштабные эффекты на микроуровне, используя простую градиентную модель пластичности.

Модель основана на совокупности решения о расширяющейся сферической полости под действием внутреннего давления, как это сделано в модели Бишопа, и решения статически определимой задачи о сдвиге тороидального клина, которое приближенно описывает напряженное состояние материала вблизи свободной поверхности (рис. 5–7).

Полагается, что деформация в окрестности острия индентора преимущественно радиальная. Это острие окружено гидростатически сжатым ядром.

Однако, в отличие от известной модели Джонсона, мы не требуем, чтобы это ядро покрывало всю погруженную часть индентора. Вместо этого мы требуем, чтобы объем материала, вытесненного коническим индентором, был равен объему ядра. Картина деформации в этом случае состоит из двух областей: в области I (рис. 6) деформация радиальная; в области II преобладает сдвиг материала относительно поверхности индентора. О наличии такой области, в которой движение материала не является строго радиальным, можно судить, исходя из известных результатов МКЭ-моделирования; это может быть объяснено влиянием свободной поверхности. Решение задачи о расширении сферической полости опирается на результаты раздела 2.1.

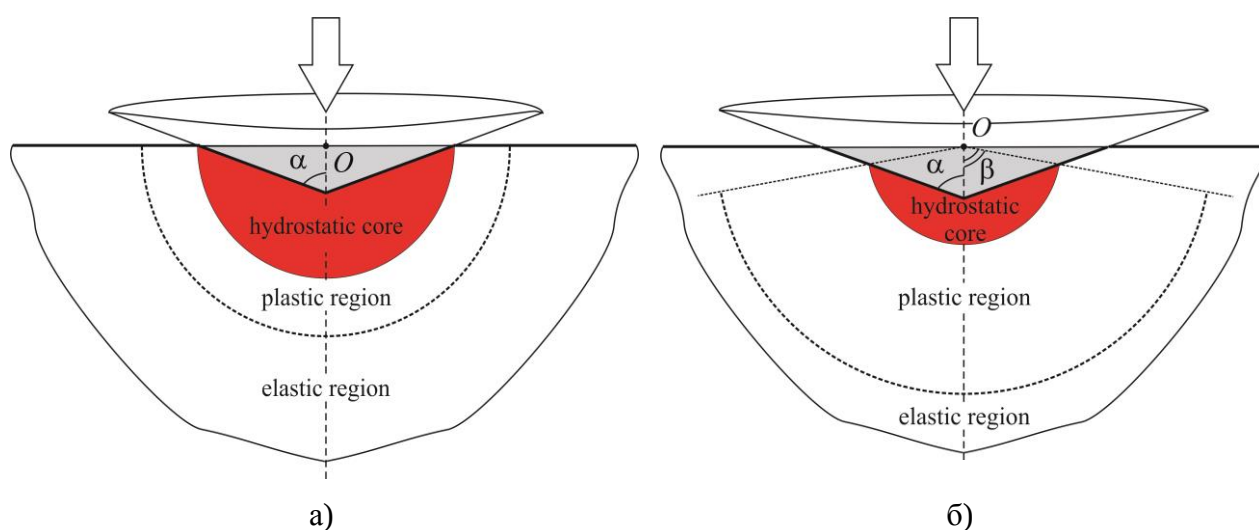


Рисунок 5 – Схема ЕСМ Джонсона (а) и предлагаемая модель (б)
Упруго-пластическая граница соответствует $E/\sigma_y = 25$ и $\alpha = 70.3^\circ$

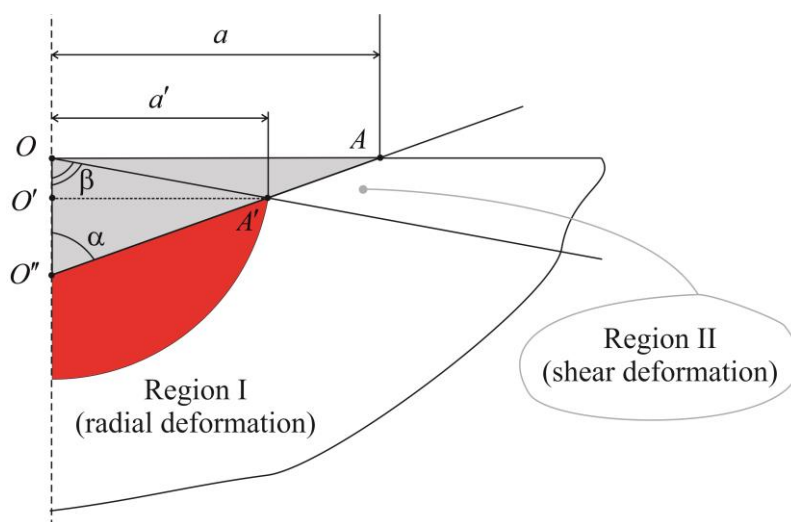


Рисунок 6 – Предлагаемая ЕСМ (подробно)

Формула для твердости материала согласно предложенной модели:

$$\frac{H}{\sigma_{y0}} = -2 \frac{E}{\sigma_{y0}} \int_{1/x}^{\tilde{r}_{ep}} q \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}} + \frac{4}{9} \frac{E}{\sigma_{y0}} \text{Li}_2(x^3) + 2(1-x)[1 + \cos(\alpha + \beta)]$$

где $q(\tilde{r})$ есть решение следующего ОДУ:

$$\frac{l_0}{r_c} \frac{dq}{d\tilde{r}} = \hbar^2(q) - \left(\frac{\sigma_{y0}}{E} \right)^{-2} \left[\ln(1 - \tilde{r}^{-3})^{-2/3} - q \right]^2$$

с граничным условием $q(\tilde{r}_{ep}) = 0$, где α есть полуугол индентора; $\tilde{r}_{ep}^{-3} = 1 - \exp[-(3/2)(\sigma_{y0}/E)]$; функция $\hbar(q)$ определяет изотропное деформационное упрочнение; $\text{Li}_2(z) = \int_z^0 \zeta^{-1} \ln(1-\zeta) d\zeta$ есть дилогарифм; $r_c = x d \tan \alpha (\sin \beta)^{-1}$, d есть глубина индентации; величины x и β определяются уравнениями $\cot \alpha = x(1-x)^{-1} \cot \beta$ и $\cos \beta = -1/2 + (1/2) \sqrt{1 + 8x^2(1-x)(x^2+1)^{-1}}$. В частности, для конического индентора с полууглом развертки $\alpha = 70.3^\circ$ (а также для инденторов Виккерса и Берковича), эти формулы дают $x = 0.669$ и $\beta = 1.395$.

В частном случае материала с произвольным изотропным упрочнением, но без градиентных эффектов имеем $\sigma_y = \sigma_{y0} \hbar(q)$ и

$$\frac{H}{\sigma_{y0}} = \int_Q^0 \frac{q}{e^{\frac{3}{2}[(\sigma_{y0}/E)\hbar+q]} - 1} \left(\frac{d\hbar}{dq} + \frac{E}{\sigma_{y0}} \right) dq + \frac{4}{9} \frac{E}{\sigma_{y0}} \text{Li}_2(x^3) + 2(1-x)[1 + \cos(\alpha + \beta)]$$

Q есть корень алгебраического уравнения $Q + (\sigma_{y0}/E) \hbar(Q) = -(2/3) \ln(1-x^3)$.

Для идеально пластического материала без какого-либо упрочнения

$$\begin{aligned} \frac{H}{\sigma_{y0}} &= \frac{4}{9} \frac{E}{\sigma_{y0}} \text{Li}_2 \left(1 - e^{-\frac{3\sigma_{y0}}{2E}} \right) - \frac{2}{3} \ln \left(1 - e^{-\frac{3\sigma_{y0}}{2E}} \right) + 2 \ln x + 2(1-x)[1 + \cos(\alpha + \beta)] \approx \\ &\approx \frac{2}{3} \left[1 + \ln \left(\frac{2}{3} \frac{E}{\sigma_{y0}} \right) \right] + 2 \ln x + 2(1-x)[1 + \cos(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

Ниже приведены результаты сравнения оценок твёрдости, полученных с помощью предлагаемой модели, с результатами других моделей, а также с экспериментальными данными о твердости по Виккерсу различных предварительно упрочненных материалов.

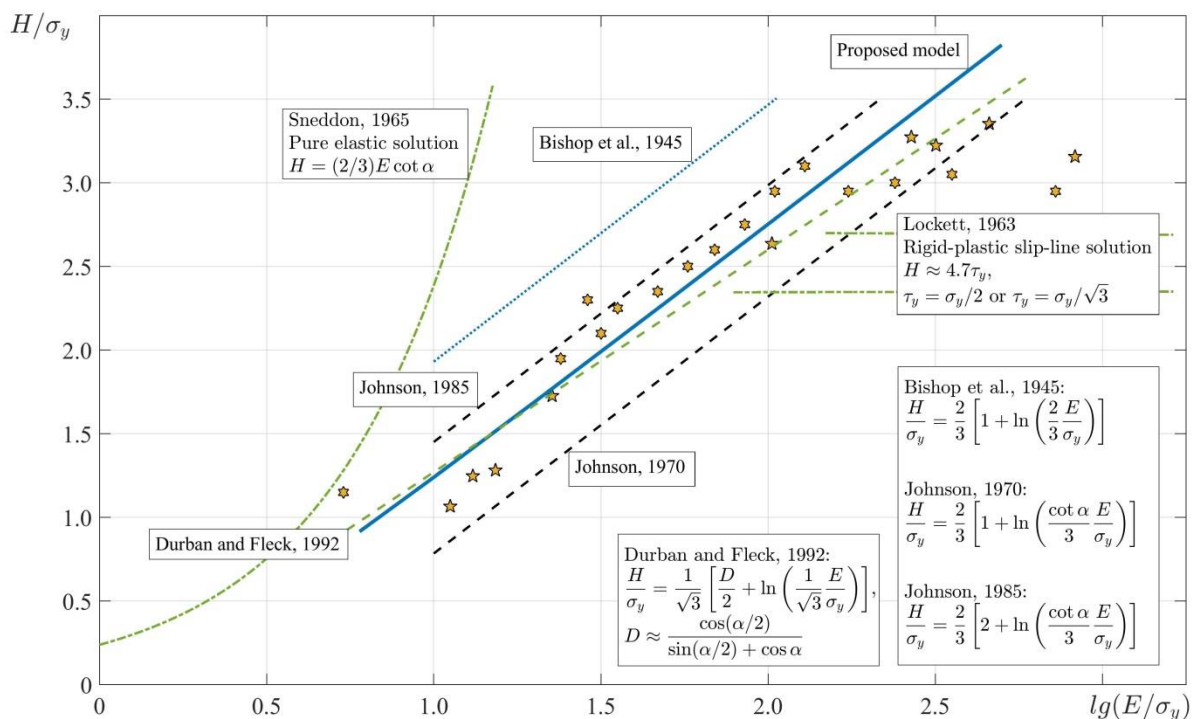


Рисунок 8 – Твердость. Сравнение предложенной модели (сплошная голубая линия, идеальная пластичность) с аналитическими моделями и экспериментальными данными (пирамида Виккерса). Гексаграммы и пентаграммы представляют экспериментальные данные. Все материалы предварительно упрочнены. Полуугол индентора $\alpha = 70.3^\circ$

Далее на основе модели немонотонного упрочнения (рис. 9) для двух полимерных материалов, полиметилметакрилата (РММА) и поликарбоната (РС) по предложенной модели индентации получены численные прогнозные значения твёрдости, зависящей от глубины погружения индентора. Эти значения сравниваются с экспериментальными данными о зависимости универсальной твердости РС и РММА от глубины индентации по Берковичу (рис. 10). Также приведено сравнение прогнозных макроскопических значений твердости для РС и РММА при больших глубинах индентации (когда градиентные эффекты уже не играют особой роли), полученных с помощью предлагаемой модели, с прогнозными значениями модели Durban and Masri, 2008, а также с экспериментальными данными.

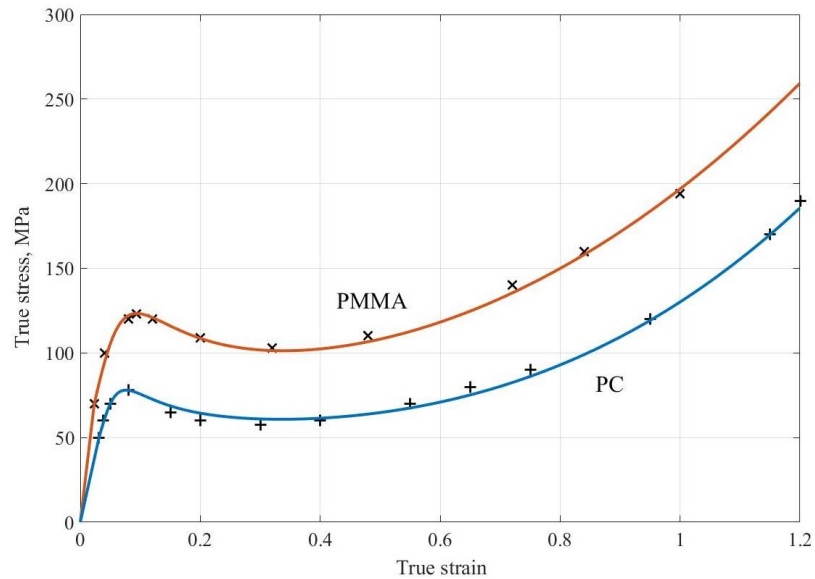


Рисунок 9 – Кривые «напряжение – деформация» для PC и PMMA. Маркеры представляют экспериментальные данные; сплошные линии соответствуют функции упрочнения

$$\bar{h}(q) = 1 + \frac{\sigma_* - \sigma_{y0}}{\sigma_{y0}} \frac{2(q/q_*)}{1 + (q/q_*)^2} + Aq^n$$

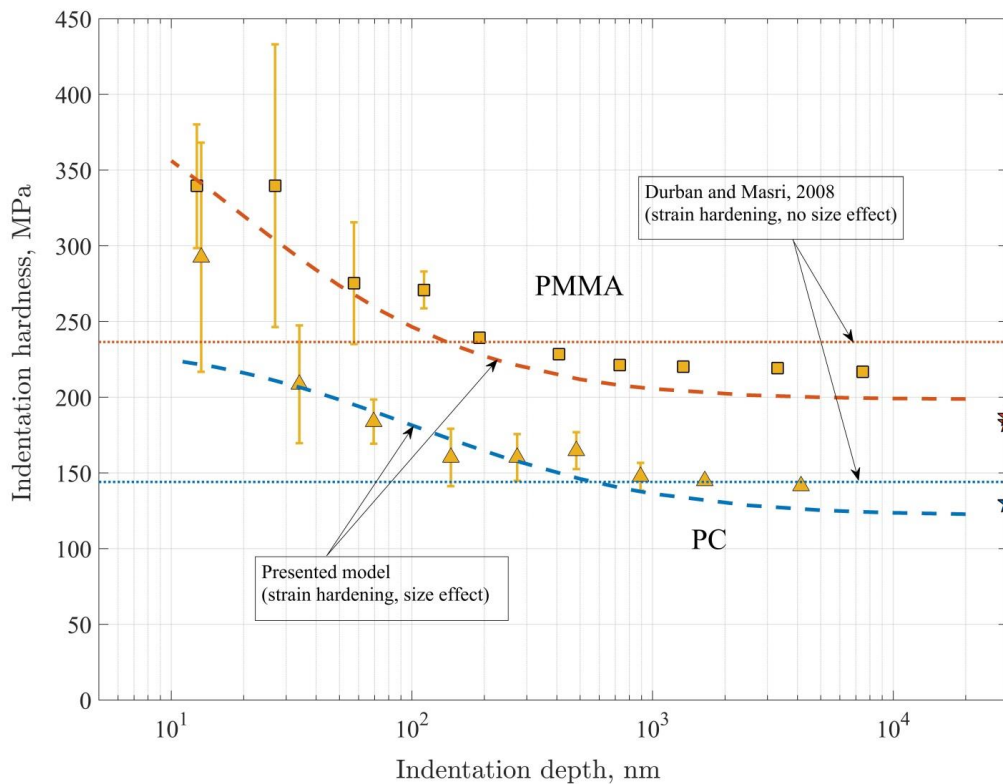


Рисунок 10 – Indentation Size Effect в PC и PMMA. Пунктирные линии соответствуют представленной модели с внутренними параметрами масштаба длины $l_0 = 3 \mu m$ для PMMA и $l_0 = 9 \mu m$ для PC. Маркеры с погрешностями соответствуют экспериментальным данным по универсальной твердости для индентора Берковича. Точечные линии показывают решение Durban and Masri, 2008 (модель локальной пластичности с деформационным упрочнением). Звездочки справа показывают экспериментальные данные по макроскопической твердости PMMA и PC

Раздел 2.3 посвящен построению аналитических решений задачи об упруго-пластическом кручении. Кручение это один из часто используемых методов испытания механических свойств материалов как в упругом, так и в пластическом диапазоне. При кручении тонкостенных круговых трубок реализуется напряженное состояние, близкое к однородному. Такие опыты достаточно просто интерпретировать. Вместе с тем, при больших деформациях и развитом пластическом течении достаточно тяжело предотвратить потерю устойчивости тонкостенных образцов. Кручение полнотелых круговых цилиндров проще реализовать, однако напряженное состояние в этом случае неоднородно и для интерпретации опытных данных полезно иметь точные или приближенные аналитические решения соответствующей краевой задачи. Кроме того, кручение полнотелых образцов может быть использовано для получения информации о механических свойствах материала в составе синтетических тестов.

Простое кручение с закрепленными торцами сплошного кругового цилиндра с внешним радиусом R_1 и длиной L описывается уравнениями $r = R$, $\varphi = \theta + \Theta Z/L$, $z = Z$, которые связывают цилиндрические координаты точки материала в недеформированном состоянии (R, θ, Z) с координатами (r, φ, z) в деформированном состоянии. Здесь Θ есть угол поворота торца $Z = L$ относительно неподвижного торца $Z = 0$. Длина цилиндра вдоль образующей и диаметр цилиндра остаются неизменными.

В данном разделе диссертации получены аналитические решения для:

- комбинации гиперупругой модели Муни – Ривлина и условия пластичности Треска с произвольным изотропным упрочнением и температурным разупрочнением;
- комбинации гиперупругой модели обобщенного неогуковского тела и условия пластичности Мизеса с произвольным изотропным упрочнением и температурным разупрочнением.

На рис. 11 приведено сравнение крутящего момента и осевой силы (эффект Свифта) для частного случая идеально пластического материала. На рис. 12 приведены сравнение аналитического решения с численными расчетами MSC. Marc (выполнены соавтором работы [12]). На рис. 13, 14 приведены сравнение аналитического решения с экспериментальными данными.

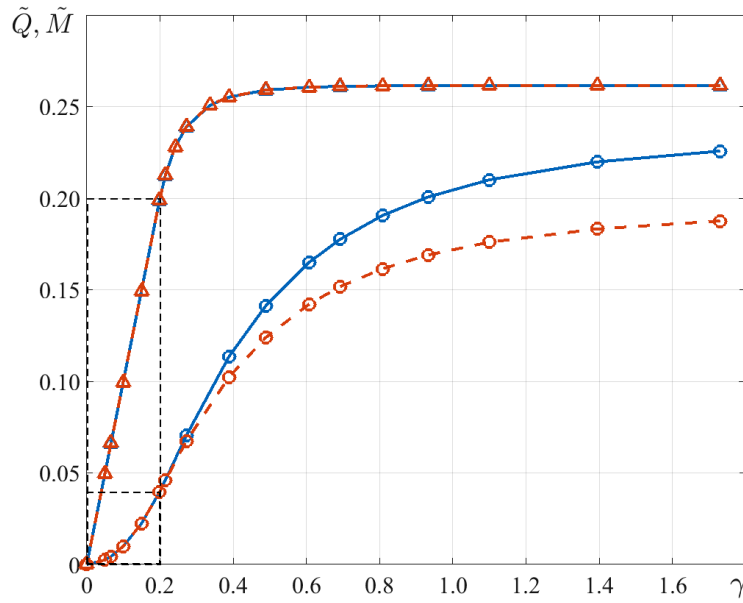


Рисунок 11 – Осевое усилие $\tilde{Q} = 4Q/(\pi\mu R^2)$ (круговые маркеры) и крутящий момент $\tilde{M} = 2M/(\pi\mu R^3)$ (треугольные маркеры). Сплошные линии соответствуют представлению для условия пластичности Мизеса, штриховые соответствуют решению для условия Треска. Пунктирными прямоугольниками выделен диапазон чисто упругого кручения. Ось абсцисс отображает параметр нагружения – поверхностную деформацию $\gamma = \Theta R_1/L$. Неогуковский материал, $\tilde{\tau}_{y0} = \tau_{y0}/\mu = 0.2$

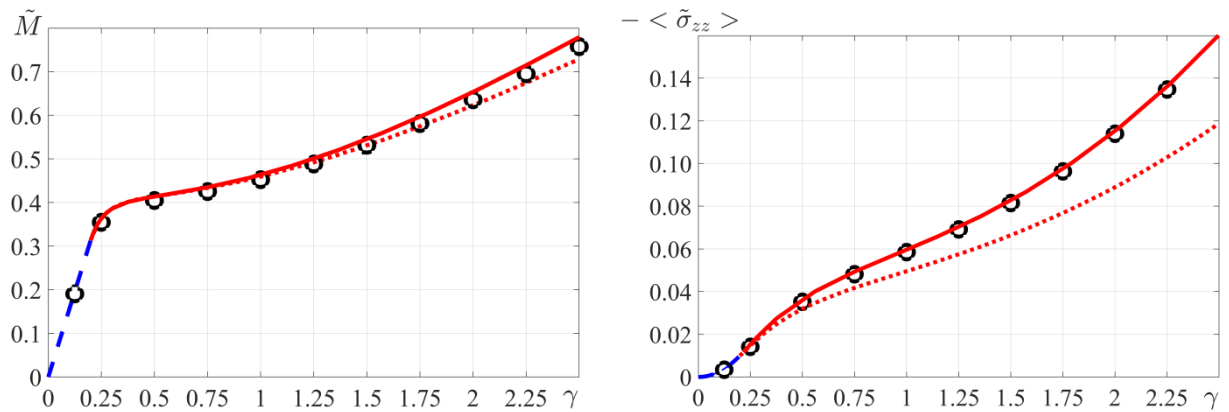


Рисунок 12 – Крутящий момент и осевое давление. Упругая модель неогуковского тела с $\mu = 50$ МПа. Монотонное квадратичное упрочнение $\tau_y = \tau_{y0}(1 + \chi q^2)$ с параметром $\chi = 4/3$; начальный сдвиговой предел текучести $\tau_{y0} = 10$ МПа. Красные линии – после начала пластического течения в образце, синие линии – чисто упругое деформирование образца. Сплошные линии соответствуют модели Мизеса, пунктирные – модели Треска. Круговые маркеры соответствуют численному решению в MSC. Марс (параметры геометрии образца $R_1 = L = 1$ м). Ось абсцисс отображает параметр нагружения – поверхностную деформацию $\gamma = \Theta R_1/L$

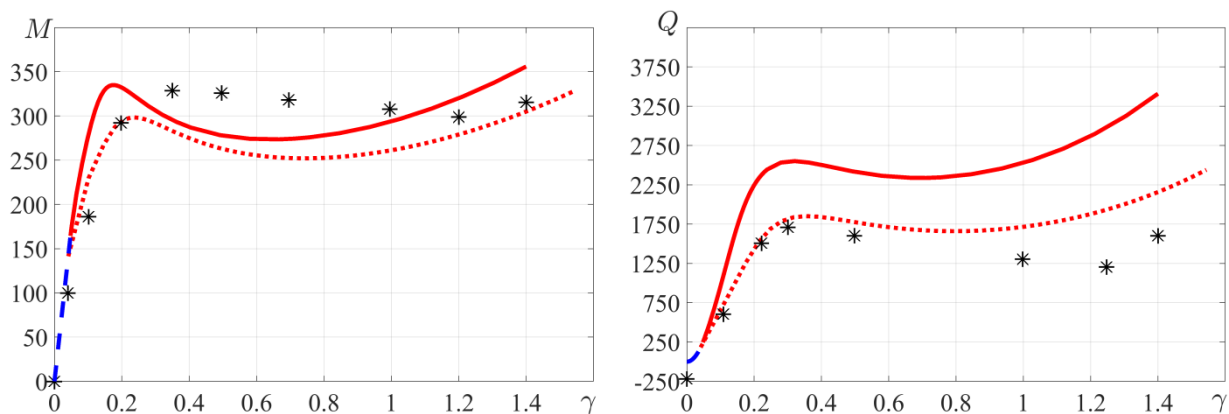


Рисунок 13 – Кривые крутящего момента (Н·м) и осевой силы (Н) для РС. Маркеры – экспериментальные данные (Ames et al., 2009). Синий цвет – диапазон чисто упругого кручения, красный – упруго-пластического. Сплошная линия – аналитическое решение для материала с пластической моделью Мизеса, пунктирная – с пластической моделью Треска

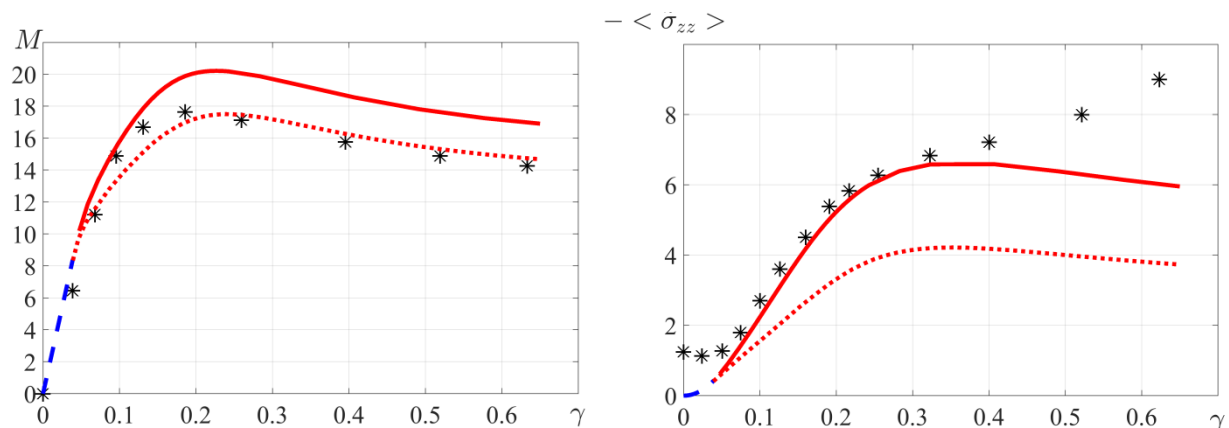


Рисунок 14 – Кривые крутящего момента (Н·м) и среднего осевого давления $-\langle \sigma_{zz} \rangle = -2R_1^{-2} \int_0^{R_1} \sigma_{zz} r dr$ (МПа) для РММА. Маркеры – экспериментальные данные (Карпов и Ларичкин, 2014). Синий цвет – диапазон чисто упругого кручения, красный – упруго-пластического. Сплошная линия – аналитическое решение для материала с пластической моделью Мизеса, пунктирная – с пластической моделью Треска

В разделе 2.4 представлено аналитическое решение для кручения под высоким давлением в рамках геометрически-нелинейной неассоциированной пластичности. Кручение при высоком давлении (High Pressure Torsion – HPT) это современная технология обработки материалов интенсивной пластической деформацией, которая служит для улучшения их свойств (механических, электрических, оптических и т. д.). HPT (а также сходные техники) известны как экспериментальный метод исследования материалов (включая кинетику фазовых переходов и механо-химию) при высоком давлении и экс-

тремальной пластической деформации. В то же время существуют трудности с интерпретацией результатов из-за неоднородности напряжений.

Техника НРТ реализуется в два этапа: на первом этапе к цилиндрическому образцу (обычно с большим отношением диаметра к высоте) прикладывается высокое давление с помощью верхней наковальни (рис. 15); на втором этапе создается интенсивная деформация кручения под давлением путем поворота нижней наковальни. Первые исследования НРТ были сосредоточены на деформации металлов и сплавов. Эти исследования впервые были проведены Бриджменом и получили новый импульс как способ получения ультрамелкозернистых структур в конце 1980-х гг. после сообщения проф. Р. Валиева и его коллег. Отметим также значительный вклад группы Л.Ф. Верещагина, связанный как с развитием экспериментальной техники, так и с исследованием механических свойств материалов при сверхвысоких давлениях.

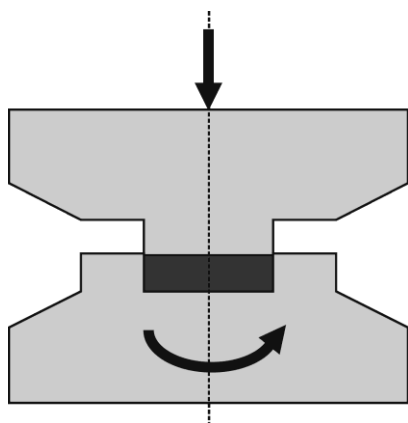


Рисунок 15 – Ограниченная схема НРТ

Существует много конечно-элементных решений для разных версий НРТ в рамках достаточно общих механических моделей. В то же время аналитические решения для НРТ довольно редки. В проведенном исследовании предложена простая модель процесса и получено приближенное аналитическое решение в замкнутой форме.

Это решение, в отличие от известных аналитических решений, учитывает упругие свойства материала, зависимость пластических свойств материала от давления и имеет дело с конечными упругими и пластическими деформациями. Использована модель изотропного идеально-пластического несжимаемого материала. Это предположение основано на том факте, что заметные изменения предела текучести из-за деформационного упрочнения (или разупрочнения) прекращаются после определенного уровня деформации, который обычно составляет порядка единицы. При НРТ-обработке типичная деформация может превышать это значение на 1–2 порядка. В этом

случае разумно использовать установившееся значение предела текучести. Кроме того, в ряде экспериментов по НРТ используется предварительно пластически деформированный образец. При тех же условиях анизотропия, вызванная деформацией, также не имеет существенного значения для процессов монотонного нагружения, если исходный недеформированный материал изотропен. Эти предположения были подтверждены экспериментально для самых разных материалов и принимались ранее при МКЭ-моделировании различных техник НРТ. Кроме того, пластическая несжимаемость компактных материалов – обычное предположение для процессов интенсивной пластической деформации. Несмотря на то, что используемая ниже модель не может описать проскальзывание в контактной паре «наковальня – образец», были получены условия, при которых это проскальзывание исключено. Решение не учитывает возможность кругового сдвига в образце, который даже при отсутствии проскальзывания в контактной паре «наковальня – образец» может быть вызван трением на боковой поверхности образца. Считается, что эту силу трения можно существенно уменьшить за счет смазки. Также не учитывается радиальное течение материала, поскольку предполагается, что используемые инструменты (наковальни, обойма) значительно более жесткие, чем сам образец. Полученное таким образом решение относится к полностью ограниченной схеме НРТ. Другие схемы в некоторых случаях также могут быть аппроксимированы этим решением.

Температурные эффекты не учитываются, так как предполагается, что процесс идет достаточно медленно с эффективным отводом теплоты пластической диссипации. По той же причине не учитывается влияние скорости деформации на механические свойства материала. Также не учитывается изменение свойств материала, вызванное фазовыми превращениями, однако аналитические результаты, полученные для среднего напряжения и накопленной пластической деформации, могут быть использованы для приближенного решения задачи о фазовых превращениях, вызванных пластической деформацией, с использованием соответствующих кинетических уравнений.

Модули упругости материала принимаются постоянными. Последнее предположение объясняется тем, что рост модулей упругости ряда материалов с увеличением приложенного давления ограничен.

Основные цели данного раздела:

- построить приближенное аналитическое решение для упрощенной формулировки НРТ (ограниченная схема), пригодное для умеренных упругих и больших пластических деформаций и учитывающее зависимость предела текучести материала образца от давления;
- проанализировать влияние начального давления и параметров материала на распределение напряжений и накопленную пластическую деформацию.

Модель материала:

- условие текучести Мора – Кулона

$$f = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + g \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \tau_{y0} = 0$$

- пластический потенциал Треска

$$g = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}},$$

- гиперупругий закон Муни – Ривлина

$$\Psi = C_1(I_2^e - 3) + C_2(I_1^e - 3), \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}_e} \mathbf{c}_e, \det \mathbf{c}_e = 1$$

Получено численное решение и на основе его поведения сделано следующее предположение: в области пластической деформации среднее напряжение существенно не меняется с увеличением нагрузки (хотя является функцией радиальной координаты), что согласуется с известными экспериментальными результатами. Это дало возможность получить приближенное аналитическое решение.

Основные выводы по результатам анализа.

- 1) Напряженное состояние достаточно близко к состоянию гидростатического сжатия, но не является однородным, если упругие деформации не малы. Напряжение в области пластического течения практически стационарное.
- 2) Абсолютное значение локального гидростатического давления максимально в центре образца. Это максимальное значение монотонно и неограниченно возрастает с увеличением угла закрутки. Давление у внешней поверхности $r = R_0$ по абсолютной величине несколько меньше начального гидростатического давления p_0 . Для гиперупругих материалов с $\tau_{y0}/\mu \sim 1$ расчеты пока-

зывают значительную неоднородность давления, даже если пластические свойства материала образца слабо зависят от давления.

3) Чем выше значения параметров материала ϑ (параметр зависимости предела текучести от давления), τ_{y0} (предел текучести при чистом сдвиге) и $\tilde{C} = (C_1 - C_2)/(C_1 + C_2)$ (безразмерный комплекс констант Муни – Ривлина), тем выше значение пикового давления и неоднородность напряжений в образце. Неоднородность напряжений немонотонно зависит от величины начального гидростатического давления p_0 .

4) На оценку параметра зависимости предела текучести гиперупругого материала от давления посредством крутящего момента и осевой нагрузки может сильно повлиять неоднородность напряжений в НРТ.

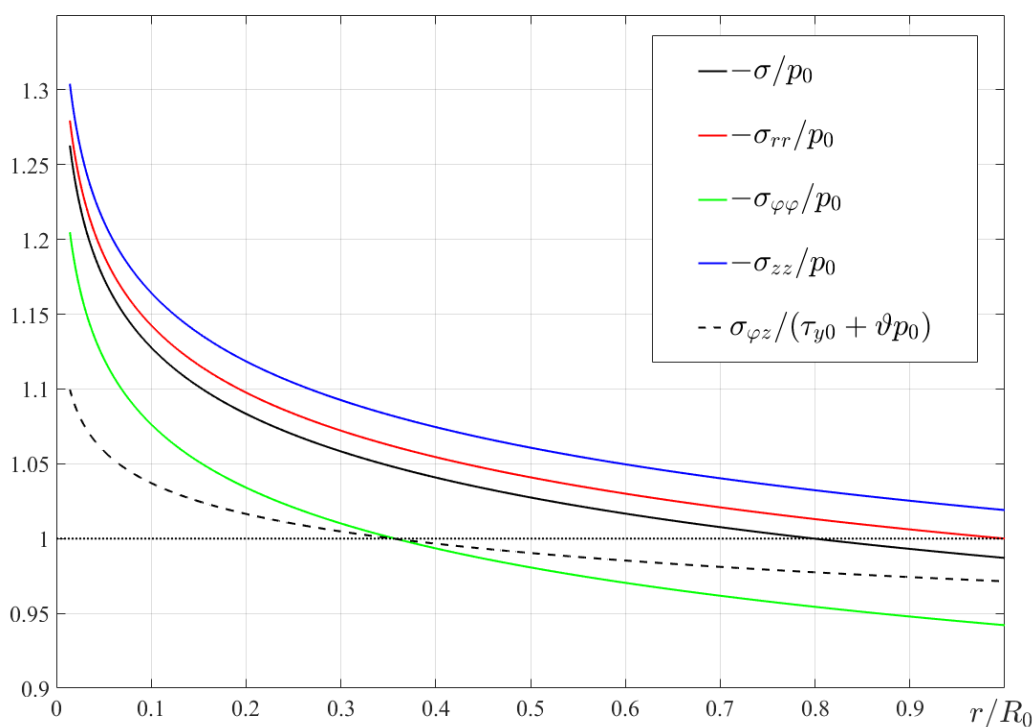


Рисунок 16 – Безразмерные напряжения в пластической области при $N = \Theta/(2\pi) = 1/2$ в сравнении с жестко-пластическим решением

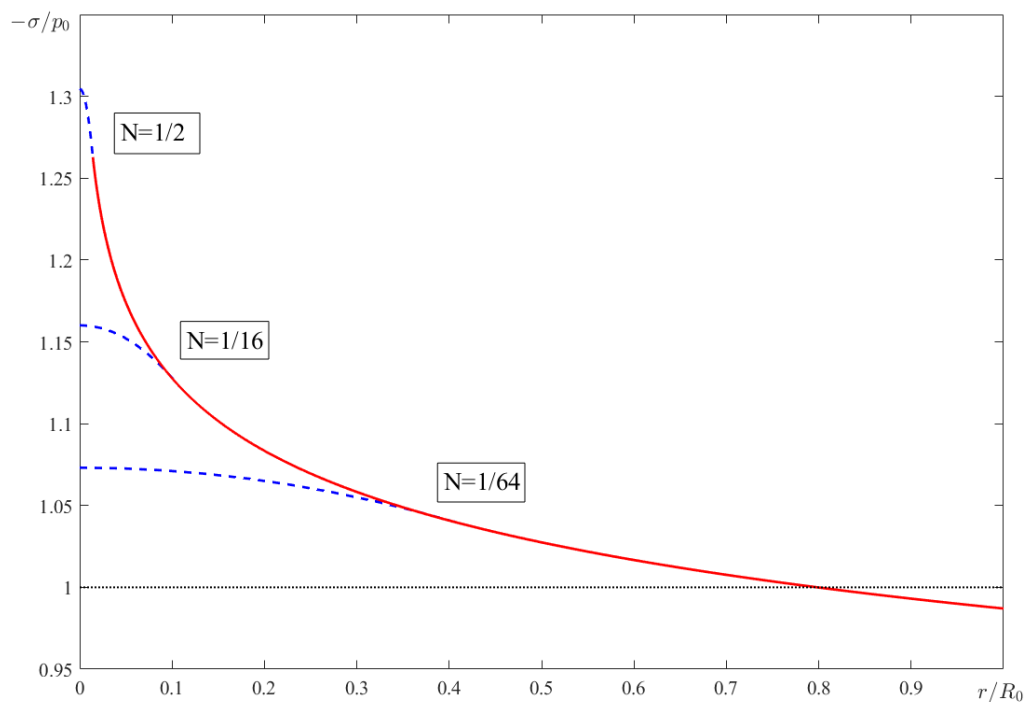


Рисунок 17 – Эволюция распределения среднего напряжения в образце с увеличением параметра нагружения $N = \Theta/(2\pi)$; синий цвет соответствует упругой области, красный – пластической

Раздел 2.5 посвящен упруго-пластическому анализу круговой трубы, вывернутой наизнанку. Выворачивание наизнанку гиперупругой трубы это одно из универсальных решений в нелинейной теории упругости, то есть решение этой задачи может быть построено для произвольного упругого потенциала несжимаемой среды. Ряд исследований посвящен проблеме свободно вывернутой трубы, то есть, когда боковые поверхности трубы свободны от напряжений. Эти исследования обусловлены использованием деформации такого типа в различных демпферах (абсорберах) кинетической энергии. Основное внимание в таких исследованиях уделено определению необходимого для выворачивания осевого усилия.

Выворачивание труб (преимущественно из полимерных материалов) может служить для создания многослойных конструкций, когда внутри жесткой внешней трубы с той или иной целью создается покрытие (рис. 18). В этом случае ключевыми характеристиками реализующегося напряженного состояния будет натяг между слоями конструкции (величина радиального напряжения на контактной границе), а также величина тангенциального

напряжения на внутренней (свободной) поверхности вывернутой трубы, поскольку считается, что создание значительных сжимающих тангенциальных напряжений положительно сказывается на эксплуатации труб под давлением.

Нетрудно понять, что максимальная величина тангенциального напряжения на свободной поверхности ограничена пределом текучести материала. То есть максимальный эффект от создания сжимающих тангенциальных напряжений достигается в случае пластического деформирования материала. Этой задаче посвящен настоящий раздел.

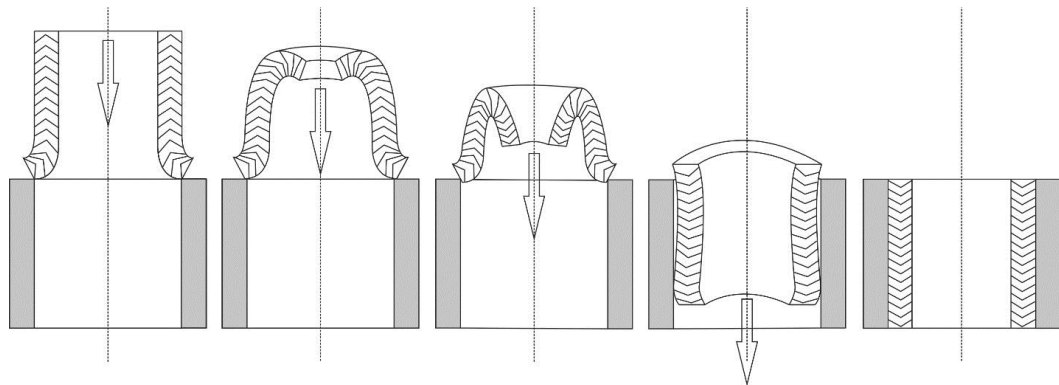


Рисунок 18 – Выворачивание трубы в жесткой обойме

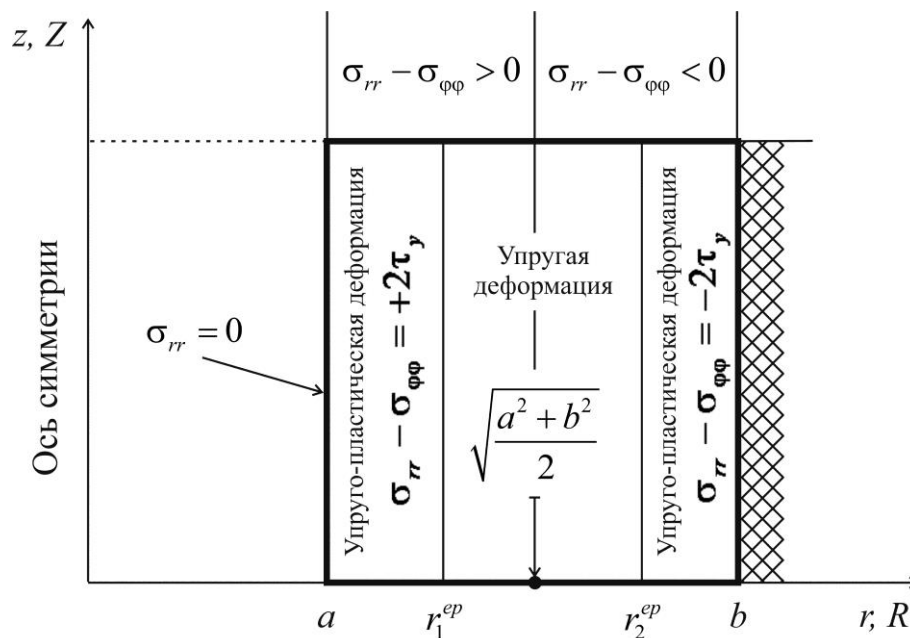


Рисунок 19 – Вывернутая труба

С точностью до жестких вращений связь координат материальных точек в начальном состоянии R, θ, Z с координатами в актуальном (деформированном) состоянии r, φ, z есть $R = R(r), \theta = \varphi, Z = z$.

Модель материала:

- гиперупругий закон

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\frac{\partial\Psi^B}{\partial\mathbf{B}^e}\mathbf{B}^e = -p\mathbf{I} + 2\psi_1^B\mathbf{B}^e \text{ или } \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{\partial\Psi^h}{\partial\mathbf{h}^e} = -p\mathbf{I} - \psi_2^h\mathbf{h}^e$$

- модель пластического течения Треска

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_y, \tau_y = \tau_y(q)$$

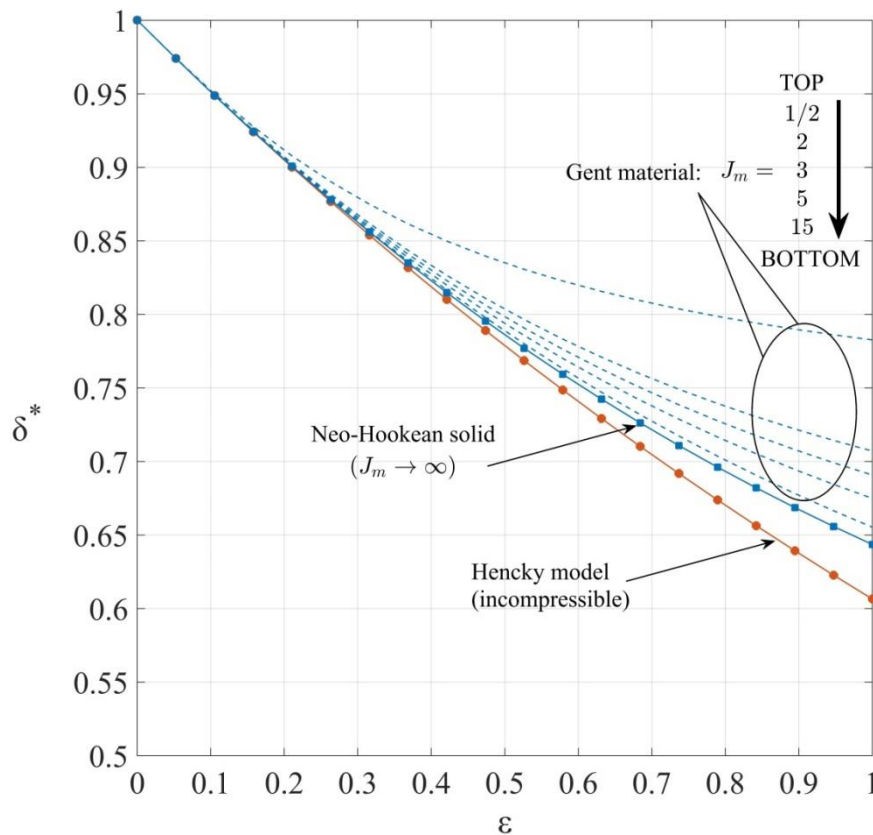


Рисунок 20 – Предельная величина геометрического параметра для упругих моделей Генки, неогукковского тела и Гента: если $\delta = a/b \geq \delta^*$, то вывернутая труба деформирована упруго, если $\delta = a/b < \delta^*$, то упруго-пластически

Получено аналитическое решение задачи о круговой трубе, вывернутой наизнанку в жесткой обойме. Получены формулы для величины радиального напряжения, которое отвечает за сцепление между трубой и обоймой. Решение получено для произвольного несжимаемого гиперупругого материала с упругим потенциалом, который зависит только от первого инварианта левого

тензора деформаций Коши – Грина (обобщенный неогуковский материал) или от второго инварианта логарифмического тензора Генки (различные обобщения несжимаемого материала Генки). Решение учитывает возникновение пластического течения в областях, прилегающих к боковым поверхностям трубы. Рассмотрен как идеально-пластический, так и изотропно упрочняющийся материал общего вида. Для последнего приведена схема решения, в частном случае линейно-упрочняющегося материала получено решение в замкнутом виде. Для идеально-пластического материала решение в замкнутом виде получено для неогуковского тела, для несжимаемого материала Генки и для материала Гента.

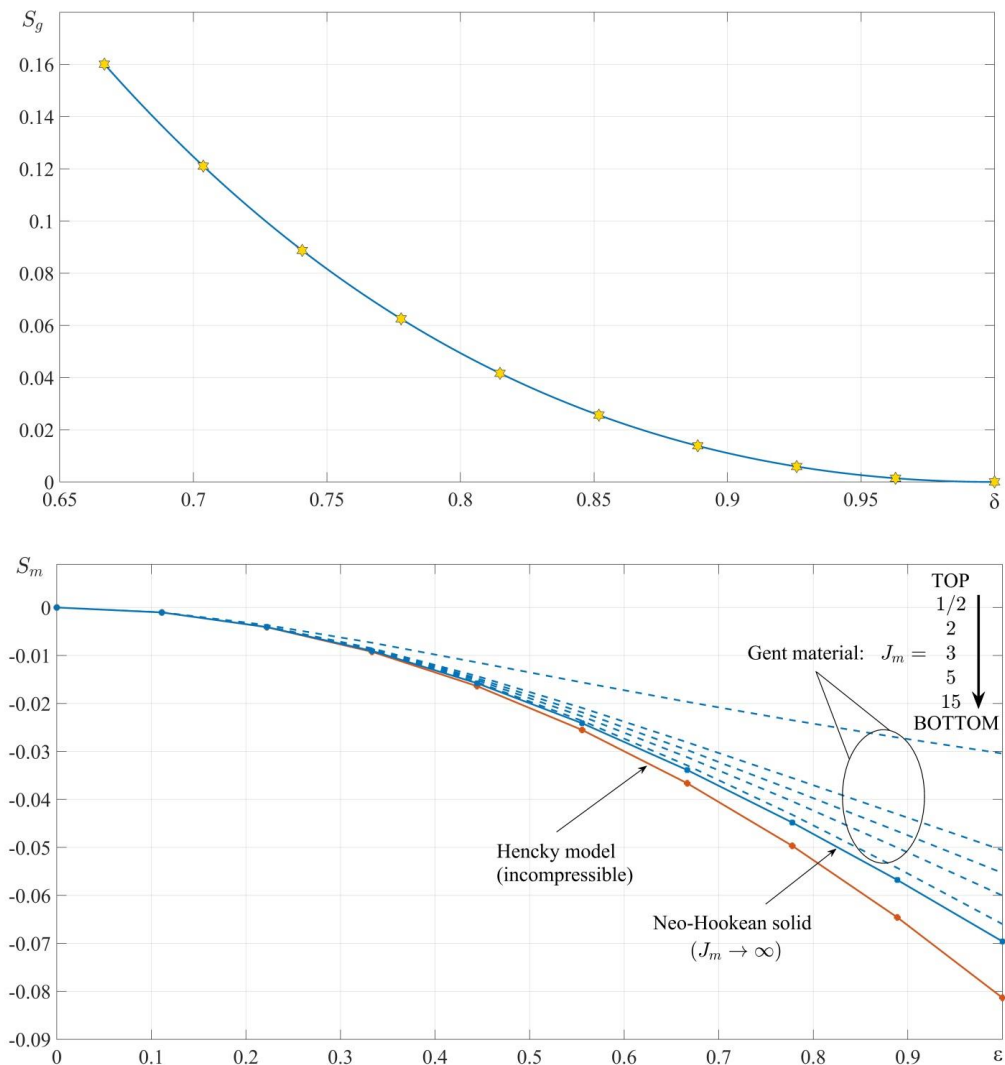


Рисунок 21 – Величина натяга есть сумма «геометрического» и «механического» слагаемых $-\sigma_{rr}(b)/\tau_y = S_g + S_m$; $S_m = S_m(\epsilon)$, $\epsilon = \tau_y/\mu$, $S_g = S_g(\delta)$, $\delta = a/b$

Раздел 2.6 посвящен решению задачи об антиплоском осесимметричном упруго-пластическом сдвиге в изотропно упрочняющемся материале. Механика материалов описывает их поведение в рамках некоторых математических моделей. В теории пластически упрочняющихся тел, например, принимается, что интенсивность напряжений есть некоторая функция накопленной пластической деформации (функция упрочнения). Для нее может быть принят тот или иной вид, включающий коэффициенты (материальные константы), которые можно определить опытным путем, сравнивая экспериментальные данные с численными или аналитическими расчетами по выбранной модели. При этом разные схемы нагружения материала могут дать различающиеся между собой наборы материальных констант. Синтетические тесты, в которых применяется несколько различных схем нагружения, показывают более надежные результаты идентификации материальных параметров. Схемы тестирования с неоднородным напряженным состоянием имеют некоторые преимущества перед схемами с однородным состоянием: реализация однородного состояния требует соблюдения достаточно сложных условий тестирования; тесты с неоднородным состоянием могут предоставить большую информацию о поведении материала. Вместе с тем, тесты с неоднородным напряженным состоянием сложнее интерпретировать. В данном разделе дается решение для достаточно простой схемы неоднородного деформирования, а именно для антиплоского осесимметричного сдвига. Реализация этой схемы может быть выполнена с помощью оснастки приведенной на рис. 22. Указанный тест предоставляет данные «перемещение пуансона – приложенная нагрузка». Несмотря на то, что представленная далее модель не учитывает накопление поврежденности материала (а, значит, не может описать нисходящую часть кривой нагрузки), она может дать адекватное аналитическое описание процесса при умеренных деформациях вплоть до пикового значения нагрузки.

Осесимметричное антиплоское движение материала (то есть такое, при котором вектор скорости имеет только осевую компоненту, величина которой зависит только от радиальной координаты) рассматривалось при различных краевых условиях в ряде работ в рамках жестко-вязкопластического, а также упруго-вязкопластического анализа. Вместе с тем, при обычных усло-

виях большинство материалов в пластическом диапазоне в большей степени проявляют деформационное упрочнение, нежели зависимость предела текучести от скорости деформации. В этом смысле представленное решение, учитывающее изотропное упрочнение, более пригодно для описания тестирования материалов.

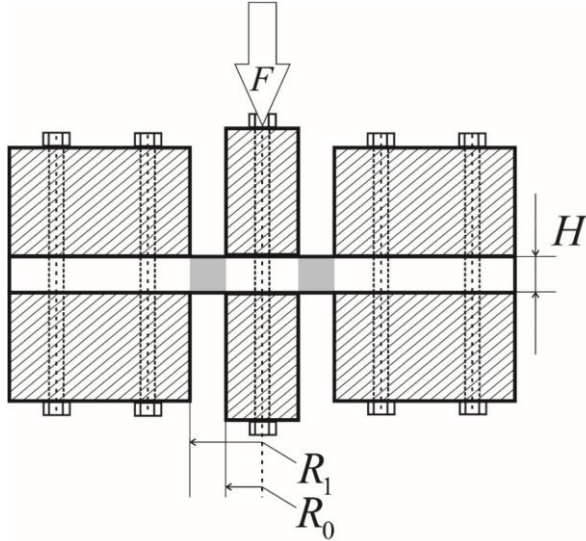


Рисунок 22 – Реализация антиплоского осесимметричного сдвига (серым цветом выделена область деформации образца). Заштрихована оснастка

Итак, движение деформируемого материала соответствует кинематике антиплоского сдвига:

$$r = R, z = Z + w(R, t), \varphi = \theta,$$

где $w(R, t) \geq 0$ есть функция осевого перемещения с граничными условиями

$$w(R_1, t) = 0, w(R_0, t) = w^*(t),$$

Модель материала. Для несжимаемой гиперупругой среды использована модель Муни – Ривлина:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e}, \Psi = C_1(I_1^{\mathbf{B}^e} - 3) + C_2(I_2^{\mathbf{B}^e} - 3), \det \mathbf{B}^e = 1$$

Пластическое деформирование описывается условием текучести Треска, обобщенным на случай изотропного упрочнения, и ассоциированным с ним законом:

$$f = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \tau_y(q) = 0, \mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

Здесь $\tau_y(q)$ есть произвольная монотонная функция упрочнения, параметром которой выступает накопленная пластическая деформация q . Начальный предел текучести на сдвиг обозначен $\tau_{y0} = \tau_y(0)$.

Решение не всегда существует (в частности, его нет для неупрочняемого материала), в зависимости от закона упрочнения есть конечная нагрузка, после которой оно перестает существовать.

На рисунке 24 приведена расчётная величина безразмерной нагрузки $F/(2\pi R_0 H \mu)$ в зависимости от продольного смещения для трёх моделей упрочнения, изображенных на рис. 23. Другие расчётные характеристики напряженно-деформированного состояния материала приведены в тексте диссертации.

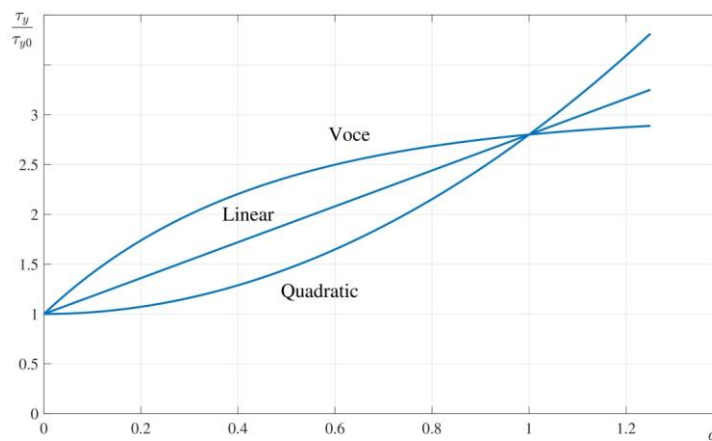


Рисунок 23 – Функции упрочнения

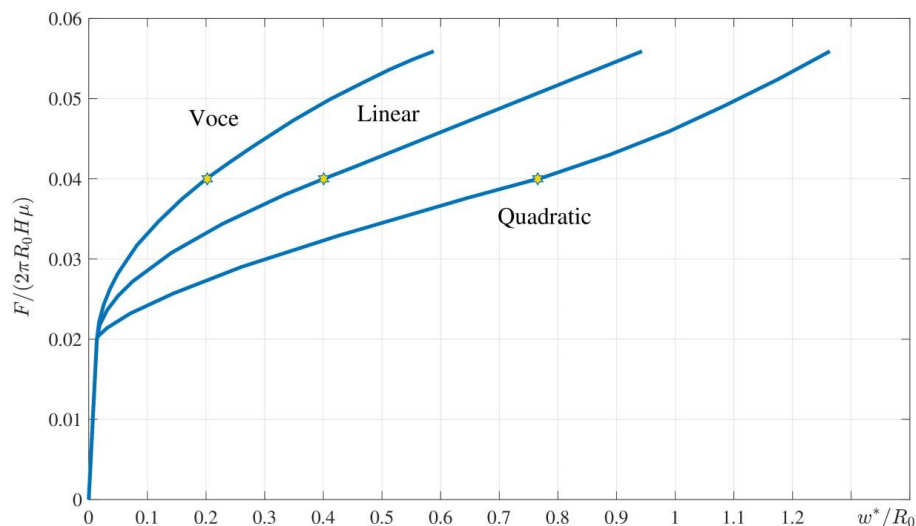


Рисунок 24 – Зависимость приложенной нагрузки от перемещения пуансона. Звездочками отмечен момент полного перехода образца в пластическое состояние. Самая правая точка каждого графика соответствует величине накопленной пластической деформации на внутренней поверхности образца равной 1. Линейный участок каждого графика соответствует чисто упругому деформированию

В разделе 2.7 рассмотрен круговой сдвиг в упруго-пластическом изотропно упрочняющемся материале. Модель материала та же, что и в разделе 2.6. Получено точное решение с учетом изотропного упрочнения материала. Это решение может использоваться для интерпретации экспериментальных данных с целью установления законов упрочнения, например, при использовании известного «in-plane torsion test». Кроме того, деформированное состояние, близкое к круговому сдвигу, реализуется в недавно предложенных схемах обработки материалов при высоком давлении. Полученное в диссертации аналитическое решение может быть использовано для оценки напряженно-деформированного состояния при указанных схемах деформирования, с тем условием, что приложенное поле давления однородно и однородны механические свойства материала.

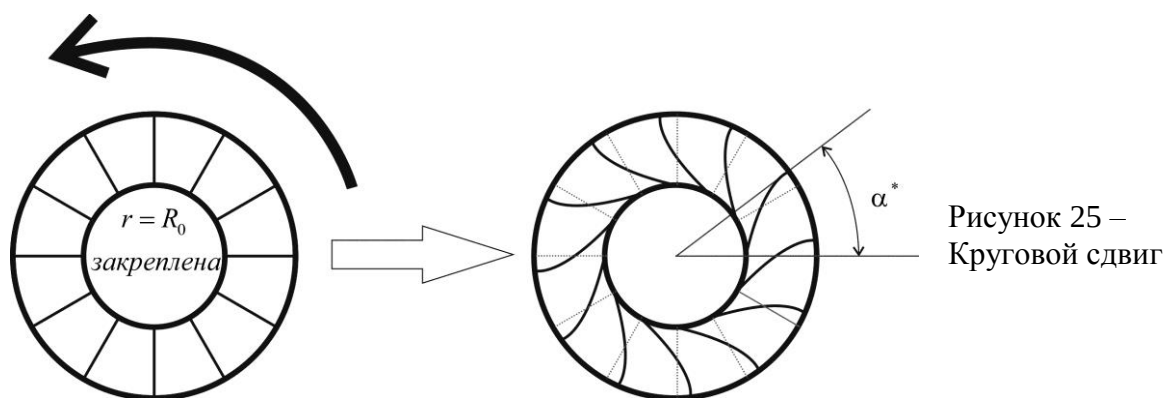


Рисунок 25 –
Круговой сдвиг

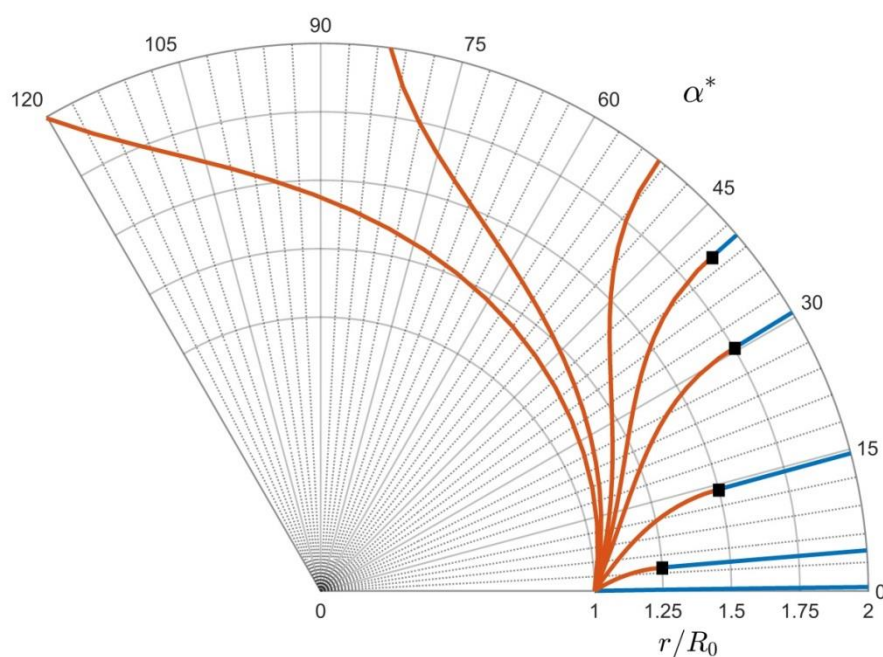


Рисунок 26 – Искривление изначально радиально направленных материальных волокон после кругового сдвига (угол поворота α^* в градусах). Символ «■» обозначает положение упруго-пластической границы

В разделе 2.8 получены аналитические результаты относительно предельной величины эффекта Свифта в гиперупруго-пластических материалах с насыщением предела текучести. Свифт установил, что образцы из различных металлических материалов необратимо удлиняются в направлении оси, вокруг которой они скручены. Это явление, наряду с его парным эффектом, суть которого заключается в возникновении осевой силы при кручении с закреплёнными концами, известно как эффект Свифта (рис. 27). Наиболее распространённая в механике твёрдого тела точка зрения на причины этого эффекта заключается во влиянии начальной или приобретенной анизотропии материалов. Однако сравнительно недавние исследования (Cazacu, Revil-Baudard, Barlat) показали, что это объяснение может быть не единственно возможным. Была продемонстрирована сильная корреляция между асимметрией растяжения – сжатия (tension – compression asymmetry, ТСА) при пластическом течении и возникновением эффекта Свифта. В частности, было показано, что образцы удлиняются, если предел текучести материала на растяжение ниже предела текучести на сжатие, и укорачиваются в противном случае. Для модели пластичности Мизеса, в которой эти пределы текучести равны, расчеты показывают, что изменение длины образца при кручении очень мало (определяется чсито нелинейно упругими эффектами).

В разделе с использованием кинематики конечных упругопластических деформаций получена система дифференциальных уравнений, описывающих кручение с закрепленными концами для широкого класса несжимаемых материалов с насыщением предела текучести. Исследовано предельное напряженно-деформированное состояние, к которому стремится материал с ростом деформации кручения, и получены следующие результаты относительно предельного значения эффекта Свифта.

1) Для модели пластичности Мизеса осевая сила пропорциональна $\hat{\varepsilon}^2$, $\hat{\varepsilon} = \hat{\tau}_y / \hat{\mu}$, где τ_y представляет собой предел текучести на сдвиг; $\mu = 2(\psi_1 + \psi_2)$ есть нелинейный аналог модуля сдвига, $\psi_1 = \partial\Psi/\partial I_1$, $\psi_2 = \partial\Psi/\partial I_2$, Ψ есть упругий потенциал. Напротив, для модели Cazacu and Barlat, 2004, учитывающей ТСА, осевая сила пропорциональна $\hat{\varepsilon}$. Следовательно, для этой модели осевая сила и крутящий момент есть величины од-

ного порядка. Для модели пластичности Drucker, 1948, которая включает инвариант девиатора J_3 , но не учитывает ТСА, предельное состояние ничем не отличается от предсказанного моделью Мизеса. Здесь и далее по тексту подраздела символ « $\hat{\cdot}$ » обозначает предельное значение величины при неограниченном росте деформации кручения.

2) Как для модели пластичности Мизеса, так и для модели Cazacu and Barlat, 2004 осевая сила в главном приближении зависит от $\hat{\mu}$, но не зависит от соотношения между ψ_1 и ψ_2 . Однако для модели Cazacu and Barlat, 2004 существует зависимость крутящего момента от соотношения между ψ_1 и ψ_2 , заметно проявляющаяся, если материал способен выдерживать значительные упругие деформации и его предел текучести при растяжении значительно ниже предела текучести при сжатии.

3) Для жестких материалов ($\hat{\varepsilon} \ll 1$) с умеренно выраженной ТСА коэффициент модели Cazacu and Barlat, 2004 можно выразить простой формулой $\hat{c} = \hat{F}_z d / \hat{M}$, где d есть диаметр образца; осевая сила $\hat{F}_z$ положительна, если образец находится в состоянии растяжения, и отрицательна, если образец находится в состоянии сжатия.

4) В предельном состоянии имеет место универсальное соотношение между компонентами тензора упругой деформации $\hat{B}_{rr}^e (\hat{B}_{\varphi\varphi}^e + \hat{B}_{zz}^e) \hat{B}_{zz}^e = 2$.

5) Для неассоциированных пластических моделей эффект Свифта контролируется пластическим потенциалом, а не условием текучести.

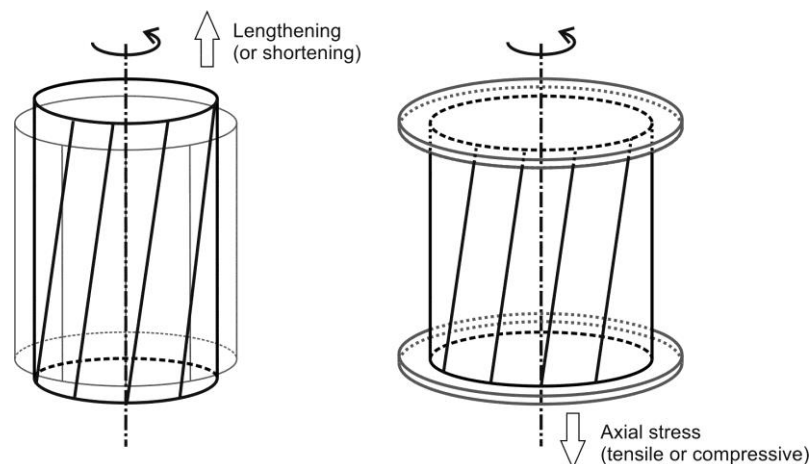


Рисунок 27 – Эффект Свифта при кручении со свободными концами (слева) и закреплёнными концами (справа)

Использована обобщенная гиперупруго – пластическая модель. Условие текучести:

$$f(J_2, J_3, \tau_y) = 0$$

Пластический потенциал

$$\mathbf{D}^p = \Lambda \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \Lambda \left(g_2 \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + g_3 \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = \Lambda \left[g_2 \mathbf{s} + g_3 (\mathbf{s}^2 - 2/3 J_2 \mathbf{I}) \right]$$

Функция f , которая может не совпадать с g , содержит сдвиговой предел текучести материала τ_y . Функция $\tau_y(q)$ описывает изотропное деформационное упрочнение, q представляет собой накопленную пластическую деформацию, определяемую уравнением $\dot{q} = \sqrt{(2/3) \text{tr}(\mathbf{D}^p)^2}$. Мы рассматриваем материалы с пределом текучести, достигающим насыщения, поэтому $\lim_{q \rightarrow \infty} \tau_y(q) = \hat{\tau}_y < \infty$

Тензор напряжений Коши связан с тензором упругих деформаций $\mathbf{B}^e$ гиперупругим законом

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e} = -p\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mu(1-\psi) I_2 \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mu(1+\psi) \mathbf{B}^e - \frac{1}{2} \mu(1-\psi) (\mathbf{B}^e)^{-1}$$

$$\det \mathbf{B}^e = 1, \psi(I_1, I_2) = (\psi_1 - \psi_2) / (\psi_1 + \psi_2).$$

Эволюция упругой деформации в области пластического течения описывается уравнением $D_{Old} \mathbf{B}^e / Dt = \dot{\mathbf{B}}^e - \mathbf{I} \mathbf{B}^e - \mathbf{B}^e \mathbf{I}^T = -2\mathbf{B}^e \mathbf{D}^p$. Рассмотренное в разделе предельное состояние соответствует стационарной точке уравнения выше, при котором $\partial \mathbf{B}^e / \partial t = 0$.

Третья глава представляет некоторые точные аналитические решения задач нелинейной упругости и вязкоупругой релаксации напряжений.

Раздел 3.1 описывает релаксацию напряжений в нелинейно вязкоупругом закрученном круговом стержне. Известно геометрически линейное решение Кобелева для этой задачи. В нем используется допущение, что упругая деформация мала, линейно связана с напряжением, а общая деформация представляет собой сумму упругой и неупругой деформации. В рамках этого решения рассмотрены материалы с законами ползучести Нортон – Бейли, Прандтля – Гарофало и Науменко – Альтенбаха – Гораша. Однако биомате-

риалы, равно как и полимеры, проявляют ползучесть при нормальных температурах, а законы упругости таких материалов сильно нелинейны и часто включают нелинейную реакцию на сдвиг. Более того, многие из таких материалов способны выдерживать упругую деформацию в сотни процентов. В этом случае использование аддитивного разделения деформации на упругую и неупругую части может быть не лучшим выбором.

Данный раздел решает поставленную проблему при конечных деформациях. Приведены общие решения этой задачи в том смысле, что исходная задача сводится к вычислению интегралов и обращению функций. В отличие от геометрически линейной постановки получить явное решение удастся только в некоторых простых случаях (в частности, для материала Муни – Ривлина с линейной моделью ползучести). Тем не менее полученные результаты позволяют с малыми вычислительными затратами рассчитать релаксацию крутящего момента, а также осевую силу для широкого класса несжимаемых материалов, описываемых законом ползучести общего вида и гиперупругим потенциалом. Это может иметь приложение в контексте использования алгоритмов оптимизации для определения параметров материалов в законах ползучести.

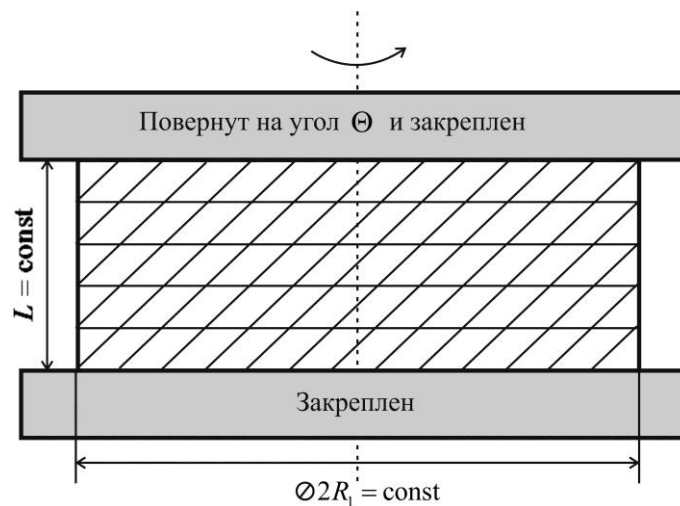


Рисунок 28 – Схема кручения с закрепленными торцами (линии сетки воспроизводят деформированные материальные направления)

Модель материала:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} - 2\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e}\mathbf{c}^e = -p\mathbf{I} - 2\left(\psi_1 + \psi_2 I_1^{\mathbf{c}^e}\right)\mathbf{c}^e + 2\psi_2\left(\mathbf{c}^e\right)^2$$

$$\Psi = \Psi(I_1^e, I_2^e), \quad \psi_1(I_1^e, I_2^e) = \partial\Psi/\partial I_1^e, \quad \psi_2(I_1^e, I_2^e) = \partial\Psi/\partial I_2^e$$

$$\mathbf{D}^c = \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{eq}} \frac{\partial\sigma_{eq}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$$

где $\Phi = D_0\sigma_0 T(\tilde{t}) \int_0^{\tilde{\sigma}_{eq}} F(\xi) d\xi$ есть изотропный потенциал ползучести, $\tilde{t} = t/t_0$, $\tilde{\sigma}_{eq} = \sigma_{eq}/\sigma_0$. Безразмерная функция $T(\tilde{t})$ описывает упрочнение или разупрочнение со временем; функция F также безразмерная. Параметры σ_0 и t_0 имеют размерность напряжения и времени соответственно, множитель D_0 имеет размерность c^{-1} .

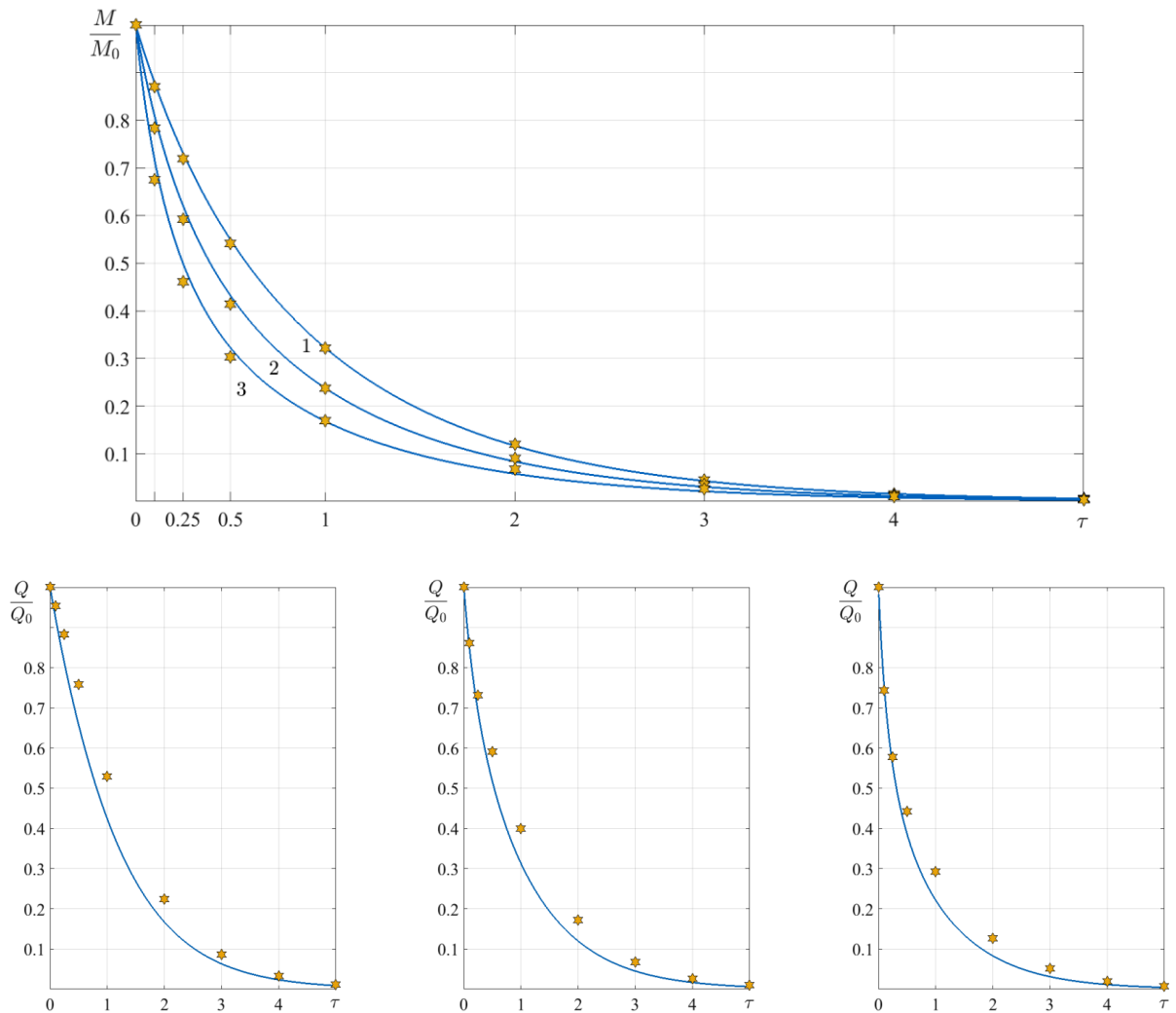


Рисунок 29 – Релаксация крутящего момента и осевой силы в вязкоупругом материале с неогуксовой функцией энергии деформации и линейной зависимостью для скорости ползучести: сплошные линии соответствуют эквивалентному напряжению Треска, шестиугольники соответствуют эквивалентному напряжению Мизеса;

а) крутящий момент для различных значений предварительной поверхностной деформации ($\gamma = \Theta R_1/L = 1, 2, 3$); б), в), г) осевая сила для $\gamma = 1, 2, 3$ соответственно

Получены решения для следующих моделей материалов:

- потенциалы ползучести, основанные на эквивалентном напряжении Треска, и гиперупругие соотношения общего вида для несжимаемого тела;
- потенциалы ползучести на основе эквивалентного напряжения Мизеса и гиперупругие соотношения несжимаемого обобщенного неогуковского тела.

В обоих случаях потенциал ползучести может быть произвольной функцией эквивалентного напряжения.

В разделе 3.2 рассмотрена релаксация напряжений в изогнутой вязкоупругой разнсопротивляющейся пластине (рис. 30). Разница в механических свойствах при растяжении и сжатии может быть очень заметной для ряда материалов. Исследования асимметрии на растяжение / сжатие в упругом диапазоне восходит к работам Амбарцумяна и Шапиро. В последние годы появились модели, описывающие этот эффект при конечных деформациях. Разница в сопротивлении пластическому деформированию при растяжении и сжатии описывается, например, моделью Cazacu and Barlat, 2004. Подобные эффекты наблюдаются также в режиме ползучести и описываются в ряде исследований, включающих как теоретические построения, так и численные расчеты, сопоставленные с экспериментальными данными. Однако, аналитические решения даже относительно простых эталонных задач достаточно редки.

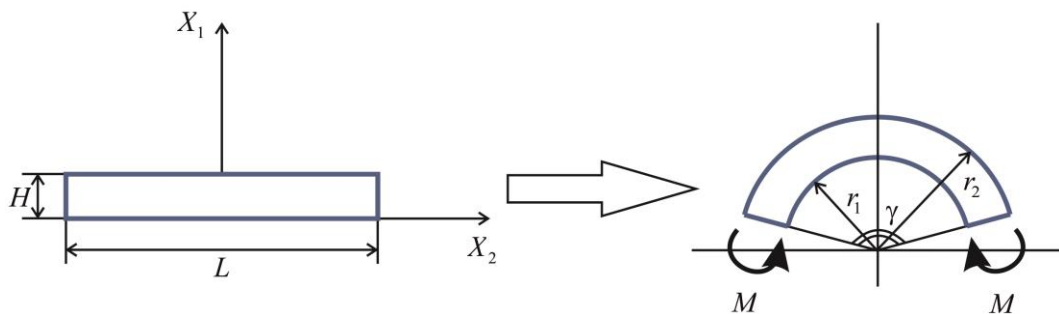


Рисунок 30 – Схема изгиба пластины

Предварительная деформация пластины описывается следующими уравнениями кинематики изгиба в условиях плоской деформации:

$$r = \sqrt{B + \frac{2X_1}{A}}, \quad \varphi = AX_2, \quad z = X_3$$

Внутренний и внешний радиусы кривизны изогнутой пластины могут быть выражены в виде

$$r_1 = \sqrt{B}, \quad r_2 = \sqrt{B + \frac{2H}{A}}; \quad A = \frac{\gamma}{L}, \quad B = \frac{1}{A^2} \left(\sqrt{1 + (AH)^2} - AH \right)$$

Здесь γ угол изгиба, L и H – длина и толщина пластины соответственно.

Кроме того, справедливо равенство $r_1 r_2 = A^{-2}$.

Предварительное деформирование чисто упругое, в момент времени $t = 0$ начинается релаксация напряжений, которая приводит к уменьшению изгибающего момента.

На рисунке 31 приведена иллюстрация разнсопротивляемости вязкой деформации растяжения и сжатия (диаграммы "скорость деформации – напряжение" для двух линейно-вязких материалов). Для каждого из материалов эффективные коэффициенты вязкости при сжатии и растяжении различаются в четыре раза, но для одного из них выше вязкость при сжатии, а для второго наоборот.

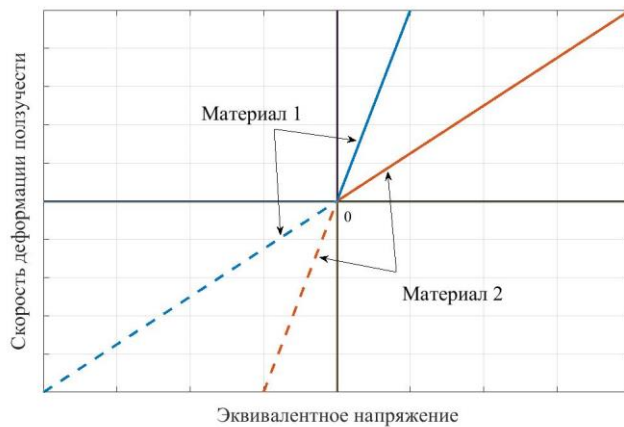


Рисунок 31 – Разнсопротивляемость вязкой деформации сжатия / растяжения

В разделе используется следующая модель материала: несжимаемая упругая модель Генки в сочетании с моделями линейной разнсопротивляющейся ползучести:

$$\Phi = \frac{\sigma_{eq}^2}{2\eta}, \quad \mathbf{D}^c = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{d\Phi}{d\sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

Рассмотрены три варианта эквивалентного напряжения, учитывающего разнсопротивляемость:

$$I) \sigma_{eq} = \left[J_2^{3/2} - \left(3\sqrt{3}/2 \right) \alpha J_3 \right]^{1/3}, \quad \text{где } J_3 = \det \mathbf{s}, \quad \alpha \in [-1, 1] \text{ отвечает за ТСА};$$

II) $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_3 s_3^2)}$, где s_1, s_2, s_3 есть упорядоченные по убыванию главные значения девиатора напряжений; коэффициенты

$$n_k = \begin{cases} n^+, & s_k \geq 0 \\ n^-, & s_k < 0 \end{cases}, k=1,2,3$$

отвечают за ТСА;

III) $\sigma_{eq} = \frac{3}{2} \frac{s_1 - \beta s_3}{2 + \beta} = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 + \frac{-1 + \beta}{2 + \beta} \sigma_2 + \frac{-1 - 2\beta}{2 + \beta} \sigma_3 \right)$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ есть упорядоченные по убыванию главные напряжения; параметр материала $\beta \geq 0$ отвечает за разнсопротивляемость вязкой деформации.

Получены формулы, описывающие релаксацию изгибающего момента для всех трёх моделей разнсопротивляемости (рис. 33 – гладкие модели I и II, рис. 34 – кусочно-линейная модель III). Оба решения, основанные на гладких потенциалах ползучести, имеют одну особенность: они прогнозируют идентичную релаксацию для, вообще говоря, разных материалов, схематично представленных на рис. 31. То есть для этих решений имеет значение, во сколько раз различается эффективная вязкость материала при растяжении и сжатии, но не имеет значения, какая из них больше, а какая меньше.

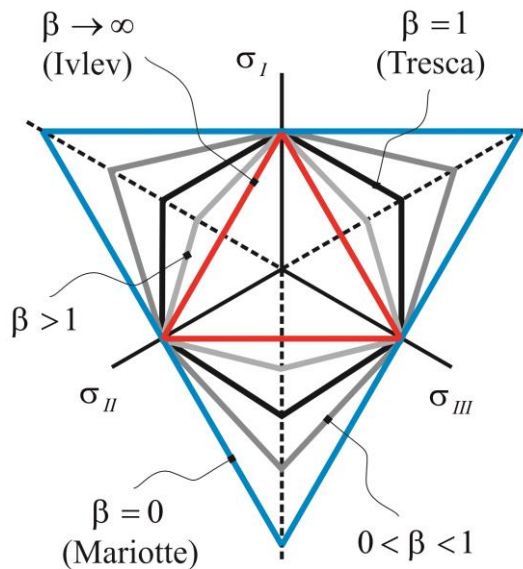


Рисунок 32 – Проекция функции эквивалентного напряжения III на девиаторную плоскость

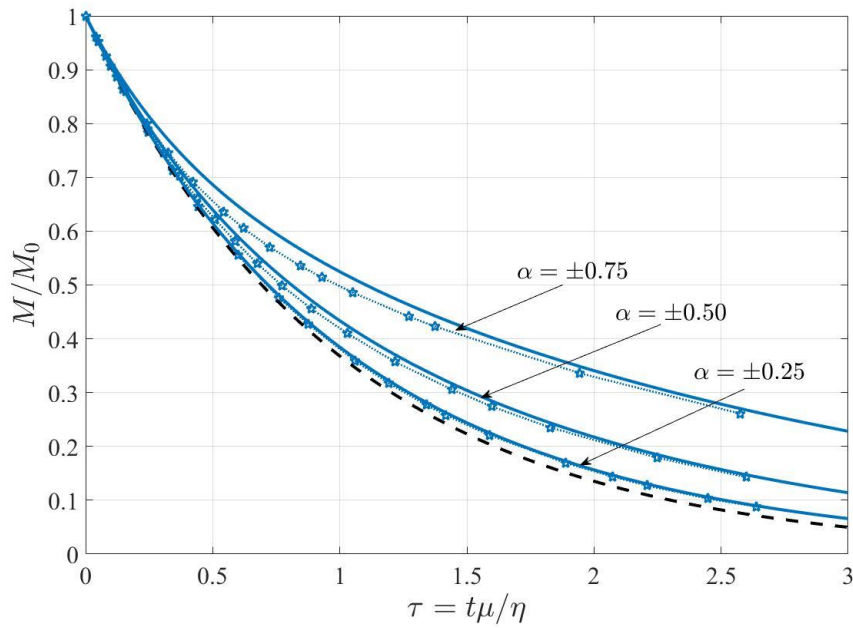


Рисунок 33 – Релаксация изгибающего момента: сплошные линии соответствуют модели с $\sigma_{eq} = \left[J_2^{3/2} - \left(3\sqrt{3}/2 \right) \alpha J_3 \right]^{1/3}$; штриховые линии с маркерами соответствуют модели с $\sigma_{eq} = \left[(1/2) (n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_3 s_3^2) \right]^{1/2}$. Штриховая линия соответствует материалу без асимметрии на сжатие – растяжение ($\alpha = 0$)

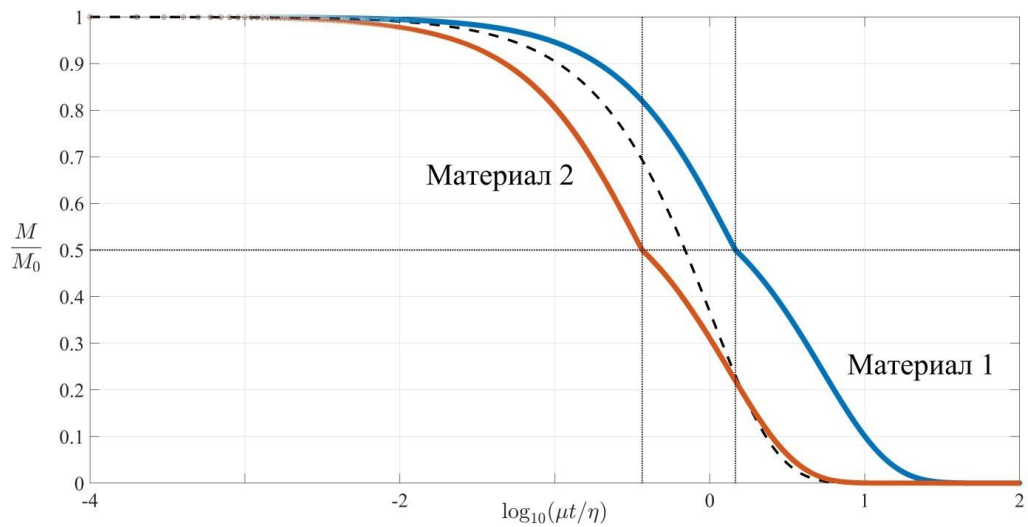


Рисунок 34 – Релаксация изгибающего момента M в пластине. Линейная модель с разносопротивляемостью вязкой деформации. Параметры материалов: для материала 1 $\beta = 0$, для материала 2 $\beta \rightarrow \infty$. Пунктирная линия соответствует решению для материала без разносопротивляемости $M/M_0 = \exp(-\mu t/\eta)$. Вертикальные линии соответствуют моментам времени t^* перехода между этапами релаксации, когда напряженное состояние выходит на ребро функции ползучести; горизонтальная линия соответствует значениям M в эти моменты времени

В отличие от них, решение для кусочно-линейного потенциала ползучести, прогнозирует разную релаксацию для этих материалов (рис. 34). Модель прогнозирует, что в материале 1, для которого сопротивление вязкой деформации растяжения ниже, чем деформации сжатия (скорость деформации при растяжении выше, чем при сжатии, при одинаковой по модулю нагрузке), релаксация изгибающего момента происходит медленнее, чем в материале 2. На обоих графиках релаксации прослеживаются точки перегиба, соответствующие переходу между этапами релаксации, в которых напряженное состояние пластины выходит на ребро кусочно-линейной функции ползучести. На рис. 35 приведены траектории напряженного состояния в произвольной точке изогнутой пластины для модели III.

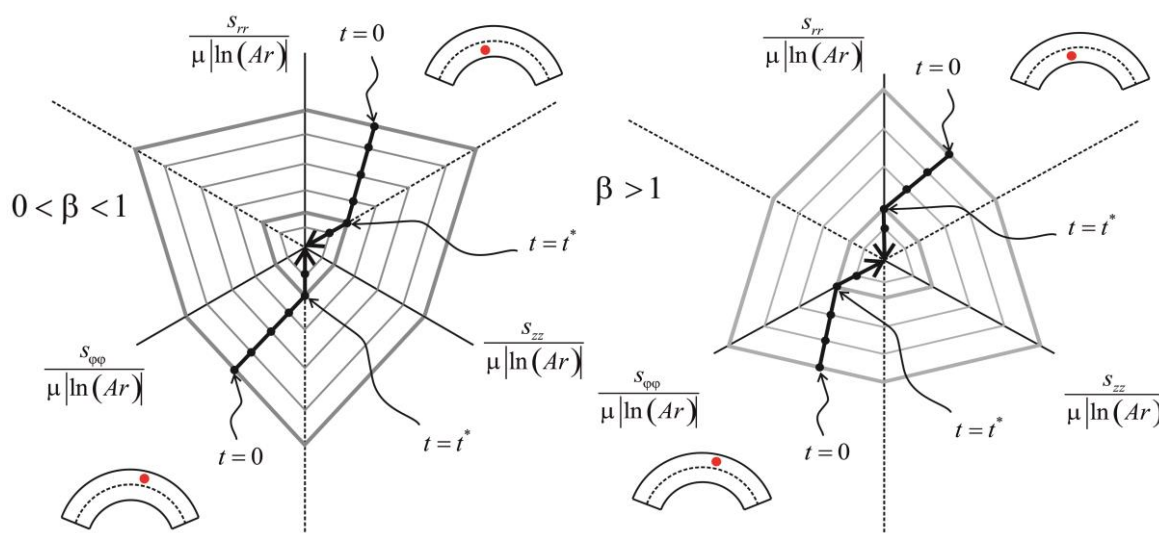


Рисунок 35 – Траектория напряженного состояния произвольной точки пластины. Слева для материала с $0 \leq \beta < 1$, справа для материала с $\beta > 1$. Верхняя траектория на каждом графике соответствует точкам пластины внутренней области $Ar < 1$, нижняя – точкам внешней области $Ar > 1$ (точки на нейтральной поверхности $Ar = 1$ свободны от напряжений)

Раздел 3.3 посвящен построению гиперупругой модели композита, армированного короткими волокнами. Волокнистые композиты представляют собой материалы, которые состоят из матрицы (полимерной, металлической или керамической) и армирующих волокон (углеродных, стеклянных или натуральных). Функции матрицы – передача внешних нагрузок на волокна, связь между волокнами и их защита. Несущая способность в свою очередь

обеспечивается в основном армирующими волокнами. Одной из задач механики композитов является прогнозирование упругих, пластических и прочностных свойств композита в зависимости от свойств базовых материалов и параметров армирования (объемная доля включений, их упаковка и геометрические характеристики).

Предложенная в данном разделе модель опирается на тот же принцип анализа, что и Shear Lag Model, но главное отличие – для матрицы композита используется полученное точное гиперупругое решение для материала Тре-лоара; другое отличие – предлагаемая модель учитывает утоньшение волокон при растяжении. Перемещение точек материала матрицы описывается уравнениями $r = f(R)$, $\varphi = \theta$, $z = Zg(R)$. Здесь $g(R)$ безразмерная функция; функция $f(R)$ имеет размерность длины; (R, θ, Z) и (r, φ, z) определяют положение точки среды в исходном и деформированном состоянии соответственно.

На основе анализа деформации представительного объема (рис. 36) выведена микромеханическая модель, описывающая упругий модуль композита, армированного однонаправленными короткими волокнами, при растяжении материала в направлении армирования. Анализ включает точное решение уравнений гиперупругости в деформированной матрице и приближенное решение уравнений для материала волокна. Решение построено для неогукковского материала.

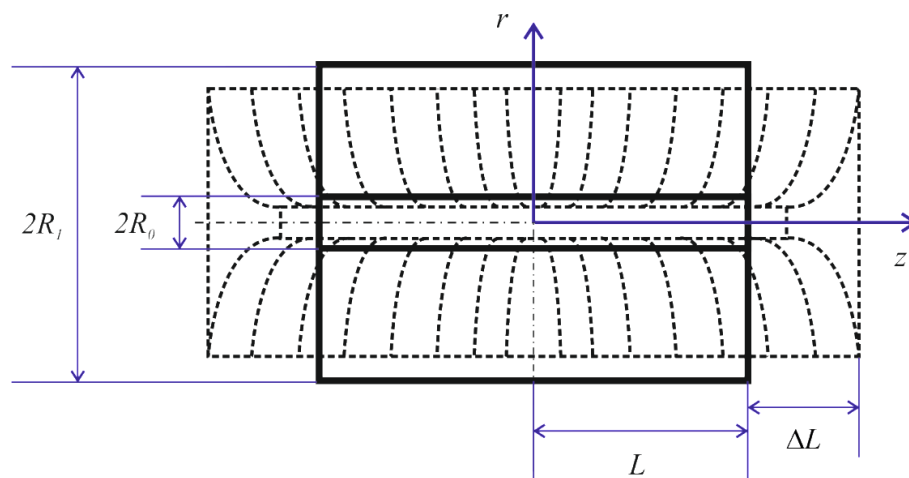


Рисунок 36 – Представительный объем: одиночное волокно и окружающий его материал матрицы

Получены формулы, связывающие упругую энергию деформации композита с макроскопической продольной деформацией, а также формулы, описывающие продольную и радиальную деформацию материала матрицы и волокна. Получена формула, которая связывает начальный тангенциальный упругий модуль композита E_c (аналог модуля Юнга для линейных материалов) с механической характеристикой материалов, составляющих композит (а именно, отношением упругих модулей матрицы E_m и волокна E_f), а также с геометрической характеристикой волокон (отношением длины волокна к его диаметру s) и с объемной долей волокон в композите V_f . Приведено сравнение результатов с другими аналитическими моделями, а также с известными результатами численного моделирования методом конечных элементов и методом граничных элементов. Результаты обобщают известную модель Shear Lag на гиперупругий (неогуков) материал матрицы, и получены с помощью более строгого анализа, чем исходная модель.

Рисунки 37 и 38 демонстрируют эффективный упругий модуль композита, полученный по предложенной модели, в сравнении с моделями Shear Lag и Halpin – Tsai, а также с известными результатами FE и BE моделирования (в последнем случае анализировались абсолютно жесткие волокна).

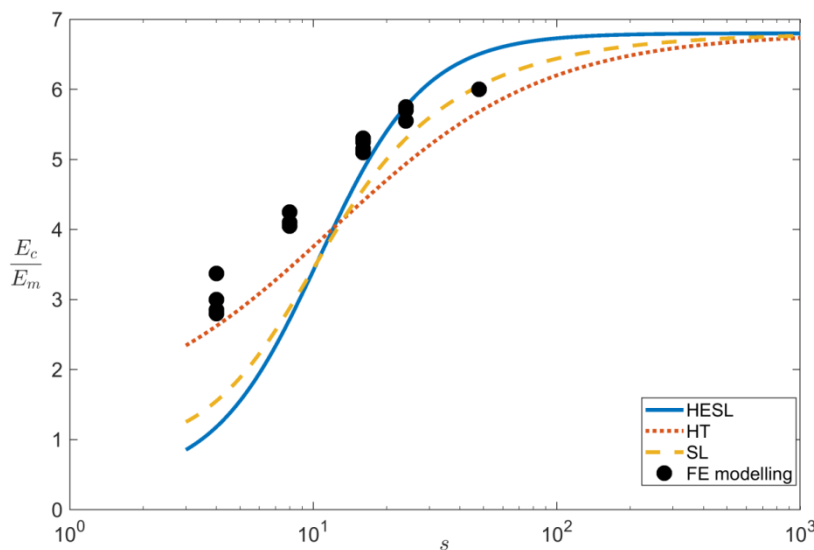


Рисунок 37 – Сравнение известных результатов FE моделирования с моделями Halpin – Tsai, Shear Lag и Hyperelastic Shear Lag. Параметры FEM: $V_f = 0.2$, $E_f/E_m = 30$

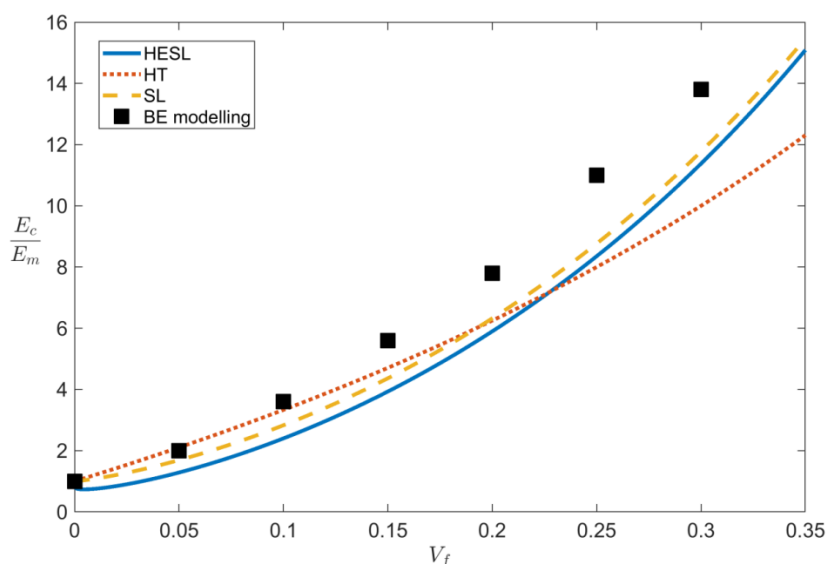


Рисунок 38 – Сравнение известных результатов BE моделирования с моделями Halpin – Tsai, Shear Lag и Hyperelastic Shear Lag. Параметры BEM $E_f/E_m \rightarrow \infty$, $s = 10$

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включённых в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени доктора наук

1. Sevastyanov G.M. New expanding cavity model for conical indentation and its application to determine an intrinsic length scale of polymeric materials. *Acta Mechanica* 2024. **235**, 4229–4251; <https://doi.org/10.1007/s00707-024-03921-2>
2. Sevastyanov G.M. Creep relaxation in nonlinear viscoelastic twisted rods. *ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 2022. e202100552; <https://doi.org/10.1002/zamm.202100552>
3. Sevastyanov G.M. Adiabatic heating effect in elastic-plastic contraction / expansion of spherical cavity in isotropic incompressible material. *European Journal of Mechanics A – Solids* 2021. **87**, 104223; <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104223>
4. Sevastyanov G.M. Analytical solution for high-pressure torsion in the framework of geometrically nonlinear non-associative plasticity. *International Journal of Solids and Structures* 2020. **206**, 383–395; <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.09.028>
5. Севастьянов Г.М. Упруго-пластический анализ круговой трубы, вывернутой наизнанку // Известия РАН. МТТ. 2024. №3. С. 34–50; <https://doi.org/10.1134/S0025654423602380>
6. Севастьянов Г.М. Антиплоский осесимметричный упругопластический сдвиг в изотропно упрочняющемся материале // Вестник СамГТУ. Физико-математические науки. 2024. Т. 28, №4. С. 740–758; <https://doi.org/10.14498/vsgtu2102>

7. Sevastyanov G.M. Finite-strain elastic-plastic torsion: Comparison of von Mises and Tresca materials. *Materials Physics and Mechanics* 2023. **51** (2), 140–150; https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_13
8. Севастьянов Г.М. К релаксации напряжений в изогнутой вязкоупругой разносопротивляющейся пластине // Прикладная математика и механика. 2023. Т. 87, №5. С. 883–893; <https://doi.org/10.3103/s0025654423080186>
9. Севастьянов Г.М. Пластическое кручение при высоком давлении с неоднородным напряженным состоянием // Известия РАН. МТТ. 2021. №3. С. 90–99; <https://doi.org/10.3103/S0025654421030109>
10. Севастьянов Г.М., Буренин А.А. О больших деформациях при кручении несжимаемого упругопластического цилиндра // Доклады академии наук. 2018. Т. 482, №3. С. 285–287; <https://doi.org/10.1134/S1028335818090094>
11. Севастьянов Г.М., Буренин А.А. Адиабатический нагрев материала при упругопластическом кручении с конечными деформациями // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, №6. С. 149–161; <https://doi.org/10.1134/S0021894419060166>
12. Севастьянов Г.М., Бормотин К.С. Упругопластическое кручение с конечными деформациями: Сравнение аналитического и МКЭ-моделирования для немонотонно упрочняющихся полимеров // Вестник ПНИПУ. Механика. 2023. №3. С. 124–136; <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.11>
13. Севастьянов Г.М., Бормотин К.С. Релаксация напряжений в изогнутой вязкоупругой пластине с различными свойствами при сжатии и растяжении // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, №4. С. 152–160; <https://doi.org/10.1134/s0021894423040144>
14. Севастьянов Г.М., Бегун А.С., Буренин А.А. Большие упруго-пластические деформации кругового сдвига в изотропно упрочняющемся материале // Прикладная математика и механика. 2024. Т. 88, №2. С. 313–340
15. Sevastyanov G.M., Burenin A.A. Hyperelastic shear lag model // *Physical Mesomechanics*. 2025. **28** (3), 91–106; https://doi.org/10.55652/1683-805X_2025_28_3_91-106

Подписано в печать 2025 г. Заказ №1. Тираж 100 экз. Печ. л. 1,0

Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН.

681005, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1