

На правах рукописи



Фирсов Сергей Викторович

**ОДНОВРЕМЕННЫЙ УЧЁТ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛЗУЧЕСТИ
И ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В МАТЕРИАЛАХ, ОБЛАДАЮЩИХ
УПРУГИМИ, ВЯЗКИМИ И ПЛАСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**

Специальность: 1.1.8 – «Механика деформируемого твёрдого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Комсомольск-на-Амуре – 2021

Работа выполнена в Институте машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИМиМ ДВО РАН) Федерального государственного бюджетного учреждения науки Хабаровского Федерального исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской академии наук (ФГБУН ХФИЦ ДВО РАН).

Научный руководитель: **Буренин Анатолий Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, главный научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН ФГБУН Хабаровский Федеральный исследовательский центр ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре.

Официальные оппоненты: **Ревуженко Александр Филиппович**, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, заведующий лабораторией механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред, ФГБУН Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, г. Новосибирск.
Егорова Юлия Георгиевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика», ФГБОУ ВО Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре.

Ведущая организация: **ФГБУН Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.**

Защита диссертации состоится 10 февраля 2022 г. в 12:00 ч. на заседании диссертационного совета 24.2.316.03 при Комсомольском-на-Амуре государственном университете (ФГБОУ ВО «КНАГУ») по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27, корп. 3, ауд. 201/3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Комсомольского-на-Амуре государственного университета: <https://sovet.knastu.ru>

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, подписанные и заверенные печатью организации, просим направлять по указанному адресу на имя учёного секретаря диссертационного совета Григорьевой Анне Леонидовне и по электронной почте diss@knastu.ru

Автореферат разослан «__» декабря 2021г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент



А. Л. Григорьева

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Упругие свойства материала определяют консервативную составляющую процесса деформирования тела. За диссипативную часть изотермического процесса ответственны вязкие и пластические свойства материала. В соответствии с подходами неравновесной термодинамики упругие деформации называют обратимыми, а вязкие (деформации ползучести) и пластические (деформации пластического течения) одновременно называют необратимыми деформациями. Обратимые и необратимые деформации являются независимыми термодинамическими параметрами состояния в процессе деформирования. Для них, и только для них, записываются необходимые дифференциальные уравнения изменения (переноса), которые определяют данные термодинамические параметры состояния. В такой записи необратимые деформации не подразделяются на вязкие (деформации ползучести) и пластические (деформации течения). Именно в своей совокупности они задают единый термодинамический параметр процесса деформирования. Различие их связано с формулированием для них принципиально разных определяющих законов для скоростей их роста (или закон ползучести, или закон пластического течения). Но присутствует ещё одно важное для дальнейшего отличие. Если деформации ползучести производятся с самого начала процесса деформирования, то пластические деформации только при выходе напряжённых состояний на поверхность нагружения (текучести). Это приводит к тому, что продвигающимися поверхностями (упругопластическими границами) область деформирования разделяется на части, в которых производство необратимых деформаций происходит в соответствии разным определяющим законам. На таких поверхностях меняется механизм в производстве необратимых деформаций с вязкого (ползучесть) на пластический (течение) и наоборот при разгрузке. Установление закономерностей в подобных переменах на границах вязкопластических областей обретает значение фундаментальной задачи современной механики деформирования.

В настоящей работе такая задача рассматривается в процессе расчётов больших упруговязкопластических деформаций в продвижении материала по трубе с жёсткими стенками при воздействии изменяющегося перепада давления. Продвижение осуществляется за счёт возникающего пристеночного вязкопластического течения, тогда как в движущемся ядре наряду с обратимыми деформациями продолжают свой рост необратимые деформации в форме деформации ползучести.

Подобная задача характерна не только в случае больших деформаций. С такой же определённой она возникает и в задачах при малых деформациях. В качестве примера тому рассмотрена задача о необратимых деформациях материала вращающихся цилиндров и дисков (задача Ю. Н. Работнова). Также с ростом угловой скорости вращения необратимые деформации производятся за счёт вязких свойств материала в форме деформаций ползучести, но с достижением угловой скоростью некоторого значения зарождается и развивается область вязкопластического течения. Так снова встаёт задача о смене в механизмах производства

необратимых деформаций на границах пластических областей.

Полагаем, что изучение с обозначенной целью решений этих задач в их новой постановке является актуальным не только с общетеоретических позиций, но и для решения ряда технологических задач (формовка, обтяжка и др.) современного машиностроения.

Степень разработки темы. Обсуждение изменений в механизме производства необратимых деформаций, происходящих одновременно на границах областей пластического течения, началось сравнительно недавно (Бегун А. С., Бормотин К. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Прокудин А. Н.). К настоящему времени имеем несколько постановок и решений конкретных краевых задач теории больших деформаций, учитывающих подобные поверхностные изменения (Бегун А. С., Буренин А. А., Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О., Мурашкин Е. В., Прокудин А. Н., Панченко Г. Л.). В реферируемой работе с такими же изменениями постановочной части решаются классические задачи механики деформирования о продавливании упруговязкопластического материала по трубе и о необратимых деформациях в цилиндрах и дисках, вращающихся с переменной угловой скоростью.

В рамках жёстковязкопластического анализа прямолинейные движения изучались многими авторами. Из отечественных это прежде всего В. П. Мясников, а также Георгиевский Д. В., Климов Д. М., Магомедов О. Б. Мирзаджанзаде А. Х., Мосолов П. П., Петров А. Г., Победра Б. Е., Резунов А. В., Чернышов А. Д. Добавив учёт упругой деформируемости материала застойных зон и продвигающихся ядер, получившиеся таким способом задачи теории больших деформаций решали А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. Л. Мазелис, Г. Л. Панченко. В соответствии с целью настоящей работы в задаче о прямолинейном движении материала по трубе учитываем не только упругие деформации в ядре, но и деформации ползучести.

Теоретическую и практическую значимость изучения процесса накопления необратимых деформаций во вращающихся дисках и цилиндрах подчёркивал Ю. Н. Работнов. С различных позиций данной проблемной задачи касались Александров С. Е., Артёмов М. А., Бегун А. С., Ломакин Е. В., Лурье А. И., Прокудин А. Н., Eraslan A. N., Gamer U., Linder T., Mack W., Varga I. Здесь дополняем постановочные части исследуемых задач наличием изменяющихся деформаций ползучести во время, предваряющее вязкопластическое течение, и всегда вне области течения.

Цель и задачи диссертационного исследования. Целью диссертационной работы является: Примером решения задач о прямолинейном движении материала по трубе и необратимом деформировании материала, составляющего вращающиеся цилиндры и диски, установить степень взаимодействия необратимых деформаций ползучести и пластического течения в процессе деформирования и указать последствия такого взаимовлияния на параметры процесса в целом.

Для достижения обозначенной цели необходимо разрешить следующие **задачи:**

1. Записать системы дифференциальных или интегродифференциальных уравнений, ответственных за протекание процесса деформирования материала в областях вязкопластического течения и вне таких областей. При этом следует учитывать неизменные необратимые деформации, накопленные на предыдущих стадиях деформирования.
2. Осуществить постановки квазистатических краевых задач теории деформирования с указанием порядка и закономерности перемены в механизмах производства необратимых деформаций на продвигающихся упругопластических границах.
3. Получить численно-аналитические решения рассматриваемых задач в упрощённой постановке, ограничиваясь только процессом ползучести и (или) только упруговязкопластическим процессом. Такие решения совершенно необходимы для постоянного сравнения с результатами расчётов и для тестирования создаваемых алгоритмов и программ расчётов.
4. Создать ориентированный программный модуль расчётов, основанных на сеточных конечно-разностных алгоритмах.
5. Провести серию расчётов об изменении деформаций и напряжений в задаче о проталкивании материала по трубе, указать время и место зарождения вязкопластического течения, его развития и исчезновения в течении всего процесса от начала до полной разгрузки и последующей релаксации напряжений.
6. Рассчитать процесс производства необратимых деформаций в материале вращающихся с переменной угловой скоростью дисков и цилиндров с учётом ползучести материала и последующего его вязкопластического течения с возникновением области повторного пластического течения при разгрузке и релаксацией напряжений после остановки вращения.

Научная новизна результатов диссертации предопределяется поставленной целью. Удалось разрешить новые по постановкам и методам решения задачи. Одна из таких задач относится к теории больших деформаций, где продвижение материала по трубе рассчитывается в условиях его пристеночного вязкопластического течения. Впервые принимается, что до момента начала течения в материале наряду с упругими деформациями уже присутствуют накопленные необратимые деформации в форме деформаций ползучести. В условиях продолжающегося роста перепада давления последние продолжают свой рост вне развивающейся области вязкопластического течения. В пластической области для последующего изменения деформаций ползучести исследуются два крайних случая: в-первом (параллельном) принимается продолжающийся их рост согласно выбранному закону ползучести; во-втором (последовательном) на границах пластических областей деформации ползучести выступают только в качестве начальных условий для

последующего роста необратимых деформаций в форме деформаций вязкопластического течения.

Подобные постановки задач используются при изучении необратимого деформирования материала вращающихся с переменной угловой скоростью цилиндров. Рассмотренные случаи плоских деформаций и обобщённых плоских деформируемых состояний. Для дисков принимается условие плоских напряжённых состояний.

Проводятся сравнения результатов расчётов для отмеченных крайних случаев в постановках задач, а также со случаем упруговязкопластического деформирования.

Основные, выносимые на защиту, научные результаты состоят в следующем:

- проведена постановка и получено решение краевой задачи теории больших деформаций о продавливании упруговязкопластического материала по круглой трубе с жёсткими стенками посредством изменяющегося перепада давления. Продвижение осуществляется за счёт пристеночного вязкопластического течения. Движущееся ядро материала деформируется обратимо и необратимо в условиях ползучести;
- рассчитаны изменяющиеся деформации и напряжения в материале, заполняющем трубу, при росте перепада давления, при постоянном последующем и убывающем при разгрузке с вычислением остаточных деформаций и напряжений, включая процесс релаксации напряжений после снятия перепада давления и полной остановке движения;
- указаны условия возникновения области вязкопластического течения, их развития и схлопывания, закономерности продвижения упругопластических границ как при активном процессе, так и при разгрузке;
- предложены новые постановки задач в малых деформациях, в рамках которых впервые получены численные и численно-аналитические решения ряда задач механики деформирования о переменном вращении цилиндров. Рассмотрены необратимые деформации во вращающихся сплошном и полом цилиндре, в цилиндре с жёстким центральным включением, с упрочнёнными боковыми поверхностями, деформирующиеся в условиях плоских деформаций (с закреплёнными торцами) или в условиях обобщённых плоских деформаций (со свободными торцами);
- расчётами установлена эволюция зарождения, развития и затухания разных областей вязкопластического течения, включая случаи полного перехода материала цилиндров в состояния вязкопластического течения. При постоянной угловой скорости вращения расчётами установлена возможность существования установившегося вязкопластического течения материала вращающегося цилиндра;

- впервые получено точное решение задачи об установившемся вязкопластическом течении материала цилиндра с зафиксированными торцами при его вращении с постоянной угловой скоростью, для цилиндра со свободными торцами такая задача сведена к разрешению нелинейной алгебраической системы уравнений. Эти решения служат необходимому тестированию программ расчётов в общем случае;
- проведёнными расчётами указаны места в материале и моменты времени, где и когда при торможении вращений возникают и развиваются повторные (обратные) вязкопластические течения;
- осуществлены новые постановки задач о производстве деформаций ползучести и вязкопластического течения в материале диска за счёт его переменного вращения. Рассмотрены необратимые деформации во вращающихся сплошном и полом диске, в двухслойном диске с жёстким центральным включением, в кольце с упрочнёнными боковыми поверхностями;
- разработан сеточный конечно-разностный алгоритм расчётов, на основании которого созданы и оттестированы программы расчётов и в решаемых задачах необходимые расчёты проведены.

Теоретическая значимость результатов диссертационной работы. Одномоментные изменения в механизме производства необратимых деформаций на границах области пластического течения остаётся недостаточно изученной задачей современной фундаментальной механики деформируемых тел. В задачах, решаемых в диссертации, этой фундаментальной проблеме уделено должное внимание. Результаты работы несут в себе также несколько важных общетеоретических заключений: развитие вязкопластического течения от обеих боковых поверхностей цилиндра, возникновение области разгрузки внутри области течения, установившееся вязкопластическое течение и др.

Практическая значимость результатов диссертационного исследования связана с технологическими операциями формовки и обтяжки элементов конструкций, когда по свойствам материала недопустимы высокие скорости деформирования их в условиях вязкопластического течения. Однако избавиться совершенно от последних не всегда возможно, поэтому выбираются режимы, в которых области вязкопластических течений развиваются незначительно. Следовательно закономерности возникновения и развития подобных областей течения оказываются важным знанием для выбора технологических режимов.

Достоверность полученных результатов диссертации обеспечивается классическими подходами механики деформируемых материалов, геометрически непротиворечивой кинематикой процесса деформирования, термодинамической прозрачностью модели больших деформаций, корректностью постановок краевых задач теории, выбором общепризнанных численных схем расчётов и тщательным тестированием разрабатываемых программ.

Апробация работы. Основные результаты работы обсуждались на следующих научных конференциях:

- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Казань, 2015);
- XLIII Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (г. Москва, 2017);
- XXVII Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов (г. Пермь, 2018);
- XII Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (г. Алушта, 2018);
- V Дальневосточная конференция с международным участием «Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении» (г. Комсомольск-на-Амуре, 2018);
- Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2020», (г. Казань, 2020);

Публикации. Основные результаты исследований и содержание диссертационной работы опубликованы в 9 печатных работах, из них 6 рекомендованы ВАК РФ для публикации основных научных результатов диссертаций, 3 — в изданиях, индексируемых в Web of Science и Scopus.

Личный вклад автора. Все аналитические выкладки и численные результаты, составившие предмет диссертации, получены автором лично. Соавторы публикаций (А. А. Буренин, А. Н. Прокудин, Л. В. Ковтанюк) участвовали в выборе темы, в постановках решаемых задач и обсуждении результатов авторских расчётов. Автор выражает благодарность соавторам своих публикаций за внимание к работе, всегда уместные замечания, ценные советы и пожелания.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 244 источника. Работа изложена на 242 страницах, содержит 56 рисунков, 2 таблицы.

Основное содержание работы

Во **введении** к основному тексту диссертации на основе проведённого обзора литературы формулируется цель диссертационной работы, ставятся задачи предпринимаемого диссертационного исследования, кратко по главам указывается содержание текста диссертации.

В **первой** вводной главе диссертации вводятся основные соотношения математической модели, используемые далее в расчётах конкретных краевых задач как

в теории больших деформаций материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами, так и в случае, когда эти деформации возможно положить малыми.

В §1.1 выписываются соотношения принимаемой кинематики больших деформаций. Полагается, что в классическом случае изотермического процесса деформирования термодинамическими параметрами состояния деформируемого материала необходимо принять обратимые e_{ij} и необратимые p_{ij} деформации, вычисляемые в системе прямоугольных декартовых пространственных координат Эйлера. Согласно формализму термодинамики для таких параметров состояния записываются дифференциальные уравнения их изменения (переноса)

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2} (e_{ik} (\varepsilon_{kj} - \gamma_{kj} - z_{kj}) + (\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik}) e_{kj}), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik} \gamma_{kj} - \gamma_{ki} p_{kj}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ε_{ij} — компоненты тензоров деформаций скорости; γ_{ij} — компоненты тензора скорости изменения необратимых деформаций p_{ij} ; t — время. Уравнения переноса (1) потребовали введения объективной производной, записываемой для некоторого тензора с компонентами m_{ij} в виде

$$\begin{aligned} \frac{Dm_{ij}}{Dt} &= \frac{dm_{ij}}{dt} + m_{ik} \varphi_{kj} + \varphi_{ki} m_{kj}, \\ \varphi_{kj} &= w_{kj} + z_{kj}, \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,k} v_k, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad w_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}), \\ d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj} - e_{ik} p_{kj} - p_{ik} e_{kj} + e_{ik} p_{km} e_{mj} \end{aligned}$$

Эти соотношения являются следствием принимаемого определения (1) для обратимых и необратимых деформаций. В них d_{ij} — компоненты тензора полных деформаций Альманси. Существенно нелинейная часть тензора вращений φ_{ij} , то есть z_{ij} , здесь не выписывается из-за её громоздкости; в тексте диссертации она приведена. Через u_i и v_i обозначены компоненты векторов перемещений и скорости перемещений. Заметим, что в качестве меры обратимых деформаций в (1) выступает главная линейная часть тензора упругих деформаций $e_{ij} - 1/2 e_{ik} e_{kj} = s_{ij}$.

§1.2 посвящён записи определяющих законов для обратимых и необратимых деформаций. Закон сохранения энергии сводится к формуле Мурнагана и уравнению баланса энтропии

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}), \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} (\delta_{kj} - e_{kj}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -I_{k,k} - T^{-2} q_k T_{,k} + T^{-1} \sigma_{ij} \gamma_{ji}. \quad (3)$$

В (2) и (3) ρ — плотность материала; T — температура; $W = \rho_0^{-1} w(e_{ij}, T)$ — упругий потенциал, где $w(e_{ij}, T)$ — плотность распределения свободной энергии; $I_k = \rho s v_k + T^{-1} q_k$ — компоненты вектора потока энтропии s ; q_k — компоненты вектора потока тепла; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; δ_{ij} — символ Кронекера. Вторая зависимость в (2), где p — неизвестно, используется в случае принимаемой несжимаемости материала. В нашем случае изотермичности процесса деформирования единственным источником энтропии является необратимое деформирование (последний слагаемый правой части (3)). Следуя законам термодинамики необходимо принять определяющий закон $\gamma_{ij} = \Psi(\sigma_{ij})$, обеспечивающий положительность данного источника.

Конкретизации определяющих законов посвящён §1.3. В расчётах полагалось, что для несжимаемого материала при его больших деформациях (глава 2) можно принять

$$W = -2\mu I_1 - \mu I_2 + b I_1^2 - (b - \mu) I_1 I_2 - \zeta I_1^3. \quad (4)$$

Здесь μ — модуль сдвига; b, ζ — упругие модули более высокого порядка; $I_1 = s_{kk}$; $I_2 = s_{ij} s_{ji}$. В случае малых деформаций связь напряжений с обратимыми деформациями принималась в форме соотношений закона Гука, следующих из первых зависимостей (2).

Для необратимых деформаций, неразделённых на вязкие (ползучесть) и пластические (течение), в расчётах использовались закон ползучести Нортона

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} = B \Sigma^n, \quad (5)$$

$$\Sigma = \sqrt{\frac{3}{2} ((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2)}, \quad \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

где ε_{ij}^v — скорости деформаций ползучести; B и n — постоянные степенного закона ползучести Нортона, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения.

Для скоростей деформации пластического течения ε_{ij}^p принималось согласно ассоциированному закону

$$\varepsilon_{ij}^p = \phi \frac{\partial f(\sigma_{ij}, \sigma_0)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \phi > 0, \quad \varepsilon_{ij}^p = \gamma_{ij} - \varepsilon_{ij}^{v_0}. \quad (6)$$

Здесь σ_0 — предел текучести. В качестве поверхностей текучести использовались в расчётах необходимые обобщения условий Треска–Сен-Венана и Мизеса

$$f(\sigma_{ij}) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_0 - 2\eta \max |\varepsilon_k^p|, \quad (7)$$

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{\frac{3}{2} (\tau_{ij} - \eta \varepsilon_{ij}^p) (\tau_{ij} - \eta \varepsilon_{ij}^p)} - \sigma_0.$$

В (7) ε_k^p — главные значения тензора скоростей пластических деформаций

(6); τ_{ij} , ϵ_{ij}^p — компоненты девиаторов тензоров σ_{ij} и ϵ_{ij}^p ; η — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению; $\epsilon_{ij}^{v_0}$ — скорости производства необратимых деформаций в процессе ползучести, являющиеся начальными значениями для изменения скоростей необратимых деформаций в новых условиях пластического течения, то есть $\epsilon_{ij}^{v_0}(x_1, x_2, x_3) = \epsilon_{ij}^v(x_1, x_2, x_3, t)$, где параметр времени t фиксируется временем прихода в данную точку материала упругопластической границы. Данная скорость деформации разная для различных точек материала. В условиях разгружающей упругопластической границы (двигающейся в область течения) скорости деформаций ползучести и пластичности меняются местами.

В последнем §1.4 первой главы устанавливается основная задача проводимого исследования. Предполагается большинство расчётов произвести в рамках двух крайних случаев. В одном из них считается, что всё производство необратимых деформаций в области пластического течения осуществляется за счёт механизма пластичности, в то время как вязкий механизм (ползучесть) влияет на течение только за счёт учёта деформаций и скоростей деформаций ползучести в качестве начальных условий их дальнейшего роста в пластической области. Одномоментная смена в механизме производства необратимых деформаций происходит на упруговязкопластической границе, продвигающейся в область вязкоупругого деформирования, развивая область пластического течения. В последней области справедливы зависимости (6) и (7). На упругопластической границе, продвигающейся в пластическую область, смена в таком механизме происходит в обратном порядке. Этот случай называем «последовательным». Второй случай («параллельный») предлагает, что вязкий механизм производства необратимых деформаций (ползучесть) продолжает своё действие и в пластической области. Считаем, что

$$\gamma_{ij} = \epsilon_{ij}^p + \epsilon_{ij}^v. \quad (8)$$

Скорость деформаций ползучести ϵ_{ij}^v и пластичности ϵ_{ij}^p подчинены своим определяющим законам. В расчётах в качестве таких законов принимались закон ползучести Нортона (5) и ассоциированный с поверхностями нагружения (7) закон пластического течения (6).

Во второй главе диссертации, в рамках выше представленной математической модели, решается задача о конечном продвижении материала в цилиндрической трубе за счёт меняющегося перепада давления: $\partial p / \partial z = \psi(t)$. В цилиндрической системе координат r, φ, z записываются (§2.1) кинематические зависимости, продиктованные геометрическими ограничениями постановочной части задачи

$$\begin{aligned} u_z = u(r, t), \quad v_z = v(r, t), \quad \epsilon_{rz} = \epsilon_{zr} = \frac{1}{2}v_{,r}, \quad w_{zr} = -w_{rz} = \frac{1}{2}v_{,r}, \\ d_{rr} = -\frac{1}{2}u_{,r}^2, \quad d_{rz} = d_{zr} = \frac{1}{2}u_{,r}, \quad \varphi_{rz} = -\varphi_{zr} = -\frac{1}{4}(2 + e_{rr} - e_{zz})v_{,r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Иные компоненты тензоров деформации Альманси, скоростей деформации Эйлера и тензора вращений равны нулю.

Вводятся безразмерные постоянные и переменные задачи: $\alpha = b\sigma_0^{-1}$; $\beta = \mu\sigma_0^{-1}$; $\xi = rR^{-1}$; $\tilde{z} = zR^{-1}$; $\tau = tt^{*-1}$; $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}\sigma_0^{-1}$; $\tilde{\psi}(\tau) = R\sigma_0^{-1}\psi(t)$. Здесь t^* характерное время, в качестве которого принимаем время действия перепада давления. Далее знак « $\sim$ » над безразмерными переменными опускаем, так как размерные далее в тексте не встречаются. Переменный перепад давления принимаем в форме

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi_{max} \left(1 - \cos\left(\pi\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right) & \text{при } 0 \leq \tau < \tau_1, \\ \psi_{max} & \text{при } \tau_1 \leq \tau < \tau_2, \\ \frac{1}{2}\psi_{max} \left(1 + \cos\left(\pi\frac{\tau-\tau_2}{\tau_3-\tau_2}\right)\right) & \text{при } \tau_2 \leq \tau < \tau_3, \\ 0 & \text{при } \tau_3 \leq \tau \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Если, следуя (2) и (4), записать зависимости напряжений от обратимых деформаций, подставить такие зависимости в уравнение равновесия и последнее проинтегрировать, то получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} = 2\beta e_{rz} = -\frac{1}{2}\xi\psi(\tau), \quad p(\xi, z, \tau) = -\psi(\tau)z + F(\xi, \tau)\sigma_0^{-1}, \\ F_{,\xi} = (13\beta - 8\alpha) \frac{\xi\psi^2}{16\beta^2} + 2\beta(e_{rr} - e_{\varphi\varphi})\xi^{-1} + \\ + 2(\beta + \alpha)e_{rr,\xi} + 2\alpha(e_{\varphi\varphi,\xi} + e_{zz,\xi}). \end{aligned} \quad (11)$$

Именно последнее дифференциальное уравнение включается в систему уравнений, согласно которой проводятся окончательные численные расчёты. Следствием уравнений переноса в рассматриваемом случае являются дифференциальные зависимости: для необратимых деформаций

$$\begin{aligned} \frac{dp_{rr}}{d\tau} &= \gamma_{rr}(1 - 2p_{rr}) - \frac{1}{2}p_{rz}(4\gamma_{rz} + (2 + e_{rr} - e_{zz})v_{,\xi}), \\ \frac{dp_{\varphi\varphi}}{d\tau} &= \gamma_{\varphi\varphi}(1 - 2p_{\varphi\varphi}), \\ \frac{dp_{zz}}{d\tau} &= \gamma_{zz}(1 - 2p_{zz}) - \frac{1}{2}p_{rz}(4\gamma_{rz} - (2 + e_{rr} - e_{zz})v_{,\xi}), \\ \frac{dp_{rz}}{d\tau} &= \gamma_{rz}(1 - p_{rr} - p_{zz}) - p_{rz}(\gamma_{rr} + \gamma_{zz}) + \\ &+ \frac{1}{4}(2 + e_{rr} - e_{zz})(p_{rr} - p_{zz})v_{,\xi} \end{aligned} \quad (12)$$

и для обратимых деформаций

$$\begin{aligned} \frac{de_{rr}}{d\tau} &= -\gamma_{rr}(1 - e_{rr}) + e_{rz}\left(\gamma_{rz} - \frac{1}{2}(3 + e_{rr} - e_{zz})v_{,\xi}\right), \\ \frac{de_{\varphi\varphi}}{d\tau} &= -\gamma_{\varphi\varphi}(1 - e_{\varphi\varphi}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{de_{zz}}{d\tau} &= -\gamma_{zz}(1 - e_{zz}) + e_{rz} \left(\gamma_{rz} + \frac{1}{2}(1 + e_{rr} - e_{zz})v_{,\xi} \right), \\
\frac{de_{rz}}{d\tau} &= -\frac{1}{2}\gamma_{rz}(2 - e_{rr} - e_{zz}) + \frac{1}{2}e_{rz}(\gamma_{rr} + \gamma_{zz}) + \\
&\quad + \frac{1}{8}v_{,\xi}(4 + 2e_{rr} + 3e_{rr}^2 - 4e_{rr}e_{zz} - 6e_{zz} + e_{zz}^2).
\end{aligned} \tag{13}$$

Переменные $v_{,\xi}$ и e_{rz} можно исключить из приведённых уравнений, если учесть первую зависимость из (11) и последнюю из (13).

Продвигающейся упруговязкопластической границей $\xi = \xi_n(\tau)$ деформируемый материал разделяется в общем случае на две части. В части $\xi_n \leq \xi \leq 1$ осуществляется пристеночное вязкопластическое течение, в ядре $0 \leq \xi \leq \xi_n$ продолжается процесс ползучести. Скорости необратимых деформаций γ_{rr} , $\gamma_{\varphi\varphi}$, γ_{zz} , γ_{rz} являются в таком случае либо скоростями деформации ползучести в движущемся ядре $0 \leq \xi \leq \xi_n$, либо их суммой (8) в области пристеночного вязкопластического течения. Тогда в материале продвигающегося ядра, следуя принятому закону ползучести, имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}^v &= \chi \Sigma^{n-1} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^v = \chi \Sigma^{n-1} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \\
\varepsilon_{zz}^v &= \chi \Sigma^{n-1} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), \quad \varepsilon_{rz}^v = 3\chi \Sigma^{n-1} 2\sigma_{rz}, \\
\Sigma &= \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz} + 3\sigma_{rz}^2}, \quad \chi = B\sigma_0^n t^*.
\end{aligned} \tag{14}$$

В материале пристеночной области

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}^p &= \frac{1}{2\zeta} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{1}{2\zeta} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \\
\varepsilon_{zz}^p &= \frac{1}{2\zeta} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), \quad \varepsilon_{rz}^p = \frac{3}{2\zeta} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} \sigma_{rz}, \quad \zeta = \frac{\eta}{\sigma_0 t^*}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Системы уравнений (11)–(15) разрешалась численно. Результаты проверялись сравнением с результатами расчётов упруговязкопластической задачи. С целью сравнения полученных численных результатов, в которых условия течения принимались в форме, обобщающей условия Треска–Сен-Венана (первое из соотношений (7)), рассматривался случай кинематического упрочнения.

§2.2 посвящён организации численных расчётов. Расчётная область разбивалась сеткой. Значения параметров задачи в узлах сетки представлялись в качестве основных искомым величин. Производные представлялись конечными разностями, включая пристеночную область и область окрестностей продвигающейся упруговязкопластической границы.

В **§2.3** анализируются результаты проведённых вычислений. Упругим решением устанавливается, что вязкопластическое течение начинается на поверхности трубы $\xi = 1$. Учёт деформаций ползучести не меняет данный факт, только течение начинается по времени позже, при большем перепаде давления. Для

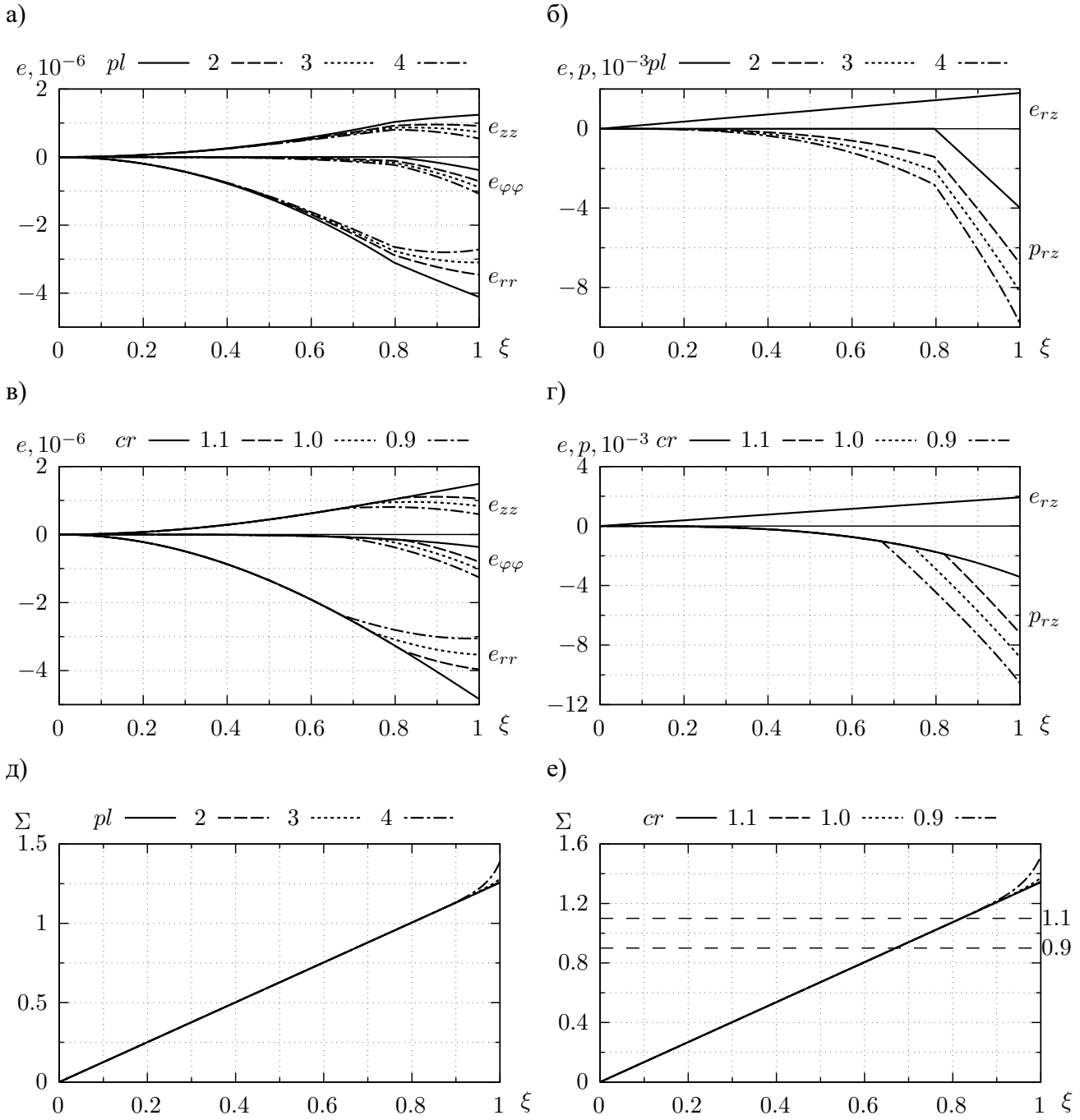


Рисунок 1 – НДС среды при разной интенсивности ползучести: обратимые деформации при $\tau = 0,1$ (а); касательные компоненты деформаций при $\tau = \tau_2$ (б); интенсивности напряжений при $\tau = \tau_2$ (д).

НДС среды при разной интенсивности пластичности: обратимые деформации при $\tau = 0,1$ (в); касательные компоненты деформаций при $\tau = \tau_2$ (г); интенсивности напряжений при $\tau = \tau_2$ (е).

сравнения в расчётах включались случаи только вязкоупругого деформирования (ползучесть) (случай *cr* на рис. 1) или упруговязкопластический случай (случай *pl* на рис. 1). С ними сравнивались результаты расчётов при совместном учёте двух механизмов накопления необратимых деформаций при параллельном (8) их воздействию (рис. 1). Значения безразмерных постоянных принимались следующими: $\alpha = -201$; $\beta = 208$; $\chi = 2 \cdot 10^{-3}$; $n = 3$; $\zeta = 30$. Влияние интенсивности процесса ползучести связывалось с изменениями параметра χ : принималось, что $\chi = 2 \cdot 10^{-3}$, $\chi = 3 \cdot 10^{-3}$ и $\chi = 4 \cdot 10^{-3}$ (случаи 2, 3 и 4 на рис. 1). Влияние интенсивности пластического течения связывалось с изменением в пределе текучести. В зависимостях (15) вместо единицы в числителе дробей будем использовать параметр k , что означает выполнение условий течения ранее или позже достижения максимума в октаэдрическом напряжении. Далее в расчётах полагалось $k = 0,9$; $k = 1$ и $k = 1,1$ (соответственно 0.9, 1.0 и 1.1 на рис. 1).

Графические зависимости (рис. 1) показывают, что повышение интенсивности процессов ползучести и пластичности приводит к качественно одинаковым изменениям в деформациях и напряжениях в пристеночной области вязкопластического течения. Однако варьирование в пластических свойствах материала влияет только на изменения напряжённно-деформированных состояний в области течения, в то время как изменение параметров ползучести в законе Нортона влияет на такие изменения во всём деформируемом материале. Увеличение интенсивности и ползучести, и пластичности практически не сказывается на размере области вязкопластического течения, но с этим увеличением растёт интенсивность напряжений Σ в условиях течения.

В третьей главе диссертации рассмотрены процессы ползучести и пластического течения в материалах цилиндров, вращающихся вокруг неподвижной оси с переменной угловой скоростью $\omega = \omega(t)$. Необратимое деформирования связывается с действием центробежных сил инерции. Считается, что вращающийся цилиндр может быть сплошным радиуса R_2 , либо в нём присутствует полость или жёсткое включение, границей которого является поверхность $r = R_1$ в цилиндрической системе координат.

Постановочные ограничения данной задачи и принятия положения о малости деформаций позволяет записать

$$\begin{aligned} d_{rr} &= e_{rr} + p_{rr} = u_{r,r}, & d_{\varphi\varphi} &= e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = r^{-1}u_r, & d_{zz} &= e_{zz} + p_{zz}, \\ \sigma_{rr} &= \lambda e + 2\mu e_{rr}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda e + 2\mu e_{\varphi\varphi}, & \sigma_{zz} &= \lambda e + 2\mu e_{zz}, \\ u_r &= u_r(r, t), & u_\varphi &= u_z = 0, & e &= e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{zz}. \end{aligned} \quad (16)$$

Случай плоских деформированных состояний, когда $d_{zz} = 0$, рассматривается в §3.1. Если в уравнениях равновесия пренебречь угловым ускорением, то для $u = R_2^{-1}u_r$ следует дифференциальное уравнение

$$u_{,\xi\xi} + \xi^{-1}u_{,\xi} - \xi^{-2}u = \xi^{-1} \frac{2\beta}{\alpha + 2\beta} (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) +$$

$$+p_{rr,\xi} + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (p_{\varphi\varphi,\xi} + p_{zz,\xi}) - \frac{\xi\psi^2}{\alpha + 2\beta}, \quad (17)$$

Здесь введены безразмерные переменные: безразмерная пространственная координата $\xi = R_2^{-1}r \in [\xi_0 = R_1 R_2^{-1}; 1]$; безразмерные параметры Ламе $\alpha = \lambda\sigma_0^{-1}$, $\beta = \mu\sigma_0^{-1}$; параметр нагружения $\psi^2(\tau) = \rho\sigma_0^{-1}R_2^2\omega^2(t)$; $\tau = t \cdot t^{*-1}$, где t^* как и ранее полное время процесса от его начала до полного завершения. Также как и ранее, функцию нагружения (безразмерную угловую скорость вращения $\psi(\tau)$) будем задавать в форме (10), где снова появляются задаваемые параметры задачи τ_1 , τ_2 и τ_3 . Граничные условия следует задавать на боковых поверхностях цилиндра. Так, для сплошного цилиндра $u(0, \tau) = 0$, $\sigma_{rr}(1, \tau) = 0$. Когда цилиндр имеет внутреннюю ($\xi = \xi_0$) полость или жёсткое включение возможно положить соответственно $\sigma_{rr}(\xi_0, \tau) = 0$ или $u(\xi_0, \tau) = 0$. Аналогично для боковой поверхности цилиндра ($\xi = 1$) возможно считать $u(1, \tau) = 0$ (закреплённая поверхность) или $\sigma_{rr}(1, \tau) = 0$ (свободная поверхность). В работе рассмотрен некоторый набор подобных краевых условий и приведены решения соответствующих задач с подробными числовыми результатами.

Для изменяющихся необратимых деформаций $p_{rr}(\xi, \tau)$, $p_{\varphi\varphi}(\xi, \tau)$, $p_{zz}(\xi, \tau)$ в (17) следует постулировать определяющие законы. В качестве таких законов использовались, как и выше, степенной закон ползучести Нортон (14) и ассоциированный с обобщённой поверхностью Мизеса закон вязкопластического течения (15). На рис. 2 представлена последовательная схема возникновения и исчезновения областей вязкопластического течения для задачи вращающегося с переменной угловой скоростью двухслойного цилиндра (с жёстким включением), когда $u(\xi_0, \tau) = 0$ и $\sigma_{rr}(1, \tau) = 0$, при $\psi_{max} = 5,4$. Время на рисунке протекает сверху вниз; продвижение упруговязкопластических границ указано стрелками; в левой части приведены схемы развития областей пластического течения при росте нагрузки, в правой части приводятся схемы для повторного пластического течения при торможении вращения. Заметим, что области течения могут развиваться и от жёсткой поверхности $\xi = \xi_0$, и от свободной поверхности $\xi = 1$ вращающегося цилиндра.

В этом же §3.1 для целей тестирования программ расчётов записано известное точное решение упругой задачи и точное, специально полученное решение об установившемся вязкопластическом течении, при котором функция нагружения становится $\psi = \psi_{max} — const$ и весь материал цилиндра переходит в вязкопластическое состояние.

Отличие §3.2 от предыдущего связано с тем, что торцы цилиндра полагаются свободными и $d_{zz} = const$ отлично от нуля. Такой случай называют обобщённой плоской деформацией. Для нахождения d_{zz} в этом случае вводится ограничение на осевые силы на торцах. Это усложняет вычисления. К примеру не удаётся получить точное решение об установившемся вязкопластическом течении. Его решение сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений.

Следующий §3.3 полностью посвящён представлению результатов расчётов

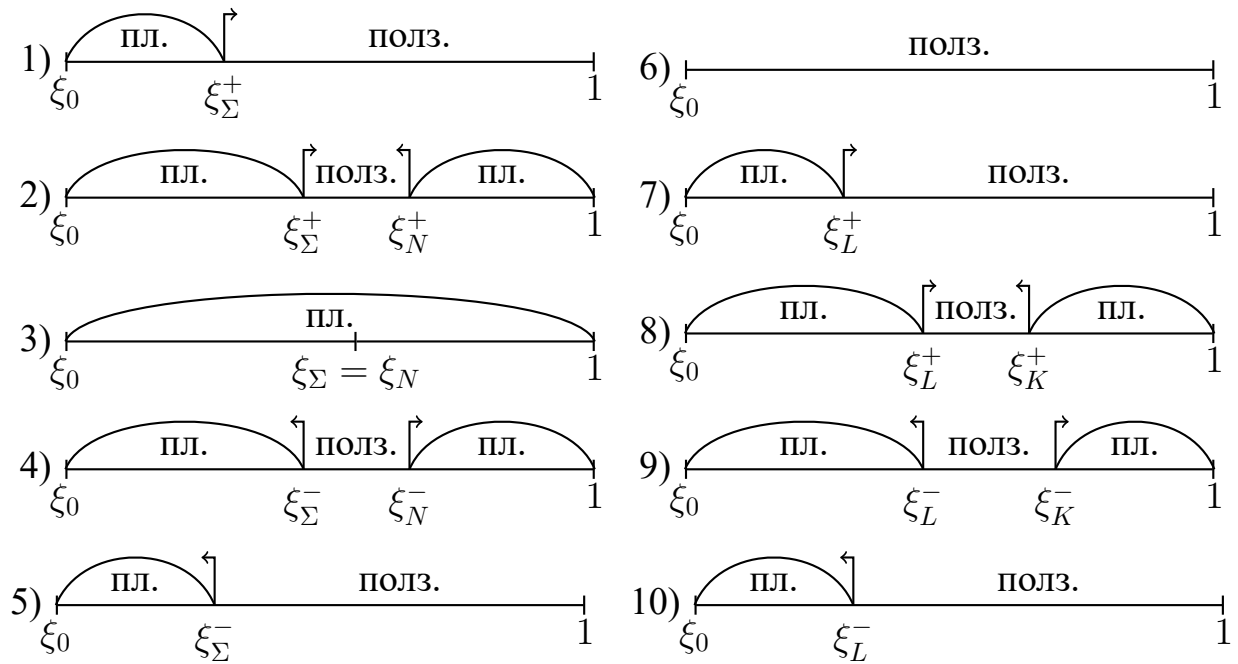


Рисунок 2 – Возникновение и исчезновение областей вязкопластического течения для двухслойного вала с зафиксированными торцами.

и их анализу. Как и ранее рассматривались два случая в изменениях механизмов производства необратимых деформаций: параллельный и последовательный. Замечается, что при последовательной смене в механизме производства необратимых деформаций возможно возникновение разрывов на упругопластических границах при торможении последних и смены их продвижения на противоположное. При параллельном подходе таких разрывов не наблюдалось.

Результаты расчётов достаточно полно представлены в тексте диссертации. Ограниченность объёма текста автореферата заставляет представить только их малую часть. Остановимся на следующем задании параметров задачи: $\xi_0 = 0,2$; $\alpha = 8031,4$; $\beta = 2536,2$; $\chi = 1,8 \cdot 10^{-3}$; $n = 3$; $\zeta = 1$; $\tau_1 = 0,015$; $\tau_2 = 0,965$; $\tau_3 = 0,98$. Таблицей 1 указываются значения функции нагружения (безразмерной угловой скорости ψ), при которых впервые возникает пластическое течение при разных граничных условиях.

Таблица 1: Значение нагрузки $\psi(\tau)$ необходимое для начала пластического течения в цилиндрах.

Задача	Граничные условия		Зафиксированные торцы	Свободные торцы
	Внутренняя	Боковая		
1. Сплошной вал	$u = 0$	$\sigma_{rr} = 0$	3,03746	1,83067
2. Полый вал	$\sigma_{rr} = 0$	$u = 0$	1,89495	1,81835
3. Труба	$\sigma_{rr} = 0$	$\sigma_{rr} = 0$	1,12291	1,089
4. Двухслойный вал	$u = 0$	$\sigma_{rr} = 0$	2,19789	1,60874
5. Зажатый вал	$u = 0$	$u = 0$	3,28084	3,28084

Как и во второй главе, для сравнения рассматривались случаи только вязкоупругого (ползучесть) или упруговязкопластического (течение) деформирования (здесь не приводятся). С ними сравнивались результаты расчётов при совместном учёте двух механизмов накопления необратимых деформаций. Интенсивность процесса ползучести здесь, в отличие от второй главы, задавалась с помощью изменения постоянной t^* , что в свою очередь влияло на параметр ползучести χ . Условно считалось, что: $t^* = 1$ минута, $t^* = 10$ минут, $t^* = 1$ час и $t^* = 10$ часов (случаи $1m$, $10m$, $1h$ и $10h$ на рис. 3). Но это также изменяло параметр вязкого сопротивления пластическому течению ζ , из-за чего при малых значениях t^* скорости пластического течения были малы и перераспределение напряжений происходило значительно медленней. В качестве исходного (при $\chi = 1,8 \cdot 10^{-3}$ и $\zeta = 1$) рассматривался случай $1h$, в остальных случаях значение параметров χ и ζ умножались или делились на соответствующий коэффициент. Интенсивность пластического течения, как и ранее, связывалась с изменением предела текучести. Для этого использовался параметр k , введённый аналогичным образом. Полагалось $k = 0,8$; $k = 0,9$; $k = 1,1$; $k = 1,2$ (соответственно 0.8, ..., 1.2 на рис. 3).

Здесь приведём краткие результаты (рис. 3) для двух наиболее разных случаев: вращения двухслойного вала ($u(\xi_0, \tau) = 0$; $\sigma_{rr}(1, \tau) = 0$) и трубы ($\sigma_{rr}(\xi_0, \tau) = \sigma_{rr}(1, \tau) = 0$) с зафиксированными торцами. В первом случае ползучесть приводит к значительной релаксации напряжений, сопровождающейся относительно малыми изменениями в необратимых деформациях. В связи с этим, к концу временного промежутка $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ (в конце продолжительной стадии выдержки нагрузки на её максимальном значении $\psi(\tau) = \psi_{max}$), влияние ползучести на напряжения оказывается настолько сильным, что даже при различных интенсивностях пластического течения, напряжения принимают практически одинаковые значения. Также вязкопластическое течение оказывает влияние на распределение напряжений только в области пластического течения.

В случае вращения трубы получаем, что ползучесть приводит к перераспределению напряжений. Причем, при сравнении со случаем деформирования упругопластического материала, можно видеть, что ползучесть способствует поддержанию напряжений немного выше уровня $\Sigma = k$ в области пластического течения, в связи с чем пластическое течение, несмотря на то, что его область и сокращается из-за ползучести, продолжается в материале трубы вплоть до начала стадии уменьшения скорости вращения ($\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3$). Это хорошо видно из графиков на рис. 3. При различной интенсивности пластического течения в данной задаче происходит перераспределение напряжений не только в пределах области пластического течения, но и в области вязко-упругого деформирования. Происходит перераспределение напряжений из пластической области и повышение уровня напряжений в оставшейся области. Как ползучесть, так и пластичность приводят к накоплению значительных необратимых деформаций, в связи с чем из рассмотрения был исключён случай $10h$.

При других граничных условиях, а также в задачах со свободными торца-

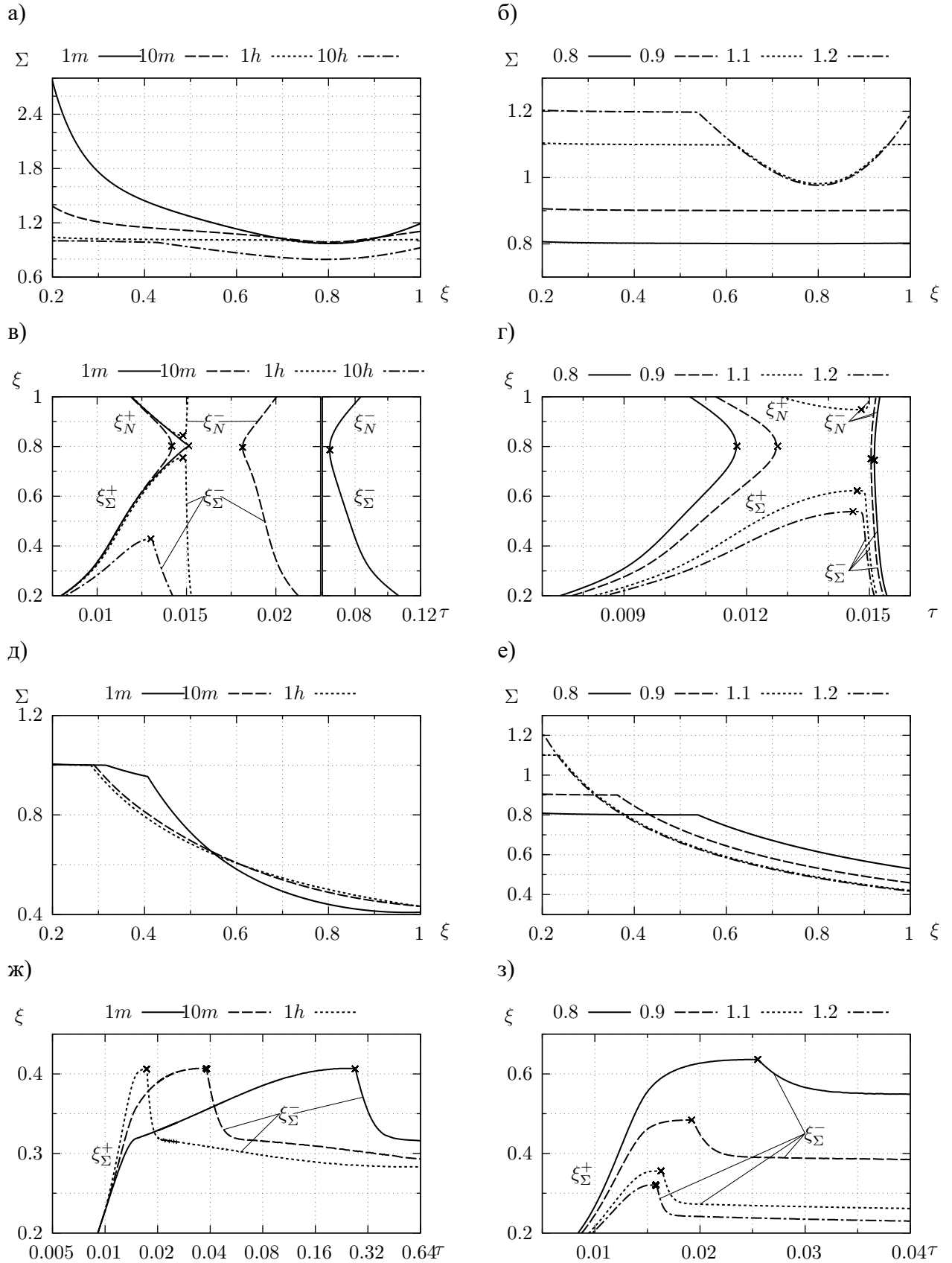


Рисунок 3 – Вращение двухслойного вала при различной интенсивности ползучести: напряжения при $\tau < \tau_1$ (а); движения упругопластических границ на стадии нагрузки (в). При различной интенсивности пластического течения: напряжения при $\tau = \tau_1$ (б); движения границ (г). Вращение трубы при различной интенсивности ползучести: напряжения при $\tau = \tau_2$ (д); движение границы (ж). При различной интенсивности пластического течения: напряжения при $\tau = \tau_2$ (е); движение границы (з).

ми, результаты расчетов колеблются между этими двумя крайностями склоняясь в некоторых случаях больше в одну или другую сторону. Также в некоторых случаях не наблюдается образования области повторного пластического течения, хотя в приведённых здесь случаях пластическое течение наблюдается и при снятии нагрузки (уменьшении скорости вращения). Также имеются некоторые особенности в процессе развития областей пластического течения. Например, в некоторых задачах сход напряжений с поверхности нагружения начинается не с упругопластической границы, а с боковой поверхности. Подробно эти особенности приведены в тексте диссертации.

В **четвёртой главе** подходы предыдущей главы переносятся на случай плоских напряжённых состояний, то есть рассматривается переменное вращение дисков. Уравнение (17) для такого случая переписывается в виде

$$u_{,\xi\xi} + \xi^{-1}u_{,\xi} - \xi^{-2}u = \frac{1}{2\xi} \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta} (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) + p_{rr,\xi} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} p_{\varphi\varphi,\xi} - \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta} \frac{\xi\psi^2}{4\beta}, \quad (18)$$

Принимаемые граничные условия можно увидеть из таблицы 2, где по аналогии с таблицей 1 представлены безразмерные значения угловой скорости вращения, при которых начинается вязкопластическое течение в материале диска.

Таблица 2: Значение функции нагрузки $\psi(\tau)$, при которых в диске впервые начинается пластическое течение.

Задача	Граничные условия		Диск
	Внутренняя	Боковая	
1. Сплошной диск	$u = 0$	$\sigma_{rr} = 0$	1,53846
2. Полый диск	$\sigma_{rr} = 0$	$u = 0$	1,85072
3. Кольцо	$\sigma_{rr} = 0$	$\sigma_{rr} = 0$	1,08389
4. Двухслойный диск	$u = 0$	$\sigma_{rr} = 0$	1,40225
5. Зажатое кольцо	$u = 0$	$u = 0$	2,18305

В §4.1 рассматривается упруговязкопластическое деформирование вращающегося двухслойного диска ($u(\xi_0, \tau) = 0$; $\sigma_{rr}(1, \tau) = 0$), изучаются особенности эволюции областей пластического течения (рис. 4). Обнаружено, что при $\psi_{max} \in [1,61; 1,819]$ в процессе перераспределения напряжений пластическая область может разделяться на две, что схематически представлено на рис. 4, но при $\psi_{max} = 1,6$ и $\psi_{max} = 1,82$ такого уже не происходит. Во время расширения область пластического течения $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_{\Sigma}^{+}(\tau)$ может быть разделена областью упругого деформирования $\xi_K^{-}(\tau) \leq \xi \leq \xi_L^{-}(\tau)$ (переход от схемы 2 к 3 на рис. 4). Либо после достижения максимального размера она начинает уменьшаться и через некоторое время в окрестности смены границы $\xi_{\Sigma}^{+}(\tau)$ на $\xi_{\Sigma}^{-}(\tau)$ возникает вторая область пластического течения $\xi_K^{+}(\tau) \leq \xi \leq \xi_L^{+}(\tau)$ (переход от схемы 2 к * на рис. 4).

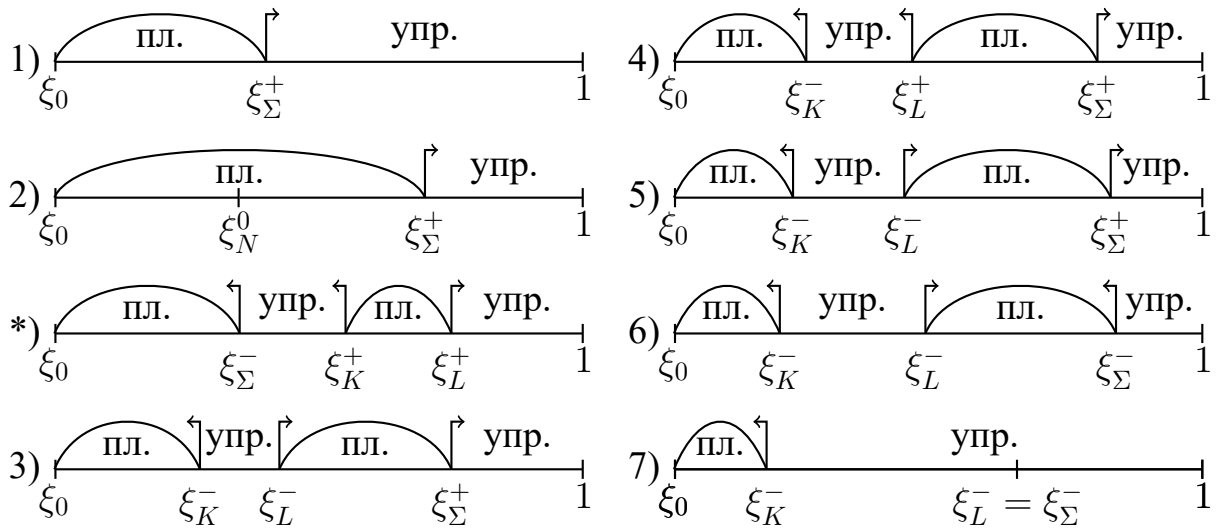


Рисунок 4 – Возникновение и исчезновение областей вязкопластического течения в диске.

В §4.2 к упругим и пластичным добавляются вязкие свойства материала (ползучесть). Как и в предыдущих главах, приводится вязкоупругое (ползучесть) решение задачи. С двумя полученными решениями сравниваются результаты расчётов при совместном учёте механизмов ползучести и пластического течения при накоплении необратимых деформаций. Параметры материала берутся из третьей главы (случаи 1.8 и 1.0 на рис. 5). Интенсивность ползучести связывается с параметром χ : рассматривались случаи $\chi = 0,18 \cdot 10^{-3}$ и $\chi = 18 \cdot 10^{-3}$ (случаи 0.18 и 18 на рис. 5). Для задания интенсивности пластического течения, как и ранее, использовался параметр k , а именно $k = 1,05$ и $k = 0,95$ (соответственно 1.05 и 0.95 на рис. 5).

Из представленных графических зависимостей видно, что с ростом интенсивности ползучести растёт скорость перераспределения напряжений в среде, из-за чего разрыв в области пластического течения не успевает образоваться. Также при большей интенсивности распределение напряжений в диске качественно схоже со случаем вязкого деформирования (без учёта пластического течения). Изменение интенсивности пластического течения приводит к перераспределению напряжений во всём материале, при этом разница в необратимых деформациях незначительная.

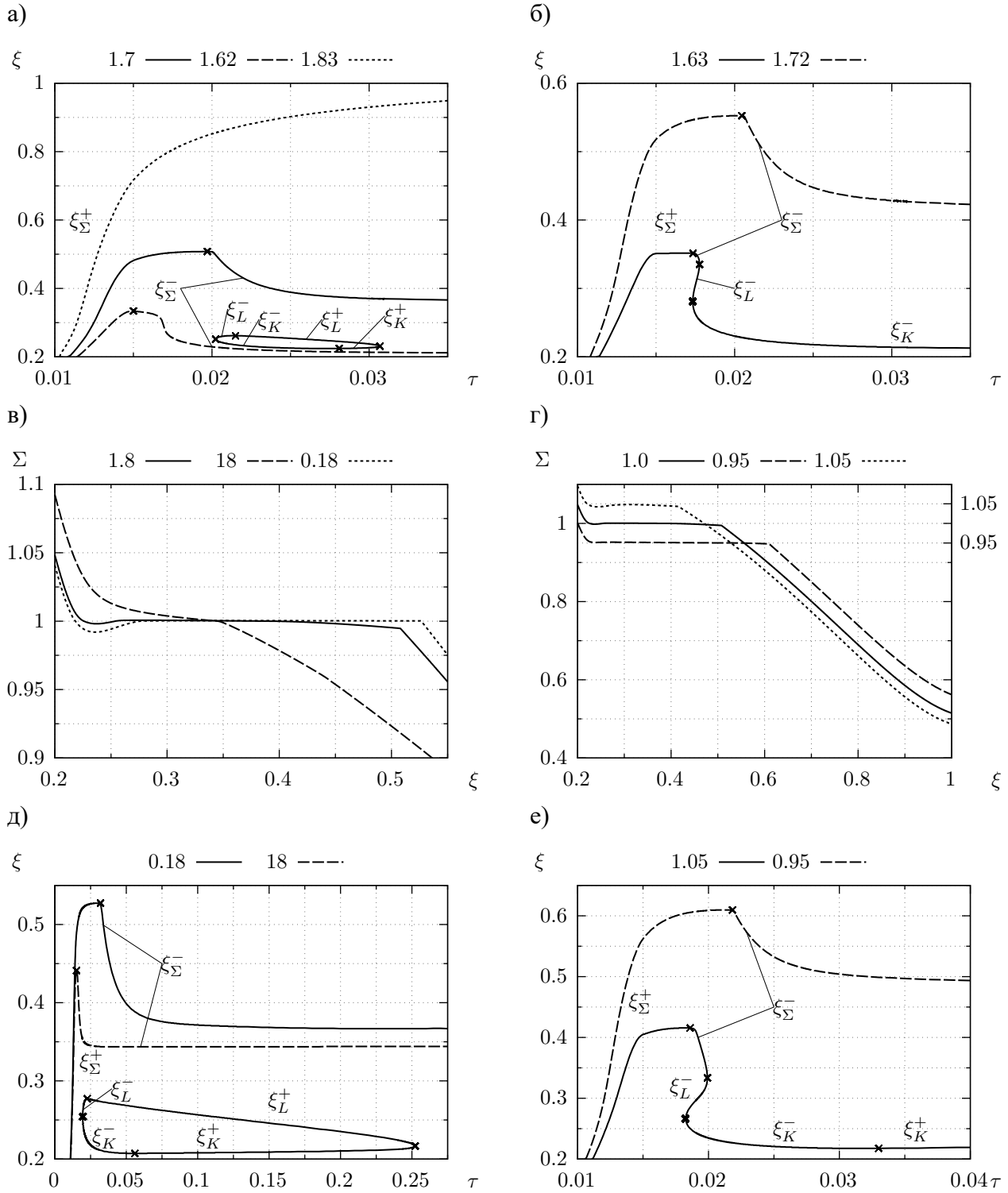


Рисунок 5 – НДС двухслойного диска при совместном учёте пластичности и ползучести. Движения упругопластических границ при различных максимальных нагрузках ψ_{max} : а) — 1,7; 1,62 и 1,83; б) — 1,63 и 1,72. Напряжения в момент времени $\tau = 0,025$ при различной интенсивности ползучести (в) и пластического течения (г). Движение упругопластических границ при различных интенсивностях ползучести (д) и пластического течения (е).

Заключение

Отметим основные результаты работы:

1. На основе последовательного использования дифференциальных уравнений изменения (переноса) обратимых и необратимых деформаций поставлена и численно решена краевая задача теории больших деформаций материала, проявляющего упругие, вязкие и пластические свойства, о его продавливании по трубе с жёсткими стенками за счёт изменяющегося со временем перепада давления. Продвижение материала осуществляется за счёт пристеночного вязкопластического течения. В материале продвигающегося деформированного ядра учитываются его упругие и вязкие (ползучесть) свойства. Рассчитываются напряжения, деформации (обратимые и необратимые) в каждый момент времени как в деформируемом ядре, так и в пристеночной области вязкопластического течения.
2. Рассчитана закономерность продвижения упруговязкопластической границы с учётом одномоментной смены на ней в механизме производства необратимых деформаций с вязкого (ползучесть) на пластический (течение) или наоборот при разгрузке. Рассмотрены крайние случаи последовательной перемены в таком механизме с вязкого на пластический и наоборот и параллельного учёта механизмов ползучести и пластического течения.
3. Проведено численное решение в задачах о переменных вращениях дисков и цилиндров, материал которых при таком вращении проявляет свои упругие, вязкие и пластические свойства. Установлены особенности возникновения и развития области вязкопластического течения, их исчезновения и возрождения в качестве повторных. Рассчитываются напряжения и необратимые деформации, как деформации ползучести, так и деформации пластического течения, в каждый временной момент процесса, включая релаксацию напряжений после остановки вращения.
4. Получено точное решение задачи об установившемся вязкопластическом течении материала трубы в условиях послеразгонного постоянства угловой скорости.
5. На основе разработанного алгоритма и составленных программ расчётов проведена серия вычислительных экспериментов по влиянию ползучести на характер вязкопластического течения и наоборот, о влиянии развивающейся пластической области на процесс ползучести.

Основные публикации по теме диссертации

Публикации в изданиях, индексируемых в Web of Science и Scopus:

1. *Firsov S. V.* Antiplane axisymmetric creep deformation of incompressible medium / S. V. Firsov, A. N. Prokudin // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2015. — Vol. 8, no. 4. — P. 406–415.
2. *Firsov S. V.* Antiplane strain of hardening elastoviscoplastic medium / S. V. Firsov, A. N. Prokudin // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2018. — Vol. 11, no. 4. — P. 399–410.
3. *Firsov S. V.* Creep and Plastic Flow in a Rotating Cylinder with a Rigid Inclusion / S. V. Firsov, A. N. Prokudin, A. A. Burenin // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2019. — Vol. 13, no. 4. — P. 642–652.

Публикации в рецензируемых научных изданиях, рекомендуемых ВАК:

4. *Фирсов С. В.* Необратимые деформации вращающегося цилиндра / С. В. Фирсов // Известия АлтГУ. Математика и механика. — 2018. — Т. 102, № 4. — С. 114—117.
5. *Фирсов С. В.* Расчёт ползучести вращающегося цилиндра со свободными концами / С. В. Фирсов, А. Н. Прокудин // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2018. — 1 (35). — С. 63—73.
6. *Фирсов С. В.* Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра / С. В. Фирсов, А. Н. Прокудин // Дальневосточный математический журнал. — 2018. — Т. 18, № 2. — С. 242—260.
7. *Фирсов С. В.* Кусочно-линейный потенциал ползучести в деформациях ползучести быстровращающегося цилиндра / С. В. Фирсов, А. Н. Прокудин, Л. В. Ковтанюк // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. — 2018. — Т. 1, № 3. — С. 101—108.
8. *Фирсов С. В.* Ползучесть и пластическое течение во вращающемся полом цилиндра / С. В. Фирсов, А. Н. Прокудин // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2019. — 4 (42). — С. 46—56.
9. *Фирсов С. В.* Большие деформации цилиндрического тела вращающегося с ускорением / С. В. Фирсов // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2020. — 3 (45). — С. 202—205.

Тезисы конференций:

10. *Фирсов С. В.* Течение материала в цилиндрической трубе под действием градиента давления в условиях ползучести / С. В. Фирсов, А. Н. Прокудин // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. — 2015. — С. 3132—3134.

11. *Фирсов С. В.* Антиплоская осесимметричная деформация несжимаемого тела в условиях пластичности и ползучести / С. В. Фирсов, А. Н. Прокудин // XLIII Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения». — 2017. — С. 1024—1025.
12. *Фирсов С. В.* Модели совместного протекания процессов пластичности и ползучести на примере задачи антиплоской деформации / С. В. Фирсов, А. Н. Прокудин // Математическое моделирование в естественных науках. Материалы XXVII Всероссийской школы-конференции молодых ученых и студентов. — 2018. — С. 390—394.
13. *Фирсов С. В.* О деформациях ползучести вращающегося цилиндра / С. В. Фирсов // Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018), 24–31 мая 2018 г., Алушта. — 2018. — С. 461—463.
14. *Фирсов С. В.* Необратимые деформации во вращающемся цилиндре в процессе торможения / С. В. Фирсов // Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций. Материалы докладов III дальневосточной школы-семинара / под ред. А. И. Евстигнеева. — 2018. — С. 73—76.
15. *Фирсов С. В.* Необратимое деформирование цилиндра, вращающегося с переменной скоростью / С. В. Фирсов, А. Н. Прокудин // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении. Материалы V дальневосточной конференции с международным участием / под ред. А. И. Евстигнеева. — 2018. — С. 107—111.
16. *Фирсов С. В.* Обобщённая плоская деформация вращающегося цилиндра / С. В. Фирсов, А. Н. Прокудин // Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций. Материалы докладов III дальневосточной школы-семинара / под ред. А. И. Евстигнеева. — 2018. — С. 77—81.
17. *Фирсов С. В.* Ползучесть и пластическое течение в полом цилиндре с изменяющимся внутренним давлением / С. В. Фирсов // Материалы Всероссийской научной конференции с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2020», 28 сентября – 2 октября 2020 года. — 2020. — С. 433—438.