



Попова Елена Олеговна

**НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ТЕЧЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ
С УПРУГИМИ, ПЛАСТИЧЕСКИМИ И ВЯЗКИМИ СВОЙСТВАМИ**

Специальность: 1.1.8 – Механика деформируемого твёрдого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук и в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования Морском государственном университете имени адмирала Г.И. Невельского

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, чл.-корр.
РАН, профессор РАН, главный научный
сотрудник, зав. лабораторией механики
деформируемого твердого тела ФГБУН Института
автоматики и процессов управления ДВО РАН
Ковтанюк Лариса Валентиновна

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой теоретической механики
института математики и механики
им. Н.И. Лобачевского отделения механики
ФГБОУ ВО Казанского (Приволжского)
федерального университета, г. Казань
Султанов Ленар Усманович

кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры «Авиастроение и компьютерное
проектирование» ФГБОУ ВО
Комсомольского-на-Амуре государственного
университета, г. Комсомольск-на-Амуре
Потянихин Дмитрий Андреевич

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО Липецкий государственный
технический университет, г. Липецк

Защита состоится «17» декабря 2025 г. в _____ на заседании диссертационного совета
24.2.316.03, созданного на базе ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный
университет», по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре
государственный университет» и на сайте https://sovet.knastu.ru/diss_defense

Автореферат разослан « _____ » ноября 2025 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент



Григорьева А.Л.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Термомеханическая обработка металлов и сплавов играет важную роль в различных отраслях промышленности благодаря своей способности улучшать свойства материалов. Методы термомеханической обработки, к которым относятся нагрев, охлаждение и механическая деформация, являются важными инструментами в производстве металлических изделий с определенными эксплуатационными свойствами. Термомеханическая обработка способствует повышению прочности, пластичности, устойчивости к износу, ударной вязкости и других механических параметров металлов, что делает их более долговечными и дает возможность использовать в условиях повышенной нагрузки или трения. С другой стороны, многие элементы конструкций работают в условиях циклически изменяющихся нагрузок, вызывающих упругопластическое деформирование. Вследствие этого в элементах конструкций возникают тепловые деформации, которые также могут существенно изменять свойства материала и, как следствие, характер деформирования. Таким образом, актуальными задачами современной промышленности являются задачи определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций в условиях термомеханических воздействий, когда анализ поведения деформируемых материалов требует одновременного учета их упругих, пластических и вязких свойств. Учет связанности полей деформаций и температуры значительно усложняет используемые модельные соотношения. В областях течения необратимые деформации необходимо большие, поэтому задачи о неизотермических течениях требуют рассмотрения в рамках модели больших упругопластических деформаций. Вследствие этого, развитие теории, комплексно учитывающей большие деформации, упругие, теплофизические, пластические и вязкие свойства материалов, решение краевых задач, описывающих технологические приемы обработки и эксплуатации изделий и конструкций, является весьма актуальной задачей, важной как для современной инженерной практики, так и для развития фундаментальной механики.

Степень разработанности темы исследования. В расчетах, сопровождающих промышленные технологии, основанные на интенсивном формоизменении металлов (прокатка, штамповка, волочение и др.), преимущественно используется жесткопластический анализ, составляющий главное содержание классической теории пластичности. Обратимыми (упругими) деформациями, считая их малыми по сравнению с необратимыми (пластическими), пренебрегают (А. Сен-Венан, М. Леви, Л. Прандтль, В. Прагер, Р. Хилл, В.В. Соколовский, Д.Д. Ивлев, Л.М. Качанов, В.Д. Ключников). Также поступают при расчетах вязкопластических течений материалов (В.П. Мясников, П.П. Мосолов, П.М. Огибалов, А.Д. Чернышов). Но такой подход не учитывает важные для технологической практики особенности упругопластического деформирования, связанные с упругим откликом, определяющим итоговую геометрию изделий. И поскольку обратимые и необратимые деформации в упругопластических процессах взаимосвязаны, это приводит к необходимости считать пластические деформации в классической упругопластичности также малыми (Л.А. Галин, Ю.Н. Работнов, Б.Д. Аннин, Г.П. Черепанов). Таким образом, развитие теории, учитывающей большие деформации, продиктовано как внутренней логикой развития фундаментальной теории, так и актуальными задачами технологий обработки материалов и изготовления изделий.

На основе непротиворечивой кинематики больших деформаций был разработан ряд математических моделей, геометрически и термодинамически корректных (Е.Н. Lee, Р.М. Naghdi, S. Nemat – Nasser, О.Т. Bruns, В.И. Кондауров, В.И. Левитас, А.А. Роговой, А.Д. Чернышов, С.Н.

Коробейников, Г.И. Быковцев, А.В. Шитиков, В.П. Мясников, А.А. Буренин, Л.В. Ковтанюк, А.В. Шутов, Л.У. Султанов и др.).

Эффекты ползучести в обработке материалов давлением изучались достаточно подробно (Арутюнян Н.Х., Горелов В.И., Малинин Н.Н., Никитенко А.Ф., Работнов Ю.Н., Ржаницын А.Р., Самарин А.П., Соснин О.В., Шестериков С.А., Distefano J.N., Kraus H., Odqvist F.K.G., Struik L.C.E., Астафьев В.И., Бормотин К.С., Горев Б.В., Коробейников С.Н., Куликов И.С., Локощенко А.М., Радаев Ю.Н., Радченко В.П., Олейников А.И., Цвелодуб И.Ю., Чигарев А.В. и др.).

Отметим, что большинство созданных теорий больших упругопластических деформаций исключают возможность получения численно-аналитических решений, допуская только приближенные численные. В настоящей работе используется теория (Г.И. Быковцев, А.В. Шитиков, А.А. Буренин, Л.В. Ковтанюк) в рамках которой такие решения были получены для материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами, включая случай, когда необратимые деформации в материале могут накапливаться и за счет ползучести, и при пластическом течении (Л.В. Ковтанюк, А.С. Бегун, Г.Л. Панченко, Е.В. Мурашкин, А.О. Лемза). В диссертации решаются новые задачи неізотермической связанной теории больших упруговязкопластических деформаций.

Целью работы является постановка и решение связанных краевых задач теории больших деформаций о прямолинейных течениях упругопластических материалов с учетом их сложных реологических и теплофизических свойств, с последующей разгрузкой и остыванием, расчетом сформированных таким способом остаточных напряжений; разработка алгоритмов и программ расчетов для рассматриваемых случаев.

Для достижения поставленной цели предполагается решение следующих **задач**:

1. Постановка и решение связанной краевой задачи о неізотермическом деформировании материала, образующего пробку конечной длины в недеформируемой круглой трубе в условиях жесткого сцепления с поверхностью трубы под действием переменного перепада давления, заданного на торцевых поверхностях пробки. Исследование процессов ползучести, вязкопластического течения и разогрева материала за счет необратимого деформирования при возрастающем и постоянном перепаде давления, торможения течения и разгрузки среды при убывающем давлении, а также остывание материала после полного снятия механической нагрузки.
2. Постановка и решение связанной краевой задачи о неізотермическом деформировании материала пробки под действием переменного перепада давления с учетом проскальзывания в окрестности жесткой стенки трубы.
3. Постановка и решение неізотермической краевой задачи о деформировании материала в жесткой круглой трубе при наличии слоя смазки. Исследование обратимого деформирования, возникновения и развития вязкопластического течения в слое смазки и распространении течения в основной материал с учетом их разогрева за счет трения о стенку трубы и необратимого (вязкопластического) деформирования. Изучение торможения течения и разгрузки основного материала и смазки при убывающем давлении, а также их остывания после полного снятия механической нагрузки.
4. Разработка алгоритмов и программ расчетов напряжённо-деформированных состояний материалов в указанных случаях.

К **основным научным результатам** работы относятся:

1. С использованием математической модели больших деформаций материалов с упругими,

пластическими и вязкими свойствами исследован деформационный разогрев материала при его движении в цилиндрической трубе под действием переменного перепада давления. Изменение температуры материала происходит только за счет необратимого деформирования, при отсутствии теплового потока и трения на граничной поверхности.

2. Решение краевой задачи теории больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами о неизотермическом деформировании пробки конечной длины в круглой недеформируемой трубе под действием переменного перепада давления в случае, когда изменение температуры в деформируемом материале происходит и за счет процессов необратимого деформирования, и за счет трения материала о граничную шероховатую поверхность трубы вследствие проскальзывания в ее окрестности.
3. Решение неизотермической краевой задачи о деформировании упруговязкопластического материала в жесткой круглой трубе при наличии слоя смазки. Разогрев смазки и основного материала происходит за счет трения материала смазки о трубу и за счет процесса накопления ими пластических деформаций.
4. Разработанные методы решения неизотермических краевых задач теории больших деформаций материалов в случаях движения в них неизвестных упругопластических границ.

Научная новизна результатов, полученных в диссертации, обусловлена постановками и решениями новых неизотермических краевых задач теории больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами с предложенными методами их решения.

Достоверность полученных результатов базируется на использовании классических подходов неравновесной термодинамики и механики сплошных сред. Используемая математическая модель больших упруговязкопластических деформаций может считаться достаточно апробированной; из нее в частном случае при переходе к малым деформациям следуют соотношения классической модели типа Прандтля – Рейса. При решении конкретных краевых задач дополнительные гипотезы не использовались, применяемые численно-аналитические процедуры являются общепризнанными.

Практическая значимость результатов связана с совершенствованием режимов интенсивного формоизменения конструкционных материалов при их обработке давлением; прогнозированием результатов операций формовки и обтяжки с помощью предварительных расчетов; с оценкой упругого последствия при общей разгрузке изделий в технологических процессах их изготовления и упрочнения с целью оптимизации технологических приёмов снятия остаточных напряжений в готовых изделиях.

Апробация работы

Основные результаты диссертации были представлены на следующих научных конференциях:

- Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, 2023, 2024 гг.;
- III научная конференция с международным участием «Вычислительные технологии и прикладная математика», Комсомольск-наАмуре, 2024 г.;
- «Механика деформируемого твердого тела в проектировании материалов и конструкций», Пермь, 2024 г.;
- Научная конференция с международным участием «Вычислительные технологии и прикладная математика», Владивосток, 2025 г.;
- Двадцать четвертая Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2025), Алушта, 2025 г.

Диссертация в целом докладывалась на объединённом научном семинаре отдела механики сплошных сред в ИАПУ ДВО РАН (г. Владивосток).

По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ, 4 из которых изданы в ведущих рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК (в том числе 1 статья в издании, входящем в международную систему цитирования Web of Science), 4 в сборниках трудов и материалах конференций регионального, всероссийского и международного уровня.

Личный вклад автора. Все основные результаты, составившие диссертацию, получены автором лично. Работа [8] выполнена автором самостоятельно. В работах, написанных в соавторстве, автор участвовала в постановке задач, разработке алгоритмов решения и выполняла все необходимые вычисления.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы (160 наименований). Общий объем работы – 98 страниц, в том числе 40 рисунков, включенных в текст.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы, проведен краткий литературный обзор моделей больших деформаций материалов с учетом их упругих, пластических, вязких и теплофизических свойств, кратко описана модель, совместно учитывающая кроме взаимовлияния больших обратимых и необратимых деформаций еще и возможность пластического течения в условиях неустановившейся ползучести материалов, использующаяся при решении краевых задач.

В **первой главе** приводятся основные соотношения неізотермической математической модели больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами. В § 1.1 строится кинематика больших упругопластических деформаций. Для термодинамических параметров состояния, которыми полагаем температуру T (или плотность распределения энтропии s), обратимые (термоупругие) $\mathbf{m}$ и необратимые деформации $\mathbf{p}$ справедливы дифференциальные уравнения их изменения (уравнения переноса, кинетические уравнения):

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{p}}{Dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \\ \frac{D\mathbf{m}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{z})), \\ \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{w}, \\ \mathbf{r} &= -\mathbf{r}^T = \mathbf{w} + \mathbf{z}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{e} + \beta \boldsymbol{\theta}, \quad \beta = \alpha T_0, \quad \theta = T_0^{-1}(T - T_0), \\ \mathbf{z} &= -\mathbf{z}^T = A^{-1}(B^2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + B(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}), \\ A &= 8 - 8L_1 + 3L_1^2 - L_2 - \frac{1}{3}L_1^3 + \frac{1}{3}L_3, \quad B = 2 - L_1, \\ L_1 &= \mathbf{I} \cdot \mathbf{m}, \quad L_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{m}^2, \quad L_3 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{m}^3. \end{aligned} \tag{1}$$

Соотношения (1) записаны в прямоугольной системе пространственных декартовых координат Эйлера $\mathbf{x}$. Здесь $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ – векторы перемещений и скорости; t – время; $\mathbf{e}$ – линейная часть тензора упругих деформаций; $\mathbf{I}$ – единичный тензор второго ранга; T_0 – температура свободного состояния (комнатная температура); α – коэффициент линейного расширения; D/Dt – объективная производная по времени совершенно определенного вида, полученная при выводе

дифференциальных уравнений изменения термодинамических параметров состояния обратимых и необратимых деформаций, обеспечивающая геометрическую корректность модели. От производной Яумана она отличается наличием нелинейной добавки $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m})$ в тензоре вращений $\mathbf{r}$.

Согласно первому уравнению (1) процессы деформирования, в которых необратимые деформации $\mathbf{p}$ неизменны, определяются равенством нулю источника необратимых деформаций γ . В таком случае $\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = 0$ и компоненты тензора необратимых деформаций $\mathbf{p}$ изменяются также

как при жестком перемещении тела.

Для тензора полных деформаций Альманси $\mathbf{d}$ из (1) получаем его разделение на обратимую $\mathbf{m}$ и необратимую $\mathbf{p}$ составляющие

$$\mathbf{d} = \mathbf{m} + \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m}. \quad (2)$$

В § 1.2, следуя законам термодинамики, на основе построенной кинематики выводятся основные определяющие законы, в § 1.3 определяются связь между напряжениями и деформациями и приводятся уравнения теплопроводности в областях обратимого деформирования, разгрузки и пластического течения. В качестве термодинамического потенциала используется свободная энергия $\psi = e - Ts$, где e – плотность распределения внутренней энергии. Принимая существенно упрощающую математическую модель гипотезу о том, что свободная энергия не зависит от необратимых деформаций, считаем, что консервативная часть процесса деформирования задается упругим потенциалом $W(\mathbf{m}, T) = \rho_0 \psi(\mathbf{m}, T)$ (ρ_0 – плотность материала в свободном состоянии). Далее материал полагаем механически несжимаемым, но изменение его объема возможно за счет линейного расширения:

$$1 - 2J_1 + 2J_1^2 - 2J_2 - \frac{4}{3}J_1^3 + 4J_1J_2 - \frac{8}{3}J_3 = (1 + 3\beta\theta)^{-2} \quad (3)$$

$$J_1 = \text{tr} \mathbf{d}, \quad J_2 = \text{tr} \mathbf{d}^2, \quad J_3 = \text{tr} \mathbf{d}^3$$

Из закона сохранения энергии получаем формулы Мурнагана, связывающие напряжения с обратимыми деформациями, и уравнение баланса энтропии

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \frac{1}{1 + 3\beta\theta} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{d}) \quad \text{при } \mathbf{p} \equiv 0, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -P_1\mathbf{I} + \frac{1}{1 + 3\beta\theta} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}) \quad \text{при } \mathbf{p} \neq 0.$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{J} - T^{-2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + T^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \quad (5)$$

В зависимостях (4) и (5) P , P_1 – неизвестные гидростатические давления, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{J}$ – векторы потока тепла и энтропии:

$$\mathbf{J} = \rho s \mathbf{v} - T^{-1} \mathbf{q}, \quad s = -T_0 \rho^{-1} \frac{\partial W}{\partial \theta}.$$

Полагая, что среда изотропна, упругий потенциал $W(F_1, F_2, \theta)$ принимаем в виде разложения этой функции в ряд Тейлора относительно свободного состояния деформируемого материала при комнатной температуре T_0

$$\begin{aligned}
W(F_1, F_2, \theta) = & -2\mu F_1 - \mu F_2 + \kappa F_1^2 + (\kappa - \mu)F_1 F_2 - \chi F_1^3 + \nu_1 F_1 \theta + \\
& + \nu_2 \theta^2 - \nu_3 F_1 \theta^2 - \nu_4 F_1^2 \theta - \nu_5 F_2 \theta - \nu_6 \theta^3 + \dots, \\
F_k = & \begin{cases} J_k & \text{при } \mathbf{p} \equiv 0 \\ I_k & \text{при } \mathbf{p} \neq 0 \end{cases}, \quad I_1 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}, \quad I_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}^2, \quad \mathbf{c} = \mathbf{m} - 0.5\mathbf{m}^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

В (6) μ – модуль сдвига, κ , χ – упругие модули более высокого порядка, ν_k ($k=1,2,\dots,6$) – термомеханические постоянные.

Принимая для вектора теплового потока закон теплопроводности Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T,$$

где λ – коэффициент теплопроводности, из уравнения баланса энтропии (5) получаем уравнения теплопроводности в форме:

в областях обратимого деформирования

$$\begin{aligned}
& (1 + \beta_1 \theta + \beta_2 J_1) \frac{d\theta}{dt} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d} = q \Delta \theta, \\
\beta_1 = & \frac{\nu_1(1-3\beta) - 3\nu_2}{\nu_1}, \quad \beta_2 = -\frac{\kappa_1}{\nu_1}, \quad \beta_3 = -\frac{\nu + \kappa_3}{\nu_1}, \quad q = -\frac{\lambda}{2\nu_1},
\end{aligned} \tag{7}$$

разгрузки

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \left(\text{tr } \mathbf{m} - \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{m}^2\right)\right) \frac{d\theta}{dt} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m} - \frac{1}{2} \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 = q \Delta \theta. \tag{8}$$

необратимого деформирования

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \left(\text{tr } \mathbf{m} - \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{m}^2\right)\right) \frac{d\theta}{dt} + \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{m} - \frac{1}{2} \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{m}^2 = q \Delta \theta - \frac{1}{2\nu_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \tag{9}$$

Здесь q – коэффициент температуропроводности.

Далее полагаем, что необратимые деформации $\mathbf{p}$ накапливаются в материале и за счет вязких свойств материала (ползучесть) и за счет его пластических свойств (течение).

Для конкретизации диссипативного механизма, связанного с накоплением необратимых деформаций, задаем скорость роста необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma}$ в зависимости от напряжений. При деформировании, пока напряженное состояние не достигло поверхности нагружения, считаем $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^v$, т.е. что на данных стадиях процесса деформирования необратимые деформации производятся в форме деформаций ползучести. В области пластического течения $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^p$, то есть источник совпадает с тензором скоростей пластических деформаций. Следовательно, в уравнениях изменения необратимые деформации не разделяются на свои составляющие. Их различие состоит в разных механизмах накопления. В условиях накопления деформаций ползучести выберем классический степенной закон Нортона

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{\partial V(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad V(\boldsymbol{\Sigma}) = B \boldsymbol{\Sigma}^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma} = \max |\sigma_i - \sigma_j|. \tag{10}$$

В соотношениях (10) σ_i – главные напряжения, B и n – параметры ползучести материала.

Выход напряженного состояния на поверхность нагружения приводит к появлению области пластического течения, на границе которой определяющий закон ползучести должен быть заменен на определяющий закон, основанный на законе пластического течения. На такой граничной поверхности напряжения и деформации непрерывны, при таком подходе непрерывны и скорости необратимых деформаций. Тогда скорости пластических деформаций связаны с напряжениями

ассоциированным законом пластического течения

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^{v_0} = \phi \frac{\partial f(\sigma, k)}{\partial \sigma}, \quad f(\sigma, k) = 0, \quad \phi > 0. \quad (11)$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}$ – тензор скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения. Накопленные к началу пластического течения деформации ползучести и их скорости $\boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}$ являются начальными значениями для накапливающихся далее пластических деформаций.

В качестве поверхности нагружения принимаем условие пластичности Треска с учетом вязкого сопротивления пластическому течению:

$$f(\sigma_i, y_k, k) = \max|\sigma_i - \sigma_j| - 2k - 2\eta \max|y_k|. \quad (12)$$

В (12) y_k – главные значения тензора $\mathbf{y}$, k – предел текучести, η – вязкость.

Параметры материала полагаем зависимыми от температуры. Параметры ползучести B и n принимаются в форме

$$B = \frac{c_1}{\sigma_0^{n-1}} \exp\left(-\frac{Q}{R_u T_0(1+\theta)}\right), \quad n = b_1 + \frac{b_2}{T_0(1+\theta)}. \quad (13)$$

В (13) c_1, σ_0, b_1 и b_2 – постоянные материала, Q – энергия активации, R_u – универсальная газовая постоянная. Для предела текучести и коэффициента вязкости пластического течения будем использовать соотношения

$$k = k_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_m^2}\right), \quad \eta = \eta_0 \exp(-\nu T_0 \theta), \quad \theta_m = (T_m - T_0) T_0^{-1}. \quad (14)$$

В (14) T_m – температура плавления деформируемого материала, k_0, η_0 – предел текучести и вязкость материала при комнатной температуре, ν – экспоненциальная скорость.

Подчеркнем, что выбранные зависимости (10), (12 – 14) являются простейшими, и вместо них могут использоваться другие, в том числе и более сложные законы.

Добавляя к выписанным соотношениям уравнения равновесия $\nabla \boldsymbol{\sigma} = 0$, получаем замкнутую систему уравнений квазистационарного неизотермического деформирования.

Во второй главе представлено решение неизотермической краевой задачи о необратимом деформировании несжимаемого упруговязкопластического материала, образующего пробку конечной длины l в круглой недеформируемой трубе радиуса R .

Постановка задачи и ее решение до начала пластического течения описаны в § 2.1. В цилиндрической системе координат r, φ, z для рассматриваемого антиплоского движения полагаем $\theta = \theta(r, t), u = u_z(r, t), v = v_z(r, t), P = P(r, z, t)$, где u и v – отличные от нуля компоненты векторов перемещений и скорости. На боковой поверхности пробки выполняются условия жесткого сцепления со стенками трубы

$$u|_{r=R} = 0, \quad v|_{r=R} = 0. \quad (15)$$

Краевые условия на граничных поверхностях пробки $z = u(r, t)$ и $z = l + u(r, t)$ имеют вид

$$\sigma_{zz}(0, u(0, t), t) = -p(t), \quad \sigma_{zz}(0, l + u(0, t), t) = 0, \quad (16)$$

где $r = 0$ – координата максимального перемещения граничных точек пробки, $p(t)$ – заданное давление.

Необратимое деформирование материала пробки связано и с ползучестью, и с

вязкопластическим течением и вызывает его разогрев. Рассматривается случай, когда тепло создается внутри только за счет необратимого деформирования, то есть приток тепла в среду через ее границу отсутствует. Краевые условия для относительной температуры заданы в виде

$$\theta(r,0)=0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r,t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (17)$$

При возрастающей функции $p(t)$ в материале сначала накапливаются необратимые деформации ползучести. Из условия несжимаемости материала (3) следует, что для рассматриваемого антиплоского движения среды, оно выполняется в случае равенства нулю коэффициента β . Таким образом тепловое расширение в материале отсутствует. Напряжения находятся из второй формулы (4) и (5)

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= -(P_1 + 2\mu) + 2(b - \nu_4 \theta)(m_{rr} + m_{zz}) - 2(\mu - \nu_4 \theta)m_{rz}^2 + \nu_1 \theta - \nu_3 \theta^2 = -p_1 \\ \sigma_{rz} &= 2(\mu - l_1 \theta)m_{rz}, \quad \sigma_{rr} = -p_1 + 2(\mu - l_1 \theta)m_{rr} + (3\mu + l_1 \theta)m_{rz}^2, \\ \sigma_{zz} &= -p_1 + 2(\mu - l_1 \theta)m_{zz} + (3\mu + l_1 \theta)m_{rz}^2. \quad l_1 = \nu_1 + \nu_5. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь и далее соотношения записаны с точностью до слагаемых первого порядка малости по компонентам обратимых деформаций m_{rr} и m_{zz} и второго – по компоненте m_{rz} , что качественно не влияет на решение поставленной задачи, но позволяет существенно упростить дальнейшие вычисления. С использованием уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \quad (19)$$

и потенциала в законе ползучести Нортон

$$V(\sigma_{ij}) = B((\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{rz}^2)^{\frac{n}{2}}, \quad (20)$$

в котором оставлены слагаемые до порядка n по напряжениям, находятся напряжения и скорости деформаций ползучести

$$\sigma_{rz} = -\frac{pr}{2l}, \quad p = p(t), \quad \varepsilon_{rz}^v = -Bn \left(\frac{pr}{l} \right)^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^v = -\varepsilon_{zz}^v = \frac{\varepsilon_{rz}^v}{2} \frac{m_{rr} - m_{zz}}{m_{rz}}. \quad (21)$$

С учетом полученных соотношений (21) уравнение теплопроводности (9) принимает форму

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 p r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^2} \frac{\partial p}{\partial t} = q \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{Bn}{2\nu_2} \left(\frac{pr}{l} \right)^n. \quad (22)$$

Полученное дифференциальное уравнение в частных производных (22), как и полученные далее уравнения и системы уравнений, при условии зависимости параметров ползучести материала от температуры (13) и краевых условиях для температуры (17) решается численно методом конечных разностей. Компоненты скоростей деформаций, обратимых и необратимых деформаций, перемещений находятся из кинематических соотношений (1) и (2), гидростатическое давление p_1 - из первого уравнения равновесия (19) с учетом зависимостей (18). Полученное решение справедливо до момента времени t_1 , в который на боковой границе пробки $r = R$ впервые выполнится условие пластичности (12) в форме $|\sigma_{rz}|_{r=R} = k(t_1)$.

Начиная с момента времени t_1 от боковой поверхности пробки $r = R$ в материале развивается область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$. Движущаяся граница $r = m(t)$

отделяет расширяющуюся область течения от сужающейся области $0 \leq r \leq m(t)$, в которой материал продолжает накапливать необратимые деформации ползучести. Решение задачи о развивающемся пластическом течении приведено в § 2.2.

В области вязкоупругого деформирования $0 \leq r \leq m(t)$ параметры находятся аналогично предыдущей задаче. В области течения $m(t) \leq r \leq R$, используя ассоциированный закон течения (11) и условие пластичности Треска (12) в форме

$$\sigma_{rz} = -k + \eta(\varepsilon_{rz}^p - \varepsilon_{rz}^{v_0}) \quad (23)$$

определим компоненту тензора скоростей пластических деформаций ε_{rz}^p и компоненту тензора скоростей деформаций ползучести $\varepsilon_{rz}^{v_0}$ в точке в момент достижения ее упругопластической границей в текущий момент времени t

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}, \quad \varepsilon_{rz}^{v_0} = -Bn \left(\frac{pm}{l} \right)^{n-1}. \quad (24)$$

Из условия непрерывности скоростей необратимых деформаций на границе $r = m(t)$, разделяющей область вязкопластического течения и область с накапливаемыми деформациями ползучести, следует уравнение, согласно которому определяется положение границы $r = m(t)$ в каждый момент времени

$$\frac{pm}{2l} = k_0 \left(1 - \frac{\theta(m, t)}{\theta_m} \right)^2. \quad (25)$$

Уравнение теплопроводности (9) в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ с учетом зависимостей (24) и (21) принимает вид

$$\begin{aligned} \left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 p r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^2} \frac{\partial p}{\partial t} = q \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \\ + \frac{pr}{2l v_2} \left(\frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнения теплопроводности (22) и (26), а также второе уравнение (24) и (25) составляют систему уравнений относительно неизвестных функций: θ в областях $0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$, $m(t)$ и $\varepsilon_{rz}^{v_0}$. К краевым условиям на граничных поверхностях (17) добавляются начальные условия $m(t_2) = R$ и $\varepsilon_{rz}^{v_0}(R) = -B(t_2)n(t_2)(p(t_2)R/l)^{n(t_2)-1}$, условия непрерывности функции θ и ее производной на границе $r = m(t)$ и условия непрерывности температуры в момент начала вязкопластического течения t_1 . Полученная система уравнений решается в промежутке времени $t_1 \leq t \leq t_2$ при возрастающем перепаде давления и затем с момента времени t_2 , в который перепад давления на граничных поверхностях пробки полагаем постоянным, равным $p(t_2)$ (в уравнениях теплопроводности (22) и (26) $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$.) При постоянном давлении граница, разделяющая области вязкоупругого деформирования и вязкопластического течения, сохраняет свое положение, то есть размеры данных областей остаются прежними, но необратимые деформации в них продолжают накапливаться.

Течение при уменьшающемся перепаде давления, разгрузка среды и остывание материала рассмотрены в § 2.3. С момента времени $t_3 > t_2$ давление $p(t)$ начинает уменьшаться, и от

неподвижной поверхности $r = m(t_3)$ к границе пробки $r = R$ движется новая граница $r = m_1(t)$, которая разделяет уменьшающуюся область вязкопластического течения $m_1(t) \leq r \leq R$ и область $m(t_3) \leq r \leq m_1(t)$ с накопленными необратимыми пластическими деформациями. В слоях $0 \leq r \leq m(t_3)$ и $m(t_3) \leq r \leq m_1(t)$ необратимые деформации теперь накапливаются в результате процесса ползучести. Уравнение для определения положения упругопластической границы с момента времени $t_3 > t_2$ следует из условия непрерывности скоростей необратимых деформаций на границе $r = m_1(t)$:

$$\frac{1}{\eta} \left(k_0 \left(1 - \frac{\theta(m_1, t)}{\theta_m} \right)^2 - \frac{pm_1}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}(m_1) = -Bn \left(\frac{pm_1}{l} \right)^{n-1}, \quad (27)$$

где $\varepsilon_{rz}^{v_0}(r)$ является известной функцией, вычисленной на предыдущих этапах задачи. При решении системы уравнений (22), (26) и (27) относительно неизвестных функций $m_1(t)$ и θ в областях $0 \leq r \leq m_1(t)$ и $m_1(t) \leq r \leq R$ использовались граничные условия (17), начальное условие $m_1(t_3) = m(t_3)$, условия непрерывности функции θ и ее производной $\partial\theta/\partial r$ на границе $r = m_1(t)$ и непрерывность температуры θ в момент времени t_3 .

В расчетный момент времени $t_4 > t_3$ поверхность $r = m_1(t)$ достигает границы пробки $r = R$. С этого момента времени вязкопластическое течение в материале прекращается, а накопление необратимых деформаций теперь происходит только за счет ползучести. В момент времени t_5 , вычисляемый из уравнения $p(t_5) = 0$, перепад давления становится равным нулю. Также становятся равными нулю компонента обратимых деформаций m_{rz} и компонента напряжений σ_{rz} , а остальные компоненты тензора напряжений перестают зависеть от координаты z . С момента времени t_5 уравнение теплопроводности принимает форму

$$(1 + \beta_1 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = q \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (28)$$

Чтобы задать остывание материала пробки, вместо граничных условий (17) принимаем условия

$$\left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} + h\theta \right) \Big|_{r=R} = 0, \quad (29)$$

в которых h – коэффициент теплоотдачи материала.

Уравнение (28) решается с использованием граничных условий (29) и начального условия непрерывности температуры в момент времени t_5 . С течением времени материал полностью остывает.

Результаты численных расчетов представлены на графиках для линейной функции $p(t)$:

$$p(t) = \begin{cases} \alpha_1 t, & 0 \leq t < t_2, \\ \alpha_1 t_2, & t_2 \leq t < t_3, \\ \alpha_1 t_2 - \alpha_2 (t - t_3), & t_3 \leq t < t_5, \quad t_5 = \alpha_1 \alpha_2^{-1} t_2 + t_3 \end{cases}$$

с использованием безразмерных переменных r/R и $\tau = \alpha_1 t / \mu$ и значений безразмерных постоянных:

$$\beta_1 = -2.772, \beta_3 = -10, k_0 \mu^{-1} = 2.298 \times 10^{-3}, \theta_m = 2.074, l_1 \mu^{-1} = 0.452, lR^{-1} = 5, \\ g\mu\alpha_1^{-1}R^{-2} = 2.638 \times 10^4, \nu_2 \mu^{-1} = 80, b_1 = 2.518, b_2 T_0^{-1} = 1.482, c_1 \mu\alpha_1^{-1} = 4.887 \times 10^4, \\ \sigma_0 \mu^{-1} = 7.199 \times 10^{-6}, QR_u^{-1}T_0^{-1} = 52.37, \nu T_0 = 1.212, \alpha_2 \alpha_1^{-1} = 2, hR\delta^{-1} = 0.01.$$

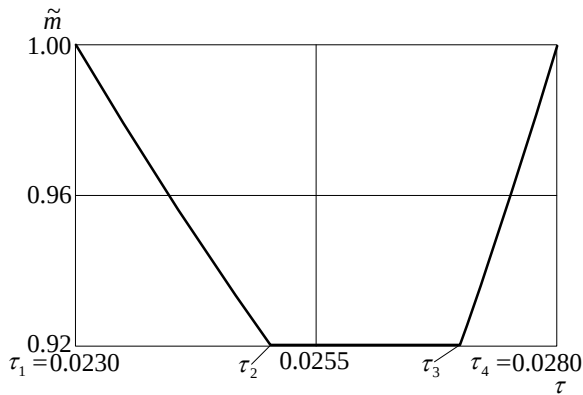


Рис. 1. Изменение границы области вязкопластического течения в зависимости от времени

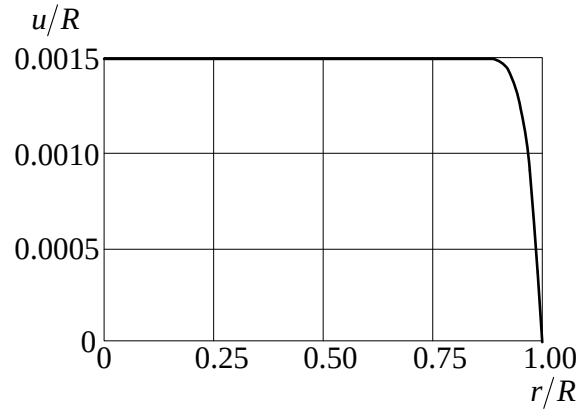


Рис. 2. Перемещения точек материала пробки в конечный момент времени

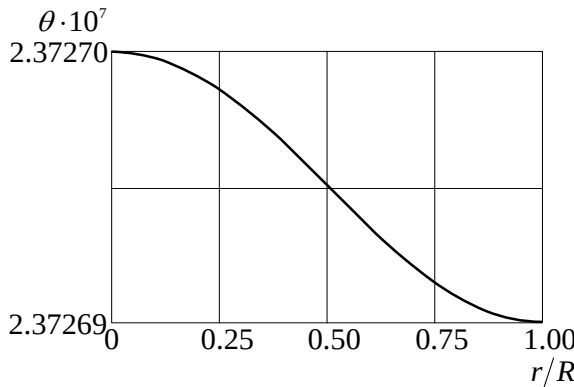


Рис. 3. Распределение температуры в момент времени t_5

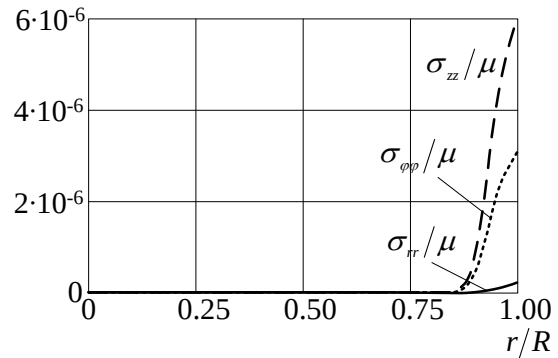


Рис. 4. Остаточные напряжения

Изменения границ области вязкопластического течения в зависимости от безразмерного времени τ : $\tilde{m} = m/R$ в интервале от $\tau_1 = 0.023$ до $\tau_3 = 0.027$ и $\tilde{m} = m_1/R$ в интервале от τ_3 до $\tau_4 = 0.028$ иллюстрирует рис. 1.

Распределение перемещений точек материала в конечный момент времени представлено на рис. 2., распределение температуры в материале в момент времени t_5 и остаточных напряжений - на рис. 3 и рис. 4.

В третьей главе представлено решение аналогичной по постановке задачи, описанной во второй главе, однако теперь полагаем, что в окрестности поверхности трубы возможно проскальзывание материала. Таким образом, изменение температуры в деформируемом материале происходит и за счет процессов необратимого деформирования, и за счет трения материала о граничную шероховатую поверхность трубы.

В § 3.1 получено решение задачи до начала в материале вязкопластического течения. Пока

нагружающее давление (16) не превышает некоторого определенного значения, материал удерживается в состоянии прилипания (15) к стенке трубы за счет сухого трения

$$|\sigma_{rz}|_{r=R} < s_0, \quad (30)$$

где s_0 – задаваемая постоянная сухого трения. Пока пластическое течение в материале отсутствует, необратимые деформации накапливаются в материале за счет его ползучести. Необратимое деформирование материала вызывает его разогрев, задаваемый граничными условиями (17). Решение такой неизоотермической задачи, пока выполнено условие (30), полностью совпадает с решением, приведенным в § 2.1.

При дальнейшем увеличении перепада давления в момент времени t_1 , вычисляемый из уравнения $p(t_1) = 2ls_0R^{-1}$, неравенство (30) обращается в равенство, и пробка начнет проскальзывать вдоль стенки трубы. Поэтому условие прилипания (15) заменяется на граничное условие

$$(|\sigma_{rz}| - s_0 - \xi v)_{r=R} = 0, \quad (31)$$

где ξ – постоянная вязкого трения. С момента времени t_1 материал начинает нагреваться из-за трения о жесткую стенку трубы, что приводит к необходимости изменения краевых условий для температуры. В этом случае заменяем первое условие (17) условием непрерывности температуры в момент времени t_1 , а третье условие (17) – граничным условием

$$\theta(R, t) = \gamma_1 u(R, t), \quad (32)$$

в котором γ_1 – задаваемая постоянная теплопроизводства за счет трения. Дополнительно полагаем, что температура θ не достигает температуры плавления в процессе деформирования.

Расчет температуры и параметров напряженно-деформированного состояния с момента времени t_1 осуществляется по тем же самым формулам, что и в случае выполнения условий прилипания (15). Единственным отличием является то, что при нахождении перемещения используется граничное условие

$$u(R, t) = \frac{R}{2\zeta l} \int_{t_1}^t p dt - \frac{s_0(t - t_1)}{\xi}.$$

Полученное решение неизоотермической задачи при возрастающем перепаде давления остается справедливым до момента времени t_2 , определяемого из уравнения $p(t_2)R = 2lk(t_2)$, в который на боковой границе пробки $r = R$ впервые выполнится условие пластического течения (12) в виде $|\sigma_{rz}|_{r=R} = k(t_2)$.

Вязкопластическое течение при возрастающем и постоянном перепаде давления рассмотрено в § 3.2. Аналогично § 2.2 получена система уравнений относительно неизвестных функций: θ в областях $0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$, $m(t)$ и $\varepsilon_{rz}^{v_0}$. К этой системе добавляем второе граничное условие (17), граничное условие (32) и начальные условия $m(t_2) = R$, $\varepsilon_{rz}^{v_0}(R) = -B(t_2)n(t_2)(p(t_2)R/l)^{n(t_2)-1}$. Также принимается непрерывность искомой функция θ и ее производной $\partial\theta/\partial r$ на границе $r = m(t)$ и непрерывность температуры в момент начала вязкопластического течения t_2 . Полученная система уравнений решается в промежутке времени $[t_2, t_3]$, где t_3 – момент времени, в который перепад давления далее полагаем постоянным, равным

$p(t_3)$. Напряженно-деформированное состояние в таком случае также удовлетворяет соотношениям данного раздела при $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ в уравнениях теплопроводности. В отличие от задачи, решенной во второй главе, область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ при постоянном давлении продолжает развиваться.

Течение при убывающем перепаде давления, приводящем к разгрузке материала и его остыванию изучено в § 3.3. С некоторого момента времени $t_4 > t_3$ перепад давления на граничных поверхностях пробки начинаем уменьшать, что приводит к уменьшению скорости движения границы $r = m(t)$, разделяющей области вязкоупругого деформирования и течения, пока в некоторый расчетный момент времени t_5 скорость не станет равной нулю. С момента времени t_5 от неподвижной границы $r = m(t_5)$ отделяется новая граница $r = m_1(t)$, движущаяся в обратную сторону к боковой границе пробки $r = R$. Граница $r = m_1(t)$ разделяет уменьшающуюся область вязкопластического течения $m_1(t) \leq r \leq R$ и область $m(t_5) \leq r \leq m_1(t)$ с накопленными необратимыми пластическими деформациями. В этой области необратимые деформации теперь накапливаются в результате ползучести, как и в области $0 \leq r \leq m(t_5)$. Для решения системы уравнений относительно неизвестных функций θ в областях $0 \leq r \leq m_1(t)$ и $m_1(t) \leq r \leq R$, $m_1(t)$ используются второе граничное условие (17), граничное условие (32) и начальное условие $m_1(t_5) = m(t_5)$. Также как и ранее принималась непрерывность искомой функция θ и ее производной $\partial\theta/\partial r$ на границе $r = m_1(t)$ и непрерывность температуры в момент времени t_5 .

При дальнейшем уменьшении перепада давления в момент времени t_6 , который вычисляется из уравнения $p(t_6) = 2ls_0R^{-1}$, на боковой граничной поверхности $r = R$ неравенство (30) обращается в равенство: $|\sigma_{rz}|_{r=R} = s_0$, условие проскальзывания (31) перестает выполняться, то есть, материал вновь удерживается в состоянии прилипания в окрестности жесткой стенки трубы $r = R$ за счет сухого трения, и его нагрев за счет трения на границе $r = R$ прекращается. Поэтому граничное условие для температуры (32) заменяем вторым условием (29).

Далее в расчетный момент времени t_7 граница $r = m_1(t)$ совпадает с боковой поверхностью пробки $r = R$. С этого момента времени вязкопластическое течение в материале прекращается, а накопление необратимых деформаций теперь происходит в процессе ползучести. Уравнение теплопроводности во всем слое имеет вид (22).

В момент времени t_8 , вычисляемый из уравнения $p(t_8) = 0$, перепад давления становится равным нулю. Также становятся равными нулю компонента обратимых деформаций m_{rz} и компонента напряжений σ_{rz} , а остальные компоненты тензора напряжений перестают зависеть от координаты z . С момента времени t_8 уравнение теплопроводности примет форму (28) и решается с учетом второго граничного условия (17), граничных условий (29) и начального условия непрерывности температуры в момент времени t_8 . С течением времени материал полностью остывает.

Результаты расчетов для линейной функции давления

$$p(t) = \begin{cases} \alpha_1 t, & 0 \leq t < t_3, \\ \alpha_1 t_3, & t_3 \leq t < t_4, \\ \alpha_1 t_3 - \alpha_2 (t - t_4), & t_4 \leq t < t_8, \quad t_8 = \alpha_1 \alpha_2^{-1} t_3 + t_4. \end{cases}$$

и постоянных материала, приведенных в диссертации и соответствующих алюминиевому сплаву, представлены на графиках. Изменение границы области вязкопластического течения в зависимости от безразмерного времени τ : $\tilde{m} = m/R$ в интервале от $\tau_2 = 0.0083$ до $\tau_5 = 0.0098$ и $\tilde{m} = m_1/R$ в интервале от τ_5 до $\tau_7 = 0.0105$ представлено на рис. 5, на рис. 6 приведены распределения остаточных напряжений $\tilde{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr}/\mu$, $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ и $\tilde{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz}/\mu$ в материале пробки.

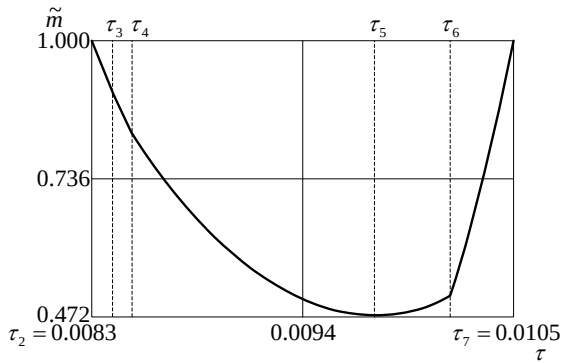


Рис. 5. Изменение границы области вязкопластического течения в зависимости от времени

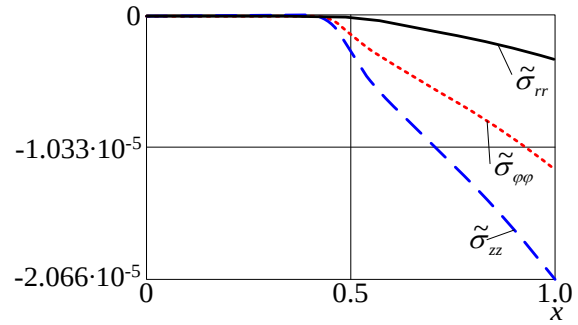


Рис. 6. Остаточные напряжения

В четвертой главе получено решение неизо термической краевой задачи о деформировании упруговязкопластического материала в жесткой круглой трубе при наличии слоя смазки. Постановка задачи и обратимое деформирование материалов рассмотрены в § 4.1. Упруговязкопластический материал и слой смазки находятся в круглой жесткой трубе радиуса R . Основной материал занимает область $0 \leq r \leq r_1$ и его термомеханические свойства заданы параметрами с индексом 1. Параметры слоя смазки $r_1 \leq r \leq R$ обозначены индексом 2. Считаем, что на поверхности соприкосновения основного материала и материала смазки $r = r_1$ перемещения непрерывны. Деформирование материала и смазки в трубе происходит под действием возрастающего со временем перепада давления:

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = -p(t), \quad p(t) = \alpha_1 t, \quad \alpha_1 > 0. \quad (33)$$

Пока остается верным неравенство (30) на границе $r = R$ выполняются условия (15) жесткого сцепления материала смазки со стенками трубы. Постоянную сухого трения s_0 полагаем меньше предела текучести при комнатной температуре $s_0 < k_{02}$. Материал до приложения механической нагрузки находится в свободном состоянии и сначала деформирование является обратимым. Решение упругой изотермической задачи находится с использованием формулы Мурнагана (4) при $\theta = 0$, уравнений равновесия, краевых условий (15) и (33) и условия непрерывности перемещений и скорости на границе $r = r_1$, разделяющей основной материал и слой смазки. С момента времени $t_1 = 2\alpha^{-1}R^{-1}\sigma_0$ неравенство (30) перестанет выполняться,

начинается проскальзывание материала смазки на границе $r = R$, заданное условием (31), и его нагревание из-за трения о жесткую стенку трубы. Для формирующегося поля температур принимаем условия

$$\begin{aligned} \theta(r, t_1) = 0, \quad \theta(r, t)|_{r=R} = \gamma_1 u(r, t)|_{r=R}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \\ [\theta]_{r=r_1} = 0, \quad [q]_{r=r_1} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь $q = q_z(r, t) = -\lambda_i T_0 \theta'$ – отличные от нуля компоненты векторов теплового потока материала и смазки, λ_i – их коэффициенты теплопроводности, квадратными скобками обозначен скачок функции. Согласно четвертому и пятому условиям (34) температура и тепловой поток на границе раздела двух сред непрерывны. Полагаем также, что температура не достигает температуры плавления в процессе деформирования.

Уравнения теплопроводности (7) для основного материала и для материала смазки принимают форму

$$\left(1 + \beta_{1i} \theta + \frac{\beta_{3i} l_i p^2 r^2}{8(\mu_i - l_i \theta)^3} \right) \dot{\theta} + \frac{\beta_{3i} p \dot{p} r^2}{8(\mu_i - l_i \theta)^2} = g_i \left(\theta'' + \frac{\theta'}{r} \right). \quad (35)$$

В (35) точкой обозначена производная по времени. С ростом давления в момент времени $t_2 > t_1$, на границе $r = R$ в материале смазки выполнится условие пластичности $\sigma_{rz}|_{r=R} = -k(t_2)$.

Вязкопластическое течение в слое смазки, а затем и в основном материале изучено в § 4.2. Область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ (III) первоначально развивается в слое смазки, в областях $0 \leq r \leq r_1$ (I) и $r_1 \leq r \leq m(t)$ (II) смазка и основной материал деформируются обратимо (рис. 7 (а)). Движущаяся упругопластическая граница $r = m(t)$ разделяет области II и III. Уравнение для определения положения границы $r = m(t)$ следует из условия равенства нулю компоненты тензора скоростей пластических деформаций ε_{rz}^p :

$$p(t)m(t) = 2k_{02} \left(1 - \frac{\theta(m(t), t)}{\theta_{m2}} \right)^2. \quad (36)$$

В области течения III уравнение теплопроводности (9) принимает форму

$$\left(1 + \beta_{1i} \theta + \frac{\beta_{3i} l_i p^2 r^2}{8(\mu_i - l_i \theta)^3} \right) \dot{\theta} + \frac{\beta_{3i} p \dot{p} r^2}{8(\mu_i - l_i \theta)^2} = g_i \left(\theta'' + \frac{\theta'}{r} \right) + \frac{pr}{2\nu_{2i}\eta} \left(k - \frac{pr}{2} \right). \quad (37)$$

Здесь $i = 2$. В упругих областях I и II остаются верными уравнения (35). Система уравнений (35) – (37) относительно неизвестных функций $\theta(r, t)$ и $m(t)$ решается с учетом последних четырех условий (34) и непрерывности температуры в момент начала пластического течения t_2 , а также непрерывности температуры и теплового потока на упругопластической границе $r = m(t)$.

При дальнейшем увеличении перепада давления и росте области течения в некоторый момент времени $t_3 > t_2$ упругопластическая граница $r = m(t)$ сравняется с границей раздела материала и смазки $r = r_1$. С этого момента времени остается две области: упругая область I, в которой расположен основной материал и область течения III. То есть вязкопластическое течение теперь продолжается во всей области со смазкой.

Далее при увеличении нагрузки в момент времени $t_4 > t_3$ при нагружающем давлении $p^* = -\alpha t_4 z + p_0$ выполнится условие пластичности $\sigma_{rz}|_{r=r_1} = -k(t_4)$ на границе основного материала $r = r_1$.

Начиная с момента времени t_4 развивается область $m_1(t) \leq r \leq r_1$ (IV), в которой происходит вязкопластическое течение основного материала. Новая упругопластическая граница $r = m_1(t)$ отделяет эту область от области $0 \leq r \leq m_1(t)$ (I), в которой основной материал продолжает деформироваться обратимо. Также остается область течения материала смазки $r_1 \leq r \leq R$ (III) (рис. 7 (b)).

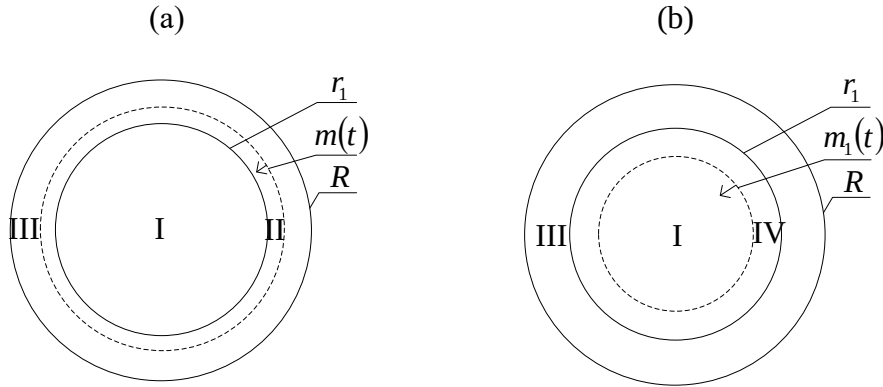


Рис. 7. Схемы областей деформирования в промежутках времени $[t_2, t_3]$ (a) и $[t_4, t_5]$ (b)

Полагая с момента времени $t_5 > t_4$ перепад давления постоянным, $p(t) = \alpha_1 t_5$, получаем, что течение продолжается в областях III и IV, в области I материал продолжает деформироваться обратимо, скорость движения упругопластической границы $r = m_1(t)$ по основному материалу снижается.

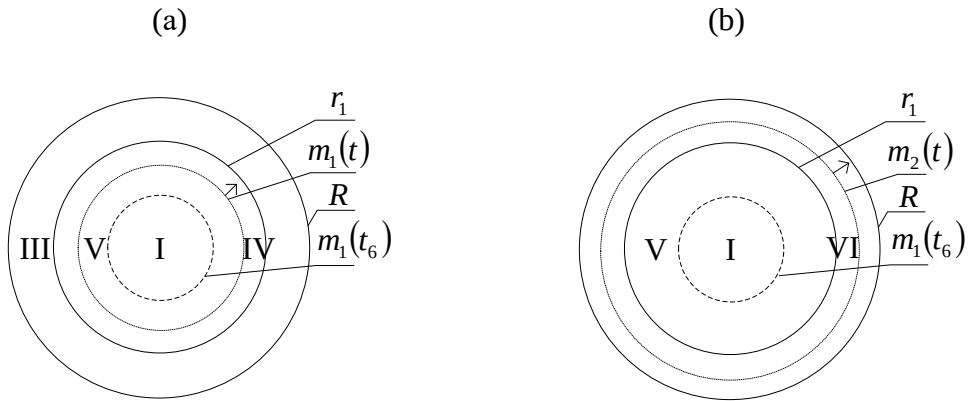


Рис. 8. Схемы областей деформирования в промежутках времени $[t_6, t_8]$ (a) и $[t_8, t_9]$ (b)

Течение при убывающем перепаде давления $p(t) = \alpha_1 t_5 - \beta_1(t - t_6)$ с момента времени $t_6 > t_5$, разгрузка и остывание рассмотрены в § 4.3. С момента времени t_6 упругопластическая граница $r = m_1(t)$ движется в обратную сторону. Возникает новая область $m_1(t_6) \leq r \leq m_1(t)$ (V), в которой происходит разгрузка. В областях III и IV продолжается вязкопластическое течение, в области I

материал по-прежнему деформируется обратимо (Рис. 8(a)).

В момент времени $t_7 > t_6$ упругопластическая граница $r = m_1(t)$ доходит до границы $r = r_1$. С этого момента времени течение продолжается только в смазке (область III), в области I происходит упругое деформирование, а в области V – разгрузка.

Далее в момент времени $t_8 > t_7$ в смазке появляется новая упругопластическая граница $r = m_2(t)$, движущаяся от границы $r = r_1$ к границе $r = R$. С этого момента времени помимо области V появляется новая область разгрузки $r_1 \leq r \leq m_2(t)$ (VI), в области $m_2(t) \leq r \leq R$ (III) продолжается течение, а в области I – обратимое деформирование (Рис. 8(b)).

В момент времени $t_9 > t_8$ упругопластическая граница $r = m_2(t)$ доходит до границы $r = R$ и пластическое течение в смазке прекращается. Теперь деформируемые материалы разделены на три области – I, V и VI.

При последующем снижении нагрузки в момент времени $t_{10} > t_9$, для которого выполняется зависимость $p(t_{10}) = 2R^{-1}s_0$, на границе смазки с трубой $r = R$ выполнится равенство $|\sigma_{rz}|_{r=R} = s_0$. С этого момента времени материал смазки вновь удерживается в состоянии прилипания в окрестности жесткой стенки трубы $r = R$ и разогрев смазки за счет трения прекращается.

В момент времени $t_{11} = \alpha_1 t_5 / \alpha_2 + t_6$ перепад давления становится равным нулю. Также становятся равными нулю компонента обратимых деформаций m_{rz} и компонента напряжений σ_{rz} . С этого момента времени уравнение теплопроводности принимает вид

$$(1 + \beta_{ii} \theta) \dot{\theta} = g_i \left(\theta'' + \frac{\theta'}{r} \right)$$

при $i = 1$ для областей I и V и при $i = 2$ для области VI. С течением времени материал полностью остывает.

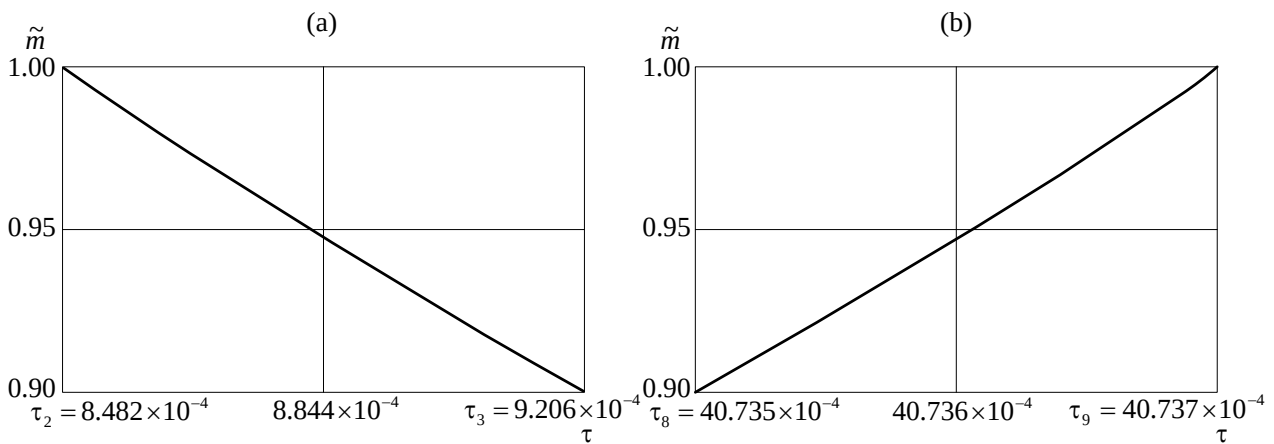


Рис. 9. Изменение упругопластической границы в слое смазки в зависимости от времени

На рис. 9 (a) представлен график упругопластической границы m/R , движущейся в смазке, от момента возникновения течения τ_2 до момента времени τ_3 , в который область течения охватывает всю смазку. Рис.9 (b) иллюстрирует изменение упругопластической границы в смазке от момента времени τ_8 до момента полного прекращения вязкопластического течения τ_9 . На рис. 10 изображен график упругопластической границы m_1/R в основном материале от момента

начала вязкопластического течения τ_4 до момента его прекращения τ_7 .

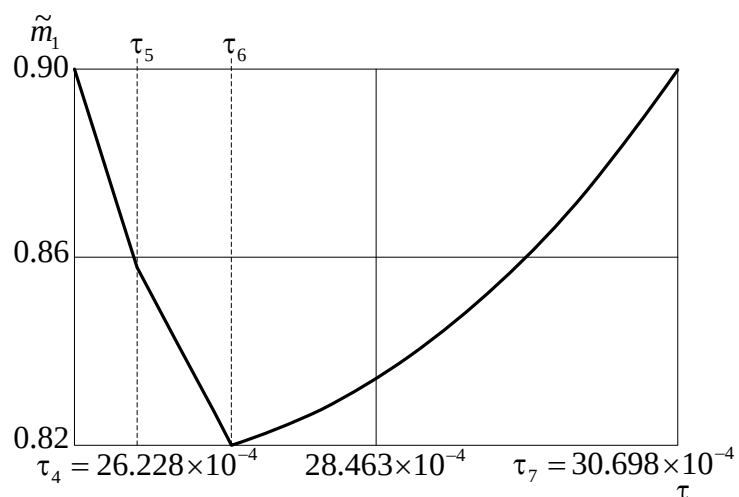


Рис. 10. Изменение упругопластической границы в основном материале в зависимости от времени

На рис. 11 представлен график перемещений точек основного материала и смазки в конечный момент времени, когда произошла полная разгрузка и материалы полностью остыли, на рис. 12 – остаточные напряжения.



Рис. 11. Распределение перемещений точек материала и смазки в конечный момент времени

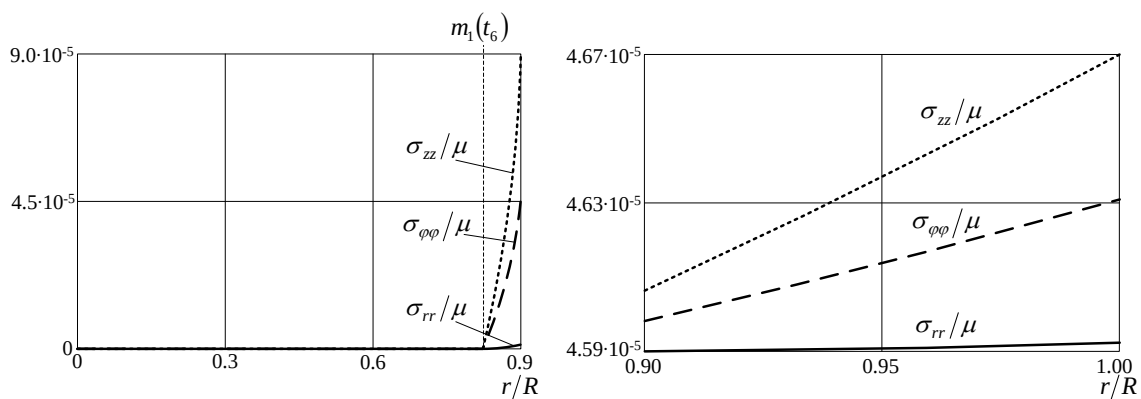


Рис. 12. Остаточные напряжения в основном материале и смазке

На графиках $r_1 R^{-1} = 0.9$. Остальные значения постоянных, соответствующие алюминиевому сплаву и тефлоновой смазке, приведены в диссертации.

В заключении представлены основные результаты работы, состоящие в следующем:

В первой главе изложены соотношения неизоэтермической модели больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами. Необратимые деформации в материале могут накапливаться в результате процессов ползучести и пластического течения. Вязкие свойства материалов учитываются как на стадии пластического течения (вязкопластичность), так и на стадии, ему предшествующей и при разгрузке (ползучесть). Параметры ползучести, предел текучести и коэффициент динамической вязкости материала зависят от температуры.

Во второй главе получено решение связанной краевой задачи теории больших упругопластических деформаций о неизоэтермическом деформировании пробки конечной длины в круглой недеформируемой трубе под действием перепада давления, сначала возрастающего с течением времени, затем постоянного и далее убывающего до нуля. Необратимые деформации в материале накапливаются в результате процессов ползучести и вязкопластического течения. Разогрев материала происходит только за счет процессов необратимого деформирования, так как материал пробки имеет жесткое сцепление со стенками трубы, то есть отсутствует трение материала о границу, и нет дополнительного притока тепла извне. Изучены процессы ползучести и вязкопластического течения при возрастающем и постоянном перепаде давления, торможение течения и разгрузка среды при убывающем давлении, а также остывание материала после полного снятия механической нагрузки.

В третьей главе получено решение неизоэтермической связанной краевой задачи теории больших упругопластических деформаций о продавливании пробки конечной длины по круглой недеформируемой трубе под действием изменяющегося перепада давления с учетом трения материала о граничную шероховатую поверхность трубы, которое вызывает его разогрев. Также изменение температуры материала происходит за счет процессов необратимого деформирования. Необратимые деформации накапливаются в материале пробки с начала процесса деформирования и могут быть как деформациями ползучести, так и пластическими деформациями. Рассмотрены процесс ползучести материала при возрастающем перепаде давления, возникновение и развитие вязкопластического течения при возрастающем, постоянном и уменьшающемся перепаде давления, торможение течения при дальнейшем уменьшении выдавливающего усилия, разгрузка и остывание материала после полного снятия нагружающего усилия. Рассчитаны температура и параметры напряженно-деформированного состояния на каждом этапе нагружения, установлены закономерности продвижения упругопластических границ по деформируемому материалу, определены остаточные деформации и напряжения.

В четвертой главе получено решение неизоэтермической краевой задачи о деформировании материала в жесткой круглой трубе при наличии слоя смазки. Деформирование и продвижение материала и смазки происходит вследствие приложения переменного перепада давления. Трение о трубу вызывает разогрев материала смазки и основного материала. Разогрев материалов также происходит в процессе накопления ими пластических деформаций. Основным материал и смазка обладают упругими, вязкими и пластическими свойствами, а также имеют разные значения упругих модулей, предела текучести и коэффициента вязкости. Рассмотрены обратимое деформирование, возникновение и развитие вязкопластического течения в слое смазки

и распространение течения в основной материал. Рассчитаны температура и параметры напряженно-деформированного состояния на каждом этапе нагружения, определены остаточные деформации и напряжения.

Во всех перечисленных задачах для решения полученных систем дифференциальных уравнений в частных производных на основе классического конечно-разностного метода были разработаны численные схемы для неравномерных сеток с неизвестными движущимися упругопластическими границами. Данные схемы позволяют получить распределения необратимых деформаций в областях вязкоупругого деформирования, в областях течения и разгрузки, а также положение неизвестных упругопластических границ на каждом шаге по времени. Сходимость схем проверялась прогонами модели на сужающихся сетках.

Публикации по теме диссертации

Публикации в изданиях, входящих в международную систему цитирования Web of Science

1. Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L., Popova E.O. Heat Production due to Creep Strains and Wall Viscoplastic Flow in the Plug Material in a Round Pipe under the Action of Variable Pressure Difference. *Mechanics of Solids*, 2024, Vol. 59, No. 5, pp. 2694–2705. <https://doi.org/10.1134/S0025654424604270>
Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. Производство тепла за счет деформаций ползучести и пристеночного вязкопластического течения в материале пробки в круглой трубе под действием переменного перепада давления // Известия РАН. Механика твердого тела. 2024. № 5. С. 84-101.

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК

2. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. О теплотворной способности необратимого деформирования материала пробки в круглой трубе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1 (59). С. 88-100. DOI: 10.37972/c hg ru .2 02 4. 59 .1 .0 07
3. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. Деформирование и разогрев за счёт приповерхностного трения материала пробки в круглой трубе при её движении под действием изменяющегося перепада давления // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2024. № 7 (79). С. 68-76.
4. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. Необратимое деформирование и разогрев упруговязкопластического материала в круглой трубе при наличии слоя смазки // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2025. №3. С. 81–91. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.07

Публикации в других изданиях

5. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. Неизотермические процессы ползучести и вязкопластического течения слоя материала в круглой трубе // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4-6 декабря 2023 г. Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации». 2024. С. 1086-1091.
6. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. Ползучесть и вязкопластическое течение материала пробки в круглой трубе под действием изменяющегося перепада давления // Вычислительные технологии и прикладная математика: Материалы III научной конференции с

международным участием «Вычислительные технологии и прикладная математика» (7–11 октября 2024 г., Комсомольск-на-Амуре) / ред.: Э.А. Дмитриев, А.И. Евстигнеев, С.А. Гордин, И.В. Зайченко. Комсомольск-на-Амуре: Изд.-во Комсомольского-на-Амуре гос. Университета. 2024. С. 222-225.

7. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. Необратимое деформирование материала пробки в круглой трубе в неизотермическом случае // Механика деформируемого твердого тела в проектировании материалов и конструкций. Пермь, 7 – 8 ноября 2024 г. Программа и тезисы докладов. ПФИЦ УрО РАН. Пермь. 2024. С. 119-120.
8. Попова Е.О. Моделирование необратимого деформирования материала в круглой трубе при наличии слоя смазки // Вычислительные технологии и прикладная математика: Тезисы докладов IV Международного семинара, 30 июня- 5 июля 2025 г., Владивосток. Владивосток.: Изд-во ДВФУ. 2025. С.57- 58.

Подписано в печать: 08.10.2025. Формат 60 ×84/16.

Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ.л. .

Тираж 100 экз. Заказ

Отпечатано в ресурсном информационно-методическом центре ВВГУ

690014, г. Владивосток, ул. Гоголя,41

