

На правах рукописи



ВАСИЛЬЕВ АЛЕКСЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ В
ОБЛАСТИ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ**

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Комсомольск-на-Амуре – 2016

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
ТАРАНУХА Николай Алексеевич,
заведующий кафедрой «Кораблестроение»,
ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет (КнАГТУ)».

Официальные оппоненты: доктор технических наук, доцент
ОДИНОКОВА Ольга Анатольевна, профессор кафедры «Промышленное и гражданское строительство»
ФГБОУ ВПО «Тихоокеанский государственный университет (ТОГУ)», г. Хабаровск

кандидат технических наук
СОСНИН Александр Александрович, научный сотрудник лаборатории проблем металлотехнологий,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения и металлургии
Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Комсомольск-на-Амуре

Ведущая организация: ФГАОУ ВПО «Дальневосточный федеральный университет (ДВФУ)», г. Владивосток

Защита диссертации состоится «22» апреля 2016 года в 13 час. 00 мин., в ауд. 201 – 3 на заседании диссертационного совета Д 999.055.04 при Комсомольском-на-Амуре государственном техническом университете по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке КнАГТУ и на сайте www.knastu.ru

Автореферат разослан «___» _____ 2016 г.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный гербовой печатью, просим направлять в адрес диссертационного совета Д 999.055.04,
e-mail: diss@knastu.ru

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент



А.Ю. Лошманов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

В настоящее время композитные материалы активно используют в различных современных отраслях промышленности. Большая распространенность композитов требует изучения их свойств, влияющих на жесткость и несущую способность конструкций на разных этапах их работы под нагрузкой. Существуют различные подходы для учета совместной работы нескольких материалов в составе одного, при изменении механических характеристик этих материалов под нагрузкой. Однако единой, общей методики для этого на настоящий момент нет. Поэтому тема диссертации является актуальной.

Цель работы: разработать математическую модель и методику расчета линейных и физически нелинейных задач численного исследования композитных материалов и конструкций в области их предельных состояний.

Задачи

- 1) Провести анализ и систематизацию математических моделей критериев прочности материалов и конструкций.
- 2) На основе анализа критериев прочности построить математическую модель для исследования прочности материалов в составе композита.
- 3) Разработать численные процедуры и спроектировать программный комплекс для численного исследования свойств материалов в составе композита и напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных.
- 4) Разработать методику для численного исследования напряженно-деформированное состояние конструкций из композитных материалов на различных этапах статического нагружения, включая предельные. Выполнить тестирование и практическую апробацию математической модели и программного комплекса.
- 5) Выполнить сопоставление и анализ полученных результатов. Сделать выводы и рекомендации по применению данной модели

Научная новизна работы

Основные результаты, полученные автором при проведении исследований:

- 1) Проанализированы и систематизированы математические модели критериев прочности материалов и конструкций
- 2) Построена математическая модель для расчета напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных материалов на различных этапах нагружения.
- 3) Разработанные численные процедуры и спроектирован программный комплекс для численного исследования напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных материалов и свойств этих материалов.
- 4) Для конструкций из композитных материалов разработаны:
 - методика численного исследования напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных материалов, учитывающая физически-нелинейные свойства материалов в составе композита;
 - матрица жесткости для расчетов композитных конструкций по МКЭ по математической модели, учитывающей нелинейность характеристик материалов;
 - сформулирована, проверена и использована идея комбинирования объемов

для определения приведенных механических характеристик при вычислении матрицы жесткости композитного нелинейного конечного элемента.

Практическая значимость

Разработана методика исследования напряженно-деформированного состояний конструкций из композитных материалов в области предельной прочности, с учетом изменения механических характеристик этих материалов в результате нагружения конструкции. В результате, при простых напряженных состояниях, расчетным путем можно определить напряженно-деформированное состояние на различных этапах нагружения, вплоть до предельного. При этом можно учитывать любое количество составляющих в пределах конечного элемента. Эти составляющие характеризуются своими объемами, и данную методику можно применить для композитов, имеющих в своем составе инородные включения, газовые пузыри, технологические отверстия.

Апробация работы

Основные результаты диссертации были изложены автором в докладах на:

Международной заочной научно-практической конференции «Современное общество, образование и наука». Тамбов, 2014 г.; Международном симпозиуме «Наука. Инновации. Техника и технологии: проблемы, достижения и перспективы», г. Комсомольск-на-Амуре. 2015 г.; The 29th Asia-Pacific Technical Exchange and Advisory Meeting on Marine Structures (TEAM-2015). – Vladivostok, 2015.; Научный семинар в ФГБУН ИМиМ ДВО РАН, 2016; Расширенный научный семинар профильных кафедр ФГБОУ ВПО КнАГТУ, 2016.

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликовано 11 работ, в том числе четыре статьи в ведущих рецензируемых журналах из списка ВАК [1–4], а также ряд статей в сборниках, трудах конференций, прочих журналах [5–7]. Получены четыре свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [8–11].

В настоящей работе представлены результаты, полученные автором самостоятельно, или при его непосредственном участии. Использование результатов диссертации подтверждено следующими документами:

1) Акт о внедрении результатов диссертации в Научно-исследовательскую работу ФГБОУ КнАГТУ. Полученные результаты были использованы при выполнении гранта: Задание № 9.356.2014/К.

2) Акт о внедрении результатов диссертации в учебном процессе на кафедре «Кораблестроение» ФГБОУ КнАГТУ.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав и заключения, списка литературы (130 наименований) и трех приложений. Объем основного содержания – 165 страниц, в том числе 84 рисунка, три приложения на девяти страницах.

Положения, выносимые на защиту.

- Систематизация математических моделей критериев прочности материалов и конструкций.

- Новая математическая модель, включающая аппроксимацию функциональных зависимостей диаграмм деформирования материалов в составе композита, а также матрицу жесткости физически-нелинейного композитного конечного элемента (КЭ).

- Численные процедуры, алгоритмы и программы, реализующие данную ма-

тематическую модель на основе МКЭ.

- Методика исследования НДС конструкций из композитных материалов в области предельной прочности, с учетом изменения механических характеристик этих материалов в результате нагружения в составе композита.

- Идея комбинирования объемов для определения приведенных механических характеристик при вычислении матрицы жесткости композитного конечного элемента.

- Результаты, полученные по математической модели и методике данной диссертации в сравнении с экспериментальными исследованиями других авторов и расчетами в других программных продуктах.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ВВЕДЕНИЕ содержит актуальность темы; цели и задачи исследования; предмет и объект исследования; научную новизну; практическую значимость.

В ПЕРВОЙ ГЛАВЕ на основании обзора отечественной и зарубежной литературы можно сделать вывод о существовании множества различных математических моделей и подходов для определения прочности композитных материалов, расчета конструкций и изделий из них. Наибольшее распространение в области исследований композитов имеют феноменологически - статистические подходы, основанные на аппроксимации экспериментальных данных при простейших испытаниях материала. Выполнен обзор методов экспериментального исследования композитных материалов. Отмечен вклад в исследование композитов таких авторов, как А.А. Гвоздев, В.Ф. Зинченко, Н.И. Карпенко, С.Ф. Клованич, В.М. Круглов, В.А. Латипенко, Г. П. Черепанов, А.В. Яшин, Z.P. Bazant, V. Cervenka, A. Kelly, E.P. Warnke, K.J. Willam.

В конце первой главы выполнена постановка задачи исследования, определена структура диссертационной работы.

ВО ВТОРОЙ ГЛАВЕ произведен анализ математических моделей критериев прочности материалов и их систематизация. Описаны преимущества и недостатки этих математических моделей.



Рис. 1. Систематизация математических моделей критериев прочности материалов

В данной работе исследуются конструкции из однонаправленных композитов. Для их расчетов наиболее подходят математические модели критериев (1.1.2.1), (1.1.2.2), (1.1.2.4). При простых видах нагружения возможно использование диаграмм деформирования (1.1.4) при одноосном растяжении и сжатии. Они важны как для непосредственного применения в расчетах, так и для построения более общих моделей деформирования материалов, относящихся к неодноосным напряженным состояниям. В связи с этим возникает необходимость более подробного изучения диаграмм деформирования материалов и применения их для исследования конструкций.

В ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ построена математическая модель для исследования конструкций из композитных материалов в области предельной прочности, основанная на МКЭ. Разработана матрица жесткости нелинейного композитного КЭ. Нелинейность модели основывается на аппроксимационных функциональных зависимостях диаграмм деформирования материалов $\varepsilon - \sigma$. Предлагаемая математическая модель, основанная на МКЭ, позволяет определять напряженно-деформированное состояние в каждом КЭ и конструкции в целом, на различных этапах нагружения и разрушения конструкции, включая предельные.

В первом разделе третьей главы показана традиционная система разрешающих уравнений и выполнена постановка задачи статического расчета: уравнение равновесия, геометрические уравнения (Коши), определяющие (физические) уравнения:

$$[\Phi]^T \{\sigma\} = \{G_v\}, \quad (1) \quad \{\varepsilon\} = [\Phi]\{U\}, \quad (2) \quad \{\sigma\} = [D]_{np} \{\varepsilon\}, \quad (3)$$

где Φ – матрица дифференциальных операторов, $\{G_v\} = \{X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)\}$ – вектор-функция объемных сил; U – вектор перемещений, ε – тензор деформаций, σ – тензор напряжений. $[D]_{np}$ – матрица механических характеристик композитного материала размером 6×6 , содержащая так же информацию о физической нелинейности. Именно с этой матрицей связаны особенности данной диссертации.

$$[\Phi]^T [D]_{np} [\Phi]\{U\} = \{G_v\} \quad (4)$$

во втором разделе третьей главы приведена общая исходная математическая модель, описывающая матрицы жесткости КЭ в общем виде и разрешающие уравнения МКЭ

$$\left(\int_{V_i} [B]^T [D]_{np} [B] dV \right) \{q\}_i + \int_{V_i} [C]^T \{G_v\} dV = 0 \quad (5)$$

$$\{P_v\}_i^{(k)} = \int_{V_i} ([C]^{(k)})^T \{G_v\} dV \quad [K]_{ij}^{(k)} = \int_{V_i} [B]^{(j)T} [D]_{np} [B]^{(k)} dV, \quad (6)$$

где $[B]$ – матрица деформаций КЭ; $[C]$ – матрица интерполяционных функций КЭ; k и j – номера узлов КЭ, $[K]_i$ – матрица жесткости i -го КЭ; $\{P_v\}_i^{(k)}$ – вектор узловых внешних сил КЭ.

В третьем разделе третьей главы приводятся разработанные автором аппроксимирующие функции для диаграмм деформирования материалов при растяжении и сжатии, а также их сопоставление с деформационными зависимостями других авторов.

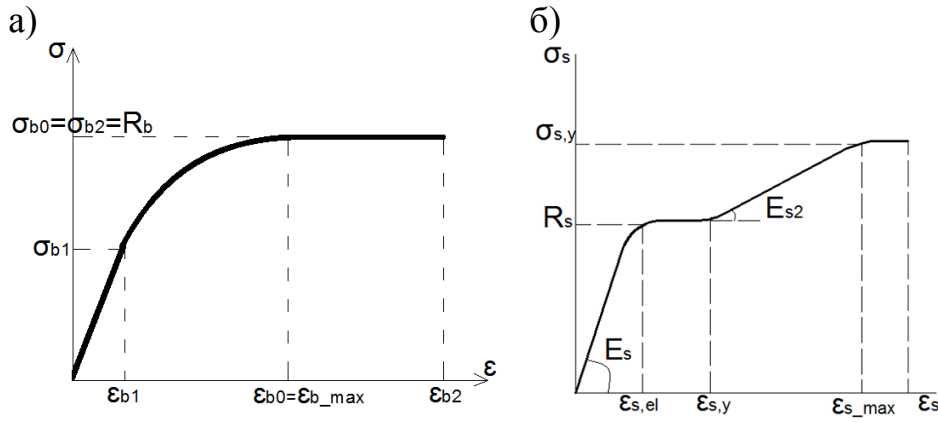


Рис.2. Диаграммы деформирования материалов в составе композита: а – связующего (бетона), б – армирующих элементов (арматуры)

Упругая часть диаграммы сжатия при $0 \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_{b1}$ характеризуется прямой с координатами $(0;0)$, $(0.55R_b/E_0; 0.55R_b)$. Часть функции $\varepsilon_{b1} \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_{b0}$, где материал проявляет свойства ползучести и нелинейности, можно интерполировать с помощью полинома.

$$\sigma_b(\varepsilon_b) = a_1 \varepsilon_b + b_1 \varepsilon_b^2 + c_1 \varepsilon_b^3 + d_1 \varepsilon_b^4, \quad E(\varepsilon_b) = \frac{\sigma_b(\varepsilon_b)}{\varepsilon_b} = a_1 + b_1 \varepsilon_b + c_1 \varepsilon_b^2 + d_1 \varepsilon_b^3 \quad (7)$$

Для определения коэффициентов полинома необходимо решить систему из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 0.55R_b &= a_1 * \frac{0.55R_b}{E_0} + b_1 \left(\frac{0.55R_b}{E_0} \right)^2 + c_1 \left(\frac{0.55R_b}{E_0} \right)^3 + d_1 \left(\frac{0.55R_b}{E_0} \right)^4, \\ \frac{E_0 \varepsilon_{b_max} + R_b}{2\varepsilon_{b_max}} &= a_1 + 2b_1 \left(\frac{0.55R_b}{E_0} \right) + 3c_1 \left(\frac{0.55R_b}{E_0} \right)^2 + 4d_1 \left(\frac{0.55R_b}{E_0} \right)^3, \\ R_b &= a_1 \varepsilon_{b_max} + b_1 \varepsilon_{b_max}^2 + c_1 \varepsilon_{b_max}^3 + d_1 \varepsilon_{b_max}^4, \\ 0 &= a_1 + 2b_1 \varepsilon_{b_max} + 3c_1 \varepsilon_{b_max}^2 + 4d_1 \varepsilon_{b_max}^3, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где a_1, b_1, c_1, d_1 – коэффициенты полинома, R_b – прочность материала при одноосном сжатии, E_0 – начальный модуль упругости, ε_{b_max} – максимальные деформации на диаграмме деформирования материала, $\varepsilon_{b_max} = \varepsilon_0$. Для тяжелых бетонов

$$\varepsilon_{b_max} = \frac{-R_b * (R_b^2 + 6 * 10^7 R_b + 9 * 10^{12})}{E_0 (R_b^2 + 5.4 * 10^6 R_b + 6.75 * 10^{12})} \quad (9)$$

На промежутке $\varepsilon_{b0} \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_{b2}$, характеризующим ниспадающую ветвь на диаграмме деформирования, связь $\varepsilon_b - \sigma_b$ аппроксимируется прямой с координатами $(\varepsilon_{b_max}, R_b)$, (ε_{b2}, R_b) . При этом $\varepsilon_{b2} = 0.0035$.

Диаграммы растяжения строятся аналогично диаграммам сжатия. При этом расчетные значения сопротивления связующего (бетона) сжатию R_b заменяют на расчетные значения сопротивления связующего (бетона) растяжению R_{bt} .

Данные соотношения сформулированы главным образом для бетона, но могут использоваться и для построения диаграмм других материалов.

Прочность и деформативность армирующих элементов характеризуется диаграммой на рисунке 2 б. При этом

$$\varepsilon_{s,el} = \frac{R_s}{E_s}, \quad E_{s2} = \frac{\sigma_{s,y} - R_s}{\varepsilon_{s,int} - \varepsilon_{s,y}} \quad (10)$$

Здесь $\sigma_{s,y}$ – временное сопротивление, R_s – расчетное сопротивление, E_s – модуль упругости армирующих элементов, $\varepsilon_{s,y} = 0.02$.

В четвертом разделе третьей главы представлена матрица жесткости нелинейного композитного конечного элемента.

Композитный конечный элемент представляет собой совместную работу материала матрицы и «размазанной» по объему конечного элемента арматуры, при этом сохраняя свойство сплошности материала. Для вычисления упругих характеристик композитного КЭ применим комбинирование объемов материалов, из которых он состоит. При этом приведенный модуль упругости E_{np} с учетом диаграмм деформирования материалов, для композитного КЭ вычисляется по следующей формуле:

$$E_{np} = \frac{E(\varepsilon_x)_1 V_1 + E(\varepsilon_x)_2 V_2 + \dots + E(\varepsilon_x)_n V_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n}, \quad (11) \quad \mu_{np} = \frac{(\mu_1)_x V_1 + (\mu_2)_x V_2 + \dots + (\mu_n)_x V_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n} \quad (12)$$

где $E_1, E_2, \dots, E_n$ – соответственно нелинейные модули упругости материалов в составе композитного КЭ; $V_1, V_2, \dots, V_n$ – соответственно объемы каждого из материалов в составе композитного КЭ (где n может быть достаточно большим), $(\mu_1)_x, (\mu_2)_x$ и $(\mu_n)_x$ – соответственно коэффициенты Пуассона для каждого материала в композитном КЭ.

Подставляя (8) и (9) в стандартную матрицу получим матрицу упругости для композитного объемного конечного элемента $[D]_{np}$, сочетающего совместную работу различных сред.

$$D_{np} = \frac{E_{np}(1-\mu_{np})}{(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu_{np}}{1-\mu_{np}} & \frac{\mu_{np}}{1-\mu_{np}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_{np}}{1-\mu_{np}} & 1 & \frac{\mu_{np}}{1-\mu_{np}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_{np}}{1-\mu_{np}} & \frac{\mu_{np}}{1-\mu_{np}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-2\mu_{np}}{2(1-\mu_{np})} & 0 & 0 & 1-2\mu_{np} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mu_{np} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mu_{np} \end{bmatrix} \quad (13)$$

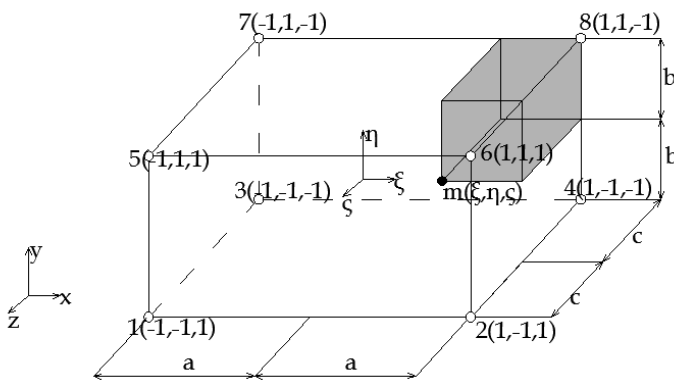


Рис. 4. КЭ прямоугольного параллелепипеда в нормализованных координатах

Конечный элемент в форме параллелепипеда содержит восемь узловых точек. На рисунке 4 изображен типовой конечный элемент в форме прямоугольного параллелепипеда в нормализованных координатах. Здесь a – половина длины конечного элемента в направлении оси X ; b – половина длины конечного элемента по оси Y ; c – половина длины конечного элемента по оси Z ; ξ, η, ζ – нормализованные координаты типового конечного элемента.

Матрица деформаций содержит восемь блоков: $[B] = \begin{bmatrix} [B]^{(1)} & [B]^{(2)} & \dots & [B]^{(k)} & \dots & [B]^{(8)} \end{bmatrix}$

Стандартный блок ее равен:

$$B_i^{(k)} = [\Phi]C_k(\xi, \eta, \varsigma) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{\xi_k(1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma)}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta_k(1+\xi_k\xi)(1+\varsigma_k\varsigma)}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varsigma_k(1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta)}{c} \\ \frac{\eta_k(1+\xi_k\xi)(1+\varsigma_k\varsigma)}{b} & \frac{\xi_k(1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma)}{c} & 0 \\ \frac{b}{0} & \frac{a}{\varsigma_k(1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta)} & \frac{\eta_k(1+\xi_k\xi)(1+\varsigma_k\varsigma)}{b} \\ \frac{\varsigma_k(1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta)}{c} & 0 & \frac{\xi_k(1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma)}{a} \end{bmatrix} \quad (14)$$

При этом каждый из блоков матрицы жесткости может быть вычислен по формуле:

$$[K]_{ij}^{(k)} = \iiint_{V_i} ([B]^{(j)})^T [D]_{np} [B]^{(k)} dV \quad (15)$$

Произведя замену переменных, и имея в виду, что элементарный объем равен:

$$dV = dx dy dz = abc(d\xi d\eta d\varsigma), \quad (16)$$

получается выражение для вычисления матрицы жесткости композитного КЭ:

$$[K]_{ij}^{(k)} = abc \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B]^{(j)})^T [D]_{np} [B]^{(k)} d\xi d\eta d\varsigma \quad (17)$$

При этом каждый элемент матрицы жесткости $[K]_{i,j}^k$ состоит из подматрицы третьего порядка:

$$[K]_{i,j}^{(k)} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} \end{bmatrix} \quad (18)$$

В результате получим матрицу жесткости для КЭ в виде параллелепипеда, которая будет иметь размеры 24x24.

Учитывая, что в прямоугольном элементе в виде параллелепипеда 8 узлов. Вводя переменные $k=1:8$ и $j=1:8$, после взятия определенного интеграла (17), имея ввиду постоянство $[D]_{np}$ по объему элемента, получим:

$$\begin{aligned} K_{1+n,1+m} &= \left[\frac{1-\mu_{np}}{a^2} \xi_k \xi_j \left(1 + \frac{1}{3} \eta_k \eta_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \varsigma_k \varsigma_j\right) + \frac{1-2\mu_{np}}{2} \times \left[\frac{1}{b^2} \eta_k \eta_j \left(1 + \frac{1}{3} \xi_k \xi_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \varsigma_k \varsigma_j\right) + \frac{1}{c^2} \varsigma_k \varsigma_j \left(1 + \frac{1}{3} \xi_k \xi_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_k \eta_j\right) \right] \right] \times \dots \\ &\dots \times \frac{a(E(\varepsilon_x)_1 V_1 + E(\varepsilon_x)_2 V_2 \dots + E(\varepsilon_x)_n V_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})} \\ K_{1+n,2+m} &= \frac{1}{ab} \left(1 + \frac{1}{3} \varsigma_k \varsigma_j\right) \left[\frac{1}{2} \xi_k \eta_j + \mu_{np} (\xi_j \eta_k - \eta_j \xi_k) \right] \times \frac{a(E(\varepsilon_x)_1 V_1 + E(\varepsilon_x)_2 V_2 \dots + E(\varepsilon_x)_n V_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})} \\ K_{1+n,3+m} &= \frac{1}{ac} \left(1 + \frac{1}{3} \eta_k \eta_j\right) \left[\frac{1}{2} \xi_k \varsigma_j + \mu_{np} (\xi_j \varsigma_k - \varsigma_j \xi_k) \right] \times \frac{a(E(\varepsilon_x)_1 V_1 + E(\varepsilon_x)_2 V_2 \dots + E(\varepsilon_x)_n V_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})} \\ &\dots \\ K_{3+n,1+m} &= \frac{1}{ac} \left(1 + \frac{1}{3} \eta_k \eta_j\right) \left[\frac{1}{2} \varsigma_k \xi_j + \mu_{np} (\varsigma_j \xi_k - \xi_j \varsigma_k) \right] \times \frac{a(E(\varepsilon_x)_1 V_1 + E(\varepsilon_x)_2 V_2 \dots + E(\varepsilon_x)_n V_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})} \\ K_{3+n,2+m} &= \frac{1}{bc} \left(1 + \frac{1}{3} \xi_k \xi_j\right) \left[\frac{1}{2} \varsigma_k \eta_j + \mu_{np} (\varsigma_j \eta_k - \eta_j \varsigma_k) \right] \times \frac{a(E(\varepsilon_x)_1 V_1 + E(\varepsilon_x)_2 V_2 \dots + E(\varepsilon_x)_n V_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})} \end{aligned} \quad (19)$$

$$K_{3+n,3+m} = \left[\frac{1-\mu_{np}}{c^2} \varsigma_k \varsigma_j \left(1 + \frac{1}{3} \xi_k \xi_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_k \eta_j\right) + \frac{1-2\mu_{np}}{2} \left[\frac{1}{b^2} \eta_k \eta_j \left(1 + \frac{1}{3} \xi_k \xi_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \varsigma_k \varsigma_j\right) + \frac{1}{a^2} \xi_k \xi_j \left(1 + \frac{1}{3} \eta_k \eta_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \varsigma_k \varsigma_j\right) \right] \right] \times \dots$$

$$\dots \times \frac{a(E(\varepsilon_x)_1 V_1 + E(\varepsilon_x)_2 V_2 \dots + E(\varepsilon_x)_n V_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})}$$

Остальные элементы матрицы жесткости определяются аналогичным образом.

Здесь $n=1+3(j-1)$; $m=1+3(k-1)$. В результате получаем матрицу жесткости КЭ размером 24х24. После расчета матрицы жесткости композитного конечного элемента в форме параллелепипеда, составляется матрица индексов, а затем и общая матрица жесткости системы. Затем, используя вектор сил и общую матрицу жесткости, находится вектор перемещений по формуле:

$$\{\bar{q}\} = [\bar{K}]^{-1} \{\bar{P}\}, \quad (20)$$

где $[\bar{K}]^{-1}$ - обратная общая матрица жесткости системы, $\{\bar{P}\}$ - вектор сил системы, $\{\bar{q}\}$ - вектор перемещений системы.

В качестве метода решения нелинейных задач был использован метод последовательных приближений, суть которого состоит в том, что общая матрица жесткости системы определяется на каждом этапе через узловые перемещения, полученные на предыдущем этапе:

$$[\bar{K}(q^{n-1})][q^n] = [\bar{P}], \quad (21)$$

где n – номер этапа приближения.

В пятом разделе третьей главы кратко приведен алгоритм разрушения композитного материала в конструкции. Данный алгоритм предназначен для расчета конструкций из композитных материалов при простом напряженном состоянии, т. к. использует диаграммы деформирования материала при одноосном растяжении и сжатии. При последовательном увеличении нагрузки на конструкцию происходит постепенное ее разрушение вследствие изменения механических характеристик материалов. В результате происходит изменение механических характеристик матриц жесткости каждого КЭ в дискретной модели конструкции. Характеристики меняются согласно диаграммам $\varepsilon - \sigma$, строящихся по предложенным автором аппроксимационным зависимостям.

В ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЕ представлены алгоритмы работы программ, реализующих разработанную автором математическую модель. В качестве компилятора использовалась программная среда Matlab 2009b, использующая язык программирования Matlab. Алгоритмы в данной главе представлены как на данном языке программирования, так и посредством блок-схем.

«Composit» содержит алгоритм, позволяющий рассчитывать коэффициенты матриц жесткости для однородных и композитных конечных элементов, из которых составляется общая матрица жесткости системы. Так же автором разработаны и применены программы: «Strength», «Ultimate State», «Программа для расчета конструкций из композитных материалов»

Во втором разделе четвертой главы произведено тестирование некоторых разработанных программ на линейном расчете статически-определимой балки из изотропного материала, показало хорошую корреляцию при сравнении с расчетом в ПК ЛИРА и аналитическим расчетом.

В ПЯТОЙ ГЛАВЕ осуществляется тестирование разработанной математической модели и программного обеспечения при исследовании статически-

определимых конструкций из композитных материалов, их сравнение с результатами экспериментов, выполненных другими исследователями, а так же с расчетами в других программных продуктах.

В первом разделе пятой главы рассматриваются два швеллера поперечного сечения 388 x 120 x 12/10, изготовленных из стеклопластика и стеклоуглепластика. Его расчетная схема и дискретная модель приведены на рисунке 5 а, б

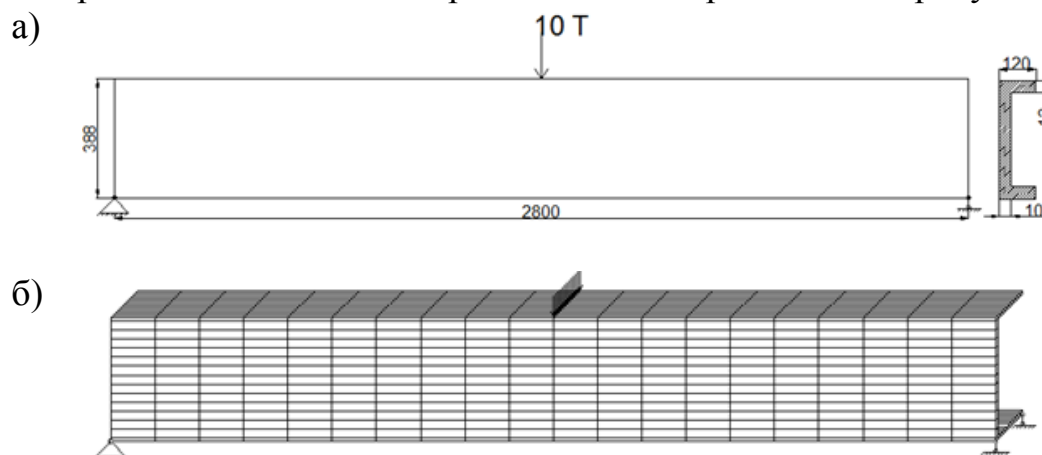


Рис.5. Модель швеллера: а - расчетная схема и дискретная модель стеклоуглепластикового швеллера, б - схема разбивки на конечные элементы.

Как видно из рисунка 6, стеклоуглепластиковый швеллер более жесткий

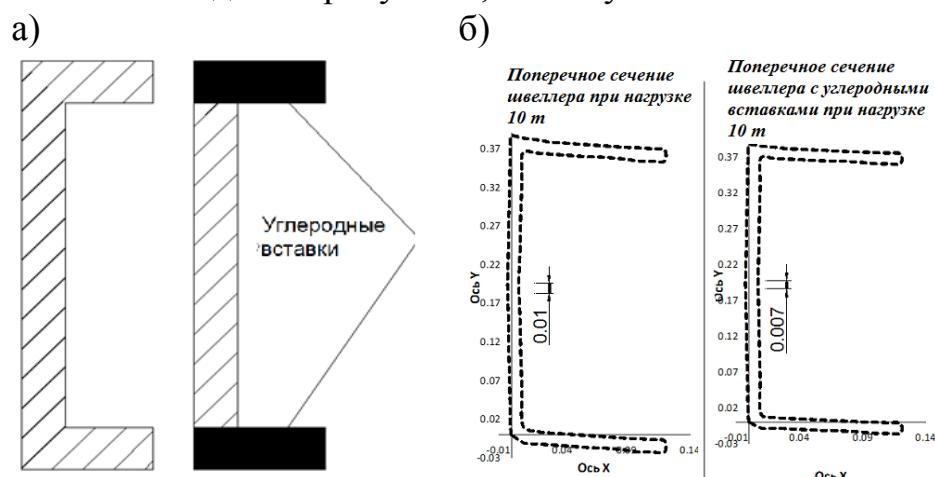


Рис.6. Поперечные сечения швеллеров: а - стеклопластиковый и стеклоуглепластиковый; б - поперечное сечение с перемещением центра тяжести для стеклопластикового и стеклоуглепластикового швеллера.

Результаты расчетов в сравнении с экспериментальными данными показаны в таблице 1

Таблица 1

Материал	Нагрузка, т	Эксперимент, мм	Расчет автора, мм	Отклонение результата расчета автора, %
Стеклопластик	10	9,4	10,17	7,6
Стеклоуглепластик	10	6,7	7,14	6,16

Во втором разделе пятой главы производится исследование статически-определимых конструкций из композитных материалов в области предельной прочности и их сравнение с результатами экспериментов и других расчетов.

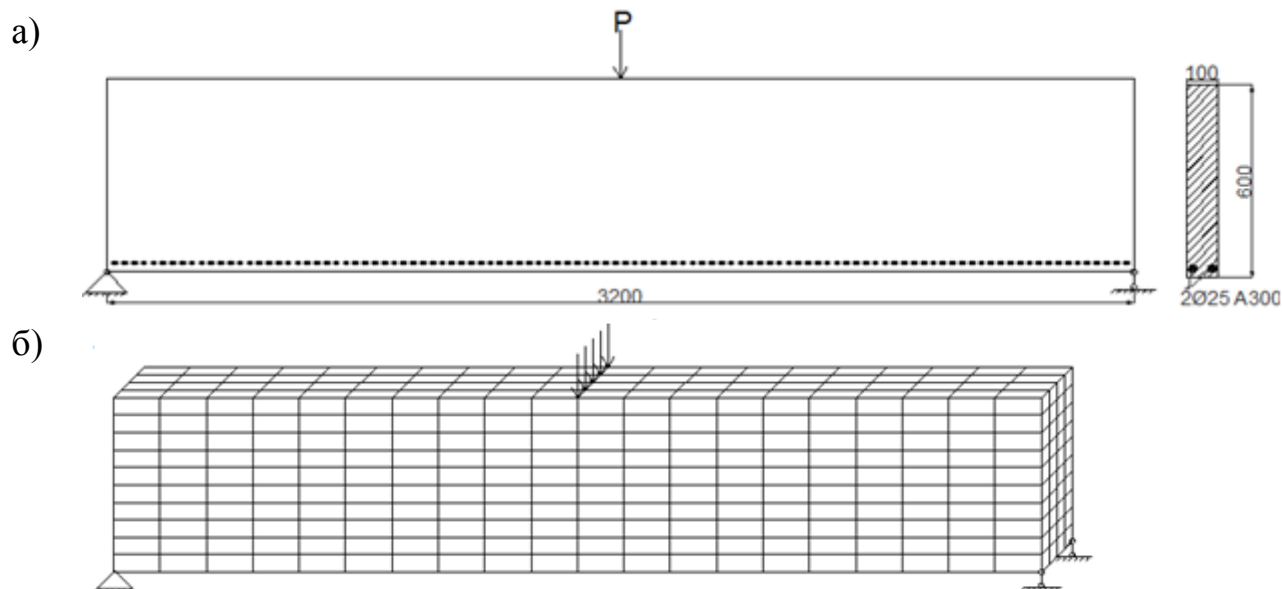


Рис.7- Модель балки: а - расчетная схема и конструкция железобетонной балки, б – схема разбивки на конечные элементы.

Результаты расчетов с применением композитной нелинейной матрицы жесткости сопоставлялись с результатами расчетов в программном комплексе Concord, а так же со СНиП. Расчетная схема, геометрические размеры и схема армирования представлены на рисунке 7 а.

Геометрия модели и схема разбивки балки на конечные элементы приведена на рисунке 7 б. Начиная с первой ступени, нагружение осуществлялось вертикальными силами по $\Delta P = 10$ кН. Исходные характеристики материалов: связующее (бетон) $R_b = 20$ МПа, $R_{bt} = 1.75$ МПа, $E_b = 30000$ МПа, $\mu = 0.2$, $\epsilon_b = 0.002$, $\epsilon_{bt} = 0.0001$; армирующие элементы (арматура) $R_s = 400$ МПа, $E_s = 200000$ МПа.

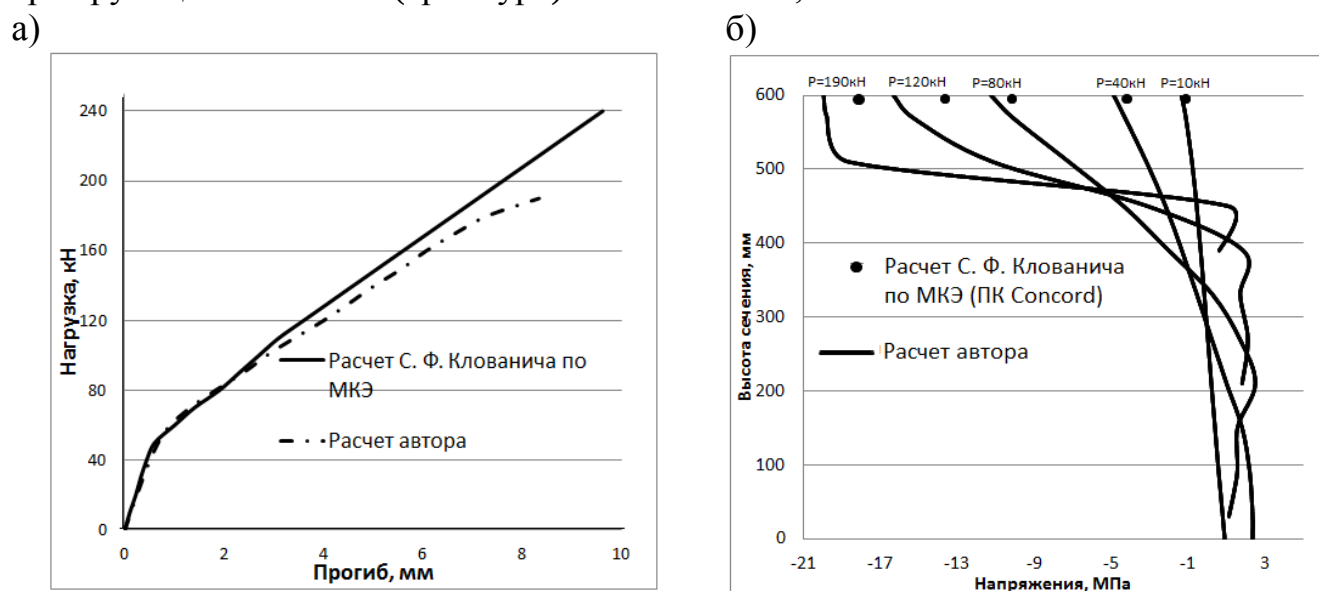


Рис.8. Сравнение результатов расчета: а – сравнение изменений прогибов под нагрузкой; б - сравнение некоторых эпюр нормальных напряжений в поперечном сечении середины пролета балки (расчета автора с наибольшими значениями аналогичных эпюр, полученными в работе С. Ф. Клованича в ПК Concord)

На рисунке 8 а показано изменение максимальных перемещений в балке на различных этапах нагружения, в сравнении с расчетом С.Ф. Клованича по МКЭ. При потере несущей способности нормальные напряжения в верхних слоях балки

составили -20 МПа. Рисунок 8 б иллюстрирует сравнение отдельных эпюр между расчетом автора и ПК Concord.

Таблица 2

№	Максимальный прогиб			Погрешность результатов от расчета Concord	
	Расчет Concord	Расчет автора	СНиП	Расчет автора	СНиП
	Δ , мм	Δ , мм	Δ , мм	%	%
1	9.62	8.34	9.3	13.31	3.32

Таблица 3

№	Разрушающая нагрузка			Погрешность результатов от расчета Concord	
	Расчет Concord	Расчет автора	СНиП	Расчет автора	СНиП
	P, кН	P, кН	P, кН	%	%
1	240	190	200	20.83	16.67

В таблицах 2 и 3 приводятся сопоставление результатов расчетов: прогибов под нагрузкой в момент разрушения и предельной нагрузки на конструкцию. При этом критерием прочности конструкции явилось превышение предела прочности арматуры в нижней части балки.

Расчет и сравнение с экспериментальным исследованием статически определимой предварительно-напряженной конструкции, работа которой изучалась экспериментально в НИИЖБ. Предварительное напряжение арматуры в модели балки имитируется равномерной сжимающей нагрузкой соответствующих слоев балки, содержащих армирующие элементы (арматуру). Нагрузка в виде сосредоточенных сил прикладывалась симметрично. Расчетная схема, геометрические размеры и схема армирования представлены на рисунке 9 а.

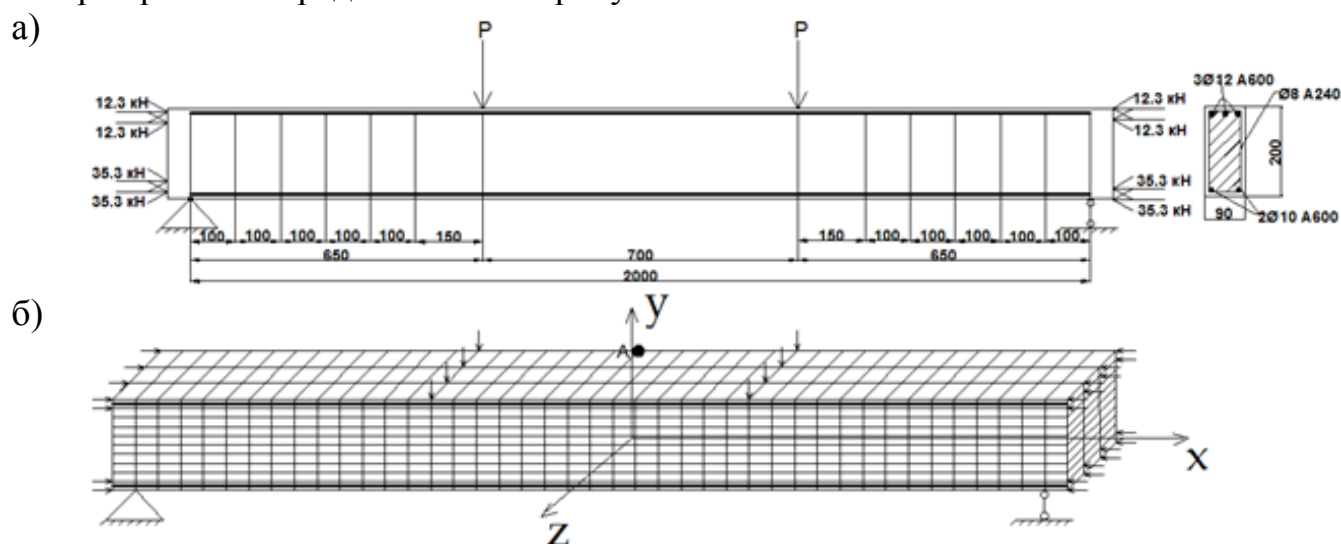


Рис.9 - Модель балки: а - расчетная схема и конструкция железобетонной балки, б – схема разбивки на конечные элементы.

Геометрия модели и схема разбивки балки на конечные элементы приведена на рисунке 9 б. Нагрузка на балку прикладывалась симметрично в виде сосредоточенных сил ступенями аналогично опытному. При этом на первой ступени имела место горизонтальная нагрузка, моделирующая предварительное напряжение. Начиная со второй ступени, нагружение осуществлялось вертикальными силами по $\Delta P = 5$ кН. Исходные характеристики материалов соответствуют опытными значениям и

принимались равными: связующее (бетон) - $R_b = 43.5 \text{ МПа}$, $R_{bt} = 2.5 \text{ МПа}$, $E_b = 36000 \text{ МПа}$, $\mu = 0.2$, $\epsilon_b = 0.002$, $\epsilon_{bt} = 0.00014$; армирующие элементы (арматура) $R_s = 400 \text{ МПа}$, $E_s = 200000 \text{ МПа}$. Критерием прочности балки явилось начало текучести арматуры в растянутой зоне.

При этом, как видно на графике, при расчете по модели автора, знаки перемещения до приложения вертикальной нагрузки отрицательны. При отсутствии вертикальной нагрузки, прогиб балки составил -0.696 мм .

Среднее отклонение верхних точек эпюр, полученных автором, от расчета Клованича по МКЭ, составило 13.69% . В таблицах 4 и 5 приводится сопоставление расчетов и данных эксперимента.

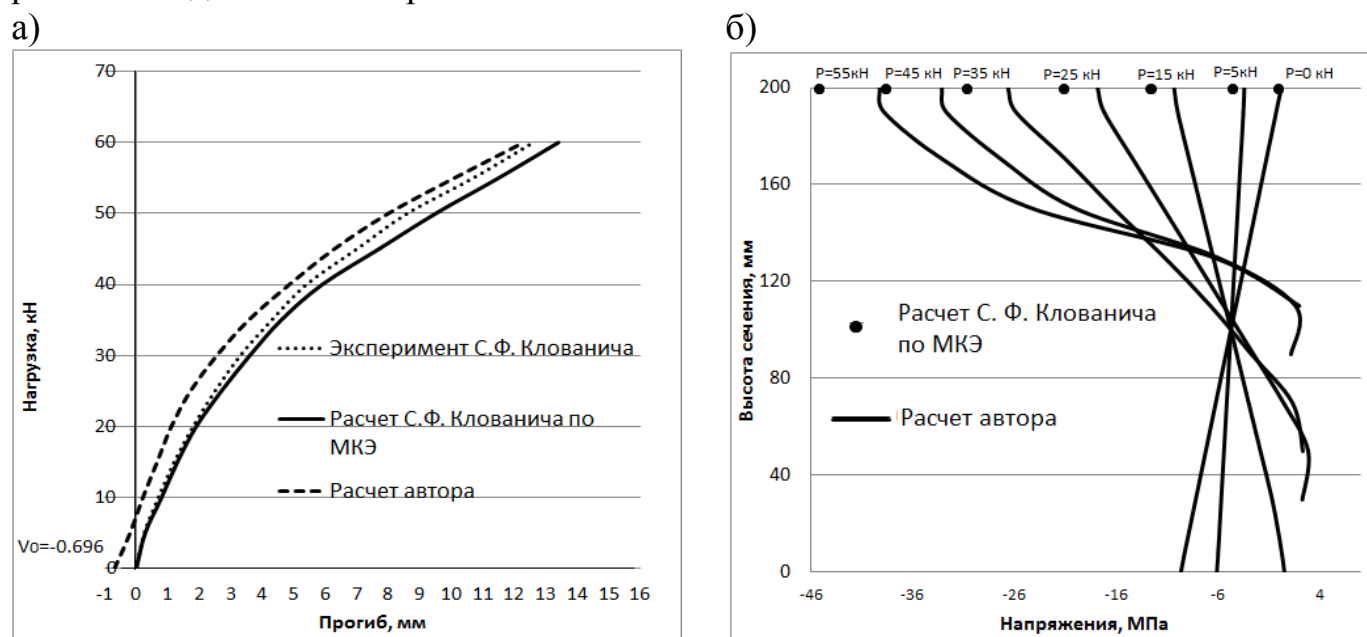


Рис.10. Сравнение результатов расчета: а – сравнение изменений прогибов под нагрузкой; б - сравнение некоторых эпюр нормальных напряжений в поперечном сечении в середине балки (автора с наибольшими значениями аналогичных эпюр, полученными Клованичем по МКЭ)

Таблица 4.

№	Максимальный прогиб			Отклонение результатов расчетов от эксперимента	
	Эксперимент	Расчет МКЭ	Расчет автора	Расчет МКЭ	Расчет автора
	Δ , мм	Δ , мм	Δ , мм	%	%
1	12.6	13.4	12.3	-6.35	2.3

Таблица 5.

№	Разрушающая нагрузка			Отклонение результатов расчетов от эксперимента	
	Эксперимент	Расчет МКЭ	Расчет автора	Расчет МКЭ	Эксперимент
	P, кН	P, кН	P, кН	%	%
1	65	65	65	0	0

Рисунок 11 иллюстрирует процесс разрушения в балке и исключение конечных элементов из модели. При исключении конечного элемента из характерного слоя, напряжения в этом слое так же отсутствуют, что подтверждается эпюрами нормальных напряжений по высоте сечения балки на каждой стадии нагружения.

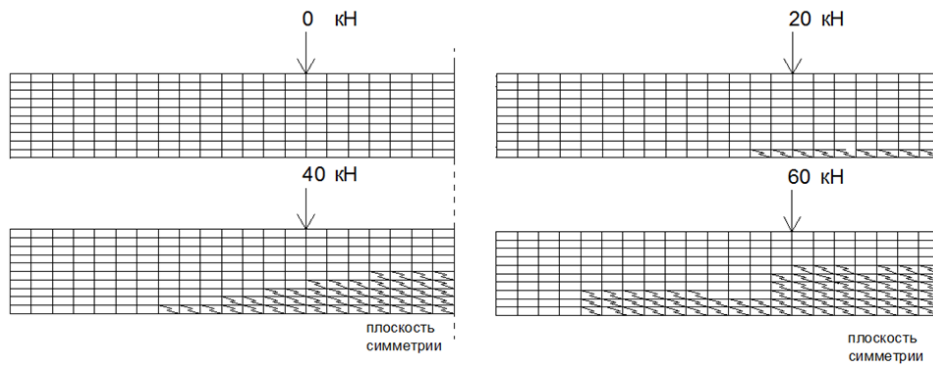
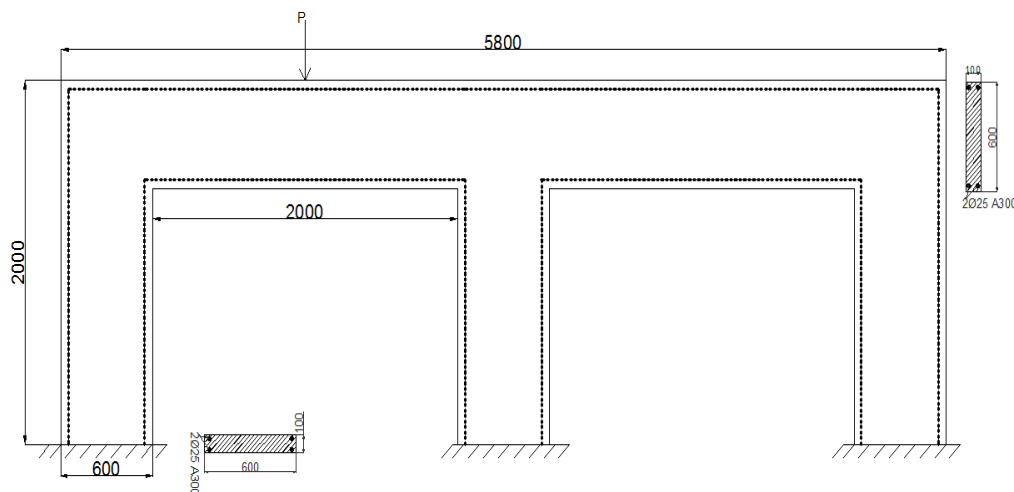


Рис. 11. Разрушение конечных элементов балки на различных стадиях нагружения

В ШЕСТОЙ ГЛАВЕ исследуется статически-неопределимая конструкция из композитного материала в области предельной прочности, производится анализ полученных результатов.

В первом разделе шестой главы озвучиваются основные положения разработанной автором методики для расчета конструкций из композитных материалов.

Расчет двухпролетной железобетонной рамы осуществлялся по МКЭ, с использованием разработанных автором программ, а так же сравнивался с расчетами в ПК ЛИРА и ANSYS.



Характеристики материалов: бетон $R_b = 20$ МПа, $R_{bt} = 1.75$ МПа, начальный $E_b = 30000$ МПа, $\mu = 0.2$, $\epsilon_b = 0.002$, $\epsilon_{bt} = 0.0001$; арматура класса АIII: $R_s = 400$ МПа, $E_s = 200000$ МПа. $\Delta P = 50$ кН. От $P = 550$ кН $\Delta P = 10$ кН

Рис. 12. Расчетная схема двухпролетной рамы

Расчетная схема и схема армирования конструкции приведены на рисунке 12. Основания стоек рамы жестко заземлены, перемещения там запрещены.

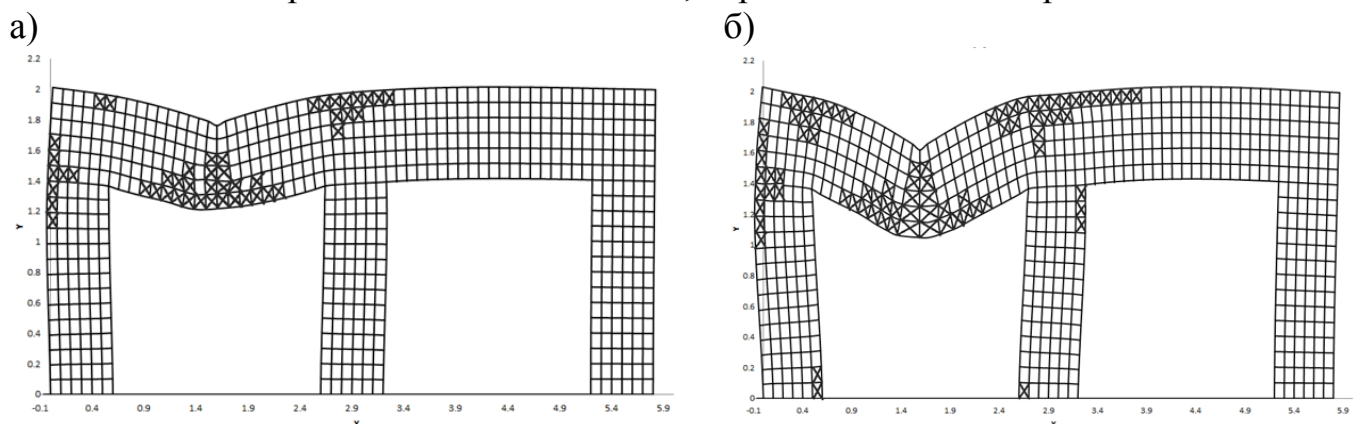


Рис.13. Формы искривления двухпролетной рамы: а при $P=560$ кН; б - при разрушающей нагрузке $P=570$ кН.

Формы искривления рамы на различных этапах нагружения показывают, как происходило разрушение в выходили из строя конечные элементы конструкции, а

так же несимметричность разрушения рамы, обусловленную перераспределением усилий (рис. 13.)

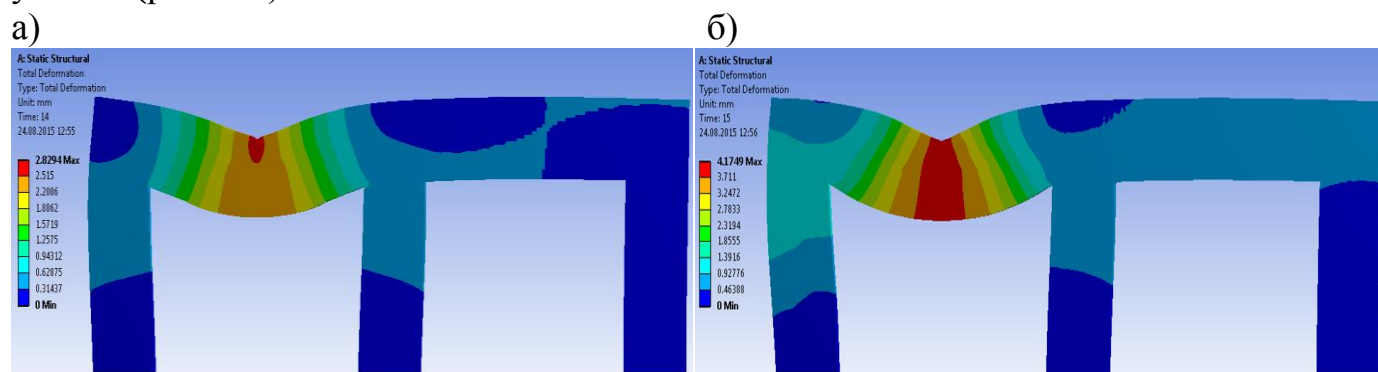


Рис.14. Формы искривления и градиенты вертикальных перемещений двухпролетной рамы (ПК ANSYS): а - при $P=580$ кН; б - при разрушающей нагрузке $P=590$ кН.

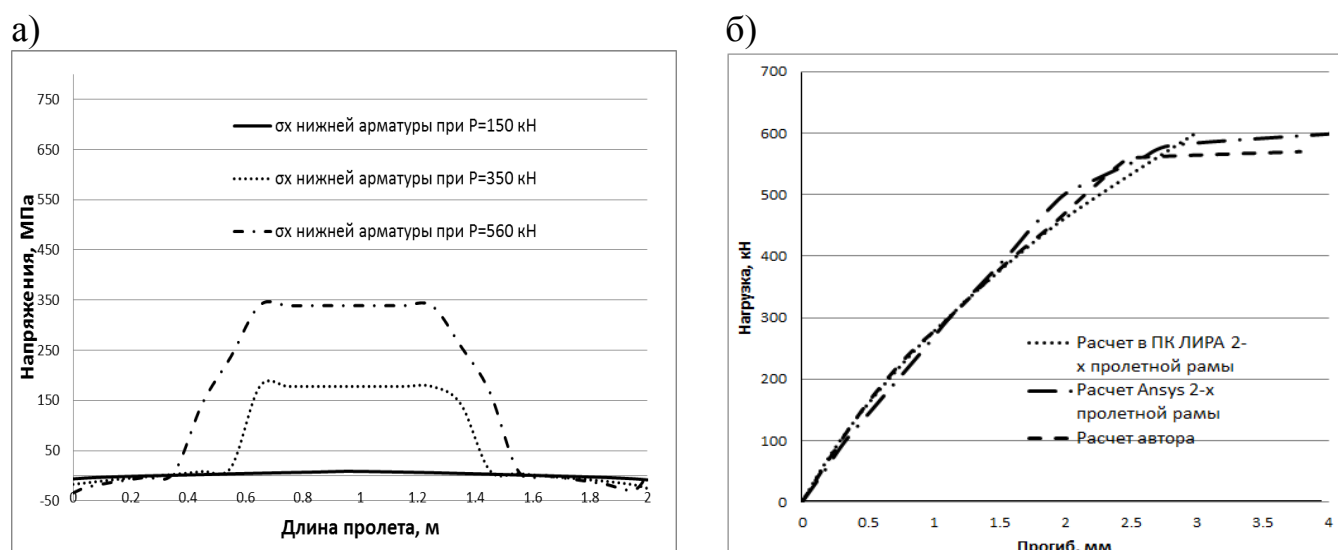


Рис.15. Результаты расчетов автора: а – нормальные напряжения в нижней арматуре нагружаемого пролета при нагрузках 150 кН, 350 кН, 560 кН; б - максимальные прогибы нагружаемого пролета рамы на разных этапах нагружения при расчете автора, расчете в ПК ЛИРА, ANSYS.

Эпюры нормальных напряжений в арматуре на рисунке 15а так же несимметричны по длине нагружаемого пролета рамы. При нагрузке 150 кН армирующие элементы и связующее работают совместно, напряжения в конечном элементе распределяются между ними равномерно. При нагрузке 350 кН видно горизонтальный выброс напряжений, параллельный оси ОХ. При нагрузке 560 кН, на стадии, близкой к разрушению, армирующие элементы в растянутой зоне постепенно приближаются к своему пределу текучести. Напряжения в ней в этот момент составили 338.90 кН. На следующем этапе, при нагрузке 570 кН, арматура достигла предела текучести.

Из графиков на рисунке 15б видно, что полученные результаты хорошо коррелируют между собой. В таблице 6 приводится сравнение результатов расчетов рамы автором, ПК ЛИРА, ANSYS. При сравнении с ANSYS погрешность расчета автора составляет 10.95% для прогибов и 5% для разрушающей нагрузки; погрешность расчета в ПК ЛИРА составила -5.3% для максимальных прогибов и 1.69% для

разрушающей нагрузки. Напряжения в арматуре при расчете автора в сравнении с ANSYS дают погрешность 12%

Таблица 6

№	Максимальный прогиб, мм			Отклонение от результатов расчета ANSYS, %	
1	Расчет автора	ПК ЛИРА	ANSYS	автора	ПК ЛИРА
	2.52	2.98	2.83	10.95	-5.30
№	Разрушающая нагрузка, кН			Отклонение от результатов расчета ANSYS, %	
2	Расчет автора	ПК ЛИРА	ANSYS	автора	ПК ЛИРА
	570	600	590	5	1.69
№	Напряжения в арматуре перед разрушением, МПа			Отклонение от результатов расчета ANSYS, %	
3	Расчет автора (P=560 кН)	ANSYS (P=580 кН)			
	338,9	302			
				-12.23%	

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

Результаты выполненных исследований:

1. Проведены анализ и систематизация математических моделей критериев прочности материалов. Большое внимание уделено математическим моделям критериев, наиболее подходящих для исследования композитных материалов и конструкций.

2. Разработана математическая модель, основанная на аппроксимации диаграмм деформирования материалов и матрице жесткости нелинейного композитного конечного элемента. Проведено сравнение диаграмм, построенных по данной математической модели, с диаграммами других авторов. При этом сравнение производилось для нескольких типов материалов с различными механическими характеристиками.

3. Разработана матрица жесткости композитного нелинейного конечного элемента, учитывающая изменение механических характеристик входящих в нее материалов, в зависимости от напряженно – деформированного состояния на предыдущих этапах нагружения конструкции

4. Разработана методика определения напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных материалов на различных этапах нагружения, включая предельные, позволяет вычислять разрушающую нагрузку и максимальные перемещения конструкции, а также проследить за разрушением различных участков конструкции при нагружении.

5. Для реализации полученной методики разработаны следующие программы:

«Composit» содержит алгоритм, позволяющий рассчитывать коэффициенты матриц жесткости для однородных и композитных конечных элементов, из которых составлять общую матрицу жесткости системы.

«Strength» решает систему уравнений равновесия с последующим определением перемещений каждого узла элемента по трем направлениям, совпадающим с направлениями координатных осей, вычислять компоненты тензоров напряжений и деформаций для каждого конечного элемента.

«Ultimate State» использует диаграммы деформирования материалов и необходимо для учета нелинейности во время расчета. Алгоритмы данной подпрограммы изменяют механические характеристики материалов конструкции во время расчета до полного разрушения КЭ.

«Программа для расчета конструкций из композитных материалов» использует вышеперечисленные алгоритмы и осуществляет расчеты конструкций в нелинейной постановке. Для уточнения решения нелинейной системы уравнений на каждом этапе нагружения используется метод последовательных приближений.

Программы зарегистрированы, получены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

6. Выполнена апробация предложенных в диссертации математических моделей при расчете балок и рамы в физически нелинейной постановке. Оценка разработанной математической модели выполнена путем сравнения расчетных результатов с экспериментальными данными и расчетами в других программных продуктах.

7. Выполнен анализ полученных результатов. Сформулированы выводы и рекомендации по применению данной методики и математической модели.

Данную методику рекомендуется применять:

- для установления разрушающей нагрузки и максимальных перемещений и деформаций при разрушении конструкций из композитных материалов при простых напряженных состояниях. Данные предельные состояния рассматриваемых в работе конструкций (балок и рам), возникают в результате превышения предела текучести армирующих элементов в растянутой зоне;
- для исследования напряженно-деформированного состояния, установления перемещений, напряжений и деформаций на каждом этапе нагружения конструкции. Предельное состояние конструкции может наступать при разрушении связующего в поперечном сечении конструкции;
- для установления опасных зон и зон разрушения конструкции на различных этапах нагружения, включая предельные;
- для расчетов композитов, имеющих в своем составе инородные включения, газовые пузыри, технологические отверстия. При этом можно учитывать любое количество составляющих внутри композита в пределах конечного элемента.

Аппроксимированные функциональные зависимости диаграмм деформирования материалов, используемые в методике, могут быть применены как для расчетов конструкций, так и для построения более общих математических моделей и поверхностей прочности, относящихся к сложным напряженным состояниям.

Опубликованные работы по теме диссертации

Публикации в ведущих периодических изданиях (из списка ВАК)

1. **Васильев, А.С.** Разработка алгоритмов численного моделирования балочных конструкций из композитных материалов для портовых и берегозащитных сооружений. / А.С. Васильев // Ученые записки КнАГТУ: Науки о природе и технике. - 2015. - № III – 1(23). – С 88-93

2. **Тарануха Н.А.** Алгоритмы и модели при численном проектировании композитных сред на заданные характеристики для морских сооружений. / Н.А. Тарануха, А.С. Васильев // Ученые записки КнАГТУ: Науки о природе и технике. – 2015. - № I - 1(21). – С. 81-86

3. **Тарануха Н.А.** Численное исследование предельной несущей способности конструкций из композитных материалов. / Н.А. Тарануха, А.С. Васильев // Морские интеллектуальные технологии: Кораблестроение, информатика, вычислительная техника и управление – 2015. - № 3 (29) Т. 2. – С. 27-32.

4. **Тарануха Н.А.** Анализ критериев предельного состояния конструкций из композитных материалов. / Н.А. Тарануха, А.С. Васильев // Ученые записки КнАГТУ: Науки о природе и технике. – 2015. - № III – 1(23). – С. 81-87

Публикации в других изданиях

5. **Васильев, А.С.** Обзор исследований моделей железобетона в условиях сложнапряженного состояния методом конечных элементов / А.С. Васильев, Н.А. Тарануха // Современное общество, образование и наука: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции, Тамбов, 30 июня 2014 г. – Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. – С. 22-25.

6. **Васильев, А.С.** Численное моделирование поведения сложных композитных конструкций в области их предельных состояний / Н.А. Тарануха, А.С. Васильев // Наука. Инновации. Техника и технологии: проблемы, достижения и перспективы: материалы междунар. научн.-практ. конф., Комсомольск – на – Амуре, 12-16 мая 2015 г. - Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2015. – С. 96-99

7. **Vasilyev, A.S.** Algorithms and numerical model for the research of limit state of structures of composite materials / A.S. Vasilyev, N.A. Taranukha // the 29th Asia-Pacific Technikal Exchange and Advisory Meeting on Marine Structures (TEAM-2015). – Vladivostok, Russua – 2015. – P. 29-34.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

8. **Свидетельство** об официальной регистрации программ для ЭВМ № 2015610761. Composit /А.С. Васильев, Н.А. Тарануха (RU) // Комсомольский – на – Амуре гос. техн. ун–т. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 16 января 2015 – М.: 2015.

9. **Свидетельство** об официальной регистрации программ для ЭВМ № 2015610762. Strength /А.С. Васильев, Н.А. Тарануха (RU) // Комсомольский – на – Амуре гос. техн. ун–т. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 16 января 2015 – М.: 2015.

10. **Свидетельство** об официальной регистрации программ для ЭВМ № 2015618399. Ultimate State /А.С. Васильев, Н.А. Тарануха (RU) // Комсомольский – на – Амуре гос. техн. ун–т. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 07 августа 2015 – М.: 2015.

11. **Свидетельство** об официальной регистрации программ для ЭВМ № 2015618400. Программа для расчета конструкций из композитных материалов /А.С. Васильев, Н.А. Тарануха (RU) // Комсомольский – на – Амуре гос. техн. ун–т. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 07 августа 2015 – М.: 2015.

ВАСИЛЬЕВ АЛЕКСЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ В
ОБЛАСТИ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Подписано к печати __.__.2016

Формат 60x84/16 Бумага писчая. Ризограф RZ370ER.

Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,85 Тираж 100 экз. Заказ 24650

Отпечатано в полиграфической лаборатории
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27