

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный университет»

На правах рукописи



Лин Тхет

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ АВТОФРЕТИРОВАНИИ С УЧЕТОМ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
кандидат технических наук, доцент
Андрианов Иван Константинович

Комсомольск-на-Амуре – 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ АВТОФРЕТИРОВАНИИ	14
1.1 Особенности моделирования процесса гидравлического автофретирования толстостенных оболочек.....	14
1.2 Влияние способов крепления и заделки при гидравлическом автофретировании	17
1.3 Условия пластичности при решении задач автофретирования.....	18
1.4 Подходы к описанию деформационного упрочнения и учету эффекта Баушингера	20
1.5 Существующие модели гидравлического автофретирования толстостенных цилиндрических оболочек.....	22
1.6 Численно-аналитические методы решения осесимметричной задачи упругопластического деформирования	27
1.6.1 Метод переменных свойств материала.....	27
1.6.2 Метод переменных параметров упругости	30
Выводы по первой главе.....	36
ГЛАВА 2. ОПИСАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛА ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ АВТОФРЕТИРОВАНИИ	37
2.1 Основные допущения при описании диаграмм деформирования	37
2.2 Построение диаграммы деформирования третьего рода при нагружении ...	37
2.2.1 Свойства диаграммы деформирования третьего рода	37

2.2.2 Построение аппроксимаций диаграмм деформирования материалов с учетом сжимаемости и степенного закона упрочнения	43
2.3 Описание поведения материала при знакопеременном нагружении	47
2.3.1 Эффект Баушингера при знакопеременном нагружении	47
2.3.2 Принцип Мазинга	49
2.3.3 Обобщенный принцип Мазинга	51
2.3.4 Построение диаграммы деформирования материала при разгрузке с использованием экспериментальных данных и обобщенного принципа Мазинга	54
2.4 Описание упругопластической анизотропии материала при знакопеременном нагружении с помощью моделей упрочнения	62
2.4.1 Модели упрочнения материалов	62
2.4.2 Описание диаграммы деформирования и разгрузки высокопрочной стали на основании нелинейной кинематической модели упрочнения ..	64
Выводы по второй главе	70
ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ АВТОФРЕТИРОВАНИИ	71
3.1 Схемы деформирования оболочек при гидравлическом автофретировании	71
3.2 Основные допущения при описании упругопластического деформирования толстостенных цилиндрических оболочек	72
3.3 Постановка задачи упругопластического деформирования цилиндрической толстостенной оболочки при нагружении внутренним давлением	74
3.4 Численный подход к расчету упругопластического деформирования толстостенных цилиндрических оболочек методом переменных параметров упругости.....	77

3.4.1	Постановка задачи гидравлического автофретирования цилиндрических оболочек с продольным растяжением и без на основании метода переменных параметров упругости	77
3.4.2	Интегральные уравнения напряженно-деформированного состояния для толстостенной цилиндрической оболочки.....	80
3.4.3	Алгоритм расчёта напряженно-деформированного состояния толстостенной цилиндрической оболочки	83
3.4.4	Определение остаточных напряжений и деформаций на основании теоремы о вторичных пластических деформациях	87
	Выводы по третьей главе.....	88
ГЛАВА 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ПРОЦЕССА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО АУТОФРЕТИРОВАНИЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК.....		89
4.1	Оценка точности построения аппроксимаций диаграммы деформирования материалов в области упругопластических деформаций	89
4.2	Оценка погрешности аналитического метода расчета упругопластического деформирования толстостенных оболочек при линейном упрочнении материала	93
4.3	Оценка достоверности разработанной модели гидравлического автофретирования толстостенного цилиндра	100
4.3.1	Сравнение результатов расчета напряженного состояния при нагружении и остаточных напряжений для изотропного упрочнения .	102
4.3.2	Сравнение результатов расчета напряженного состояния при нагружении и остаточных напряжений для кинематического упрочнения.....	104
4.3.3	Сравнение результатов расчета напряженного состояния при нагружении и остаточных напряжений с учётом упругопластической анизотропии реального материала	107

4.4 Анализ результатов расчёта параметров, характеризующих упругопластическую анизотропию толстостенных цилиндрических оболочек, в зависимости от величины пластической области	109
4.5 Изменение остаточных окружных напряжений при различных значениях величины пластической области	112
Выводы по четвертой главе.....	115
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	117
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	119

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В современный период одной из актуальных научных проблем представляется исследование упругопластического деформирования оболочечных элементов конструкций, среди которых особое внимание уделяется толстостенным оболочкам, прежде всего из высокопрочной стали, которые широко применяются в различных отраслях промышленности: судостроительной, аэрокосмической, нефтехимической и энергетической, в качестве сосудов под высоким давлением. На практике толстостенные цилиндрические оболочки часто подвергаются воздействию давления: в цилиндрах насосов или технологических реакторах, использующих сосуды высокого давления. У материала толстостенной цилиндрической оболочки вследствие воздействия повышенных давлений наблюдается изменение его механических свойств, а также возникновение вторичных пластических деформаций, которые могут привести к снижению прочности, долговечности, а также к разрушению оболочек в процессе эксплуатации. Кроме того, возрастающая потребность промышленности в толстостенных цилиндрах, используемых под высоким давлением, стимулирует проведение исследований, направленных на повышение их удельной прочности, увеличения их усталостного ресурса, повышения их несущей способности для высокотехнологичных применений.

Процесс автофретирования удовлетворяет решению этих задач. Автофретирование (автоскрепление) – технологическая процедура в металлургии и технике высоких давлений, при которой толстостенный цилиндр подвергается определенному предварительному внутреннему давлению выше рабочего, что приводит к частичной пластической деформации стенки и возникновению остаточных сжимающих напряжений [10], которые значительно снижают растягивающие напряжения рабочего давления, увеличивая тем самым удельную прочность или усталостный ресурс.

Очевидно, что для точного прогнозирования остаточных напряжений и расчёта напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек при действии рабочего давления требуется моделирование различных параметров, влияющих на процесс гидравлического автофретирования оболочек. Результаты данного вида автофретирования во многом зависят от свойств материала исходной цилиндрической заготовки и давления автофретирования.

Особую сложность при описании поведения материала в процессе гидравлического автофретирования создаёт эффект Баушингера. После пластической деформации материал становится упругопластически анизотропным, т.е. обладает различными упругопластическими свойствами при обратном и последующем прямом нагружении, которые сильно зависят от предшествующей пластической деформации. Сложность описания эффекта Баушингера создает трудности при моделировании процесса автофретирования, в результате специалисты вынуждены использовать упрощенные модели материалов для получения аналитических или численных решений. Поэтому, данная диссертационная работа, направленная на исследование напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек при гидравлическом автофретировании с учётом реальной диаграммы материала и упругопластической анизотропии, вызванной эффектом Баушингера, является актуальной. Решение исследуемой проблемы позволит прогнозировать поведение автофретированных толстостенных цилиндров, корректно проектировать процесс гидравлического автофретирования на этапе технологической подготовки производства и, как следствие, повысить прочность и долговечность толстостенных цилиндрических оболочек.

Степень разработанности темы исследования. Первыми работами по исследованию упрочения оболочек при автофретировании можно считать работы Т.Д. Родмана и А.С. Лаврова. Дальнейшим развитием теоретических основ расчёта напряженно-деформированного состояния оболочек при автофретировании занимались российские и зарубежные ученые: Н.А. Беляев, А.А. Буренин, А.К. Синицкий, Г.А. Смирнов-Аляева, А.А. Ильюшин, В.А.

Ломакин, В.В. Москвитин, Н.Н. Малинин, М.В. Сторожев, С.И. Феоктистов, Ю.А. Работнов, Л. Джейкоб, Х.Л. Гао, А. Надаи, Г. Генки, Р. Хилл, Х.П. Хуанг, и другие. Часть выполненных исследований направлена на изучение эффекта Баушингера в условиях циклического нагружения. Некоторые исследования в данной области, основанные на применении метода конечных элементов, отражены в работах российских и зарубежных ученых, в том числе Л.С. Поляков, Х. Чжун, А.П. Паркер, С. Ван, У.С. Диксит, М.К. Гибсон и других.

В теории пластичности помимо аналитических методов для определения напряженно-деформированного состояния широко применяются приближенные методы, где решение упругопластических задач строится в последовательных приближениях. Среди некоторых приближенных методов решения задач по деформационной теории пластичности можно выделить принцип минимума полной энергии, принцип минимума дополнительной работы, принцип возможных изменений напряженного состояния, вариационные принципы и др. [10]. Как показал анализ зарубежных работ, посвящённых процессам автофретирования за несколько десятилетий, из всех применяемых численно-аналитических методов (кроме метода конечных элементов), наиболее универсальным методом принято считать разработанный зарубежными учёными (Хамид Джахед с соавторами) метод переменных свойств материала, который находит всё более широкое применение в решении упругопластических задач.

Стоит отметить, что практически отсутствуют численно-аналитические исследования, в которых учитывается реальная диаграмма деформирования материала, как при нагрузке, так и при разгрузке с учётом влияния эффекта Баушингера на механические свойства материала и изменение граничных условий в процессе нагружения и разгрузки. Как следствие, отсутствуют методики и алгоритмы расчета остаточных напряжений и деформаций с учётом упругопластической анизотропии, вызванной эффектом Баушингера в процессе гидравлического автофретирования.

Таким образом, для решения упругопластических задач требуется разработать методику расчёта напряженно-деформированного состояния и

остаточных напряжений толстостенных цилиндрических оболочек, учитывающую реальную схему нагружения, а также влияние эффекта Баушингера на механические свойства материала и изменение граничных условий при нагружении и разгрузке.

Цель диссертационной работы заключается в разработке методики расчета напряженно-деформированного состояния и остаточных напряжений толстостенных цилиндрических оболочек с учётом сжимаемости материала, реальной диаграммы деформирования материала и упругопластической анизотропии, вызванной эффектом Баушингера, при гидравлическом автофретировании цилиндрических оболочек с продольным растяжением и без продольного растяжения.

Для достижения поставленной цели в исследовании рассматривались **следующие задачи:**

1. Проведение фундаментальных теоретических исследований процессов автофретирования толстостенных цилиндров и выбор оптимальной численно-аналитической методики оценки упругопластического напряженно-деформированного состояния;

2. Разработка алгоритма расчёта напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек в условиях гидравлического автофретирования внутренним давлением с учётом реальной диаграммы деформирования, сжимаемости материала и упругопластической анизотропии;

3. Проведение серий численных расчетов гидравлического автофретирования толстостенных цилиндрических оболочек и сравнение с результатами, полученными другими авторами, для оценки достоверности разработанной математической модели;

4. Определение эффективного давления автофретирования по предлагаемой методике, позволяющего достичь наибольших остаточных сжимающих напряжений на внутренней поверхности оболочки.

Научная новизна диссертационного исследования:

1. Предложена методика расчета упругопластического напряженно-деформированного состояния толстостенных осесимметричных цилиндров, нагруженных внутренним давлением на основе совместного решения методом переменных параметров упругости интегральных уравнений равновесия и совместности деформаций, записанных в координатах Эйлера для нелинейной меры деформации Генки.

2. Разработан алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния и остаточных напряжений толстостенных цилиндрических оболочек при гидравлическом автофретировании с продольным растяжением и без, позволяющий учесть упругопластическую анизотропию, вызванную эффектом Баушингера.

3. Исследовано распределение остаточных сжимающих окружных напряжений на внутренней поверхности толстостенного цилиндра для различных его толщин при гидравлическом автофретировании, и показана возможность определения эффективного давления автофретирования, позволяющего повысить рабочее давление цилиндрической толстостенной оболочки.

Теоретическая значимость исследования обусловлена вкладом в развитие методик оценки напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндров с учётом реальной диаграммы деформирования материала и эффекта Баушингера в условиях гидравлического автофретирования внутренним давлением на основе совместного решения методом переменных параметров упругости интегральных уравнений равновесия и совместности деформаций, записанных в координатах Эйлера для нелинейной меры деформации Генки.

Практическая значимость исследования заключается в возможности применения полученных результатов численного моделирования при проектировании элементов конструкций в виде полых цилиндрических оболочек, прежде всего, из высокопрочных сталей, работающих под высоким давлением. Реализация полученных результатов обеспечивает существенное повышение прочности и долговечности высокопрочных цилиндрических оболочек, а также

повышение эффективности процедуры гидравлического автофретирования за счет возможности расчета эффективного давления автофретирования.

Методология и методы исследования. Теоретическое исследование гидравлического автофретирования проводилось с использованием положений теории упругости и деформационной теории пластичности. Вычислительные алгоритмы строились на основании численного метода переменных параметров упругости. Численная верификация предложенной методики осуществлялась с помощью специализированных программных модулей, разработанных и реализованных в системе компьютерной математики MathCAD.

Для проведения сравнительного анализа результатов на основании разработанной численной методики были использованы результаты, полученные различными авторами и различными методами расчёта при аналогичных исходных данных, для различных моделей упрочнения: кинематической изотропной и нелинейно-кинематической, характерной для реального материала.

Положения, выносимые на защиту:

1. Полученные интегральные уравнения совместности деформаций и интегральные уравнения равновесия, записанные в координатах Эйлера для нелинейной меры деформации Генки с учетом сжимаемости материала, для исследования процесса гидравлического автофретирования толстостенных цилиндрических оболочек с продольным растяжением и без.

2. Алгоритм расчёта напряженно-деформированного состояния и остаточных напряжений в толстостенных цилиндрических оболочках в условиях гидравлического автофретирования внутренним давлением с учётом реальной диаграммы деформирования, сжимаемости материала и упругопластической анизотропии, вызванной эффектом Баушингера.

3. Результаты серии численных экспериментов по гидравлическому автофретированию толстостенных цилиндрических оболочек и сравнение полученных результатов с результатами других авторов.

4. Методика определения эффективного давления автофретирования, обеспечивающего наибольшее рабочее давление цилиндрической толстостенной оболочки.

Степень достоверности научных положений и выводов, приведенных в работе, подтверждается применением апробированного методологического базиса, аргументацией вводимых в модель допущений, применением корректных математических методов для решения поставленных задач, а также согласованностью результатов вычислительного моделирования с теоретическими предпосылками и удовлетворительным совпадением результатов численных расчётов с опубликованными ранее результатами других авторов по методу переменных свойств материала и моделированию методом конечных элементов.

Апробация исследования. Основные положения и результаты исследования докладывались и обсуждались на следующих научно-технических конференциях:

1. Международная научно-практическая конференция «Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению» (г. Комсомольск-на-Амуре, 07 – 11 февраля 2022 г.).

2. V Всероссийская национальная научная конференция молодых учёных «Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований» (г. Комсомольск-на-Амуре, 11-15 апреля 2022 г.).

3. VI Дальневосточная конференция с международным участием «Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении» (г. Комсомольск-на-Амуре, 5-7 октября 2022 г.).

4. XXIII Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023) (Московский авиационный институт, г. Москва, 04–10 сентября 2023 г.).

5. VII Всероссийская национальная научная конференция молодых учёных «Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований» (г. Комсомольск-на-Амуре, 08-12 апреля 2024 г.).

6. VIII Всероссийская национальная научная конференция молодых учёных «Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований» (г. Комсомольск-на-Амуре, 07-11 апреля 2025 г.).

В исследовании отражены результаты в рамках гранта Российского научного фонда №25-79-10135 «Разработка моделей гидравлического автофретирования осесимметричных оболочек с учетом деформационной анизотропии и вторичных пластических деформаций».

Публикации. Основные результаты данного исследования опубликованы в 12 работах, в том числе: 3 статьи из перечня изданий, рекомендованных ВАК РФ, 9 научно-технических статей и докладов РИНЦ.

Личный вклад автора в выполненное совместно с научным руководителем исследование заключается в формулировке постановок задач исследования, разработке математических моделей для решения поставленных задач, создании вычислительных алгоритмов и программных средств, подготовке публикации по теме диссертационного исследования и проведение цикла расчетов с последующей обработкой и анализом результатов. Данные результаты исследований отражены в статьях в соавторстве.

Благодарности. Автор выражает благодарность Ивану Константиновичу Андрианову и Сергею Ивановичу Феоктистову за помощь и ценные замечания в работе над диссертационным исследованием.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 84 наименований. Общий объём составляет 128 страниц и включает 43 рисунка и 1 таблицу.

ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ АВТОФРЕТИРОВАНИИ

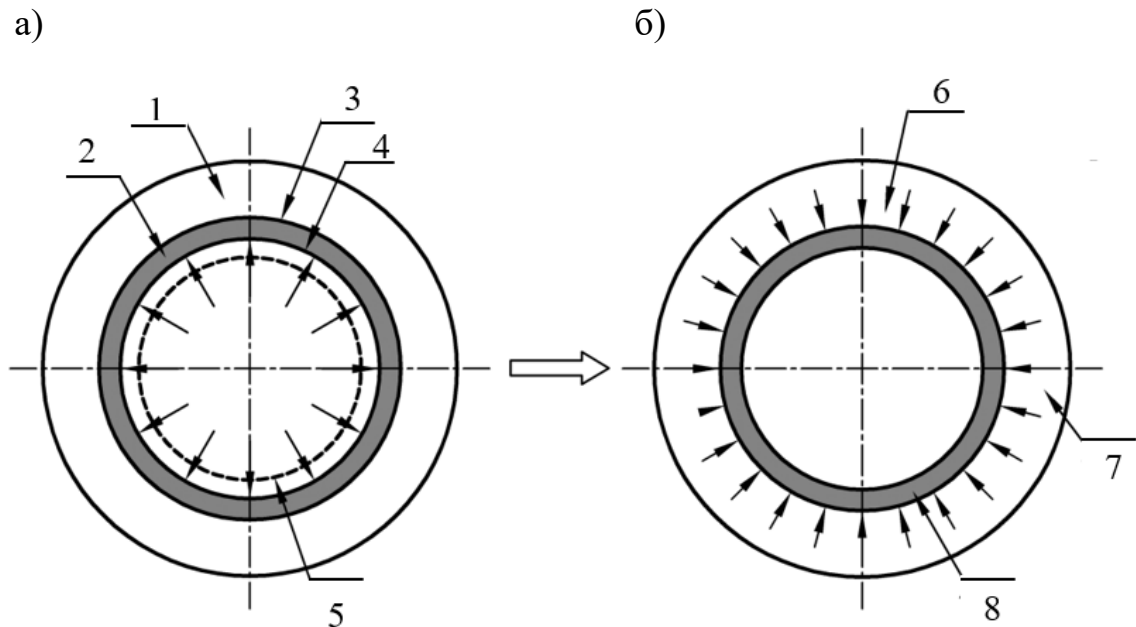
1.1 Особенности моделирования процесса гидравлического автофретирования толстостенных оболочек

Толстостенные осесимметричные оболочки в настоящее время находят всё более широкое применение в различных инженерных конструкциях. Их используют в качестве корпуса подводных лодок, ядерных реакторов, металлических резервуаров, предназначенных для хранения жидкостей и газов, станков для водоструйной резки, линий топливных форсунок в дизельных двигателях, гидравлических камер и отверстий под крепежные детали [77]. Из практики известно, что толстостенные оболочки часто подвергаются циклическому воздействию высокого давления в процессе эксплуатации. В связи с чем, имеют место остаточные напряжения вследствие обработки давлением. Кроме того, напряжения в таких конструкциях распределяются по толщине неравномерно, что необходимо учитывать при расчёте на прочность. Однако давление, под которым могут работать толстостенные оболочки, лимитируется пределом текучести материала, который не должен превышать при нормальной эксплуатации. Если толстостенные оболочки находятся под действием рабочего давления, который превышает предел текучести материала, то это может привести к разрушению внутренних слоев стенки.

Проектирование и прочностной расчёт современных деталей и элементов конструкций в виде толстостенных цилиндрических оболочек, применяемых для высокотехнологичных применений, строится на основе анализа напряженно-деформированного состояния оболочек и условий их нагружения. Общей тенденцией сегодня является повышение несущей способности, надежности и

долговечности оболочечных элементов. В связи с этим важными задачами являются выявление основных закономерностей процессов деформирования, а также разработка методов повышения их упругой прочности. С целью повышения несущей способности толстостенных оболочек применяют процесс автофретирования, который заключается в предварительной нагрузке оболочки внутренним давлением, большим рабочего [10].

Автофретирование представляет собой процесс создания остаточных напряжений в стенке толстостенной цилиндрической оболочки перед ее эксплуатацией [77], согласно которому на внутренней поверхности цилиндра создается и затем снимается соответствующее давление, достаточно большое для возникновения пластических деформаций в стенке (рисунок 1.1).



- 1 – упругая зона; 2 – пластическая зона; 3 – упругопластическая граница;
 4 – текущая внутренняя поверхность; 5 – исходная внутренняя поверхность;
 6 – давление упругой зоны на внутреннюю пластическую зону,
 7 – зона растягивающих напряжений; 8 – зона сжимающих напряжений

Рисунок 1.1 – Схема типичного процесса автофретирования [77]:

а – стадия нагружения; б – стадия разгрузки

При этом нагружение может проводиться в упругопластической стадии, либо в случае, если интенсивность напряжений во всех точках стенки оболочки

выше предела текучести. После снятия давления в стенке цилиндра возникают сжимающие остаточные окружные напряжения. Эти остаточные напряжения снижают растягивающие напряжения, возникающие в результате последующего приложения рабочего давления, что повышает несущую способность цилиндрической оболочки [10].

В зависимости от характера приложения нагрузки процесс автофретирования может делиться на [77]: гидравлическое автофретирование давлением, механическое автофретирование дорном, взрывное автофретирование, ротационное автофретирование, температурное автофретирование. В настоящее время существуют различные процессы автофретирования толстостенных цилиндрических оболочек из высокопрочной стали. Однако на практике чрезвычайно эффективным представляется гидравлическое автофретирование толстостенных цилиндрических оболочек, т.е. путем приложения внутреннего давления. Поэтому в данном исследовании рассматривается моделирование процесса гидравлического автофретирования.

При гидравлическом автофретировании исследователями используются различные математические модели для точного прогнозирования остаточных напряжений и расчёта напряженно-деформированного состояния толстостенных оболочек. Как и в большинстве задач теории пластичности, моделирование гидравлического автофретирования требует проведения математической постановки задачи, включающей в себя дифференциальные уравнения равновесия, физические уравнения, геометрические уравнения, уравнения совместности деформаций и граничные условия.

Переход из упругой стадии деформирования в пластическую определяется на основании условия пластичности. Изменения напряжений в цилиндре, связанные с эволюцией пластической деформации, описываются функцией деформационного упрочнения. Так как цикл нагружения в процессе автофретирования включает стадию разгрузки, учет эффекта Баушингера также представляется важным. Поэтому при моделировании процессов гидравлического

автофретирования требуется учитывать граничные условия, условие пластичности и поведение материала при упругопластической деформации.

Гидравлическое автофретирование может представляться достаточно трудоемким процессом, поскольку необходимо очень тщательно регулировать прикладываемое к цилиндру давление, чтобы получить необходимую деформацию; при заданном давлении незначительные изменения предела текучести материала могут привести к возникновению значительных деформаций.

1.2 Влияние способов крепления и заделки при гидравлическом автофретировании

В практике производства несущую способность толстостенных цилиндрических деталей повышают в пределах упругости путём нагружения цилиндров определенным предварительным внутренним давлением, при котором возникают пластические деформации в их внутренних слоях стенки. Для решения таких задач существует несколько типичных конструктивных схем оформления крепления и заделки концов толстостенного цилиндра, работающего под действием внутреннего давления. Такие граничные условия, как правило, влияют на возникновение сложного напряженного состояния, характеризующегося тремя главными напряжениями.

В работе [16] Смирновым-Аляевым Г.А. достаточно подробно описаны основные конструктивные схемы оформления крепления заделки концов полого цилиндра при гидравлическом автофретировании. Выделяется шесть основных случаев [16]:

- Цилиндр с жестко заделанными доньями свободно подвижен; цилиндр под действием внутреннего давления удлиняется.
- Цилиндр неподвижно закреплен одним концом; другой конец уплотнен поршнем, на шток которого действует сила, которая преодолевает

равнодействующую давления на поршень и трение в уплотнениях поршня; при повышении давления цилиндр будет укорачиваться.

- Цилиндр малой по сравнению с диаметром высоты, со свободными торцами находится под действием внутреннего давления.

- Длинный открытый по концам или закрытый с одной стороны полый цилиндр, для которого осевая деформация равна нулю.

- Цилиндр со свободными торцами; трение в уплотнениях препятствует свободному укорачиванию цилиндра; равнодействующая сил трения создает растягивающие напряжения в осевом направлении.

- Закрытый цилиндр с жестко закрепленными концами; осевая деформация равна нулю.

Согласно большинству современных исследований при моделировании процесса гидравлического автофретирования толстостенных цилиндров рассматриваются два основных случая, когда формулировка задачи может быть основана на предположении о плоском напряженном состоянии или плоской деформации. В случае плоского напряженного состояния можно считать осевое напряжение равным нулю, что, например, отмечается при исследовании коротких труб, колец [25, 55, 70]. В случае плоской деформации осевая деформация цилиндра принимается равной нулю, что выполняется и для бесконечно длинных труб [7, 24, 32, 54, 68]. Исследование напряженного состояния трубы при автофретировании в условиях плоской деформации рассмотрено также в работе [25] и методом конечных элементов в труде [42].

1.3 Условия пластичности при решении задач автофретирования

Процесс автофретирования сопровождается упругопластическим деформированием толстостенной цилиндрической оболочки. В результате пластической деформации на внутренней поверхности оболочки возникают остаточные сжимающие напряжения. Задача Ламэ описывает упругое поведение

цилиндра, находящегося под давлением, но не предсказывает ни текучести, ни последующего пластического поведения; поэтому решение задачи Ламэ не может быть использовано для моделирования процесса автофретирования. Соответственно, требуется учитывать условие начала пластичности, при котором главные напряжения в толстостенной цилиндрической оболочке соотносятся со значением предела текучести материала.

В большинстве случаев условие начала пластичности, как правило, определяется на основе критерия Треска или критерия Мизеса. Возникновение пластических деформаций однозначно определяется напряжениями. Соответственно, условие начала пластичности может быть представлено в виде:

$$f_T(\sigma_{ij}) = 0. \quad (1.1)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, f_T – функция начала пластичности.

Условие начала пластичности Треска описывается соотношением:

$$f_T(\sigma_{ij}) = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} - \sigma_T = 0. \quad (1.2)$$

где σ_T – предел текучести материала, σ_1, σ_2 и σ_3 – главные напряжения.

Это условие приводит к сравнительно менее сложной формулировке, но не учитывает среднее напряжение. Условие начала пластичности согласно критерию Мизеса имеет вид:

$$f_T(\sigma_{ij}) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_T^2 = 0. \quad (1.3)$$

Данное условие позволяет более точно прогнозировать реальное поведение материала. Некоторые исследователи использовали простоту условия Треска и точность условия Мизеса в рамках создания единой модели в работах [53, 82]. В работе [53] использовался данный критерий для упругопластического анализа цилиндра с открытым торцом, находящегося под внутренним давлением. Полученное решение оказалось более простым и точным, чем решение, основанное на использовании критерия текучести Треска.

Кроме того, по результатам проведенных экспериментальных проверок условий начала пластичности типа (1.1) многими исследователями [17] высказано

утверждение, что при решении упругопластических задач условие (1.3) позволяет получить более точные результаты, чем условие (1.2).

1.4 Подходы к описанию деформационного упрочнения и учету эффекта Баушингера

Многими исследователями при анализе процесса автофретирования толстостенных цилиндров используются некоторые из моделей деформационного упрочнения. Например, модель линейного упрочнения: $\sigma_i = \lambda \sigma_{iT} + 3G(1 - \lambda)e_i$ при $e_i > e_{iT}$, степенного упрочнения: $\sigma_i = Ae_i^n$ при $e_i > e_{iT}$ или $\sigma_i = A(e_i - e_{0i})^n$ при $e_i > e_{iT}$, где σ_i – интенсивность напряжений; e_i – интенсивность деформаций Генки; G – модуль упругости II рода, $\lambda = 1 - E_T/3G$, $E_T = \operatorname{tg} \alpha'$ – модуль упрочнения, σ_{iT} – предел текучести материала, e_{iT} – интенсивность деформаций Генки, определяющая переход материала из стадии упругого деформирования в стадию пластического деформирования, A и n – параметры степенной функции аппроксимации диаграммы деформирования, e_{0i} – величина смещения степенной функции по оси деформаций при аппроксимации диаграммы деформирования.

Под эффектом Баушингера понимается явление, при котором предел текучести материала снижается при нагружении в противоположном направлении, что существенно влияет на эффективность процесса автофретирования. При учёте деформационного упрочнения и эффекта Баушингера большинство материалов не демонстрируют идеальных упругопластических характеристик, поэтому для описания упругопластических свойств реального материала требуется применение упрощенной модели, широко используемыми формами которой являются модели линейного, степенного деформационного упрочнения или их комбинация.

В работе [58] проведена количественная оценка коэффициента Баушингера

при различных уровнях перегрузки при растяжении модифицированной стали 4330 для различных состояний термообработки. Согласно [58] эффект Баушингера уменьшается с увеличением пластичности при растяжении, но остается примерно неизменным после достижения 2% уровня пластичности при растяжении. В работе [56] проведено испытание на одноосное растяжение-сжатие для разработки упругопластической модели, учитывающей эффект Баушингера в материале. Этот эффект вызывает увеличение предела текучести при сжатии по отношению к максимальной деформации при растяжении. В работе [81] проведены одноосные испытания на растяжение-сжатие для сплавов А723, НУ80 и РН 13-8mo, и были представлены соответствующие данные по растяжению-сжатию. В работе [46] предложена обобщенная модель автофретирования, которая включает в себя зависимость деформационного упрочнения материала и эффект Баушингера на основе фактической зависимости растяжения от деформации для сплава 30CrNiMo8. Однако не учитывалось влияние максимальной деформации растяжения на эффект. В работах [60, 64, 65, 66] предложена модифицированная модель кинематического упрочнения, учитывающая изменение эффекта Баушингера. Предложенная модель подходит для материалов с деформационным упрочнением и позволяет точно описать упругопластические свойства при нагружении и разгрузке для больших деформаций растяжения.

Как правило, эффект Баушингера учитывается с помощью двух подходов. В соответствии с первым и наиболее распространенным подходом, критерий текучести при обратном нагружении определяется с помощью коэффициента эффекта Баушингера, который во многих работах определяется отношением предела текучести при сжатии к мгновенному пределу текучести согласно [58]. В работе [27] проведено исследование по прогнозированию значения коэффициента эффекта Баушингера для сложного нагружения на основе графо-аналитического подхода. На примере гидравлического автофретирования толстостенного цилиндра метод был продемонстрирован в условиях открытых и закрытых торцов. Второй подход к расчёту эффекта Баушингера заключается в

использовании кинематической модели упрочнения. Модели кинематического упрочнения, основанные на рассмотренных в работах [71, 83] подходах, широко используются исследователями для моделирования автофретирования толстостенных цилиндров. Согласно [60] эффект Баушингера снижает максимальное остаточное напряжение в процессе автофретирования, в рамках работы [60] предложено эмпирическое правило, согласно которому эффект Баушингера снижает максимальное остаточное напряжение на внутренней стенке цилиндра при гидравлическом автофретировании примерно на 30% по сравнению со случаем идеальной упругопластической модели материала.

1.5 Существующие модели гидравлического автофретирования толстостенных цилиндрических оболочек

На основании проведенного анализа процесса автофретирования следует, что гидравлическое автофретирование является одним из наиболее традиционных и широко применяемых методов автофретирования в производственной сфере. При гидравлическом автофретировании толстостенный цилиндр, как правило, подвергается воздействию внутреннего высокого давления, при котором эквивалентное напряжение на внутренней стенке цилиндра превосходит предел текучести его материала. При этом некоторая внутренняя область цилиндра переходит в пластическое состояние. После снятия приложенного давления во внутренних слоях возникает поле сжимающих остаточных напряжений, которое оказывает благоприятное влияние на эксплуатационные характеристики детали: возрастает предельное рабочее давление, повышается усталостная прочность.

В настоящее время математическое моделирование упругопластического анализа процесса гидравлического автофретирования было проведено для цилиндрических оболочек многими российскими и зарубежными исследователями. Касаясь применяемых теоретических моделей гидравлического автофретирования, большинство из них были сформулированы на основании двух

теорий: деформационной и пластического течения. Первая теория рассматривает полную деформацию как функцию напряжения, а теория пластического течения рассматривает приращение деформаций как функцию напряжения. Кроме того, было разработано несколько моделей, основанных на теории течения с использованием формулировок скорости деформации [34, 78]. Тип формулировки и различные вопросы моделирования влияют на сложность модели и конкретный метод решения. В связи с этим теоретические модели классифицируются на две категории: аналитические и численные.

Для анализа гидравлического автофретирования некоторые аналитические модели, основанные на деформационной теории пластичности, включают в себя не только тензор напряжений Коши, но и градиент эффективной пластической деформации, что отражено в работах [37, 38, 71], где решаются задачи для условия плоской деформации без учёта влияния эффекта Баушингера. Также некоторые аналитические модели, основанные на деформационной теории пластичности, приведены в работах [44, 45, 71], где рассмотрены модели деформационного упрочнения материалов с учетом эффекта Баушингера при применении критерия текучести Мизеса. Решения задач, полученных на основе деформационной теории и критерия текучести Мизеса, представлены в работах [39, 40], где не рассматривается эффект Баушингера.

Некоторыми исследователями были предложены аналитические модели с использованием теории пластического течения, которые в большинстве случаев основывались на критерии текучести Треска с использованием идеального упругопластического, линейно-изотропного, кинематически упрочняющегося материала. В работе [51] рассмотрено аналитическое решение задачи автофретирования цилиндров с открытыми и закрытыми концами, а в [30] с учётом эффекта Баушингера. Решение при учёте линейного упрочнения материала приведено в [57]. В [24] представлено решение для линейно-кинематически упрочняющегося поведения материала с учётом эффекта Баушингера.

Также рассматривался инкрементный подход к аналитическому решению задач при использовании критерия текучести Мизеса для плоской деформации или цилиндра с закрытыми торцами [28], где одним из условий являлось то, что осевое напряжение равно среднему значению радиального и окружного напряжений при учёте несжимаемости материала. На основании этого подхода приведена аналитическая модель для цилиндра с закрытыми торцами в работе [54], где рассматривается линейно-деформационное упрочнение материала с учётом эффекта Баушингера.

Численные модели гидравлического автофретирования в большинстве случаев приводятся в формулах, основанных на теории пластического течения с использованием нелинейной изотропной или кинематической модели упрочняющегося материала. В работе [73] была предложена модель деформирования цилиндра с закрытыми концами при использовании различных случаев критерия текучести Треска и Мизеса. В дальнейшем это исследование было расширено на случай цилиндра с открытыми торцами [72]. В работе [68] рассматривался метод, разработанный в труде [73], в котором освещено влияние линейного упрочнения материала с учетом эффекта Баушингера на механические характеристики материалов. В работе [28] разработана общая модель для цилиндра, на который действуют внутреннее давление, внешнее давление и тепловой градиент.

К численным методам, основанным на деформационной теории пластичности, относится метод переменных свойств материала. Этот метод был изначально предложен Джахедом и другими авторами [48] для определения упругопластических деформаций, напряжений в толстостенном цилиндре под внутренним давлением. В этом методе цилиндр был разделен на конечные области или полосы, в пределах которых характеристики материала, а именно: модуль Юнга и коэффициент Пуассона, рассматривались как переменные. Деформирование в каждой области рассматривалось как псевдоупругое. Неупругое решение было получено из упругих определяющих уравнений с использованием значений модуля Юнга и коэффициента Пуассона, определенных

с помощью численных процедур. Разработанный метод является универсальным и может с высокой точностью моделировать результаты, основанные на критерии текучести Треска и Мизеса. Кроме того, этот метод позволяет учитывать линейные и нелинейные свойства упрочнения. В дальнейшем численную модель можно было привести к аналитической модели для случая неупрочняющегося материала с использованием критерия Треска. В работе [47] данный метод был расширен для определения остаточных напряжений. В работе [76] этот метод применялся для исследования остаточных напряжений в цилиндре, вызванных комбинацией гидравлического автофретирования и обмоткой. Отсюда было установлено, что обмотка цилиндра уменьшает остаточные растягивающие напряжения, которые возникают на внешней поверхности цилиндра в результате автофретирования.

Существует несколько численных моделей, основанных на теории течения с использованием формул скорости деформации. В работе [34] предложена модель для толстостенного цилиндра из изотропного упрочняющегося материала в случае плоской деформации при применении критерия текучести Треска и ассоциированного закона течения. В работе [78] проводились эксперименты по одноосному циклическому нагружению среднеуглеродистой стали с целью исследования влияния скорости нагружения на модуль упругости, предел текучести и деформационное упрочнение при двух различных скоростях деформации. Было обнаружено, что скорость деформации значительно влияет на предел текучести при растяжении и обратное деформационное упрочнение, оба показателя увеличиваются с ростом скорости деформации.

Также исследователи использовали метод конечных элементов для точного моделирования поведения материала [23, 74] или для подтверждения достоверности разработанных численных моделей [82]. Большинство моделей с использованием метода конечных элементов, описанных в источниках, основано на критерии текучести Мизеса. В работе [68] применялся метод жесткостей для осесимметричной формулировки метода конечных элементов при

упругопластическом анализе толстостенного цилиндра под внутренним давлением.

Экспериментальные исследования гидравлического автофретирования, как правило, проводятся, с целью выявления наличия остаточных напряжений, измерения уровня автофретирования или получения данных о распределении остаточных напряжений. Для определения наличия кольцевых остаточных напряжений наиболее простым является метод разрезного кольца [61], который заключается в измерении угла раскрытия продольного сквозного надреза, сделанного на кольцевом образце автофретированного цилиндра. Этот метод был впервые предложен в работе [62]. Наиболее распространенными методами количественной оценки остаточных напряжений при гидравлическом автофретировании являются метод сверления отверстий [41], метод растачивания по Саксу [75], метод совмещения [31], метод рентгеновской дифракции [49] и метод нейтронной дифракции [26].

В работе [73] предложен подход для расчета оптимального давления автофретирования, при котором достигается максимальный эффект. Это оптимальное давление зависит от трех факторов: параметров цилиндра, деформационного упрочнения и эффекта Баушингера. На основании критерия текучести Треска и для модели материала без упрочнения, оптимальное давление автофретирования в цилиндрах с относительной толщиной стенок более 2,22 равно удвоенному давлению, при котором начинается текучесть цилиндра [29]. Для расчёта избыточной нагрузки была предложена приблизительная, но достаточно эффективная оценка [59], согласно которой радиус упругопластической границы раздела, соответствующий оптимальному давлению автофретирования, равен среднему геометрическому значению внутреннего и внешнего радиусов цилиндра. Также может возникнуть обратная пластичность, которая свидетельствует о том, что автофретирование было выполнено с избыточным давлением, превышающим оптимальную величину. С учётом эффекта Баушингера оптимальное давление автофретирования будет меньше из-за снижения предела текучести при сжатии. В работе [63] было выдвинуто

предположение, что потеря сжимающих остаточных напряжений вследствие эффекта Баушингера может быть уменьшена путём проведения автофретирования в несколько этапов, когда за первоначальным следует незначительная термообработка и последующее автофретирование со второй избыточной нагрузкой. Согласно [53] процедура с двойным и тройным автофретированием позволяет увеличить усталостную долговечность более чем в 5 раз по сравнению с однократным автофретированием.

1.6 Численно-аналитические методы решения осесимметричной задачи упругопластического деформирования

Решения упругопластических задач с использованием дифференциальных уравнений равновесия, граничных условий на поверхности, условий совместности деформаций и зависимостей между деформациями и напряжениями, как правило, сопряжены со значительными трудностями. Многие задачи за пределами упругости до сих пор не имеют точных решений. Поэтому в теории пластичности, еще в большей степени, по сравнению с теорией упругости, значительную роль играют приближенные методы решения. С развитием приближённых методов расчета в теории пластичности широкое распространение получили методы, в рамках которых упругопластическая задача сводится к решению в последовательных приближениях.

1.6.1 Метод переменных свойств материала

Как показал анализ работ, посвящённых процессам автофретирования, из всех применяемых численно-аналитических методов (кроме метода конечных элементов), наиболее универсальным методом является разработанный зарубежными учёными (Хамид Джахед с соавторами) метод переменных свойств

материала (Variable Material Properties – VMP), который находит всё более широкое применение в решении упругопластических задач деформирования оболочек [35, 47, 48 77].

Метод переменных свойств материала представляет собой модификацию метода упругих решений, при котором цилиндр делится по толщине на конечные области, в пределах которых свойства материала, а именно модуль упругости первого рода и коэффициент Пуассона, изменяются в процессе деформирования. Согласно этому методу для построения численной методики применяется упругое решение задачи Ламэ, где основные соотношения связывают между собой внутреннее и наружное радиальные смещения, а также приложенные на граничных поверхностях давления.

В упругом решении точки, расположенные ближе к отверстию цилиндра, имеют большее напряжение, чем при решении за пределами упругости. Если эквивалентное напряжение в точке на внутренних слоях цилиндра меньше предела текучести материала, то все точки остаются в упругом состоянии и можно применять упругое решение. Однако если оно превышает предел текучести материала, то происходит пластическая деформация и упругое решение больше не применяется. Для точек, которые испытывают значительные напряжения выше предела текучести, эффективные значения коэффициента Пуассона и модуля Юнга должны быть изменены в зависимости от напряженного состояния в точке.

После дискретизации тела на круговые элементы матрицы жесткости элементов собираются в глобальную матрицу жесткости, и формируется уравнение равновесия. Затем применяются граничные условия на поверхности каждого элемента цилиндра, и решается уравнение равновесия для неизвестных значений перемещений и сил.

Для того, чтобы уточнить эффективные значения коэффициента Пуассона и модуля Юнга в рассматриваемой области, в которой находится исследуемая точка a при одном и том же уровне деформации, необходимо определить соответствующее напряжение по кривой одноосного напряжения-деформации, а

затем разделить на деформацию, что позволит получить секущий модуль в точке a' , определяющий эффективный модуль Юнга (см. рисунок 1.2). Принимается, что в каждой рассматриваемой области соответствующие скорректированные величины эффективных значений коэффициента Пуассона и модуля Юнга, остаются постоянными. Поэтому матрицы жесткости элементов корректируются с использованием эффективных параметров и объединяются для создания глобальной матрицы жесткости. Затем, подставляя полученные значения в матрицу жесткости, итерационный процесс приводит к окончательному решению.

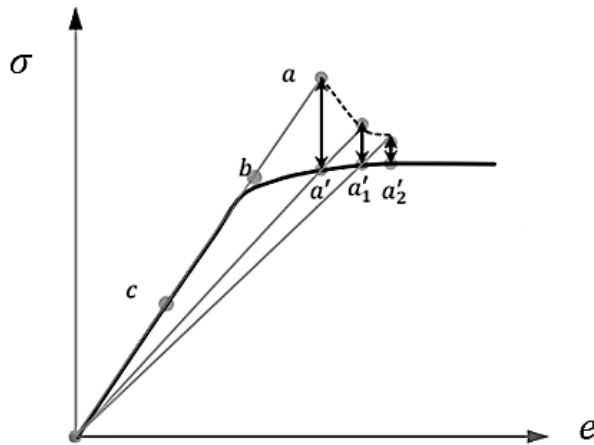


Рисунок 1.2 – Графическая иллюстрация подхода метода переменных свойств материала для осесимметричной задачи с использованием метода проекции [35]

Этот процесс повторяется до тех пор, пока полученная в результате расчёта кривая не совпадет с экспериментально полученной кривой одноосного растяжения. Для разгрузки процедура аналогична нагружению, за исключением того, что теперь каждая полоса имеет свою собственную кривую напряжения-деформации, которая получается путем применения правил упрочнения, таких как изотропное или кинематическое упрочнение, или из фактической кривой разгрузки, полученной при экспериментальном исследовании. После решения задачи разгрузки поле остаточных напряжений получается путем нахождения разностей напряженного состояния при нагружении и напряженного состояния в конце разгрузки.

При решении задачи автофретирования цилиндра с помощью метода переменных свойств материала деформация в каждой области рассматривается

как псевдоупругая, и для каждого элементарного цилиндра, нагруженного внутренним и внешним давлением, решается задача Ламэ. После составления всех областей получается громоздкая система линейных уравнений, которую необходимо решить.

Общие свойства метода переменных свойств материала [35]:

1. Метод обеспечивает полное упругопластическое решение осесимметричных задач.

2. Метод обеспечивает эффективный по времени и надежный анализ упругопластических напряжений, особенно на начальных стадиях проектирования.

3. Метод использует реальную кривую разгрузки материала и способен моделировать обратную текучесть с использованием правил изотропного и кинематического упрочнения, а также эффекта Баушингера.

4. Итерационный метод, основанный на проекционном подходе, обеспечивает устойчивую сходимость решения.

5. Применение метода переменных свойств материала может быть ограничено задачами, в которых нагружение является простым.

Следует отметить, что, несмотря на все преимущества, метод переменных свойств материала строится на решении серий упругих задач, что делает ограниченным его применение при решении задач с большими пластическими деформациями, а также при учете физической и геометрической нелинейностей.

1.6.2 Метод переменных параметров упругости

При расчётах процесса автофретирования толстостенных осесимметричных оболочек приходится решать задачи расчёта упругопластического напряженно-деформированного состояния. При этом неточность в определении напряженно-деформированного состояния при активном нагружении и остаточных напряжений при разгрузке может привести к значительным отклонениям в

процессе эксплуатации оболочек, снижению их прочности, долговечности, а также к возможному разрушению всей конструкции в процессе нагружения. Кроме того, в большинстве известных решений рассматривается упругопластическая модель материала без упрочнения или с линейным упрочнением, где не учитывается эффект Баушингера или учитывает в идеальной форме, согласно принципу Мазинга [11]. Распределение напряжений и деформаций в толстостенных упругопластических цилиндрах в процессе автофретирования изучалось многими российскими и зарубежными учеными. Из практики известно, что при определении напряженно-деформированного состояния в области упругопластического деформирования толстостенных цилиндров необходимо учитывать как физическую нелинейность материала – нелинейный закон упрочнения при пластическом деформировании, так и сжимаемость материала, а также влияние эффекта Баушингера на механические свойства материала при расчёте остаточных напряжений.

Таким образом, при определении напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек в процессе гидравлического автофретирования внутренним давлением наиболее подходящим представляется метод переменных параметров упругости, автором которого принято считать И.А. Биргера [5, 6], позволяющий учитывать не только геометрическую нелинейность в процессе деформирования, но и нелинейное деформационное упрочнение материала, а также при расчёте остаточных напряжений и деформаций упругопластическую анизотропию, вызванную эффектом Баушингера. Метод переменных параметров упругости базируется на итерационном подходе и представляется одним из наиболее эффективных приближенных методов решения упругопластических задач.

Согласно данному методу физические соотношения в пределах упругопластического деформирования, описывающие поведение материала, записываются в форме, внешне напоминающей обобщённый закон Гука. При этом упругие характеристики материала: модуль упругости и коэффициент поперечной деформации рассматриваются не как постоянные, а как функции

напряжённого состояния в каждой конкретной точке тела. В связи с этим параметры различны для разных точек тела:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{[\sigma_{11} - \mu^*(\sigma_{22} + \sigma_{33})]}{E^*}, & \varepsilon_{12} &= \frac{\sigma_{11}}{2G^*}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{[\sigma_{22} - \mu^*(\sigma_{11} + \sigma_{33})]}{E^*}, & \varepsilon_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{2G^*}, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{[\sigma_{33} - \mu^*(\sigma_{11} + \sigma_{22})]}{E^*}, & \varepsilon_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{2G^*},\end{aligned}\tag{1.4}$$

где ε_{ij} , $i, j = \overline{1,3}$ – компоненты тензора деформаций; μ^*, E^*, G^* – переменные параметры упругости, связанные между собой равенством: $G^* = E^*/2(1 + \mu^*)$.

Для определения параметров упругости μ^* и E^* применяются специальные уравнения, выражающиеся через секущий модуль $E_{сек} = \sigma_i/\varepsilon_i$, полученный на основе наклона касательной к единой кривой $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ в соответствующей точке [10, 13]:

$$\left. \begin{aligned}E^* &= \frac{E_{сек}}{1 + k_\mu E_{сек}}, \\ \mu^* &= \frac{\frac{1}{2} - k_\mu E_{сек}}{1 + k_\mu E_{сек}},\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

где $k_\mu = (1 - 2\mu)/3E$, μ – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга.

Для несжимаемого тела, у которого $\mu = 0,5$, формула (1.5) принимает вид:

$$E^* = E_{сек} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad \mu^* = 0,5.$$

Добавление к этим уравнениям уравнений равновесия, геометрических соотношений, условия пластичности приводит к системе, позволяющей решать упругопластические задачи. Эта система отличается тем, что параметры E^* и μ^* оказываются неизвестными и непостоянными величинами. Их определение проводится с помощью итерационного процесса.

В первом приближении согласно [6] принимается, что:

$$E^{*(1)} = E, \quad \mu^{*(1)} = \mu.$$

При этом решение задачи приводит к получению напряженно-деформированного состояния первого приближения:

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}, \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Согласно численному подходу «вычисляются значения интенсивностей напряжений $\tilde{\sigma}_i^{(1)}$ и деформаций $\tilde{\varepsilon}_i^{(1)}$, то есть определяются соответствующие компоненты напряжённого и деформированного состояния материала в первом приближении. На диаграмме, отображающей зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформацией ε_i (см. рисунок 1.3), напряженно-деформированное состояние первого приближения соответствует точке Q_1 . Данная точка лежит на прямой, тангенс угла наклона которой равен секущему модулю $E_{сек}^{(1)}$, имеющему в первом приближении значение модуля упругости E » [6, 20].

Для второго приближения производится пересчет секущего модуля с учетом полученных результатов.

Точка $(\tilde{\sigma}_i^{(1)}, \tilde{\varepsilon}_i^{(1)})$, полученная в первом приближении, переносится на реальную кривую деформирования $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ в новую точку $(\sigma_i^{(1)}, \varepsilon_i^{(1)})$. На практике такой перенос может осуществляться двумя способами: «либо вертикально – то есть при фиксированном значении деформации, либо по нормали – перпендикулярно к касательной в данной точке кривой упрочнения (рисунок 1.3). Как показал практический опыт, снос точки по нормали обеспечивает наилучшую сходимость метода и свободен от некоторых недостатков, возникающих при сносе по вертикали» [6, 19].

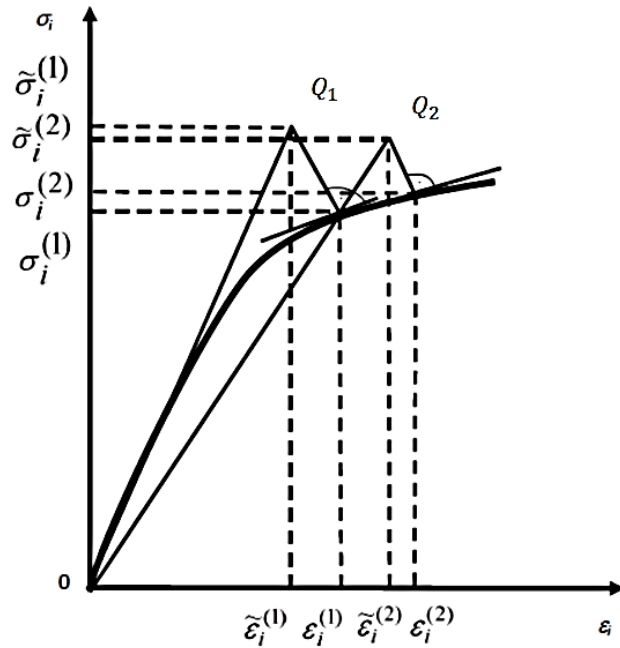


Рисунок 1.3 – Геометрическая интерпретация при решении упругопластических задач методом переменных параметров упругости с ускорением сходимости [20]

При переходе ко второму приближению принимается:

$$E_{cek}^{(2)} = \frac{\sigma_i^{(1)}}{\varepsilon_i^{(1)}},$$

при этом для второго приближения переменные параметры упругости вычисляются согласно выражениям, приведённым в формулах (1.5):

$$E^{*(2)} = \frac{E_{cek}^{(2)}}{1 + k_\mu E_{cek}^{(2)}},$$

$$\mu^{*(2)} = \frac{1/2 - k_\mu E_{cek}^{(2)}}{1 + k_\mu E_{cek}^{(2)}}.$$

На следующем этапе расчета используются полученные значения переменных параметров упругости $\mu^{*(2)}$ и $E^{*(2)}$, на основе которых определяется соответствующее второму приближению напряженно-деформированное состояние:

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}, \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(2)}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Находятся интенсивности напряжений $\tilde{\sigma}_i^{(2)}$ и деформаций $\tilde{\varepsilon}_i^{(2)}$.

На диаграмме, отображающей зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и деформацией ε_i (см. рисунок 1.3), напряженно-деформированное состояние второго приближения соответствует точке Q_2 . Данная точка лежит на прямой, тангенс угла наклона которой равен секущему модулю $E_{cek}^{(2)}$.

На следующем этапе итерационного процесса осуществляется повторная корректировка текущего модуля упругости с учётом уточнённых данных. В результате этого пересчёта определяются значения переменных параметров упругости μ^* и E^* , соответствующие третьему приближению. Процесс продолжается аналогичным образом, последовательно уточняя характеристики материала и напряжённо-деформированное состояние на каждом шаге приближения.

Итерационный процесс расчёта продолжается до тех пор, пока разность между результатами двух последовательных приближений становится достаточно малой, что свидетельствует о достижении устойчивой сходимости. При этом необходимо, чтобы точки, характеризующие приближённые значения напряжений и деформаций в координатной плоскости $(\sigma_i, \varepsilon_i)$, располагались достаточно вблизи заданной кривой зависимости $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$. Это условие обеспечивает корректность аппроксимации и подтверждает адекватность выбранной модели.

Рассматриваемый метод обладает рядом существенных преимуществ, среди которых следует отметить её интуитивную понятность, высокую эффективность итерационного процесса, выражающуюся в быстрой сходимости последовательных приближений.

Основные преимущества метода переменных параметров упругости:

1. Предложенный метод позволяет обеспечить полное упругопластическое решение процесса гидравлического автофретирования оболочки, а также учитывать сжимаемость материала и решать задачи, связанные с нелинейным пластическим деформированием.

2. В общем случае строгая математическая сходимость метода переменных параметров упругости не доказана согласно [5, 6]. Тем не менее, практический

опыт применения данного подхода свидетельствует о его высокой эффективности: как правило, «метод демонстрирует более устойчивую и быструю сходимость» [4-6].

3. В основе метода лежит «использование экспериментально полученной диаграммы деформирования материала» [4-6], характеризующей его поведение как при нагружении, так и при разгрузке. Позволяет моделировать поверхность обратной пластичности при использовании правил изотропного или кинематического упрочнения, а также переменного коэффициента Баушингера.

4. Метод является более точным и простым, с точки зрения реализации, так как не требует предварительного решения упругой задачи (задачи Ламэ), а позволяет использовать интегральные уравнения равновесия и совместности деформаций, записанные в координатах Эйлера для нелинейных мер деформации.

Выводы по первой главе

Согласно анализу современного состояния проблемы исследования различных существующих процессов автофретирования толстостенных цилиндрических оболочек для повышения предельного рабочего давления толстостенных цилиндрических оболочек из высокопрочной стали гидравлическое автофретирование представляется чрезвычайно эффективным. Математическое моделирование процесса упругопластического деформирования толстостенных оболочек при гидравлическом автофретировании должно учитывать сжимаемость материала, реальную диаграмму деформирования и упругопластическую анизотропию, вызванную эффектом Баушингера. По результатам анализа численно-аналитических методов решения осесимметричной задачи упругопластического деформирования, наиболее подходящим для описания напряжённо-деформированного состояния цилиндра в процессе гидравлического автофретирования представляется метод переменных параметров упругости.

ГЛАВА 2. ОПИСАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛА ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ АВТОФРЕТИРОВАНИИ

2.1 Основные допущения при описании диаграмм деформирования

Для описания диаграмм деформирования материала при решении упругопластической задачи в процессе моделирования процесса гидравлического автофретирования толстостенных цилиндрических оболочек принимались следующие допущения:

1. Выполняется гипотеза единой кривой, согласно которой интенсивность напряжений является однозначной функцией интенсивности деформаций.
2. Мерой деформации является деформация Генки.
3. Учитывается сжимаемость материала, коэффициент поперечной деформации $\mu \neq 0,5$.
4. Упругопластические свойства материала описываются уравнениями, учитывающими изменения коэффициента Баушингера и модуля упругости первого рода при обратном нагружении в зависимости от предшествующей пластической деформации согласно [66, 67].

2.2 Построение диаграммы деформирования третьего рода при нагружении

2.2.1 Свойства диаграммы деформирования третьего рода

Как указывалось в главе 1, для анализа напряжённо-деформированного состояния и остаточных напряжений в толстостенных цилиндрических оболочках при гидравлическом автофретировании предлагается применить подход, основанный на методе переменных упругих параметров. Этот метод позволяет

учитывать как геометрическую, так и физическую нелинейность, а также влияние сжимаемости материала, что обеспечивает более точное моделирование реального поведения конструкции под нагрузкой. Для получения решений таких задач, необходимо иметь достаточно простое аналитическое выражение диаграммы деформирования третьего рода с учётом сжимаемости материала и её свойств.

Диаграмма деформирования третьего рода представляет собой график зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций

$$\sigma_i = f(e_i),$$

где σ_i – интенсивность напряжений, e_i – интенсивность деформаций Генки.

Если «принять условие несжимаемости материала, то диаграмма деформирования совпадает с действительной диаграммой растяжения» [4]:

$$\sigma_s = f(e),$$

где σ_s – действительное напряжение при одноосном растяжении; $e = \ln(l/l_0)$ – продольная деформация Генки, l_0 – начальная длина образца, l – длина образца после деформирования.

В случае учёта сжимаемости материала выражения для интенсивностей напряжений и деформаций при одноосном растяжении имеют вид [10]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_s, \\ e_i &= e_i - k_\mu \sigma_s \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

$$k_\mu = \frac{(1 - 2\mu)}{3E}. \quad (2.2)$$

При упругих деформациях связь между σ_i и e_i имеет вид:

$$\sigma_i = \frac{3E}{2(1 + \mu)} e_i = 3G e_i,$$

Таким образом, имея экспериментальную диаграмму деформирования, отражающую поведение материала при растяжении, построенную по результатам испытания на разрыв, с применением формул (2.1) и (2.2) можно построить диаграмму деформирования третьего рода с учетом сжимаемости материала.

Рассмотрим свойство диаграммы деформирования третьего рода, исходя из условия, что максимальное растягивающее усилие P при одноосном растяжении, наблюдаемое в момент образования шейки знаменует переход от равномерной деформации к локализованной и соответствует пределу прочности материала [5]:

$$dP|_{e_i=e_{iш}} = 0. \quad (2.3)$$

где $e_{iш}$ – интенсивность деформаций Генки в момент начала шейкообразования.

При одноосном растяжении, растягивающее усилие связано с действительным напряжением выражением:

$$P = \frac{\sigma_s}{F},$$

где F – площадь поперечного сечения образца в текущий момент времени.

Обозначим деформацию в направлении действия усилия – e , а в перпендикулярном направлении e_p – (поперечная деформация). Исходя из определения коэффициента поперечной деформации, запишем связь между этими величинами:

$$e_p = -\mu' e, \quad (2.4)$$

где μ' – коэффициент поперечной деформации за пределами упругости.

В случае одноосного растяжения значение коэффициента поперечной деформации за пределами теории упругости определяется выражением [10]:

$$\mu' = -\frac{1}{2} - \frac{(1-2\mu)\sigma_s}{3Ee} = \frac{1}{2} \left(1 - 3k_\mu \frac{\sigma_s}{e} \right). \quad (2.5)$$

Величина F определяется, используя выражения (2.4) и (2.5):

$$F = F_0 \exp(3k_\mu \sigma_s - e). \quad (2.6)$$

Используя выражения (2.1), выразим F через σ_i и e_i :

$$F = F_0 \exp(2k_\mu \sigma_i - e_i).$$

Таким образом, P представляется через σ_i и e_i следующим образом

$$P = F_0 \sigma_i \exp(2k_\mu \sigma_i - e_i). \quad (2.7)$$

Дифференцируя равенство (2.7), находим:

$$dP = F_0 \exp(2k_\mu \sigma_i - e_i) [(1 + 2k_\mu \sigma_i) d\sigma_i - \sigma_i de_i].$$

Учитывая условие (2.3), получим:

$$\left. \frac{d\sigma_i}{de_i} \right|_{e_i=e_{iш}} = \frac{\sigma_{iш}}{(1 + 2k_\mu \sigma_{iш})}, \quad (2.8)$$

где $\sigma_{iш}$ – значение интенсивности напряжений в момент начала образования шейки.

Полагая, что «шейка возникает при условном напряжении, равном временному сопротивлению σ_B » [4], выражение (2.8) можно записать в виде

$$\left. \frac{d\sigma_i}{de_i} \right|_{e_i=e_{iш}} = \frac{\sigma_{iB}}{(1 + 2k_\mu \sigma_{iB})},$$

где σ_{iB} – значение интенсивности напряжений, соответствующее временному сопротивлению.

С учётом (2.1), можно записать

$$\left. \frac{d\sigma_i}{de_i} \right|_{e_i=e_{iш}} = \frac{\sigma_{св}}{(1 + 2k_\mu \sigma_{св})}, \quad (2.9)$$

где $\sigma_{св}$ – значение действительного напряжения, соответствующее временному сопротивлению σ_B .

Уравнение (2.9) отражает свойство полученной диаграммы деформирования. Геометрическая интерпретация этого свойства представлена на рисунке 2.1

Определим зависимость действительного напряжения от условного с учётом сжимаемости материала. Как известно, условную диаграмму растяжения строят, не учитывая изменение площади поперечного сечения образца при деформировании [10], то есть условные напряжения определяют по формуле

$$\sigma = \frac{P}{F_0}, \quad (2.10)$$

а при построении действительной диаграммы растяжения изменение площади поперечного сечения образца при деформировании учитывают:

$$\sigma_s = \frac{P}{F}, \quad (2.11)$$

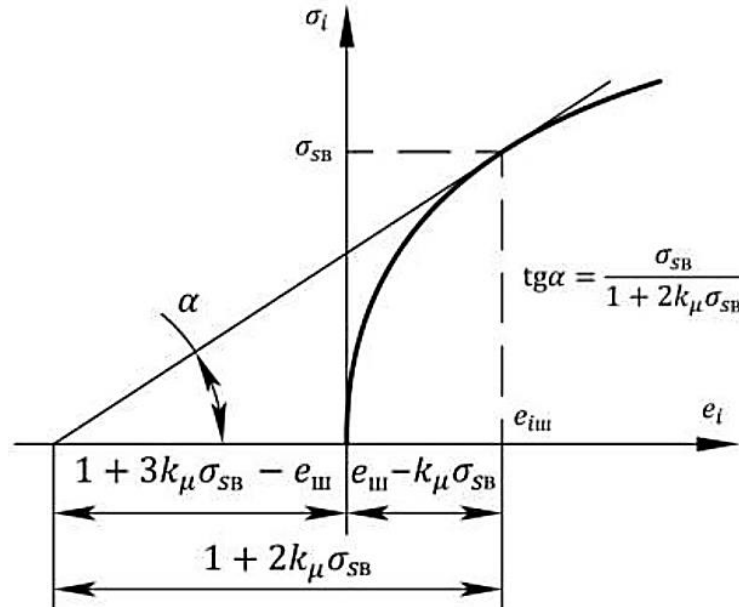


Рисунок 2.1 – Геометрическая интерпретация свойства диаграммы деформирования третьего рода, построенной с учётом сжимаемости [2]

Совместное решение уравнений (2.6), (2.10) и (2.11) имеет вид:

$$\sigma_s = \sigma \exp(e - 3k_\mu \sigma_s).$$

Из данного уравнения невозможно получить аналитическую зависимость действительного напряжения от условного, поэтому в правую часть подставляется значение истинного напряжения, полученное без учёта сжимаемости согласно [2]:

$$\sigma_s = \sigma \exp(e),$$

и окончательно получается

$$\sigma_s = \sigma \exp[e - 3k_\mu \sigma \cdot \exp(e)]. \quad (2.12)$$

Используя полученное выражение (2.12), производится расчёт σ_{SB} :

$$\sigma_{SB} = \sigma_B \exp[e_{III} - 3k_\mu \sigma_B \cdot \exp(e_{III})]. \quad (2.13)$$

где $e_{ш}$ – значение продольной деформации Генки, соответствующей моменту начала образования шейки.

Итак, последовательность построения диаграммы деформирования материала третьего рода с учётом сжимаемости можно представить следующим образом:

1. Получив при испытании материала на разрыв индикаторную диаграмму зависимости усилия от удлинения, строят условную диаграмму растяжения третьего рода, используя выражения:

$$\sigma = \frac{P}{F_0}, \quad e = \ln \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right).$$

2. Применяя уравнение (2.12) и учитывая выражение (2.2), строят действительную диаграмму растяжения третьего рода с учетом сжимаемости материала.

3. Используя соотношения (2.1) (2.2), (2.12), (2.13), строят диаграмму деформирования третьего рода с учётом сжимаемости материала, учитывая, что в области упругого деформирования связь между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций имеет вид:

$$\sigma_i = \frac{3E}{2(1 + \mu)} e_i = 3G e_i.$$

.Свойство диаграммы деформирования материала третьего рода, построенной с учётом сжимаемости, формулируется следующим образом: касательная, проведённая к диаграмме деформирования третьего рода в точке, соответствующей началу образования шейки, отсекает на отрицательном направлении оси интенсивности деформаций отрезок, определяемый выражением $-(1 + 3k_\mu \sigma_{SB} - e_{ш})$.

2.2.2 Построение аппроксимаций диаграмм деформирования материалов с учетом сжимаемости и степенного закона упрочнения

Отметим, что необходимость описания механических свойств материала с использованием не кривых упрочнения, а диаграмм истинных напряжений обусловлена тем, что при решении сложных упругопластических задач автофретирования необходимо учитывать упругие составляющие деформации и сжимаемость материала с помощью метода переменных параметров упругости.

При решении задач автофретирования использование графической истинной диаграммы деформирования, построенной на основе индикаторных данных одноосного растяжения, оказывается малопрактичным, так как проведение соответствующих испытаний в производственных условиях существенно усложняет подготовительный этап и требует значительных ресурсов. В связи с этим возникает необходимость использования такого аппроксимационного подхода, который, опираясь на основные справочные данные о механических свойствах материала, позволит максимально точно воспроизвести его диаграмму деформирования. При анализе существующих методов приближённого описания диаграмм деформирования установлено, что ее наиболее часто описывают либо степенной зависимостью $\sigma_i = Ae_i^n$, либо сложной линейно-степенной [4]:

$$\sigma_i = \begin{cases} 3Ge_i & \text{при } e_i \leq e_{iT} \\ Ae_i^n & \text{при } e_i > e_{iT} \end{cases}.$$

Как правило, A и n определяются на основе основных механических свойств материала, таких как предел прочности, модуль упругости и модуль упрочнения. В ряде случаев их значения получают экспериментально, анализируя диаграмму деформирования, построенную по результатам испытаний образцов на разрыв.

Существует методика определения параметров аппроксимирующей функции по известным механическим характеристикам материала. В качестве примера, задав прохождение степенной зависимости $\sigma_i = Ae_i^n$ через две

характерные точки диаграммы деформирования: «точку соответствующую условному пределу текучести ($e_{i0,2}$, $\sigma_{i0,2} = \sigma_{s0,2}$), и точку, отражающую начало шейкообразования» [4, 8], как показано на рисунке 2.2. В результате имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} Ae_{i0,2}^n = \sigma_{s0,2} \\ Ae_{iш}^n = \sigma_{SB} \end{cases} \quad (2.14)$$

Решение системы уравнений (2.14):

$$\begin{cases} n = \frac{\ln(\sigma_{SB}/\sigma_{s0,2})}{\ln(e_{iш}/e_{i0,2})} \\ A = \frac{\sigma_{s0,2}}{e_{i0,2}^n} \end{cases} \quad (2.15)$$

где $\sigma_{SB} = \sigma_B \exp[e_{ш} - 3k_\mu \sigma_B \cdot \exp(e_{ш})]$ – истинное временное сопротивление деформированию; $\sigma_{s0,2} = \sigma_{0,2} \exp[e_{0,2} - 3k_\mu \sigma_{0,2} \cdot \exp(e_{0,2})]$ – истинное напряжение, соответствующие условному пределу текучести; $e_{0,2} = \frac{1}{E}(\sigma_{0,2} + 0,002E)$ – деформация, которая соответствует условному пределу текучести; $e_{иш} = (e_{ш} - k_\mu \sigma_{SB})$ – интенсивность деформаций, соответствующая началу образования шейки; $e_{i0,2} = (e_{0,2} - k_\mu \sigma_{s0,2})$ – интенсивность деформаций, соответствующая условному пределу текучести.

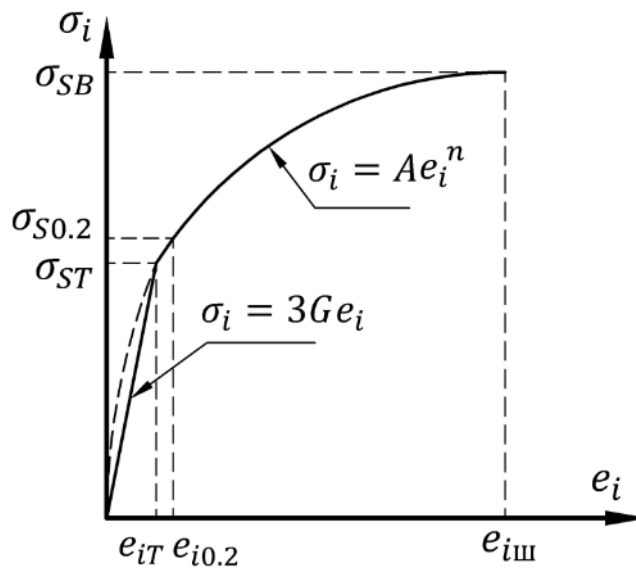


Рисунок 2.2 – Схема аппроксимации диаграммы деформирования по двум точкам

Граница перехода между линейной и степенной аппроксимацией на диаграмме деформирования задаётся значением интенсивности деформаций, которое определяется выражением:

$$e_{iT} = \left(\frac{A}{3G} \right)^{1/(1-n)}. \quad (2.16)$$

Погрешность аппроксимации диаграммы деформирования по двум точкам с помощью (2.15), (2.16) резко увеличивается в точке перехода линейной функции в степенную и может достигать 11% согласно [9]. При решении задач, когда рассматриваются одновременно области упругих и пластических деформаций, очень важно точно определить момент перехода материала из упругого состояния в пластическое. Для того, чтобы уменьшить погрешность аппроксимации в точке перехода линейной функции в степенную, необходимо сгладить этот переход.

Для того, чтобы сгладить переход от упругого деформирования к пластическому, применяется линейно-степенная аппроксимация в виде [2]:

$$\sigma_i = \begin{cases} 3Ge_i & \text{при } e_i \leq e_{iT} \\ A(e_i - e_{0i})^n & \text{при } e_i > e_{iT} \end{cases}. \quad (2.17)$$

Схема такой аппроксимации при условии прохождения степенной функции через две характерные точки диаграммы деформирования представлена на рисунке 2.3. В этом случае систему уравнений (2.14) необходимо дополнить ещё двумя уравнениями, позволяющими определить e_{0i} и e_{iT} , и записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} A(e_{i0,2} - e_{0i})^n &= \sigma_{s0,2}, \\ A(e_{iш} - e_{0i})^n &= \sigma_{SB}, \\ A(e_{iT} - e_{0i})^n &= 3Ge_{iT}, \\ nAe_{iш}^{n-1} &= 3G. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Для решения системы уравнений (2.18) рассмотрим рекуррентный подход на основании метода последовательных приближений [4]:

$$\left. \begin{aligned} n^{(k)} &= \frac{\ln(\sigma_{SB}/\sigma_{S0,2})}{\ln((e_{iш} - e_{0i}^{(k-1)})/(e_{i0,2} - e_{0i}^{(k-1)}))}, \\ A^{(k)} &= \frac{\sigma_{S0,2}}{(e_{i0,2} - e_{0i}^{(k-1)})^{n^{(k)}}}, \\ e_{iT}^{(k)} &= e_{0i}^{(k-1)} + (n^{(k)} A^{(k)} / 3G)^{1/(1-n^{(k)})}, \\ e_{0i}^{(k)} &= e_{iT}^{(k)} (1 - n^{(k)}). \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

где k – номер итерации.

Вначале вычислений $e_{0i}^{(0)} = 0$. Условие окончания итераций:

$$\Delta e_{0i} \% = |(e_{0i}^{(k)} - e_{0i}^{(k-1)})/e_{0i}^{(k)}| 100\%,$$

где $\Delta e_{0i} \%$ – заданная точность вычислений.

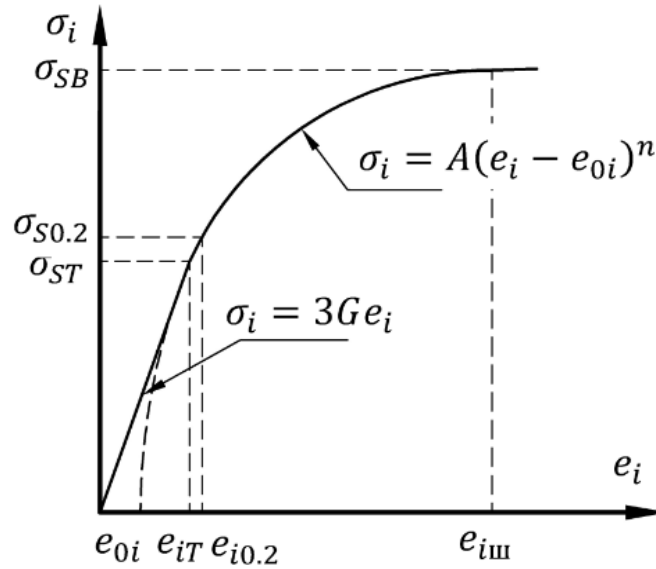


Рисунок 2.3 – Схема аппроксимации диаграммы деформирования по двум точкам со сдвигом степенной функции

Аппроксимирующая кривая в данном случае значительно точнее описывает действительную диаграмму деформирования, и погрешность аппроксимации в области перехода из упругого в пластическое состояние не превышает 1% [9].

Следовательно, можно сделать вывод, что при решении упругопластических задач методом переменных параметров упругости желательно аппроксимировать

диаграмму деформирования уравнением (2.17) с учетом уравнений (2.18), (2.19), позволяющим с высокой точностью описать область перехода из упругого состояния в пластическое.

2.3 Описание поведения материала при знакопеременном нагружении

2.3.1 Эффект Баушингера при знакопеременном нагружении

В процессе гидравлического автофретирования толстостенных цилиндрических оболочек интенсивность напряжений в стенке оболочки при нагружении внутренним давлением достигает наибольшего значения на внутренней поверхности оболочки, соответственно на этой же поверхности при разгрузке могут возникнуть и вторичные пластические деформации, что подтверждается различными исследователями [14, 50, 52]. Вторичные пластические деформации снижают эффект автофретирования и, соответственно, неблагоприятно влияют на прочностные характеристики толстостенных оболочек. При автофретировании толстостенных оболочек большое влияние на возникновение вторичных пластических деформаций при разгрузке, кроме давления автофретирования и геометрических параметров оболочек, оказывают механические свойства материала, эффект Баушингера и упрочнение. Поэтому при моделировании гидравлического автофретирования толстостенных оболочек требуется учитывать влияние этих факторов на напряженно-деформированное состояние материалов, прежде всего, из высокопрочных сталей, которые чаще всего используются при автофретировании, и возникновение вторичных пластических деформаций.

Вопросы определения напряжений и деформаций при наличии конечных областей пластических деформаций, в тех случаях, когда внешние нагрузки прикладываются однократно, в настоящее время хорошо изучены, особенно в рамках деформационной теории и в теории идеальной пластичности. Однако в

инженерной практике можно найти многочисленные случаи, когда внешние силы прикладываются многократно (в том числе и с изменением знака) и поведение упругопластической системы существенно отличается от случая однократного нагружения.

Если при первом нагружении во всем теле или в его некоторых конечных областях возникли пластические деформации, то после удаления внешних сил оно не вернется в исходное состояние, в нем возникнут определенные остаточные деформации и напряжения. При повторном нагружении тела произвольной системой сил, его механический отклик будет отличаться от реакции, наблюдаемой при первичном нагружении из ненапряжённого состояния, вследствие накопленных деформаций, изменений в структуре материала или наличия остаточных напряжений. Так, например, при сжатии образца, который предварительно растягивался за пределом упругости, пластические деформации возникают при меньшем значении нагрузки, чем при предшествующем растяжении. При последующем сжатии величина предела упругости уменьшается тем значительнее, чем большее напряжение было приложено в процессе предшествующего растяжения. Аналогичные изменения в механическом поведении материала проявляются и при растяжении, осуществляемом после предварительного воздействия сжимающих нагрузок. При разгрузке и повторном растяжении наблюдаются также петли гистерезиса. Такое поведение материала получило название – эффект Баушингера (I. Bauschinger). Первая успешная попытка объяснить эффект Баушингера и петли гистерезиса, наблюдающиеся при многократном нагружении, была предложена Мазингом (G. Masing), который исходил из того, что отдельные зерна в поликристаллическом материале демонстрируют различное механическое поведение и характер деформации, что обусловлено вариативностью их кристаллографических ориентировок и анизотропией свойств кристаллической решётки согласно [11]. Он предложил схему упругопластического деформирования образца из поликристаллического материала, которая достаточно полно изложена в труде Москвитина В.В. [11].

Коэффициент эффекта Баушингера является количественной характеристикой, отражающей величину эффекта Баушингера. В работе [58] предложен один из наиболее распространенных подходов к расчёту коэффициента эффекта Баушингера. В некоторых исследованиях он определяется как отношение предела текучести при обратном нагружении к начальному пределу текучести. Следовательно, если уровень разгрузки значительно влияет на предел текучести при обратном нагружении, то коэффициент эффекта Баушингера приближается к нулю, а при незначительном влиянии – к единице.

Для аналитического описания эффекта Баушингера, который создаёт особую сложность при описании поведения материала в процессе гидравлического автофретирования, рассматривается важный вопрос получения выражения зависимости напряжения – деформация при разгрузке и последующем нагружении усилием обратного знака. Для этого требуется рассмотреть принцип Мазинга.

2.3.2 Принцип Мазинга

Согласно гипотезе Мазинга, «которая основывается на результатах теоретических исследований, кривая деформации при знакопеременном нагружении идентична кривой первичной нагрузки, при условии, что ее масштаб по осям напряжения и деформации удвоен и зеркально отражен относительно начала координат» [11]. Это предположение будем называть принципом Мазинга. То есть, если при первом нагружении напряжения и соответствующие деформации связываются между собой выражением

$$\sigma^{(1)} = \Phi(e), \quad (2.20)$$

то, согласно принципу Мазинга, разности напряжений $\bar{\sigma} = \sigma' - \sigma^{(2)}$ и разности деформаций $\bar{e} = e' - e$ удовлетворяют уравнению (рисунок 2.4)

$$\bar{\sigma} = 2\Phi\left(\frac{\bar{e}}{2}\right), \quad (2.21)$$

Таким образом, если образец после пластического растяжения сначала разгрузить, а затем подвергнуть сжатию, то предел текучести уменьшится. Согласно (2.23) «сумма абсолютных значений максимального напряжения растяжения и нового предела текучести при сжатии равна удвоенному пределу текучести недеформированного материала; в таком случае эффект Баушингера принято называть идеальным» [10], и наблюдается классическая петля гистерезиса.

2.3.3 Обобщенный принцип Мазинга

Рассмотрим важный для аналитического описания эффекта Баушингера вопрос получения выражения зависимости напряжения – деформация при разгрузке и последующем нагружении усилием обратного знака. Трудности, с которыми приходится при этом встречаться, как отмечается в работах [4, 36] связаны с тем, что «в отличие от первичной кривой деформации, когда напряжение $\sigma^{(1)}$ есть функция только e , при повторном нагружении напряжение $\bar{\sigma}$ есть функция не только $\bar{e}$, но и, как показали эксперименты, зависит от параметра e' – максимальной деформации, полученной при первом нагружении».

В качестве одного из возможных обобщений принципа Мазинга введено предположение в труде [11] о том, что «кривая деформирования при знакопеременном нагружении совпадает с кривой предшествующего нагружения $\sigma^{(1)} = \Phi(e)$, но с изменением масштаба в α_e раз по оси деформаций и в α_σ раз по оси напряжений, причем в общем случае α_e и α_σ могут быть функциями предшествующей деформации при $e' \geq e_T$: $\alpha_e = \alpha_e(e')$, $\alpha_\sigma = \alpha_\sigma(e')$ » [11]. В этом случае

$$\bar{\sigma} = \alpha_\sigma \Phi\left(\frac{\bar{e}}{\alpha_e}\right), \quad (2.24)$$

или

$$\sigma^{(2)} = \sigma' - \alpha_\sigma \Phi \left(\frac{(e' - e)}{\alpha_e} \right). \quad (2.25)$$

Функции $\alpha_e(e')$ и $\alpha_\sigma(e')$ в уравнениях (2.24), (2.25) называются функциями Мазинга [36], и должны удовлетворять некоторым условиям. Если кривые растяжения и сжатия исходного материала между собой совпадают, то при $e' = e_T$ должны быть равенства согласно [11]:

$$\alpha_e(e_T) = 2, \alpha_\sigma(e_T) = 2. \quad (2.26)$$

Если учитывать деформационную анизотропию упругих постоянных, то до появления пластических деформаций при повторном знакопеременном нагружении

$$\bar{\sigma} = \bar{E}(e') \bar{e},$$

где $\bar{E}(e')$ – переменный модуль упругости, зависящий от предшествующей деформации.

Отсюда, так как

$$\bar{\sigma} = \alpha_\sigma E \frac{\bar{e}}{\alpha_e},$$

имеет место соотношение:

$$\frac{\alpha_\sigma}{\alpha_e} = \frac{\bar{E}(e')}{E}. \quad (2.27)$$

Поэтому, если функция изменения переменного модуля Юнга $\bar{E}(e')$ известна, то из опытов на знакопеременное нагружение остается определить только одну функцию, зависящую от параметра $e' - \alpha_e(e')$.

Если же анизотропию упругих постоянных не учитывать, то $\bar{E} = E$. В этом случае из (2.27) следует, что

$$\alpha_\sigma(e') = \alpha_e(e') = \alpha(e'). \quad (2.28)$$

Как показывают экспериментальные данные [68], изменения модуля Юнга при знакопеременном нагружении незначительны и, как показывают вычисления,

эти изменения соизмеримы с погрешностями в определении упругих постоянных, которую вносит гипотеза о несжимаемости материала.

Как было ранее отмечено, эффект Баушингера определяется как снижение предела текучести материала при сжатии в результате предшествующей деформации при растяжении. В том, что значительное влияние на эффект Баушингера оказывает степень предварительной деформации, сходятся мнения большинства исследователей [1, 15]. Для количественной оценки эффекта Баушингера рассмотрим отношение предела текучести $\sigma_T''(e')$, наблюдаемого при сжатии, к максимальному напряжению в предшествующем нагружении σ' (рисунок 2.4). Будем использовать его как коэффициент эффекта Баушингера и обозначим β_T :

$$\beta_T = \beta_T(e') = \frac{\sigma_T''(e')}{\sigma'(e')}, \quad (2.29)$$

где e' – максимальная деформация, полученная при первом нагружении; $\sigma'(e')$ – максимальное напряжение, соответствующее этой деформации.

Согласно принципу Мазинга, по аналогии с уравнением (2.23), имеет место соотношение:

$$\sigma_T''(e') = \alpha(e')\sigma_T - \sigma'(e'),$$

или с учетом (2.28)

$$\alpha = \alpha(e') = \frac{\sigma'(e')}{\sigma_T} (1 + \beta_T(e')). \quad (2.30)$$

Вопрос о поведении материала в пластической области при повторном сжатии требует отдельных экспериментальных исследований, но для решения задач, когда повторные пластические деформации незначительны, можно с успехом применять обобщенный принцип Мазинга для описания эффекта Баушингера при исследовании процессов знакопеременного нагружения.

2.3.4 Построение диаграммы деформирования материала при разгрузке с использованием экспериментальных данных и обобщенного принципа Мазинга

Для построения диаграммы деформирования материала при разгрузке с использованием экспериментальных данных и обобщенного принципа Мазинга рассмотрим результаты экспериментов, изложенные в работе [12]. В этой работе приведены результаты испытаний на сталях марок Ст3, СХЛ-4 (10ХСНД), 09Г2 и на легированных сталях, имеющих $\sigma_{0,2} = 600 \div 1200$ МПа: «образец нагружался до некоторой заданной деформации, определяемой остаточной деформацией $\varepsilon_{\text{прод}}^{\text{ост}}$ и напряжением σ^D , затем производилась разгрузка и нагружение противоположенного знака до остаточной деформации 0,2%, определяемой напряжением $\sigma_{0,2}^C$, далее повторялось прямое нагружение до достижения следующего уровня заданной деформации» [12]. Эффект Баушингера в этом случае характеризовался отношением $\sigma_{0,2}^C / \sigma^D$, и мы его обозначим $\beta_{0,2}^D$.

Для отображения результатов испытаний на диаграмме деформирования (σ_i, e_i) , используется гипотеза единой кривой и проводится пересчёт относительных деформаций в деформации Генки, а условных напряжений в истинные напряжения по формулам [36]:

$$\varepsilon^D = \left(\varepsilon_{\text{прод}}^{\text{ост}} + \frac{\sigma^D}{E} \right),$$

$$e_i' = \ln(1 + \varepsilon^D),$$

$$\sigma_i' = \sigma^D(1 + \varepsilon^D),$$

$$\sigma_{i0,2}'' = \sigma_{0,2}^C \left(1 - \left(0,002 + \frac{\sigma_{0,2}^C}{E} \right) \right).$$

Расчёты рассмотрим для стали 45ХГМА, у которой $\sigma_{0,2} = 800$ МПа, что соответствует данным, приведенным в работе [12, таблица 7]. Результаты расчётов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Сталь $\sigma_{0,2} = 800$ МПа (45ХГМА - ГОСТ 4543-2016) [12]

$\varepsilon_{\text{прод}}^{\text{ост}}$	ε^D	e'_i	σ^D , МПа	σ'_i , МПа	$\sigma_{0,2}^C$, МПа	$\sigma''_{i0,2}$, МПа	$\beta_{0,2}^D = \sigma_{0,2}^C / \sigma^D$	$\beta_{0,2} = \sigma''_{i0,2} / \sigma'_i$
0,0022	0,0061	0,0061	825	830,1	675	671,5	0,82	0,81
0,0072	0,0113	0,0112	863	872,8	488	485,9	0,57	0,56
0,0140	0,0182	0,0181	888	904,2	450	448,1	0,51	0,50
0,0216	0,0259	0,0256	900	923,3	425	423,3	0,47	0,46
0,0288	0,0332	0,0327	925	955,7	438	436,2	0,47	0,46
0,0358	0,0402	0,0394	925	962,2	400	398,4	0,43	0,41
0,0432	0,0477	0,0466	938	982,7	413	411,4	0,44	0,42
0,0504	0,0549	0,0534	938	989,5	425	423,3	0,45	0,43
0,0572	0,0617	0,0598	938	995,8	425	423,3	0,45	0,43
0,0644	0,0689	0,0666	938	1002,6	388	386,5	0,41	0,39
0,0716	0,0761	0,0733	938	1009,4	388	386,5	0,41	0,38
0,0800	0,0845	0,0811	938	1017,2	425	423,3	0,45	0,42
0,0858	0,0902	0,0864	925	1008,4	400	398,4	0,43	0,40

Для описания диаграммы деформирования материала, рассмотрим линейно-степенную аппроксимацию [9] в виде:

$$\sigma_i = \Phi(e_i) = \begin{cases} E e_i & \text{при } e_i \leq e_{iT} \\ A(e_i - e_{0i})^n & \text{при } e_i > e_{iT} \end{cases} \quad (2.31)$$

На рисунке 2.5 представлены результаты аппроксимации диаграммы деформирования стали 45ХГМА и экспериментальных данных. Как видно, результаты достаточно хорошо совпадают.

В случае аппроксимации диаграммы деформирования уравнением (2.31), уравнения (2.24) и (2.25), с учётом уравнения (2.28) запишутся в виде

$$\bar{\sigma}_i = \alpha(e'_i) \Phi \left(\frac{\bar{e}_i}{\alpha(e'_i)} \right) = \begin{cases} \alpha(e'_i) E \left(\frac{\bar{e}_i}{\alpha(e'_i)} \right) & \text{при } 0 \leq \bar{e}_i \leq \alpha(e'_i) e_{iT} \\ \alpha(e'_i) A \left(\frac{\bar{e}_i}{\alpha(e'_i)} - e_{0i} \right)^n & \text{при } \bar{e}_i > \alpha(e'_i) e_{iT} \end{cases}, \quad (2.32)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(2)} &= \sigma'_i(e'_i) - \alpha(e'_i) \Phi \left(\frac{(e'_i - e_i)}{\alpha(e'_i)} \right) = \\ &= \begin{cases} \sigma'_i(e'_i) - \alpha(e'_i) E \left(\frac{(e'_i - e_i)}{\alpha(e'_i)} \right) & \text{при } e'_i \geq e_i \geq e'_i - \alpha(e'_i) e_{iT} \\ \sigma'_i(e'_i) - \alpha(e'_i) A \left(\frac{(e'_i - e_i)}{\alpha(e'_i)} - e_{0i} \right)^n & \text{при } e_i < e'_i - \alpha(e'_i) e_{iT} \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где σ'_i и e'_i – соответственно интенсивности напряжений и интенсивности деформаций, полученные при первом нагружении.

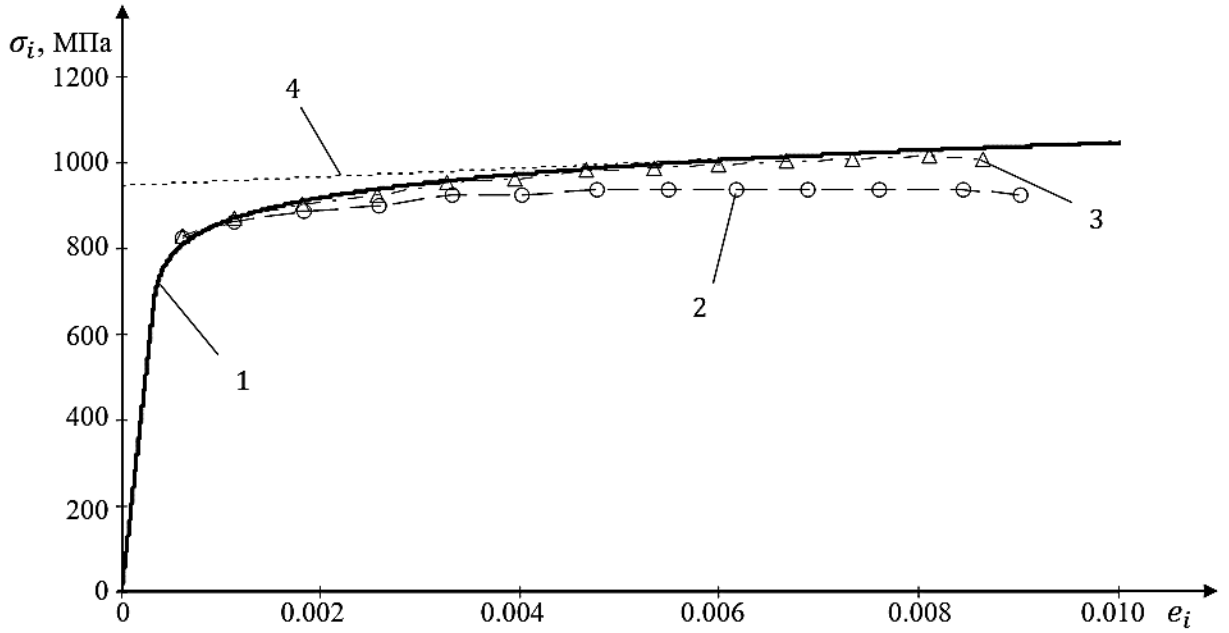
Для определения функции Мазинга $\alpha(e')$, рассмотрим соотношение (2.30), заменив согласно [36] с гипотезой единой кривой e' и $\sigma'(e')$ на e'_i и $\sigma'_i(e'_i)$:

$$\alpha(e'_i) = \frac{\sigma'_i(e'_i)}{\sigma_T} (1 + \beta_T(e'_i)). \quad (2.34)$$

В соответствии с имеющимися экспериментальными данными, коэффициент эффекта Баушингера (Таблица 1): $\beta_{0,2}(e'_i) = \sigma''_{i0,2}/\sigma'_i$. Для аналитического описания эффекта Баушингера с использованием функций Мазинга (2.34) необходимо определять коэффициент эффекта Баушингера $\beta_T(e'_i) = \sigma''_{iT}/\sigma'_i$.

Если рассмотреть разницу между $\sigma''_{i0,2}$ и σ''_{iT} , то уравнение, связывающее β_T и $\beta_{0,2}$, имеет вид:

$$\beta_T(e'_i) = \frac{\sigma''_{iT}}{\sigma'_i} = \frac{\sigma''_{i0,2}}{\sigma'_i} - \frac{(\sigma''_{i0,2} - \sigma''_{iT})}{\sigma'_i} = \beta_{0,2}(e'_i) - \frac{(\sigma''_{i0,2} - \sigma''_{iT})}{\sigma'_i}. \quad (2.35)$$



1 – диаграмма согласно уравнению (2.31); 2 – диаграмма условных напряжений σ^A ; 3 – диаграмма истинных напряжений σ'_i ; 4 – касательная, характеризующая свойство диаграммы деформирования III рода [9].

Рисунок 2.5 – Аппроксимация диаграммы деформирования стали 45ХГМА ($E=210000$ МПа, $e_{iT}=0,00367$, $\sigma_{iT}=771,14$ МПа, $A=1301,29$ МПа, $n=0,0933$) и экспериментальные данные для стали $\sigma_{0,2} = 800$ МПа (Таблица 1)

Учитывая, что $(\sigma''_{i0,2} - \sigma''_{iT}) = (\bar{\sigma}_{i0,2} - \bar{\sigma}_{iT})$, величины $\bar{\sigma}_{iT}$ и $\bar{\sigma}_{i0,2}$ при разгрузке и последующем нагружении противоположенного знака в соответствии с выражением (2.32) определяются:

$$\bar{\sigma}_{iT} = \alpha(e'_i) \Phi \left(\frac{\bar{e}_{iT}}{\alpha(e'_i)} \right) = \alpha(e'_i) E \left(\frac{\bar{e}_{iT}}{\alpha(e'_i)} \right) = E \bar{e}_{iT}, \quad (2.36)$$

и

$$\bar{\sigma}_{i0,2} = \alpha(e'_i) \Phi \left(\frac{\bar{e}_{i0,2}}{\alpha(e'_i)} \right) = \alpha(e'_i) A \left(\frac{\bar{e}_{i0,2}}{\alpha(e'_i)} - e_{0i} \right)^n, \quad (2.37)$$

где $\bar{e}_{iT}$ и $\bar{e}_{i0,2}$ – деформации, соответствующие напряжению $\bar{\sigma}_{iT}$ и $\bar{\sigma}_{i0,2}$ при описании диаграммы деформирования функцией (2.31).

Таким образом, имеет место соотношение

$$(\sigma''_{i0,2} - \sigma''_{iT}) = \alpha(e'_i) A \left(\frac{\bar{e}_{i0,2}}{\alpha(e'_i)} - e_{0i} \right)^n - E \bar{e}_{iT}. \quad (2.38)$$

Причём $\bar{e}_{iT} = \alpha(e'_i) e_{iT}$, а $\bar{e}_{i0,2}$ определяется численно из уравнения:

$$\alpha(e'_i) A \left(\frac{\bar{e}_{i0,2}}{\alpha(e'_i)} - e_{0i} \right)^n = E(\bar{e}_{i0,2} - 0,002). \quad (2.39)$$

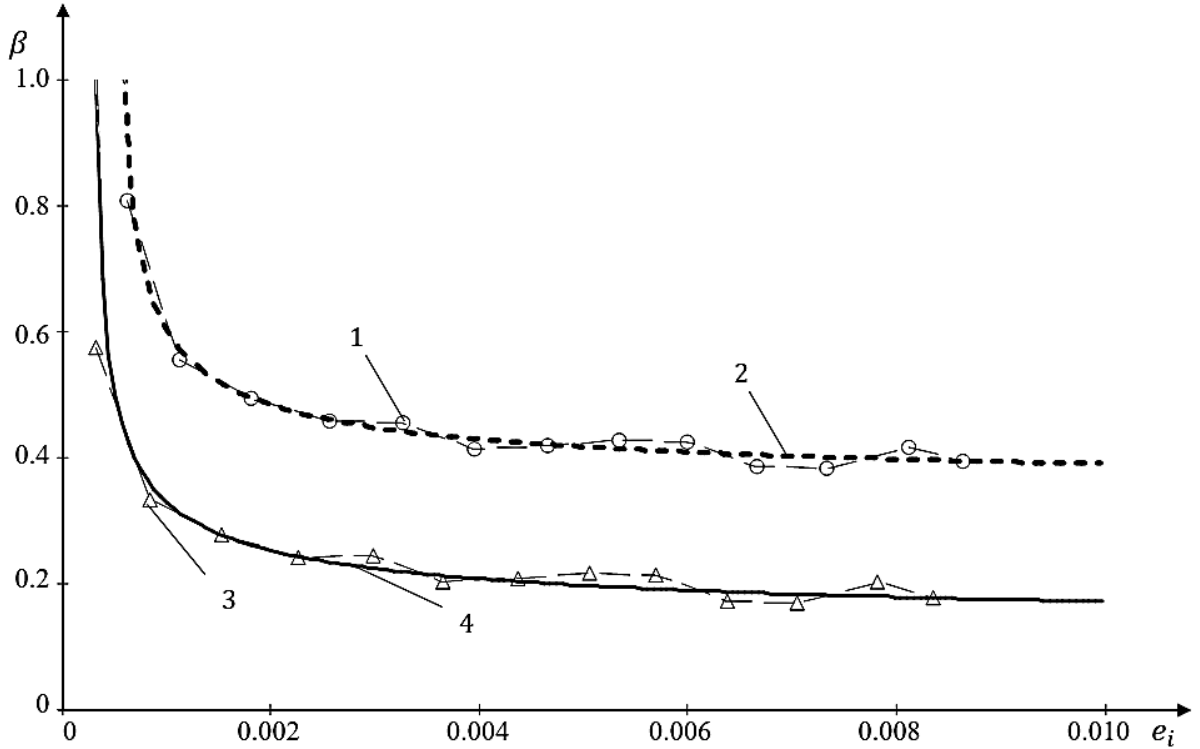
Из уравнений (2.35), (2.38) и (2.39) следует, что функция $\beta_T(e'_i)$ зависит $\alpha(e'_i)$. Так как изначально значение функции Мазинга не известно, для расчетов в первом приближении принимается $\alpha(e'_i) = 2$, как для идеального эффекта Баушингера. Далее, используя уравнения (2.35) и (2.37), по уравнению (2.34) определяется функция Мазинга $\alpha(e'_i)$. Согласно [36] в первом приближении значения $\sigma_{i0,2}^{(2)}$, вычисляемые по выражению (2.33), значительно отличаются от значений $\sigma''_{i0,2}$, полученных экспериментально. В этом случае средняя арифметическая погрешность определения $\sigma_{i0,2}^{(2)}$ составляет 9,5%, а максимальная – 20,7% [36].

Для улучшения результата, проводят второе приближение. В этом случае полученную в первом приближении функцию Мазинга $\alpha(e'_i)$ подставляют в уравнения (2.38), (2.39) и, используя уравнения (2.34) и (2.35), уточняют функцию Мазинга $\alpha(e'_i)$ во втором приближении.

На рисунке 2.6 представлены функции $\beta_T = \beta_T(e'_i)$ и $\beta_{0,2} = \beta_{0,2}(e'_i)$, полученные во втором приближении обработкой экспериментальных данных.

Так как эффект Баушингера начинает проявляться только после достижения при первом нагружении деформаций предела текучести e_{iT} или деформаций условного предела текучести $e_{i0,2}$, то графики функции $\beta_T = \beta_T(e'_i)$ и $\beta_{0,2} = \beta_{0,2}(e'_i)$ строятся таким образом, чтобы $\beta_T = \beta_T(e_{iT}) = 1$ и $\beta_{0,2} = \beta_{0,2}(e_{i0,2}) = 1$.

Кроме того, при построении кривой $\beta_T(e'_i)$ экспериментальные точки $\beta_{0,2}(e'_i)$ смещаются не только по оси ординат вниз на величину $(\bar{\sigma}_{i0,2} - \bar{\sigma}_{iT})$, но и по оси абсцисс влево на величину $(\bar{e}_{i0,2} - \bar{e}_{iT})$.



1 – экспериментальные значения $\beta_{0,2}$ (таблица 1);

3 – значения β_T , полученные обработкой экспериментальных данных;

2 – функция $\beta_{0,2} = \beta_{0,2}(e'_i)$; 4 – функция $\beta_T = \beta_T(e'_i)$

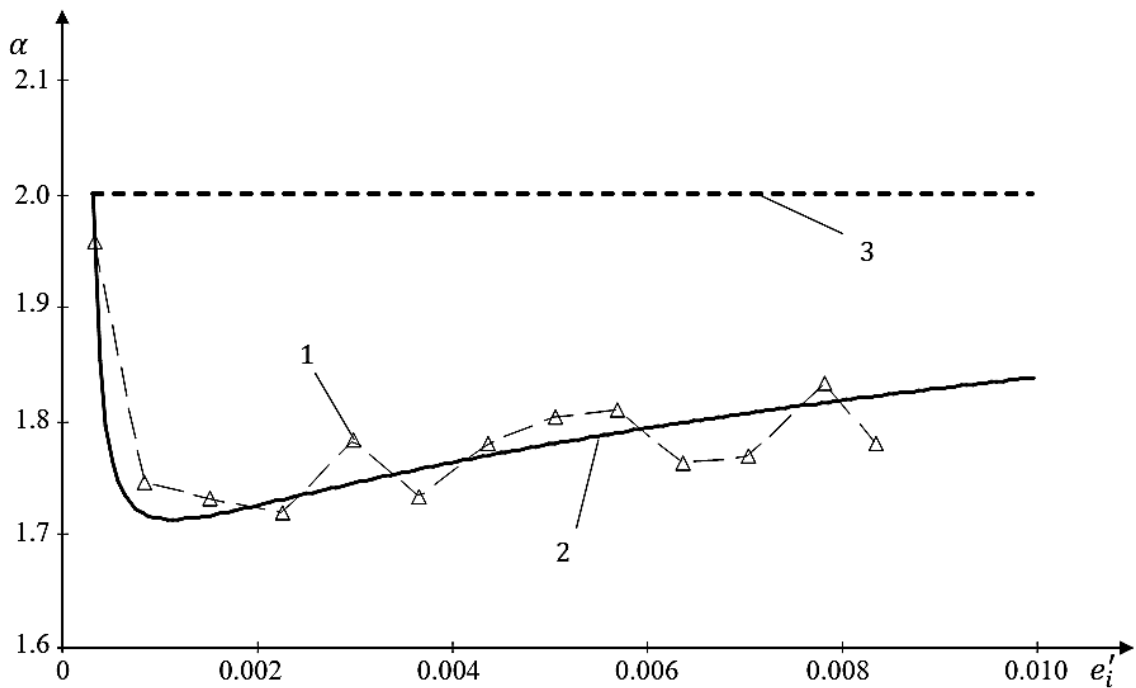
Рисунок 2.6 – Кривые изменения коэффициентов эффекта Баушингера $\beta_{0,2} = \beta_{0,2}(e'_i)$ и $\beta_T = \beta_T(e'_i)$, полученные на основании обработки экспериментальных данных и аппроксимацией по гиперболическим уравнениям вида (2.40)

Для аппроксимации кривых, полученных экспериментально, применялось уравнение вида $\beta(e'_i) = a/(e'_i + b)^c + d$ [36]. При условии, что кривая проходит через заданную точку $(e'_i0; \beta0)$, уравнение имеет вид:

$$\beta(e'_i) = \frac{a}{(e'_i + b)^c} - \frac{a}{(e'_i0 + b)^c} + \beta0. \quad (2.40)$$

В данном случае $\beta_0 = 1$, а $e'_{i0} = e_{i0,2}$ при определении $\beta_{0,2}(e'_i)$ и $e'_{i0} = e_{iT}$ при определении $\beta_T(e'_i)$. Коэффициенты a, b и c определяются по заданным точкам методом наименьших квадратов.

После определения коэффициента Баушингера $\beta_T = \beta_T(e'_i)$, по формуле (2.34) определяется функция Мазинга $\alpha = \alpha(e'_i)$. На рисунке 2.7 представлены графики этих функций, построенные по экспериментальным данным и по формуле (2.34). На рисунке 2.8 представлены кривые деформирования стали 45ХГМА при обратном нагружении. Диаграмма нагружения строилась с использованием уравнения (2.31). Диаграммы разгрузки и дальнейшего нагружения противоположенного знака строились на основании обобщённого принципа Мазинга по уравнению (2.33) с использованием функции Мазинга, представленной на рисунке 2.8.

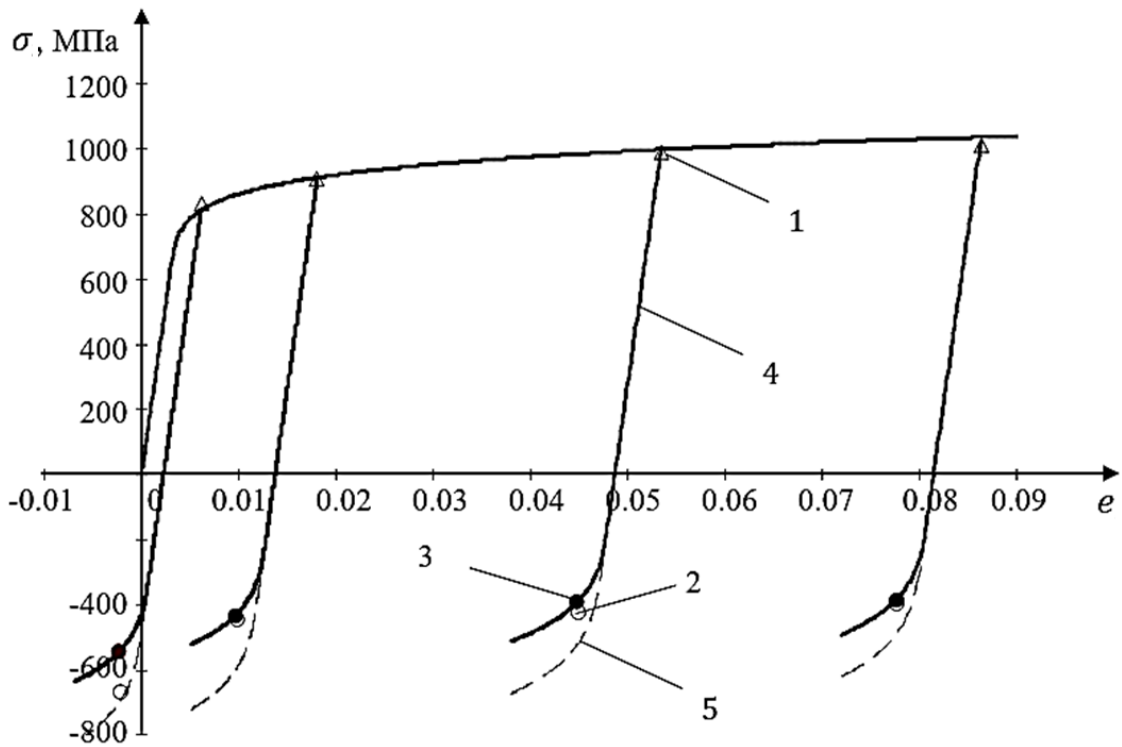


1 – значения α , полученные обработкой экспериментальных данных;

2 – функция $\alpha = \alpha(e'_i)$, полученная по формуле (2.34);

3 – значения функции Мазинга для $\alpha = \alpha(e'_i) = 2 = const$

Рисунок 2.7 – Функция Мазинга $\alpha = \alpha(e'_i)$, определённая по экспериментальным данным и по формуле (2.34)



1 – экспериментальные данные уровня начального нагружения σ'_i ; 2 – экспериментальные данные по определению $\sigma''_{i0,2}$ при обратном нагружении; 3 – расчётные данные по определению $\sigma^{(2)}_{i0,2}$ при обратном нагружении; 4 – расчётные диаграммы прямого и обратного нагружения; 5 – расчётные диаграммы обратного нагружения для идеального эффекта Баушингера.

Рисунок 2.8 – Кривые деформирования стали 45ХГМА
при обратном нагружении

Как видно из сопоставления результатов расчетов с экспериментальными данными по определению $\sigma''_{i0,2}$, имеет место хорошая сходимость. Средняя арифметическая погрешность определения $\sigma^{(2)}_{i0,2}$ составляет 4,8%, а максимальная – 15,1% [36]. Причём наибольшая погрешность наблюдается для начальной стадии нагружения при $e'_i < 0,01$, что соответствует нисходящей ветви графика $\alpha = \alpha(e'_i)$. Кроме того, сравнение полученных результатов с расчетными данными для идеального эффекта Баушингера показывает (рисунок 2.7), что применение обобщённого принципа Мазинга позволяет получить более точные результаты.

Возможность аналитического описания эффекта Баушингера с использованием экспериментальных данных позволяет получить хорошую сходимость результатов и сделать вывод о возможности применения обобщенного принципа Мазинга при исследовании различных процессов знакопеременного нагружения. В целом вопрос о поведении материала в пластической области при повторном сжатии требует отдельных экспериментальных исследований, но для решения задач, когда повторные пластические деформации незначительны, в частности задачи гидравлического автофретирования толстостенных оболочек, можно применять обобщенный принцип Мазинга для описания эффекта Баушингера.

2.4 Описание упругопластической анизотропии материала при знакопеременном нагружении с помощью моделей упрочнения

2.4.1 Модели упрочнения материалов

При решении упругопластических задач важное место занимает изучение моделей упрочнения, которые описывают изменение свойств материала при пластическом деформировании. Под упрочнением понимают процесс увеличения сопротивления материала дальнейшей деформации вследствие его предшествующей деформации. Для количественного описания этого явления разработаны различные теоретические модели. За пределом текучести изменение поверхности текучести материала при разгрузке описывается с использованием двух основных вариантов законов упрочнения: изотропное и кинематическое упрочнение. На рисунке 2.9 показаны эти модели упрочнения материала.

Модель изотропного упрочнения является одной из наиболее распространённых. Она предполагает, что в процессе деформации поверхность текучести сохраняет свою форму, но равномерно расширяется в пространстве напряжений. Такая модель эффективна для моделирования многих процессов

монотонного нагружения. После пластической деформации изотропный материал остается изотропным, по крайней мере, в теории.

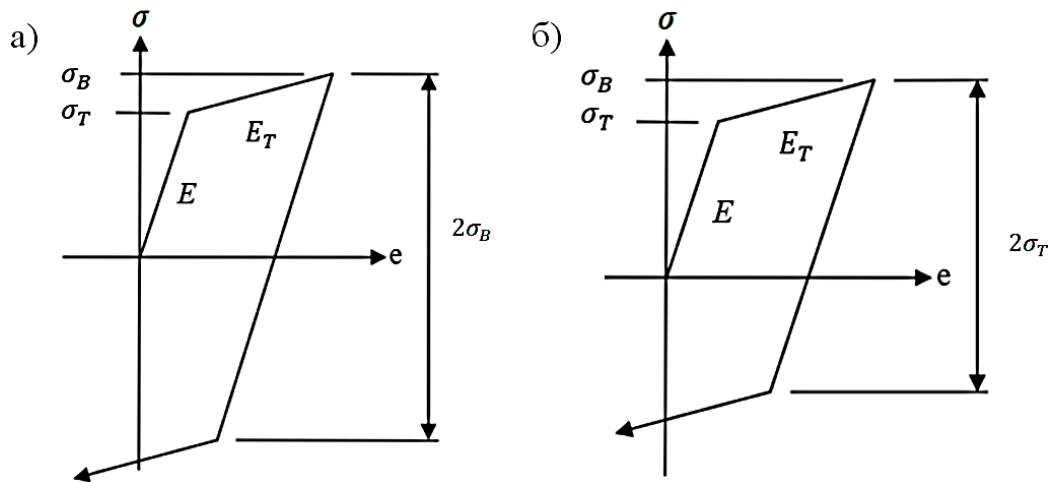


Рисунок 2.9 – Модели упрочнения материалов:

а – изотропная модель упрочнения материала;

б – кинематическая модель упрочнения материала [84]

Еще одной из основных является модель кинематического упрочнения, под которой понимается «перемещение поверхности текучести, как целое, в пространстве напряжений; при этом поверхность текучести не меняет свою форму» [10,84]. Эта модель позволяет учитывать эффекты циклического нагружения, такие как эффект Баушингера, при котором предел текучести при знакопеременном нагружении снижается.

В ряде случаев применяется комбинированное изотропное и кинематическое упрочнение, которое предполагает сочетание эффектов каждого из этих видов упрочнения для более точного описания поведения материала.

Следует отметить, что при гидравлическом автофретировании широко используются высокопрочные стали, поведение которых при знакопеременном нагружении хорошо описывается нелинейной кинематической моделью, которая позволяет учесть реальные свойства диаграммы нагружения и разгрузки.

2.4.2 Описание диаграммы деформирования и разгрузки высокопрочной стали на основании нелинейной кинематической модели упрочнения

При автофретировании толстостенных цилиндров из высокопрочной стали на возникновение и распределение остаточных напряжений влияют различные параметры, в частности, конструктивные свойства материала, такие как модуль упругости, предел текучести и закон деформационного упрочнения при нагружении. Кроме того, при разгрузке, вследствие эффекта Баушингера, эти свойства материала существенно изменяются в зависимости от предшествующей пластической деформации [12, 15, 33, 69].

Для описания действительной диаграммы деформирования материала из высокопрочной стали в процессе гидравлического автофретирования зарубежные исследователи используют основные уравнения для высокопрочной стали A723-1130 (аналог стали 38ХНЗМФА), полученные на основании результатов исследований, представленных в работах [66, 67], которые отражают нелинейную кинематическую модель упрочнения с учетом эффекта Баушингера, а не принцип Мазинга при разгрузке-сжатии. На рисунке 2.10 показана типичная диаграмма деформирования высокопрочных сталей, полученная многими исследователями [44, 66, 67].

При нагружении диаграмма деформирования является линейно-упругой с модулем упругости E (от O до A), затем следует слабое нелинейное деформационное упрочнение (от A до B). При разгрузке, она линейно-упругая (от B до D) с незначительным снижением модуля упругости $\bar{E}$. При дальнейшем обратном нагружении наблюдается сильное нелинейное деформационное упрочнение (от D до E). Как ранее было отмечено, «после растяжения образца до некоторой величины пластической деформации e_i' , характеризуемой точкой B (рисунок 2.10), действующие напряжения в образце определяются как σ_i' . Если после такого растяжения полностью разгрузить образец (точка C), а затем сжать его, то при сжатии переход от линейной ($C - D$) к сильно нелинейной деформации

(D – E) обычно происходит при значении предела текучести σ''_{iT} значительно меньшем, чем первоначальный предел текучести при нагружении σ_{iT} » [11]. Таким образом, имеет место эффект Баушингера. Определим коэффициент эффекта Баушингера β как отношение предела текучести при обратном сжатии σ''_{iT} к текущему (мгновенному) пределу текучести, равному максимальному напряжению σ'_i в предшествующем нагружении (рисунок 2.10) [77]:

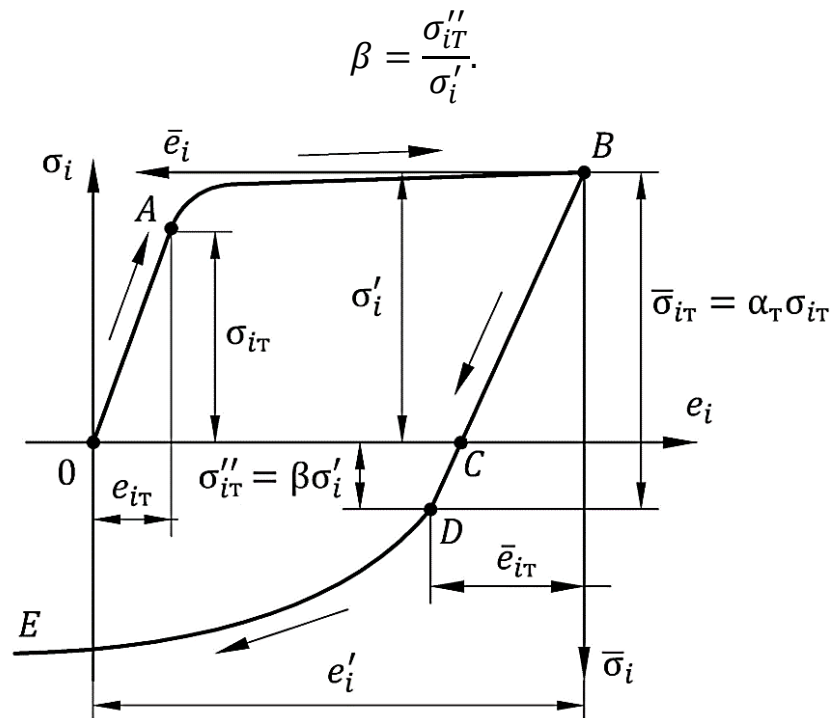


Рисунок 2.10 – Типичная диаграмма деформирования высокопрочных сталей

На рисунке 2.10 для наглядности показан один профиль обратного нагружения. В действительности для каждого значения максимальной деформации при нагружении существует свой профиль разгрузки. Поэтому математическая модель материала должна учитывать различные уровни деформации при нагружении и, следовательно, различные профили обратного нагружения в каждой точке цилиндра при автофретировании.

Для определения напряжения, при котором возникают вторичные пластические деформации при разгрузке-сжатии, необходимо знать значение параметра α_T , который характеризует изменение размеров поверхности пластичности при деформировании.

При определении α_T используется несколько моделей упрочнения материала: изотропная, кинематическая (анизотропная) и нелинейная кинематическая, построенную на основании механических свойств материала, определённых экспериментальным путём.

В случае изотропного упрочнения поверхность пластичности в процессе нагружения расширяется равномерно во все стороны симметрично. Эффект Баушингера в этом случае не учитывается $\beta = 1$, так как при прямом и обратном нагружении пластические деформации возникают при напряжённом состоянии одной и той же интенсивности, равной текущему (мгновенному) пределу текучести [14]. Таким образом, можно записать:

$$\sigma_{iT}'' = \sigma_i',$$

или

$$\alpha_{T \text{ изотр}} = \begin{cases} 2, & \text{при } e_i' \leq e_{iT} \\ 2 \frac{\sigma_i'}{\sigma_{iT}}, & \text{при } e_i' > e_{iT} \end{cases}. \quad (2.41)$$

В случае кинематического упрочнения поверхность пластичности остаётся прежнего размера, но смещается в пространстве напряжений. В этом случае наблюдается эффект Баушингера, который в случае кинематического упрочнения считается идеальным и для которого справедлив принцип Мазинга [10, 11].

То есть, можно записать

$$\alpha_{T \text{ кинем}} = 2. \quad (2.42)$$

Обе модели упрочнения являются идеальными. В реальности, поверхность пластичности при деформировании одновременно изменяет свои размеры и перемещается в пространстве напряжений.

Для реального материала, наилучшую сходимость с результатами экспериментов даёт нелинейная кинематическая модель упрочнения [7]. В этом случае, учитывая определение коэффициента эффекта Баушингера, можно получить уравнение, определяющее параметр α_T :

$$\alpha_T = \begin{cases} 2 & , \text{при } e'_i \leq e_{iT} \\ (1 + \beta) \frac{\sigma'_i}{\sigma_{iT}} & , \text{при } e'_i > e_{iT} \end{cases} \quad (2.43)$$

Коэффициент эффекта Баушингера сильно зависит от предшествующей пластической деформации и, как правило, определяется экспериментально.

Запишем основные уравнения для высокопрочной стали А723-1130 (аналог стали 38ХНЗМФА), полученные на основании результатов исследований, представленных в работах [66, 67], позволяющие описать поведение стали А723-1130 при одноосном растяжении в координатах $\sigma_i - e_i$ с учетом сжимаемости:

$$\sigma_i = \begin{cases} 3Ge_i & , \text{при } e_i \leq e_{iT} \\ \sigma_{iT}\{1 + a \tanh[c(e_i - e_{iT})] + d(e_i - e_{iT})\} & , \text{при } e_i > e_{iT} \end{cases} \quad (2.44)$$

где $E = 209$ ГПа, $\mu = 0,3$, $\sigma_{iT} = 1130$ МПа; a , c и d – параметры материала, а также при обратном нагружении одноосным сжатием в координатах $\bar{\sigma}_i - \bar{e}_i$ (рисунок 2.10) с учетом изменения величины упругой деформации при разгрузке-сжатии $\bar{e}_{iT}$, которая определяется как $\alpha_T \sigma_{iT} / \bar{E}$:

$$\bar{\sigma}_i = \begin{cases} 3\bar{G}\bar{e}_i & \text{при } \bar{e}_i \leq \bar{e}_{iT} \\ \sigma_{iT}\{\alpha_T + (1 + a - \beta) \tanh[\gamma(\bar{e}_i - \bar{e}_{iT})]\} & , \text{при } \bar{e}_i > \bar{e}_{iT} \end{cases} \quad (2.45)$$

где $\bar{G} = \bar{E}/2(1 + \mu)$ – модуль упругости второго рода при разгрузке-сжатии; $\bar{E}$ – модуль упругости первого рода при разгрузке-сжатии; α_T – параметр материала (рисунок 2.10), характеризующий условия возникновения вторичных пластических деформаций при разгрузке-сжатии; β – коэффициент эффекта Баушингера; γ – параметр нелинейности. Все эти величины, кроме коэффициента Пуассона, зависят от величины предшествующей деформации при нагружении e'_i . В работе [69] показано, что коэффициент Пуассона μ на упругом участке разгрузки-сжатии (В – D, рисунок 2.10) не зависит от величины предшествующей деформации e'_i .

Коэффициент эффекта Баушингера определяется уравнением [30, 44]:

$$\beta = \begin{cases} 1 & , \text{при } e'_i \leq e_{iT} \\ 0,164\{\tan[1 - 100(e'_i - e_{iT})]\}^{3,6} + 0,17 & , \text{при } e_{iT} < e'_i \leq 0,01 + e_{iT} \\ 0,17 & , \text{при } e'_i > 0,01 + e_{iT} \end{cases} \quad (2.46)$$

Параметр α_T с учётом уравнений (2.33) и (2.34):

$$\alpha_T = \begin{cases} 2 & , \text{при } e'_i \leq e_{iT} \\ \beta + \frac{\sigma_{iT}\{1 + a \tanh[c(e'_i - e_{iT})] + d(e'_i - e_{iT})\}}{\sigma_{iT}} & , \text{при } e'_i > e_{iT} \end{cases} \quad (2.47)$$

Параметр нелинейности согласно [66] для стали А723-1130 определяется в виде:

$$\gamma = \begin{cases} c & , \text{при } e'_i \leq e_{iT} \\ 29,05[(29,05/c)^{1/0,323} + (e'_i - e_{iT})]^{-0,323} & , \text{при } e'_i > e_{iT} \end{cases} \quad (2.48)$$

Изменение модуля упругости при разгрузке-сжатии, которое в значительной степени зависит от величины предшествующей деформации при нагружении e'_i , определяется уравнением [66, 67]:

$$\bar{E} = \begin{cases} E & , \text{при } e'_i \leq e_{iT} \\ E\{1 - b \tanh[m(e'_i - e_{iT})]\} & , \text{при } e'_i > e_{iT} \end{cases} \quad (2.49)$$

Параметры стали А723-1130, в соответствии с данными испытаний равны [66, 67]: $a = 0,0065$; $b = 0,15$; $c = 4000$; $d = 1,3$; $m = 120$.

Результаты расчётов β и $\bar{E}$ представлены на рисунке 2.11. На рисунке 2.12 представлены расчётные диаграммы деформирования стали А723-1130 при одноосном растяжении и последующем сжатии, полученные с использованием формул (2.44) – (2.49), учитывающих различные уровни деформации при нагружении. Эти диаграммы хорошо согласуются с диаграммами, представленными в работе [67].

а)

б)

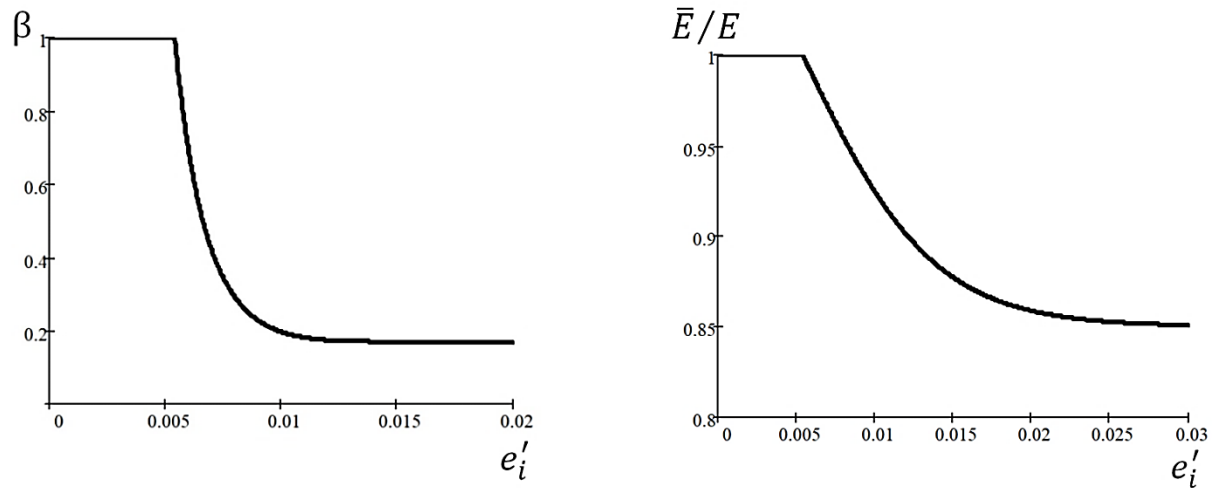


Рисунок 2.11 – Изменение коэффициента эффекта Баушингера – а) и модуля упругости – б) при разгрузке-сжатии в зависимости от величины предшествующей деформации при нагружении e'_i для стали А723-1130

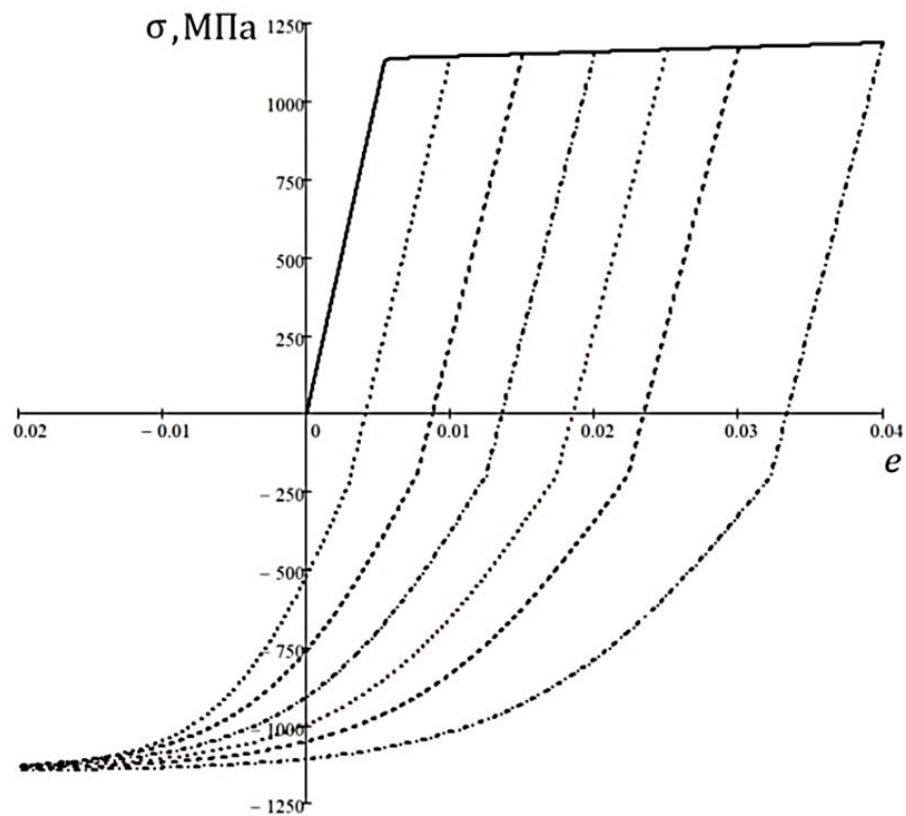


Рисунок 2.12 – Диаграммы деформирования стали А723-1130 при одноосном растяжении и последующем сжатии, для различных уровней деформации при нагружении

Выводы по второй главе

Рассмотрено аналитическое описание эффекта Баушингера при разгрузке и последующем нагружении усилием обратного знака с использованием экспериментальных данных и обобщенного принципа Мазинга. Полученные соотношения могут быть использованы в случае гидравлического автофретирования толстостенных цилиндрических оболочек, когда вторичные пластические деформации незначительны и отсутствуют экспериментальные данные о кривых разгрузки материала.

Согласно анализу моделей упрочнения для описания поведения толстостенных цилиндрических оболочек при знакопеременном нагружении в результате гидравлического автофретирования наиболее подходящей является нелинейная кинематическая модель упрочнения, позволяющая учитывать реальную диаграмму деформирования материала, а также случаи, когда коэффициент эффекта Баушингера сильно зависит от предшествующей пластической деформации. Для высокопрочной стали А723-1130 (аналог стали 38ХНЗМФА) на основании экспериментальных данных построены диаграммы деформирования при одноосном растяжении и последующем сжатии с учетом сжимаемости материала для разных уровней нагружения, а также изменение коэффициента эффекта Баушингера в зависимости от величины предшествующей деформации.

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ АВТОФРЕТИРОВАНИИ

3.1 Схемы деформирования оболочек при гидравлическом автофретировании

Для проведения математической постановки задачи упругопластического деформирования толстостенных цилиндрических оболочек необходимо рассмотреть основные схемы гидравлического автофретирования труб. Согласно процессу автофретирования «толстостенная цилиндрическая оболочка подвергается предварительному внутреннему давлению, при котором ее стенка частично или полностью переходит в стадию пластической деформации» [16, 54]. В результате, в стенке оболочки «возникает напряженное состояние, аналогичное состоянию скрепленного многослойного цилиндра. Слои стенки оболочки, которые перешли в стадию пластического деформирования, создают эффект скрепления» [16, 54]. Несмотря на все многообразие способов закрепления оболочек при гидравлическом автофретировании можно выделить два основных [16, 54, 68]: «автофретирование цилиндрической оболочки с закрытые концами, что представляет собой автофретирование с продольным растяжением – оболочку закрывают пробками, за счет давления на которые возникает растягивающая сила; автофретирование цилиндрической оболочки со свободными концами, что представляет собой автофретирование без продольного растяжения» (рисунок 3.1).

При практической реализации гидравлического автофретирования «торцы толстостенного цилиндра закрывают пробками, под действием внутреннего давления на которые возникает растягивающая сила, вызывающая осевое растяжение цилиндра» [10, 16]. Соответственно, в случае автофретирования с продольным растяжением приложенная к цилиндру суммарная осевая сила может

привести к изменению напряженно-деформированного состояния и остаточных напряжений. Два способа гидравлического автофретирования представлены на рисунке 3.1.

В работах [43, 54, 68] показано, что «при автофретировании цилиндрической оболочки с закрытыми концами возникает осевая сила, которая компенсирует осевое сжатие оболочки за счет действия внутреннего давления, и, в этом случае осевая деформация равна нулю. В стенке оболочки при данном виде автофретирования возникает объемное напряженное состояние и плоское деформированное состояние (осевая деформация равна нулю). При автофретировании оболочки со свободными концами в стенке оболочки возникает плоское напряженное состояние (осевое напряжение равно нулю) и объемное деформированное состояние» [10].

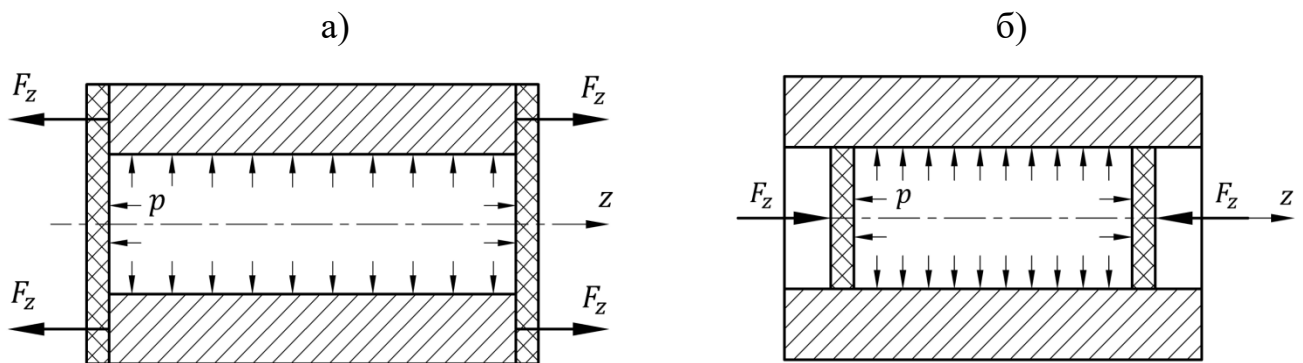


Рисунок 3.1 – Гидравлическое автофретирование цилиндрической оболочки с продольным растяжением – а), без продольного растяжения – б) [3]

3.2 Основные допущения при описании упругопластического деформирования толстостенных цилиндрических оболочек

Рассмотрим находящуюся под действием внутреннего давления в процессе гидравлического автофретирования цилиндрическую толстостенную оболочку, начальные длина, внутренний и наружный радиусы которой обозначим l_0 , r_0 , R_0 .

Типичная геометрия толстостенного цилиндра показана на рисунке 3.2. Решение задачи будем рассматривать в цилиндрической системе координат $\rho\theta z$.

При рассмотрении действующих напряжений на маленький элемент толстостенного цилиндра в процессе гидравлического автофретирования принимаются следующие допущения:

1. Выполняются все допущения, принятые в разделе 2.1.
2. Используются основные гипотезы деформационной теории пластичности. Допустимость применения деформационной теории пластичности к расчету напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек при гидравлическом автофретировании обосновывается в работе [3] путем анализа траекторий нагружения в пространстве напряжений А.А. Ильюшина. «При автофретировании с продольным растяжением процесс нагружения является простым при различных уровнях нагружения вплоть до разрушения; в случае автофретирования без растяжения процесс нагружения можно считать простым для степенной аппроксимации диаграммы деформирования материала до момента перехода всей стенки оболочки в область пластического деформирования» [3].
3. Ввиду осевой симметрии касательные напряжения равны нулю, изменения напряжений в зависимости от θ отсутствуют.
4. Центробежные силы отсутствуют, оболочка является невращающейся, а гравитационные силы рассматриваются как пренебрежимо малые.
5. Статические уравнения и уравнения совместности деформаций записываются в координатах Эйлера.
6. В случае бесконечно длинного цилиндра ($l_0 \approx \infty$) можно считать, что длина цилиндра не меняется, то есть деформация вдоль цилиндра отсутствует, деформированное состояние плоское и $e_z = 0$ [10, 11, 16, 17].
7. Переход из упругой стадии деформирования в пластическую определяется условием Губера-Мизеса.
8. Разгрузка начинается одновременно во всех точках оболочки.

9. Принцип «отвердевания» не выполняется. Граничные условия изменяются с учётом изменения геометрии оболочки.

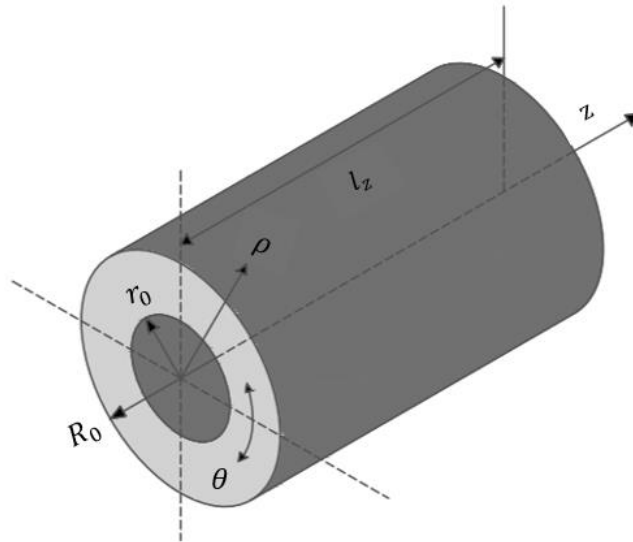


Рисунок 3.2 – Геометрия и размеры толстостенного цилиндра

В процессе гидравлического автофретирования может возникнуть неосесимметричное состояние за счёт локальной деформации. Однако возникновение такого состояния непредсказуемо и в большей степени является исключением из основного правила, в связи с чем, не рассматривается в данной диссертации.

3.3 Постановка задачи упругопластического деформирования цилиндрической толстостенной оболочки при нагружении внутренним давлением

Расчёты за пределами упругости привлекают все более пристальное внимание в связи с потребностями выявления дополнительных прочностных ресурсов толстостенных оболочек, выполненных из упругопластических высокопрочных материалов, и повышения их несущей способности процессом гидравлического автофретирования. К основным уравнениям для расчётов за пределами упругости по деформационной теории пластичности являются:

«дифференциальные уравнения равновесия, условия совместности деформаций, зависимость между деформациями и напряжениями, условие пластичности; граничные условия на поверхности» [10].

При решении осесимметричных задач для объёмного напряженного состояния в цилиндрической системе координат $O\rho\theta z$ дифференциальные уравнения равновесия с учетом закона парности касательных напряжений можно представить в виде [5]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где σ_ρ , σ_θ и σ_z – радиальные, тангенциальные и осевые напряжения, $\tau_{\rho z}$ – касательные напряжения.

В рамках решения данной задачи касательные напряжения вдоль оболочки при действии постоянного давления отсутствуют, а производные по z в уравнениях равновесия (3.1) обратятся в нуль. Такое напряженное состояние можно принять для толстостенного цилиндра при гидравлическом автофретировании не только с продольным растяжением, но и без него.

При описании малых упругопластических деформаций часто используют относительные деформации и записывают «уравнение совместности деформаций в координатах Лагранжа, что допустимо и не приводит к большим погрешностям расчета. Но при исследовании процесса гидравлического автофретирования уравнение совместности деформаций при осесимметричном деформировании толстостенных цилиндрических оболочек требуется рассматривать в координатах Эйлера» согласно работам [20,21].

Таким образом, постановка осесимметричной задачи теории упругости и пластичности в цилиндрической системе координат описывается следующими соотношениями:

– уравнение равновесия:

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} - \frac{\sigma_\theta - \sigma_\rho}{\rho} = 0, \quad (3.2)$$

– физические соотношения в пределах упругой стадии деформирования:

$$\left. \begin{aligned} e_\rho &= \frac{1}{E} [\sigma_\rho - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ e_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_\rho)] \\ e_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_\rho + \sigma_\theta)] \end{aligned} \right\}, \quad (3.3)$$

– в пределах пластической стадии деформирования:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho - \sigma_0 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_\rho - e_0) \\ \sigma_\theta - \sigma_0 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_\theta - e_0) \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_z - e_0) \end{aligned} \right\}, \quad (3.4)$$

– геометрические соотношения:

$$e_\rho = \ln \left(\frac{d\rho}{d\bar{r}} \right), \quad e_\theta = \ln \left(\frac{\rho}{\bar{r}} \right),$$

– уравнение совместности деформаций в координатах Эйлера:

$$\frac{de_\theta}{d\rho} = \frac{1 - \exp(e_\theta - e_\rho)}{\rho}. \quad (3.5)$$

– условие пластичности Губера-Мизеса:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2} = \sigma_T,$$

– модель упругопластического тела:

$$\sigma_i = \begin{cases} 3Ge_i, & e_i \leq e_{iT} \\ \Phi(e_i), & e_i > e_{iT} \end{cases}, \quad (3.6)$$

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_\rho - e_\theta)^2 + (e_\theta - e_z)^2 + (e_z - e_\rho)^2}, \quad (3.7)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2}. \quad (3.8)$$

– граничные условия на внутренней и наружной поверхностях цилиндра:

$$\sigma_\rho|_{\rho=r} = -p, \quad (3.9)$$

$$\sigma_\rho|_{\rho=R} = 0. \quad (3.10)$$

где e_ρ , e_θ , e_z – радиальные, окружные, осевые деформации Генки; $\bar{r}$ – радиальная координата точки тела в начальном недеформированном состоянии, т.е. координата Лагранжа; ρ – радиальная координата точки тела в деформированном состоянии, т.е. координата Эйлера; r и R – внутренний и внешний радиус цилиндра после деформирования; p – давление.

Таким образом, система уравнений (3.2) – (3.10) позволяет рассчитать напряженно-деформированное состояние толстостенной цилиндрической оболочки при гидравлическом автофретировании.

3.4 Численный подход к расчету упругопластического деформирования толстостенных цилиндрических оболочек методом переменных параметров упругости

3.4.1 Постановка задачи гидравлического автофретирования цилиндрических оболочек с продольным растяжением и без на основании метода переменных параметров упругости

Физические уравнения связи между напряжениями и деформациями (3.3) и (3.4) для плосконапряженного состояния, в соответствии с методом переменных параметров упругости и деформационной теории пластичности [5, 6], запишем в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} e_\rho &= \frac{1}{E^*} [\sigma_\rho - \mu^*(\sigma_\theta + \sigma_z)]; \\ e_\theta &= \frac{1}{E^*} [\sigma_\theta - \mu^*(\sigma_z + \sigma_\rho)]; \\ e_z &= \frac{1}{E^*} [\sigma_z - \mu^*(\sigma_\rho + \sigma_\theta)], \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E^* &= \frac{E_{\text{сек}}}{1 + \frac{1-2\mu}{3E} E_{\text{сек}}}; \\ \mu^* &= \frac{0,5 - \frac{1-2\mu}{3E} E_{\text{сек}}}{1 + \frac{1-2\mu}{3E} E_{\text{сек}}}. \end{aligned} \right\}$$

При этом для несжимаемого тела, у которого $\mu = 0,5$, уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} E^* &= E_{\text{сек}} = \frac{\sigma_i}{e_i}; \\ \mu^* &= 0,5. \end{aligned} \right\}$$

В случае гидравлического автофретирования с продольным растяжением, возникающем за счёт давления на днище, осевая деформация равна нулю, а деформированное состояние является плоским [17]. В этом случае $e_z = 0$ и, следовательно, $\sigma_z = \mu^*(\sigma_\rho + \sigma_\theta)$, соответственно, уравнение (3.11) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} e_\rho &= \frac{1}{E^*} [\sigma_\rho - \mu^*(\sigma_\theta + \sigma_z)]; \\ e_\theta &= \frac{1}{E^*} [\sigma_\theta - \mu^*(\sigma_z + \sigma_\rho)]; \\ e_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

После преобразований система уравнений (3.12) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} e_\rho &= \frac{1}{E^*} [(1 - \mu^{*2})\sigma_\rho - \mu^*(1 + \mu^*)\sigma_\theta]; \\ e_\theta &= \frac{1}{E^*} [(1 - \mu^{*2})\sigma_\theta - \mu^*(1 + \mu^*)\sigma_\rho]; \\ e_z &= 0, \sigma_z = \mu^*(\sigma_\rho + \sigma_\theta). \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

При гидравлическом автофретировании толстостенного цилиндра без продольного растяжения оболочка находится в условиях плоского напряженного состояния $\sigma_z = 0$, соответственно, уравнение (3.11) преобразуется к виду:

$$\left. \begin{aligned} e_\rho &= \frac{1}{E^*}(\sigma_\rho - \mu^* \sigma_\theta); \\ e_\theta &= \frac{1}{E^*}(\sigma_\theta - \mu^* \sigma_\rho); \\ e_z &= -\frac{\mu^*}{E^*}(\sigma_\rho + \sigma_\theta), \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Ввиду геометрической изменяемости толстостенной оболочки в рамках рассматриваемой задачи краевые условия на её граничных поверхностях при нагружении и разгрузке различаются:

- граничные условия при нагружении:

$$\sigma_\rho|_{\rho=R'} = 0, \quad (3.15)$$

$$\sigma_\rho|_{\rho=r'} = -p_{\text{авт}}, \quad (3.16)$$

$$u|_{\rho=R'} = R' - R_0, \quad e_\theta|_{\rho=R'} = \ln\left(\frac{R'}{R_0}\right) \quad (3.17)$$

- граничные условия при разгрузке:

$$\sigma_\rho|_{\rho=R''} = 0, \quad (3.18)$$

$$\sigma_\rho|_{\rho=r''} = p_{\text{авт}}, \quad (3.19)$$

$$u|_{\rho=R''} = R'' - R', \quad e_\theta|_{\rho=R''} = \ln\left(\frac{R''}{R'}\right). \quad (3.20)$$

где $p_{\text{авт}}$ – давление автофретирования; R', r' – наружный и внутренний радиусы оболочки после нагружения; R'', r'' – наружный и внутренний радиусы оболочки после разгрузки.

Таким образом, получение интегральных уравнений сводится к решению уравнение (3.5) с соответствующими граничными условиями при помощи соотношений (3.2) и (3.11).

3.4.2 Интегральные уравнения напряженно-деформированного состояния для толстостенной цилиндрической оболочки

Дифференциальное уравнение равновесия (3.2) имеет следующее разрешающее интегральное уравнение равновесия:

$$\sigma_\rho = \int \frac{(\sigma_\theta - \sigma_\rho)}{\rho} d\rho + C_1, \quad (3.21)$$

С учётом граничных условий – при $\rho = R$, $\sigma_\rho|_{\rho=R} = 0$, определим постоянную интегрирования:

$$C_1 = 0.$$

Следовательно, согласно (3.21) получаем интегральное уравнение в напряжениях:

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \int_R^\rho \sigma_\theta d\rho. \quad (3.22)$$

Для преобразования уравнения (3.5) введем следующую замену:

$$\frac{de_\theta}{d\rho} = \frac{1}{\exp(e_\theta)} \frac{d(\exp(e_\theta))}{d\rho},$$

и перепишем полученное уравнение совместности деформаций в виде:

$$\frac{d(\exp(e_\theta))}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \exp(e_\theta) - \frac{1}{\rho} \exp(2e_\theta - e_\rho). \quad (3.23)$$

Рассматривая уравнение (3.23) как нелинейное дифференциальное уравнение первой степени вида, решим его методом Бернулли. Обозначим, $\exp(e_\theta) = Y$, тогда уравнение (3.23) примет вид:

$$\frac{dY}{d\rho} - \frac{1}{\rho} Y = -\frac{1}{\rho} \exp(2e_\theta - e_\rho), \quad (3.24)$$

Представим искомую функцию Y в виде произведения $Y = U \cdot V$, тогда получим:

$$V \frac{dU}{d\rho} + U \left(\frac{dV}{d\rho} - \frac{1}{\rho} V \right) = -\frac{1}{\rho} \exp(2e_\theta - e_\rho), \quad (3.25)$$

Решим следующее уравнение:

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho}, \quad (3.26)$$

Решая дифференциальное уравнение (3.26), получим $\ln V = \ln \rho$, откуда следует:

$$V = \rho \quad (3.27)$$

Подставим найденное решение в уравнение (3.25), тогда

$$\frac{dU}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2} \exp(2e_\theta - e_\rho), \quad (3.28)$$

Интегрируя уравнение (3.28), получим

$$U = -\int \frac{1}{\rho^2} \exp(2e_\theta - e_\rho) d\rho + C_2. \quad (3.29)$$

где C_2 – константа интегрирования.

Принимая во внимание соотношения (3.27) и (3.29), получаем выражение общего решения дифференциального уравнения совместности деформаций.

$$\exp(e_\theta) = -\rho \int \frac{1}{\rho^2} \exp(2e_\theta - e_\rho) d\rho + C_2 \rho. \quad (3.30)$$

Учитывая граничные условия (3.17), находим C_2 :

$$C_2 = \frac{1}{R_0}.$$

Из уравнения (3.30) выражаем окружную деформацию и с учётом граничных условий записываем:

$$e_{\theta} = \ln \left(-\rho \int_R^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \exp(2e_{\theta} - e_{\rho}) d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right), \quad (3.31)$$

Соотношение (3.31) представляет собой интегральное уравнение совместности деформаций. Используя уравнения (3.11), представим полученное интегральное уравнение (3.31) в напряжениях:

$$\sigma_{\theta} = \mu^*(\sigma_z + \sigma_{\rho}) + E^* \ln \left(-\rho \int_R^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \exp \left\{ \frac{1}{E^*} [(2 + \mu^*)\sigma_{\theta} - (1 + 2\mu^*)\sigma_{\rho} - \mu^*\sigma_z] \right\} d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right), \quad (3.32)$$

Для несжимаемого материала ($\mu^* = 1/2$) уравнение (3.32) примет вид:

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_{\rho}) + E_{\text{сек}} \ln \left(-\rho \int_R^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \exp \left[\frac{1}{E_{\text{сек}}} \left(\frac{5}{2}\sigma_{\theta} - 2\sigma_{\rho} - \frac{1}{2}\sigma_z \right) \right] d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right)$$

Уравнение (3.32) выполняется при гидравлическом автофретировании толстостенных оболочек с продольным растяжением и без. При гидравлическом автофретировании с продольным растяжением уравнение (3.32) примет вид:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\mu^*}{(1 - \mu^*)}\sigma_{\rho} + \frac{1}{(1 - \mu^{*2})}E^* \ln \left(-\rho \int_R^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \exp \left\{ \frac{1}{E^*} [(2 + \mu^* - \mu^{*2})\sigma_{\theta} - (1 + 2\mu^* + \mu^{*2})\sigma_{\rho}] \right\} d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right). \quad (3.33)$$

При $\mu^* = 1/2$ уравнение (3.46) примет вид:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\rho} + \frac{4}{3}E_{\text{сек}} \ln \left(-\rho \int_R^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \exp \left[\frac{9}{4E_{\text{сек}}} (\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}) \right] d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right).$$

При гидравлическом автофретировании без продольного растяжения $\sigma_z = 0$ и уравнение (3.32) принимает вид:

$$\sigma_{\theta} = \mu^* \sigma_{\rho} + E^* \ln \left(-\rho \int_R^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \exp \left\{ \frac{1}{E^*} [(2 + \mu^*) \sigma_{\theta} - (1 + 2\mu^*) \sigma_{\rho}] \right\} d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right), \quad (3.34)$$

или для несжимаемого материала ($\mu^* = 1/2$):

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2} \sigma_{\rho} + E_{\text{сек}} \ln \left(-\rho \int_R^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \exp \left[\frac{1}{E_{\text{сек}}} \left(\frac{5}{2} \sigma_{\theta} - 2 \sigma_{\rho} \right) \right] d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right).$$

Решение по определению напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек в процессе гидравлического автофретирования с продольным растяжением, в соответствии с построенной численной методикой, проводится в последовательных приближениях с использованием уравнений (3.22) и (3.33) для заданных граничных условий, а при гидравлическом автофретировании без продольного растяжения с использованием уравнений (3.22) и (3.34).

3.4.3 Алгоритм расчёта напряженно-деформированного состояния толстостенной цилиндрической оболочки

Расчёт напряженно-деформированного состояния толстостенной цилиндрической оболочки в процессе нагружения при автофретировании проводится в последовательных приближениях, задавая малое перемещение наружного радиуса оболочки в сторону увеличения:

$$\Delta R^{(j)} = R^{(j)} - R^{(j-1)},$$

где j – номер приближения.

В начальном приближении $R^{(0)} = R_0$. На каждом шаге определяем напряжённо-деформированное состояние оболочки и, используя граничные условия (3.15) – (3.17), рассчитываем давление, при котором произошло приращение наружного радиуса:

$$p^{(j)} = -\sigma_\rho^{(j)} \Big|_{\rho=r^{(j)}}, \quad (3.35)$$

где $\sigma_\rho^{(j)} \Big|_{\rho=r^{(j)}}$ – значение радиального напряжения на внутренней поверхности оболочки при j -ом перемещении.

На отрезке от $R^{(j)}$ до $r^{(j)}$, где $r^{(j)}$ – внутренний радиус оболочки в процессе деформирования, будем проводить численное интегрирование. На начальном приближении: $j = 0$ принимаем, что $r^{(0)} = r_0$, где r_0 – внутренний радиус оболочки в недеформированном состоянии. В радиальном направлении построим совокупность точек:

$$\Delta \rho^{(j)} = R^{(j)} - r^{(j)} / N,$$

$$\rho_i = \left\{ \rho_0^{(j)} = R^{(j)}, \dots, \rho_i^{(j)} = \rho_{i-1}^{(j)} - \Delta \rho^{(j)}, \dots, \rho_N^{(j)} = r^{(j)} \right\}, i = 0, 1, \dots, N.$$

Решение по определению напряжённого состояния при автофретировании с продольным растяжением толстостенного цилиндра, в соответствии с методом переменных параметров упругости, проводится методом последовательных приближений по рекуррентной схеме с использованием уравнений (3.22) и (3.33) при заданных граничных условиях (3.15) – (3.17):

$$\sigma_\theta^{(k+1)} = \frac{\mu^{*(k)}}{(1 - \mu^{*(k)})} \sigma_\rho^{(k)} +$$

$$+ \frac{1}{(1 - \mu^{*(k)2})} E^{*(k)} \ln \left(-\rho \int_R^\rho \frac{1}{\rho^2} \exp \left\{ \frac{1}{E^{*(k)}} [(2 + \mu^{*(k)} - \mu^{*(k)2}) \cdot \right. \right.$$

$$\cdot \sigma_\theta^{(k)} - (1 + 2\mu^{*(k)} + \mu^{*(k)2}) \sigma_\rho^{(k)}] \} d\rho + \frac{\rho}{R_0} \Bigg),$$

$$\sigma_\rho^{(k+1)} = \frac{1}{\rho} \int_R^\rho \sigma_\theta^{(k+1)} d\rho, \quad \sigma_z^{(k+1)} = \mu^{*(k)} (\sigma_\rho^{(k+1)} + \sigma_\theta^{(k+1)}),$$

$$\sigma_i^{(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_\rho^{(k+1)} - \sigma_\theta^{(k+1)})^2 + (\sigma_\theta^{(k+1)} - \sigma_z^{(k+1)})^2 + (\sigma_z^{(k+1)} - \sigma_\rho^{(k+1)})^2},$$

где k – номер приближения,

а при гидравлическом автофретировании без продольного растяжения рекуррентная схема примет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}^{(k+1)} &= \mu^{*(k)} \sigma_{\rho}^{(k)} + E^{*(k)} \ln \left(-\rho \int_R^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \exp \left\{ \frac{1}{E^{*(k)}} [(2 + \mu^{*(k)}) \sigma_{\theta}^{(k)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1 + 2\mu^{*(k)}) \sigma_{\rho}^{(k)}] \right\} d\rho + \frac{\rho}{R_0}, \quad \sigma_{\rho}^{(k+1)} = \frac{1}{\rho} \int_R^{\rho} \sigma_{\theta}^{(k+1)} d\rho, \\ \sigma_i^{(k+1)} &= \sqrt{(\sigma_{\theta}^{(k+1)})^2 + \sigma_{\rho}^{(k+1)} \sigma_{\theta}^{(k+1)} + (\sigma_{\rho}^{(k+1)})^2}.\end{aligned}$$

По результатам численного расчёта напряжённого состояния, определяется деформированное состояние оболочки:

– при гидравлическом автофретировании с продольным растяжением:

$$\begin{aligned}e_{\rho}^{(k+1)} &= \frac{1}{E^{*(k)}} [(1 - \mu^{*(k)2}) \sigma_{\rho}^{(k+1)} - \mu^{*(k)} (1 + \mu^{*(k)}) \sigma_{\theta}^{(k+1)}], \\ e_{\theta}^{(k+1)} &= \frac{1}{E^{*(k)}} [(1 - \mu^{*(k)2}) \sigma_{\theta}^{(k+1)} - \mu^{*(k)} (1 + \mu^{*(k)}) \sigma_{\rho}^{(k+1)}], \\ e_i^{(k+1)} &= \frac{2}{3} \sqrt{(e_{\theta}^{(k+1)})^2 + e_{\rho}^{(k+1)} e_{\theta}^{(k+1)} + (e_{\rho}^{(k+1)})^2},\end{aligned}$$

– при гидравлическом автофретировании без продольного растяжения:

$$\begin{aligned}e_{\rho}^{(k+1)} &= \frac{1}{E^{*(k)}} (\sigma_{\rho}^{(k+1)} - \mu^{*(k)} \sigma_{\theta}^{(k+1)}), \quad e_{\theta}^{(k+1)} = \frac{1}{E^{*(k)}} (\sigma_{\theta}^{(k+1)} - \mu^{*(k)} \sigma_{\rho}^{(k+1)}), \\ e_z^{(k+1)} &= -\frac{\mu^{*(k)}}{E^{*(k)}} (\sigma_{\rho}^{(k+1)} + \sigma_{\theta}^{(k+1)}), \\ e_i^{(k+1)} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{\rho}^{(k+1)} - e_{\theta}^{(k+1)})^2 + (e_{\theta}^{(k+1)} - e_z^{(k+1)})^2 + (e_z^{(k+1)} - e_{\rho}^{(k+1)})^2}.\end{aligned}$$

Затем уточняют значение $E_{\text{сек}}$, используя для определения $\sigma_i^{(k+1)}$ уравнение (2.44):

$$E_{\text{сек}}^{(k+1)} = \frac{\Phi(e_i^{(k+1)})}{e_i^{(k+1)}}.$$

Далее уточняются значения переменных параметров упругости согласно формулам:

$$E^{*(k+1)} = \frac{E_{\text{сек}}^{(k+1)}}{1 + \frac{1-2\mu}{3E} E_{\text{сек}}^{(k+1)}},$$

$$\mu^{*(k+1)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{3E} E_{\text{сек}}^{(k+1)}}{1 + \frac{1-2\mu}{3E} E_{\text{сек}}^{(k+1)}}.$$

Контроль сходимости процесса проводят по значениям интенсивностей напряжений:

$$\frac{|\sigma_i^{(k+1)} - \sigma_i^{(k)}|}{\sigma_i^{(k+1)}} \leq \Delta\sigma_i.$$

Расчёт положения внутренней поверхности оболочки в процессе деформирования определяется согласно уравнению:

$$r^{(j)} = r_0 \exp\left(e_\theta^{(j)}\Big|_{\rho=r^{(j)}}\right),$$

где $e_\theta^{(j)}\Big|_{\rho=r^{(j)}}$ – значение окружной деформации на внутренней поверхности оболочки.

Условие остановки расчёта, где j – номер приближения:

$$\frac{|r^{(j+1)} - r^{(j)}|}{r^{(j+1)}} \leq \Delta r.$$

После достижения всех заданных параметров точности вычислений, сравнивают полученное внутреннее давление $p^{(j)}$ (3.35) с заданным давлением автофретирования $p_{\text{авт}}$, и изменяют наружный радиус на величину заданного перемещения $u^{(j)}$. Расчёт прекращается, когда внутреннее давление достигает значения

$$p^{(j)} \geq p_{\text{авт}}.$$

При автофретировании без продольного растяжения алгоритм определения напряженно-деформированного состояния такой же, только определение окружного напряжения $\sigma_\theta^{(k+1)}$ проводят по выражению (3.34).

3.4.4 Определение остаточных напряжений и деформаций на основании теоремы о вторичных пластических деформациях

Для определения остаточных напряжений при автофретировании, воспользуемся теоремой о вторичных пластических деформациях [11], которую перефразируем следующим образом: остаточные напряжения σ_{ij}^0 и остаточные деформаций e_{ij}^0 , сохранившиеся в теле после упругопластического деформирования, определяются как сумма напряжений σ'_{ij} и деформаций e'_{ij} , существовавших в упругопластическом теле в момент разгрузки, и некоторых фиктивных величин $\bar{\sigma}_{ij}^0$ и $\bar{e}_{ij}^0$, существующих в некотором фиктивном упругопластическом теле при его упругопластическом деформировании внешними силами с обратным знаком, которые были приложены к данному телу перед началом разгрузки:

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma'_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}^0, \quad e_{ij}^0 = e'_{ij} + \bar{e}_{ij}^0. \quad (3.36)$$

Поскольку фиктивное тело упругопластически анизотропное, предел текучести каждой деформированной точки фиктивного тела в α_T раз больше рассматриваемого, что и определяется, в зависимости от принятой модели упрочнения, выражениями (2.41), (2.42) или (2.43).

Для расчёта остаточных напряжений и деформаций берётся деформированный цилиндр с внешним радиусом R' и внутренним радиусом r' , полученными при расчёте напряженно-деформированного состояния при нагружении давлением автофретирования $p_{\text{авт}}$. Затем определяют напряжённо-деформированное состояние $\bar{\sigma}_{ij}^0$ и $\bar{e}_{ij}^0$ фиктивного тела. Для расчета применяются граничные условия (3.18) – (3.20). В соответствии с принятым алгоритмом,

последовательные приближения проводим при перемещении наружного радиуса оболочки в сторону уменьшения до тех пор, пока фиктивное давление не достигнет значения давления автофретирования с обратным знаком ($-p_{\text{авт}}$). Так как при разгрузке каждая точка деформированного цилиндра имеет свой профиль обратного нагружения, при определении секущего модуля в каждой точке стенки будем использовать уравнение обратного нагружения (2.45):

$$\bar{E}_{\text{сек}}^{(k+1)} = \frac{\bar{\Phi}(\bar{e}_i^{(k+1)})}{\bar{e}_i^{(k+1)}}.$$

что позволяет учесть упругопластическую анизотропию при обратном нагружении.

После определения напряженно-деформированного состояния фиктивного тела, определяем остаточные напряжения по формулам (3.36).

Выводы по третьей главе

Проведена математическая постановка задачи упругопластического деформирования толстостенных цилиндрических оболочек при гидравлическом автофретировании. Получено совместное решение интегральных уравнений равновесия и совместности деформаций, которые записаны в координатах Эйлера для нелинейной меры деформации Генки.

На основании метода переменных параметров упругости построена численная методика расчета напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек в процессе гидравлического автофретирования как с продольным растяжением, так и без продольного растяжения; предложен подход для расчета остаточных напряжений с учетом упругопластической анизотропии, вызванной эффектом Баушингера.

ГЛАВА 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ПРОЦЕССА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО АВТОФРЕТИРОВАНИЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

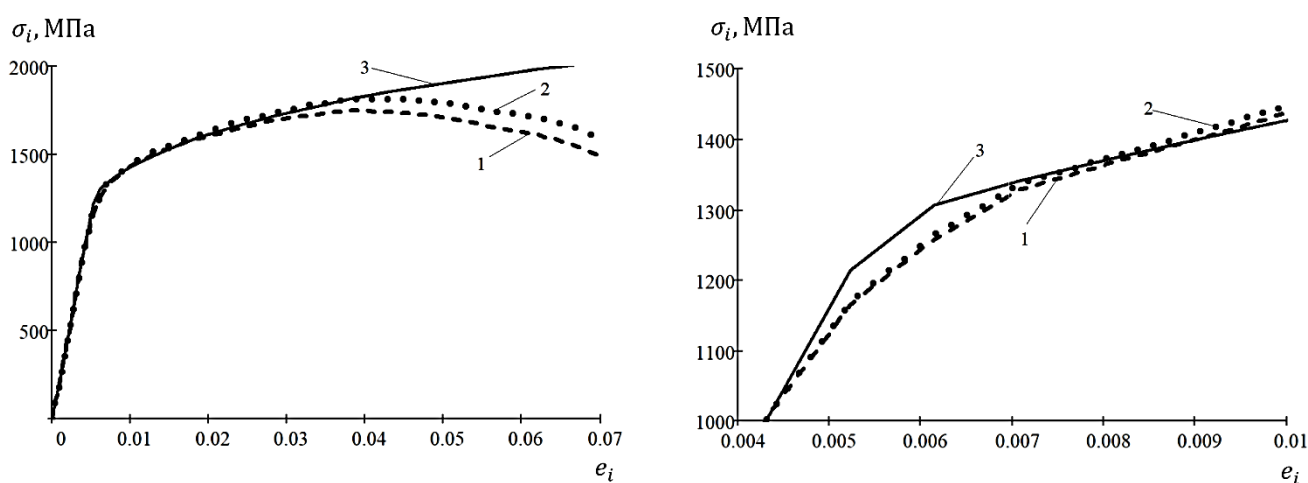
4.1 Оценка точности построения аппроксимаций диаграммы деформирования материалов в области упругопластических деформаций

При проведении расчетов толстостенных оболочек в процессе гидравлического автофретирования требуются достоверные данные о поведении материала при больших упругопластических деформациях (диаграмма деформирования, деформационные характеристики, прочностные характеристики и т. д.). Поэтому, для проведения проверки точности аппроксимаций диаграммы деформирования приводится сопоставление диаграмм действительных напряжений третьего рода с учётом сжимаемости материала, полученных в результате экспериментальных исследований при испытании образца на разрыв, с линейно-степенными аппроксимирующими функциями, полученными с использованием справочных констант механических свойств материалов.

Согласно «Справочнику Всесоюзного научно-исследовательского института авиационных материалов» (ВИАМ) были взяты экспериментальные индикаторные диаграммы растяжения (зависимости между растягивающей силой и абсолютным удлинением образца) и показатели механических свойств (временное сопротивление на разрыв, модуль упругости, предел текучести, коэффициент Пуассона, относительное удлинение и т.д.) для стали 30ХГСН2А [18].

Экспериментальная диаграмма растяжения, построенная с использованием справочных констант механических свойств материалов, первоначально перестраивается для деформаций Генки (рисунке 4.1, кривая 1). Впоследствии проводится построение действительной диаграммы растяжения третьего рода с учётом сжимаемости материала (см. рисунке 4.1, кривая 2).

Далее строится аналитическая линейно-степенная функция, аппроксимирующая кривую упрочнения. Для построения такой кривой необходимо было построить степенную функцию через две точки: точку соответствующую условному пределу текучести ($e_{i0,2}, \sigma_{i0,2} = \sigma_{s0,2}$) и точку, соответствующую началу шейкообразования (истинному временному сопротивлению деформирования) ($e_{iш}, \sigma_{iш} = \sigma_{св}$) (см. рисунок 4.1, кривая 3). С учётом выражения (2.15) можно определить неизвестные параметры n и A степенной аппроксимации.



- 1 – экспериментальная диаграмма условных напряжений;
- 2 – экспериментальная диаграмма истинных напряжений;
- 3 – степенная аппроксимация, проходящая через две точки

Рисунок 4.1 – Аппроксимация диаграммы деформирования стали 30ХГСН2А линейно-степенной функцией по двум точкам

После построения кривой была проведена оценка вычисления погрешности, получаемая в результате аппроксимации диаграммы деформирования, которая изображена на рисунке 4.2.

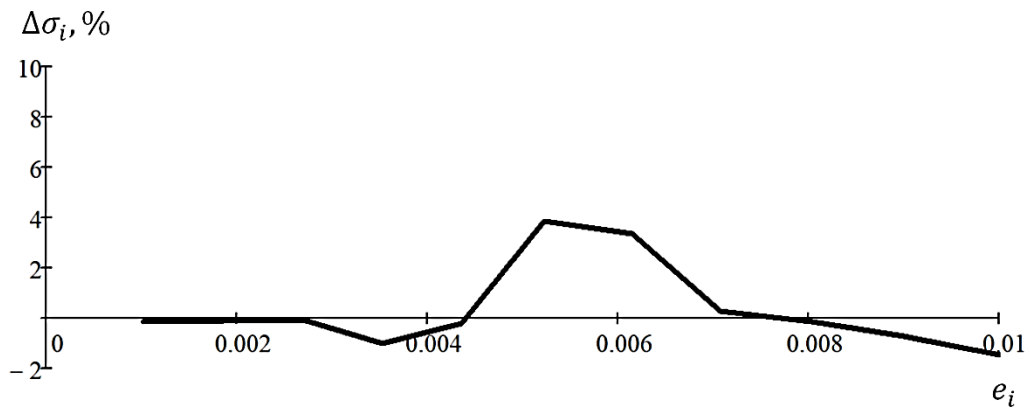
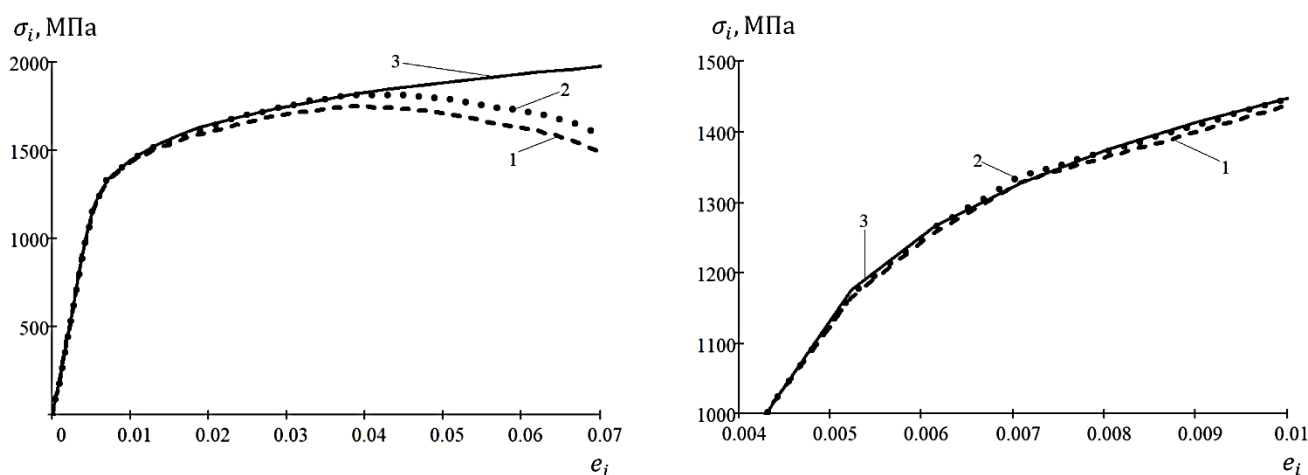


Рисунок 4.2 – Погрешность аппроксимации диаграммы деформирования стали 30ХГСН2А линейно-степенной функцией по двум точкам в области перехода упругих деформаций в пластические

Согласно полученным результатам погрешность аппроксимации резко увеличивается в области перехода упругих деформаций в пластические и достигает 4%. При решении упругопластических задач, когда рассматриваются одновременно области упругих и пластических деформаций, очень важно точно определить момент перехода материала из упругого в пластическое состояние. Для того, чтобы уменьшить погрешность аппроксимации в точке перехода линейной функции в степенную, необходимо сгладить этот переход.

Поэтому для того, чтобы с достаточной степенью точности описать переход от упругого деформирования к пластическому, возможно аппроксимировать диаграмму деформирования с использованием выражения (2.17). Для определения неизвестных параметров (A , n , e_{0i} и e_{iT}) этой аппроксимации, необходимо было решить систему уравнений (2.18) в соответствии с (2.19). Результаты расчётов представлены на рисунках 4.3 и 4.4.

Анализ полученных графиков показывает, что кривая в этом случае с достаточно высокой степенью точности аппроксимирует действительную диаграмму деформирования, и погрешность аппроксимации в области перехода из упругого состояния в пластическое не превышает 1 %.



1 – экспериментальная диаграмма условных напряжений;

2 – экспериментальная диаграмма истинных напряжений;

3 – степенная аппроксимация, проходящая через две точки со сдвигом

Рисунок 4.3 – Аппроксимация диаграммы деформирования стали 30XГСН2А линейно-степенной функцией по двум точкам со сдвигом степенной функции

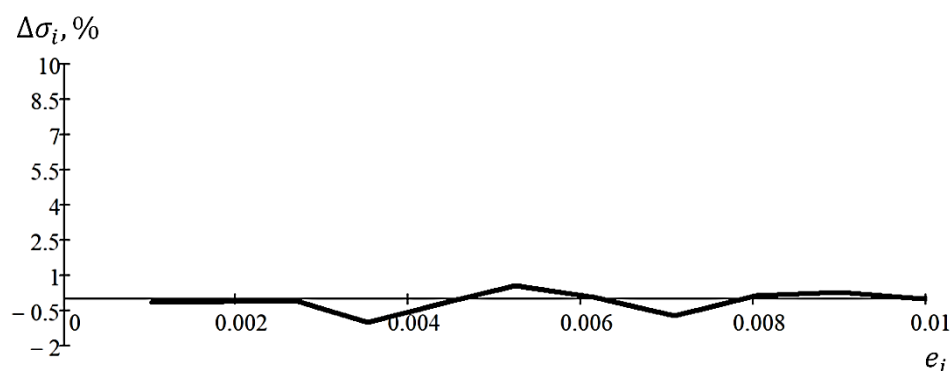


Рисунок 4.4 – Погрешность аппроксимации диаграммы деформирования стали 30XГСН2А линейно-степенной функцией по двум точкам со сдвигом степенной функции в области перехода упругих деформаций в пластические

Таким образом, сравнительный анализ вариантов аппроксимации показал, что наиболее оптимальной для данного исследования является аппроксимация по двум точкам со сдвигом степенной функции, которая позволяет с высокой точностью описать область перехода из упругого в пластическое состояние при построении диаграммы деформирования широкого перечня материалов на

основании справочных констант механических свойств материалов, а также не требовать проведения дополнительных испытаний, что отмечено в [2].

4.2 Оценка погрешности аналитического метода расчета упругопластического деформирования толстостенных оболочек при линейном упрочнении материала

Аналитическое решение задач автофретирования толстостенных осесимметричных оболочек для материалов, обладающих линейным упрочнением, подробно рассмотрено в [11, 14, 45, 46]. Для решения этих задач аналитическим методом приняты следующие гипотезы и допущения:

- Решение проводят, используя гипотезы деформационной теории.
- В качестве меры деформирования применяют относительные деформации.
- Считают материал несжимаемым, принимая коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$.
- Используют условие пластичности Губера-Мизеса.
- Упругопластические свойства материала описывают кусочно-линейной функцией, определяющей диаграмму деформирования I рода без учёта сжимаемости материала:

$$\sigma_i = \begin{cases} E \varepsilon_i, & \text{при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_{iT}; \\ \lambda \sigma_{iT} + E(1 - \lambda) \varepsilon_i, & \text{при } \varepsilon_i > \varepsilon_{iT}, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\lambda = 1 - E_T/E$.

- Выполняется принцип отвердевания. Уравнения равновесия записываются для недеформированного состояния без учёта изменения геометрии оболочки. Граничные условия постоянны.

Для получения аналитического решения упругопластического деформирования толстостенных оболочек приходится линеаризировать

геометрические и физические соотношения, а также не учитывать сжимаемость материала, что приводит к значительным погрешностям вычислений.

Применение предложенного в данном исследовании численного подхода на основании метода переменных параметров упругости позволяет избежать линеаризации и при решении упругопластических задач учитывать геометрическую и физическую нелинейности, а также сжимаемость материала.

Для оценки погрешности аналитического решения, вызванного геометрической линеаризацией и неучетом сжимаемости материала, проведем сопоставление результатов расчётов по формулам, полученным аналитически [11, 14], и методом переменных параметров упругости согласно данной работе.

При расчётах процесса гидравлического автофретирования толстостенных оболочек внутреннее давление первоначального нагружения подбирают таким образом, чтобы граница пластической зоны находилась внутри области, ограниченной наружным и внутренним радиусами оболочки. Поэтому для оценки погрешности аналитического метода расчёта рассмотрим два случая.

В первом случае оценим погрешность определения внутреннего давления $P_{пл}$, при котором радиус пластической зоны лежит на внутреннем радиусе оболочки, то есть пластические деформации в стенке оболочки только зарождаются. Во втором случае оценим погрешность определения внутреннего давления $P_{кр}$, при котором радиус пластической зоны лежит на внешнем радиусе оболочки, то есть пластические деформации охватывают всю стенку оболочки.

Рассмотрим первый случай. Первоначально оценим погрешность, которая возникает за счёт того, что в процессе деформирования изменяется геометрия оболочки. С этой целью сравним решения, полученные расчетами по аналитическим уравнениям и расчётами методом переменных параметров упругости при всех допущениях, принятых для аналитического расчёта относительных деформаций и деформаций Генки.

На рисунке 4.5 представлены графики изменения погрешности аналитического расчета внутреннего давления цилиндра $P_{пл}$, при котором наступают пластические деформации на внутренней поверхности стенки

цилиндра, в зависимости от относительного диаметра $D_{отн}$ для несжимаемого материала. Расчеты проводились методом переменных параметров упругости для относительных и деформаций Генки и сравнивались с расчётами по аналитическим формулам, полученным для относительных деформаций.

Анализ результатов показывает, что аналитические формулы дают несколько завышенный результат искомого давления. Это объясняется тем, что при расчёте по аналитическим формулам не учитывается изменение геометрии цилиндра, а при расчёте согласно построенной численной методике эти изменения учитываются. Так как в процессе деформирования внутренний диаметр цилиндра увеличивается, а толщина стенки уменьшается, то получается, что аналитические формулы должны давать завышенный результат, что и подтверждают вычисления. Причём, чем тоньше труба, тем больше погрешность, так как деформации цилиндра в этом случае больше. В целом погрешность небольшая – менее 0,25%. Использование деформаций Генки при расчёте методом переменных параметров упругости эту погрешность несколько увеличивают, в среднем на 0,05%.

Для проверки достоверности получаемых расчётов сравним погрешности, возникающие при определении внутреннего давления $P_{пл}$ без учёта сжимаемости материала, рассчитанные аналитически, и погрешности, получаемые сравнением решений аналитическим методом без учёта сжимаемости и методом переменных параметров упругости с учетом сжимаемости.

Аналитически без учёта сжимаемости это давление определяется по формуле

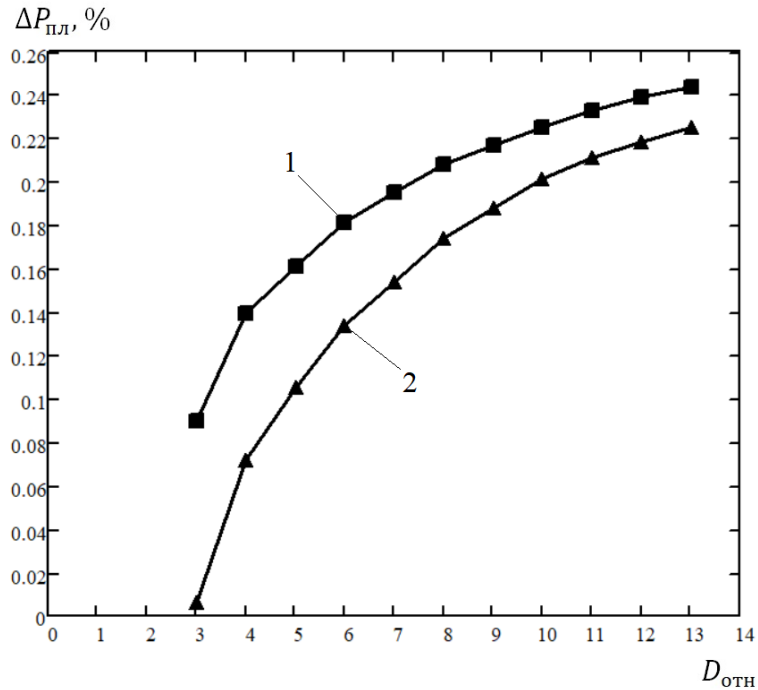
$$P_{пл} = \frac{\sigma_{iT}}{\sqrt{3}} \frac{(R^2 - r^2)}{R^2},$$

а с учётом сжимаемости – по формуле:

$$P\mu_{пл} = \sigma_{iT} \frac{(R^2 - r^2)}{\sqrt{3R^4 + (1 - 2\mu)^2 r^4}}.$$

Погрешность, получаемая при аналитических расчетах без учета сжимаемости материала, определим выражением:

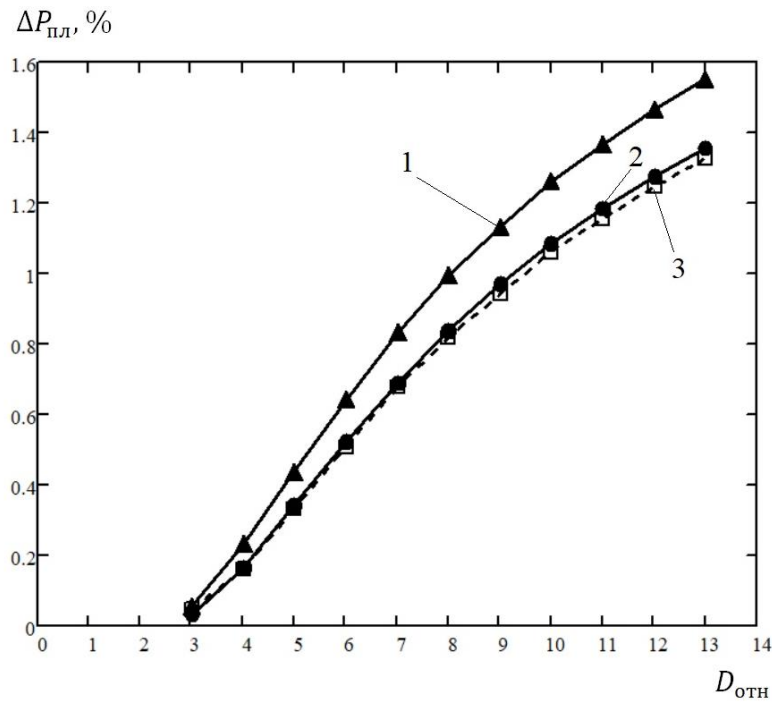
$$\Delta P_{\text{теор}_{\text{пл}}} \% = \frac{P_{\text{пл}} - P_{\mu_{\text{пл}}}}{P_{\mu_{\text{пл}}}} 100\%. \quad (4.2)$$



1 — деформации Генки; 2 — относительные деформации

Рисунок 4.5 — Погрешность аналитического расчёта внутреннего давления $P_{\text{пл}}$ цилиндра для несжимаемого материала в сравнении с расчётами методом переменных параметров упругости

На рисунке 4.6 даны графики изменения погрешности аналитического расчета внутреннего давления цилиндра $P_{\text{пл}}$ в зависимости от относительного диаметра $D_{\text{отн}}$ с учётом сжимаемости материала. Кривая 2 на рисунке 4.6 иллюстрирует изменение погрешности определения давления $P_{\text{пл}}$, получаемой в случае неучёта сжимаемости материала, рассчитанной теоретически по формуле (4.2). Кривая 1 на рисунке 4.6 иллюстрирует изменение погрешности определения давления $P_{\text{пл}}$, получаемой в случае неучёта сжимаемости материала, рассчитанной аналитически по сравнению с расчётами методом переменных параметров упругости.



1 – погрешность, рассчитанная сравнением результатов, полученных аналитическим расчётом и методом переменных параметров упругости; 2 – погрешность $\Delta P_{\mu теор пл} \%$, рассчитанная теоретически по формуле (4.2); 3 – погрешность, рассчитанная сравнением результатов, полученных аналитическим расчётом и методом переменных параметров упругости без учёта погрешности, вызванной деформацией цилиндра

Рисунок 4.6 – Погрешность аналитического расчета внутреннего давления $P_{пл}$ цилиндра, получаемой в случае неучёта сжимаемости материала ($\mu=0,3$)

Сравнение графиков показывает, что характер их изменения абсолютно идентичен, но значение погрешности при сравнении с результатами, получаемыми методом переменных параметров упругости, несколько выше тех, что получены теоретически. Это объясняется тем, что в данном случае суммируются два фактора, влияющие на величину погрешности: первый – при аналитическом расчёте не учитывается деформация цилиндра; второй – не учитывается сжимаемость материала.

Если из полученного результата вычесть погрешность, которая возникает за счёт того, что в процессе деформирования изменяется геометрия оболочки (см. рисунок 4.5, кривая 2 для относительной деформации), то полученный график,

рассчитанный методом переменных параметров упругости, практически сольётся с графиком, рассчитанным теоретически (см. рисунок 4.6, кривая 3).

В результате проделанного анализа можно сделать следующие выводы.

1. Результаты, получаемые согласно построенной численной методике при расчёте толстостенных осесимметричных оболочек, достоверны.
2. Наибольшее влияние на величину погрешности аналитических расчётов оказывает тот фактор, что не учитывается сжимаемость материала.
3. Влияние линеаризации меры деформирования и применение принципа отвердевания для малых деформаций незначительно, но это также нужно учитывать при решении упругопластических задач.

Рассмотрим второй случай. Оценим погрешность определения внутреннего давления $P_{кр}$, при котором радиус пластической зоны лежит на внешнем радиусе оболочки, то есть пластические деформации охватывают всю стенку оболочки.

В этом случае оценивать влияние различных факторов не будем, а проведём комплексную оценку погрешности, которая возникает при аналитическом расчете за счёт принятых допущений. Сравнение будем проводить с результатами, полученными расчетами метода переменных параметров упругости в соответствии с принятыми гипотезами и допущениями, априори предполагая, что данный метод даёт более точные результаты.

Чтобы рассчитать упругопластическое деформирование, диаграммы деформирования будем задавать в виде кусочно-линейных функций в соответствии с уравнениями (4.1) и кусочно-линейной функцией, определяющей диаграмму деформирования III рода с учётом сжимаемости материала:

$$\sigma_i = \begin{cases} 3Ge_i, & \text{при } e_i \leq e_{iT}; \\ \lambda\sigma_{iT} + 3G(1 - \lambda)e_i, & \text{при } e_i > e_{iT}, \end{cases} \quad (4.3)$$

где $\lambda = 1 - E_T/3G$, $G = E/[2(1 + \mu)]$.

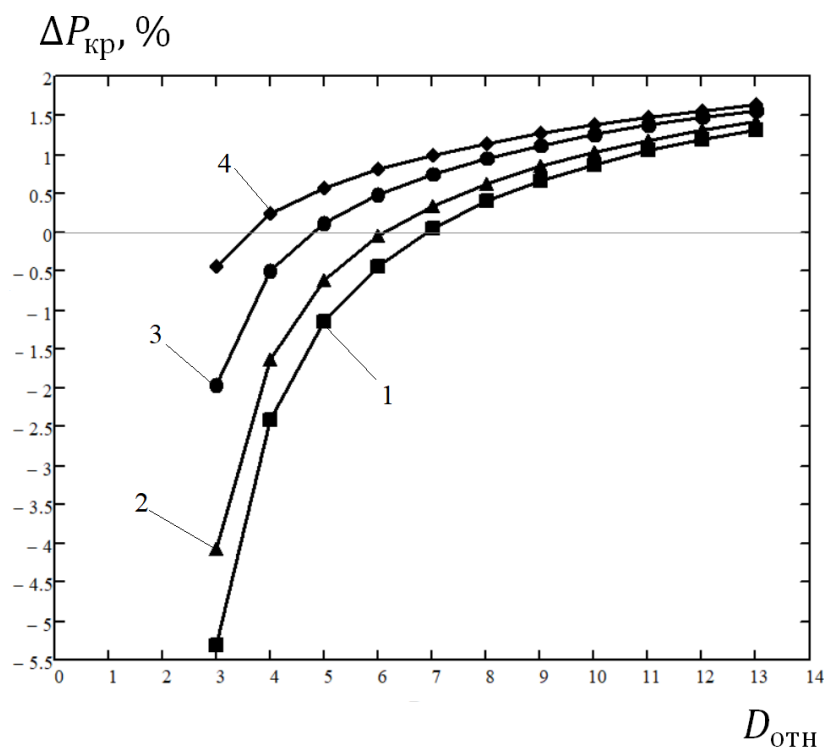
Степень упрочнения в этих уравнениях определяется коэффициентом λ . Чем меньше коэффициент, тем больше модуль линейного упрочнения E_T . При

$\lambda = 1$ материал абсолютно-пластичный. Расчёты будем проводить для λ от 0,975 до 0,850, что характерно для большинства металлических сплавов.

На рисунке 4.7 представлены результаты расчётов погрешности для толстостенной цилиндра. Расчёт погрешности проводился по формуле

$$\Delta P_{кр} \% = \frac{P_{теор\ кр} - P_{мппу\ кр}}{P_{мппу\ кр}} 100\%, \quad (4.4)$$

где $P_{теор\ кр}$ – давление, рассчитанное теоретически по формулам, полученным аналитически в работах [1, 2]; $P_{мппу\ кр}$ – давление, рассчитанное методом переменных параметров упругости.



1 – $\lambda = 0,85$; 2 – $\lambda = 0,9$; 3 – $\lambda = 0,95$; 4 – $\lambda = 0,975$

Рисунок 4.7 – Изменение погрешности аналитического расчета внутреннего давления $P_{кр}$ цилиндра по сравнению с методом переменных параметров упругости для материалов с различными коэффициентами λ

Первоначально для особо толстых оболочек влияние сжимаемости материала значительное и величина $P_{кр}$, получаемая по результатам расчета с

использованием метода переменных параметров упругости выше, чем рассчитанное теоретически. Влияние сжимаемости уменьшается при уменьшении толщины оболочки. Соответственно, рассчитываемая величина давления приближается к значению давления, полученному теоретически. Кроме того, влияние деформации цилиндра при уменьшении толщины стенки цилиндра приводит к получению несколько завышенных значений давления, получаемых теоретически. Все эти факторы в соответствии с формулой (4.4) влияют на то, что значение погрешности из отрицательной области стремится перейти в область положительных значений.

Таким образом, как показывает анализ результатов, расчёты по формулам, полученным аналитически, при определённых условиях могут давать значительные погрешности, которые зависят как от толщины оболочки, так и от степени упрочнения материала при пластическом деформировании. Применение построенной численной методики позволяет учитывать изменение объема материала, что снижает погрешность вычислений.

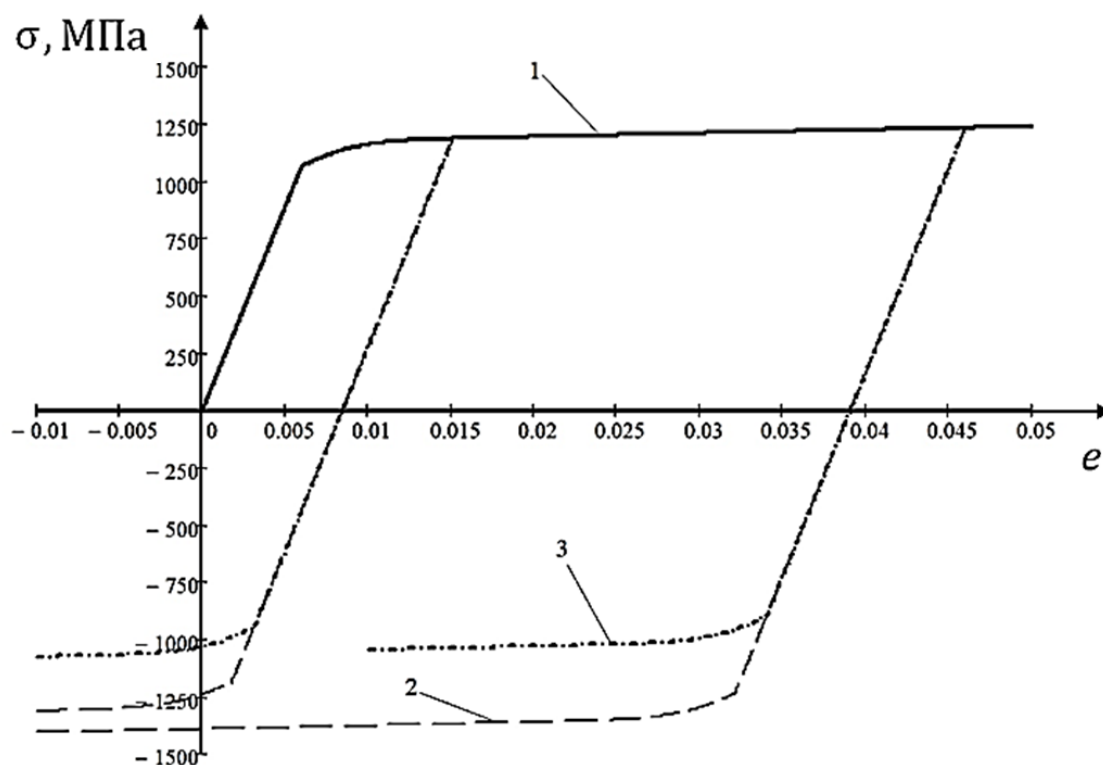
4.3 Оценка достоверности разработанной модели гидравлического автофретирования толстостенного цилиндра

Для оценки достоверности разработанной модели гидравлического автофретирования были проведены расчёты и сопоставление полученных результатов с расчётами других авторов при аналогичных исходных данных.

Как было отмечено в первом главе, наиболее универсальным методом численно-аналитического определения напряженно-деформированного состояния является метод переменных свойств материала [67]. Этот метод, также как и метод переменных параметров упругости, позволяет учитывать упругопластическую анизотропию. В работе [47] представлены результаты расчётов этим методом для изотропного и кинематического упрочнения, а также проведено сопоставление полученных решений с решениями методом конечных

элементов. Рассматривался случай автофретирования с продольным растяжением, возникающем только за счёт давления на днище.

Для расчётов был взят цилиндр с отношением радиусов $R_0/r_0 = 4,63$, нагруженный внутренним давлением 1720 МПа и учитывалась сжимаемость материала – $\mu = 0,3$. Диаграмма деформирования материала при прямом и обратном нагружении [47] представлена на рисунке 4.8.



1 – прямое нагружение; 2 – обратное нагружение (изотропное упрочнение);

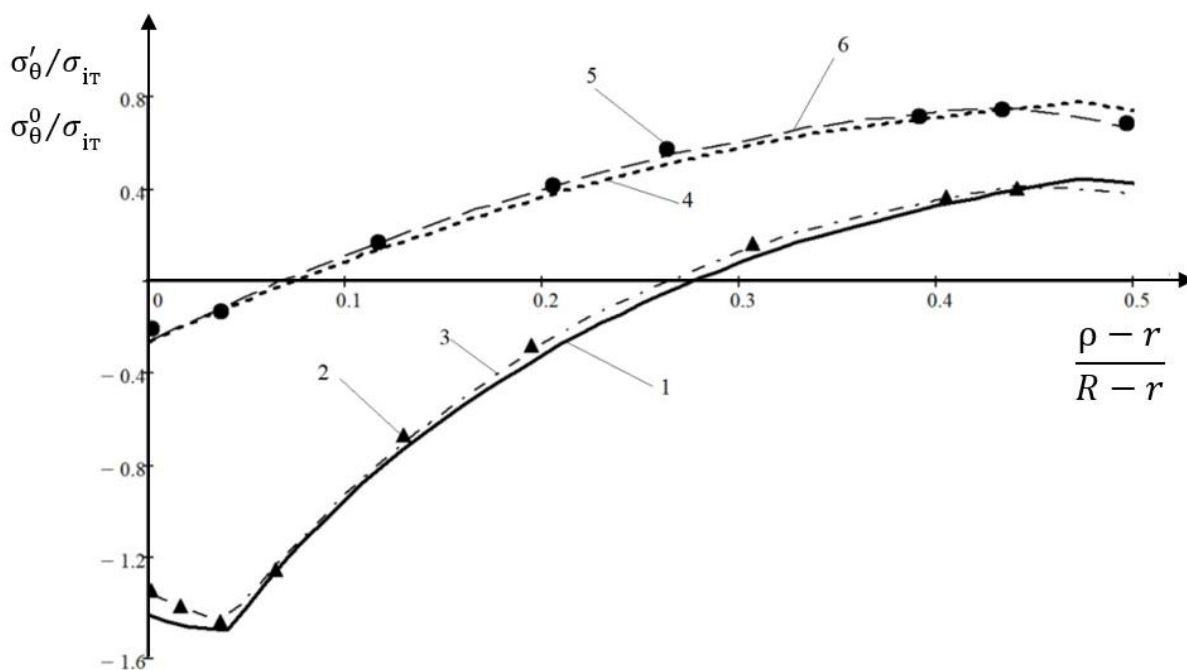
3 – обратное нагружение (кинематическое упрочнение)

Рисунок 4.8 – Диаграмма деформирования для изотропной и кинематической модели упрочнения высокопрочной стали [47]

Диаграммы обратного нагружения построены таким образом, что для определения напряжения, при котором возникают вторичные пластические деформации, используются уравнения (2.41) и (2.42) для изотропного и кинематического упрочнения.

4.3.1 Сравнение результатов расчета напряженного состояния при нагружении и остаточных напряжений для изотропного упрочнения

На рисунке 4.9 и рисунке 4.10 показано сравнение результатов расчёта окружных напряжений в нагруженном состоянии σ'_θ и остаточных окружных σ_θ^0 , радиальных σ_ρ^0 и осевых σ_z^0 напряжений для изотропного упрочнения согласно предложенной численной методике с результатами, полученными методом переменных свойств материала и методом конечных элементов [47].



1, 4 – по методике исследования; 2, 5 – методом конечных элементов [47];

3, 6 – методом переменных свойств материала [47]

Рисунок 4.9 – Сравнение результатов расчёта окружных напряжений σ'_θ в нагруженном состоянии (4, 5, 6) и остаточных окружных σ_θ^0 напряжений (1, 2, 3) для изотропного упрочнения при $p_{авт} = 1720$ МПа; $S_{гр.отн} = 0,47$

Как видно из графиков, результаты хорошо согласуются, несмотря на различия в методах анализа. Небольшое отклонение в расчётах обусловлено тем, что при определении остаточных напряжений в предложенном методе

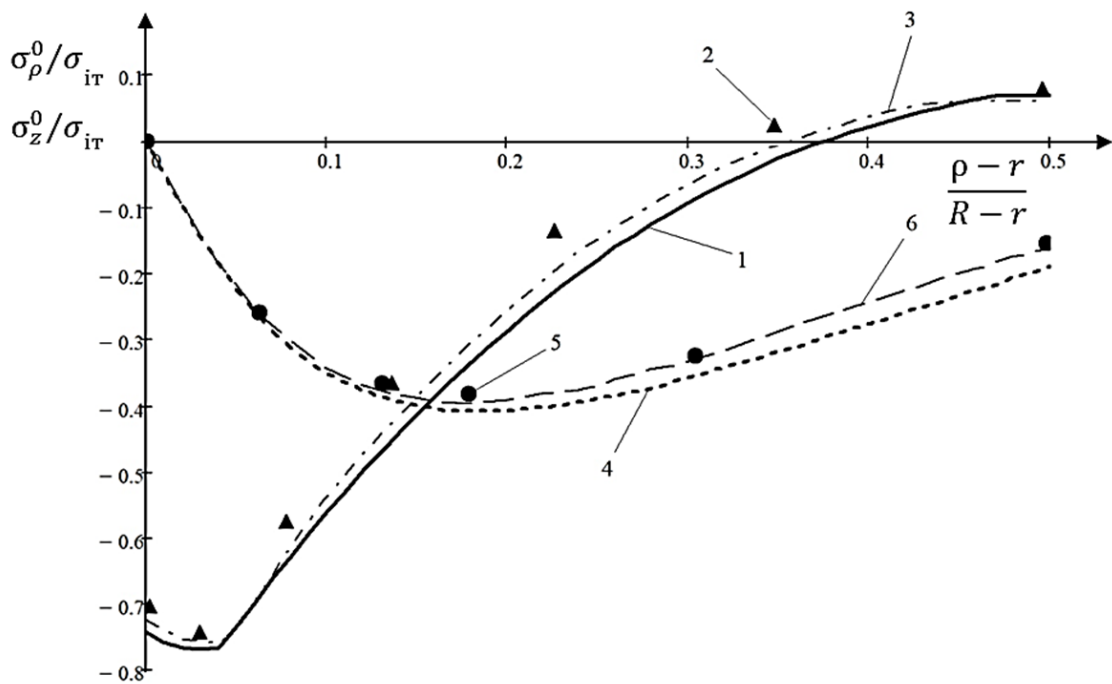
учитывается изменение геометрии цилиндра в процессе разгрузки. Это, в свою очередь, несколько увеличивает величину пластической области по толщине цилиндра. Относительную величину пластической области определяем по формуле

$$S_{\text{гр.отн}} = \frac{R_{\text{гр}} - r}{R - r},$$

где $R_{\text{гр}}$ – радиус раздела упругой и пластической области деформирования.

Если при внутреннем давлении 1720 МПа метод переменных свойств материала даёт величину пластической области $S_{\text{гр.отн}} = 0,44$ от толщины цилиндра, то при расчёте предложенным методом получаем – $S_{\text{гр.отн}} = 0,47$.

Если откорректировать внутреннее давление таким образом, чтобы пластическая область составляла 44%, то, как видно из рис. 4.11, 4.12, эпюры напряжений практически совпадают



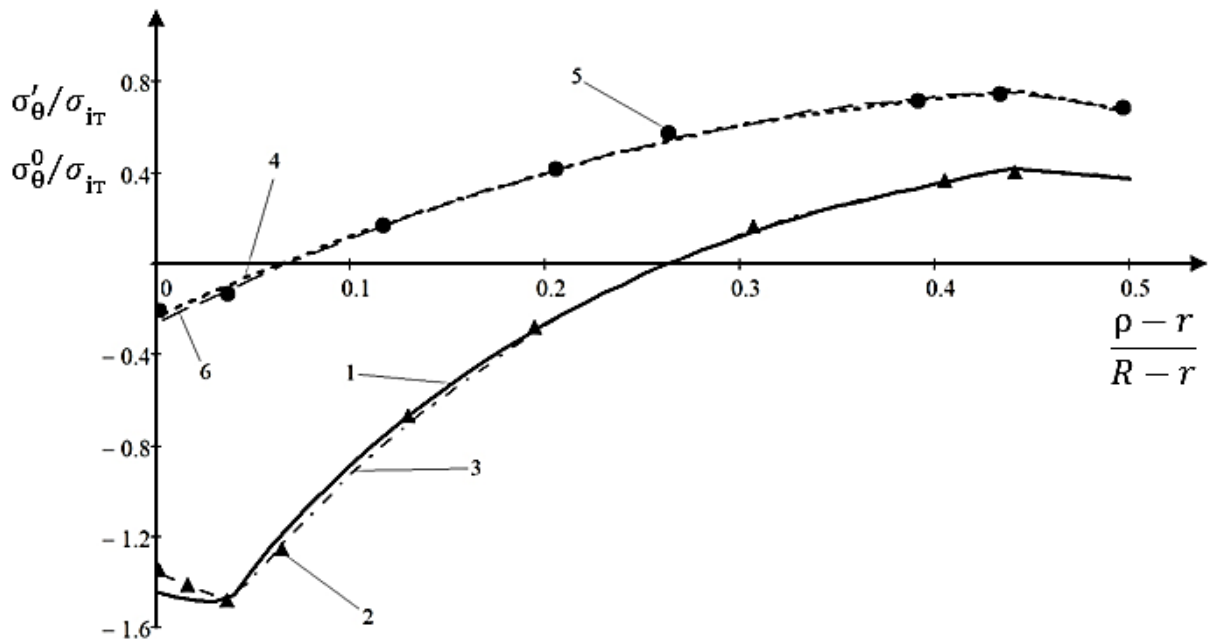
1, 4 – по методике исследования; 2, 5 – методом конечных элементов [47];

3, 6 – методом переменных свойств материала [47]

Рисунок 4.10 – Сравнение результатов расчёта остаточных радиальных σ_{ρ}^0 (4, 5, 6)

и осевых σ_z^0 напряжений для изотропного упрочнения (1, 2, 3) при $p_{\text{авт}} =$

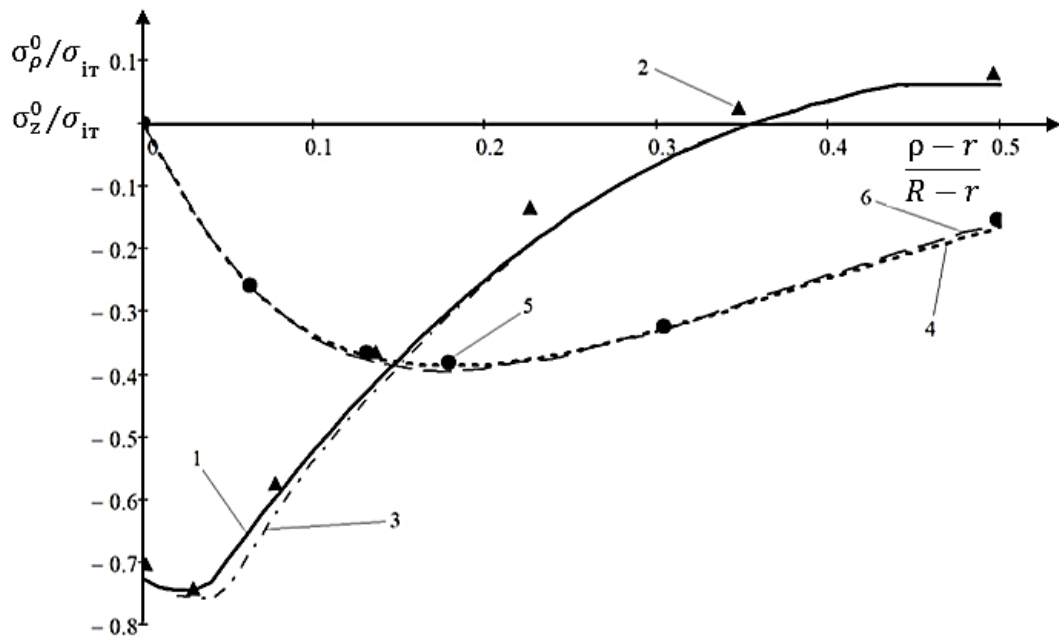
1720 МПа; $S_{\text{гр.отн}} = 0,47$



1, 4 – по методике исследования; 2, 5 – методом конечных элементов [47];

3, 6 – методом переменных свойств материала [47].

Рисунок 4.11 – Сопоставление результатов расчёта окружных напряжений σ'_θ в нагруженном состоянии (4, 5, 6) и остаточных окружных напряжений σ^0_θ (1, 2, 3) для изотропного упрочнения при $p_{авт} = 1679$ МПа; $S_{гр.отн} = 0,44$



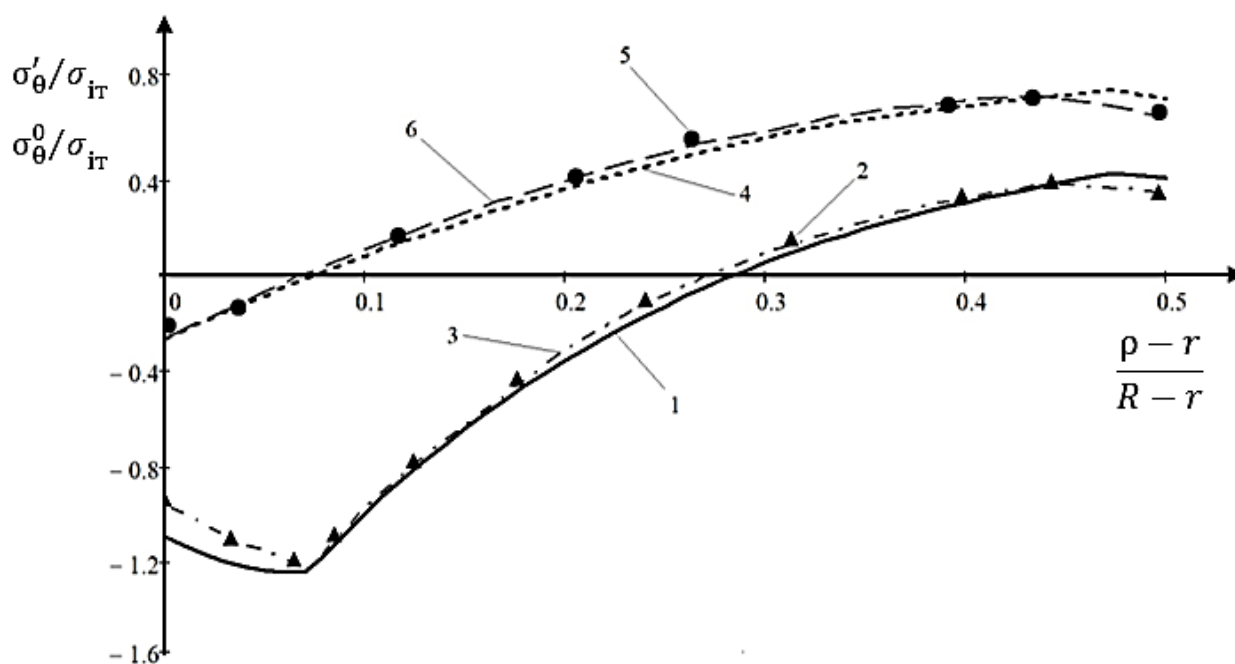
1, 4 – по методике исследования; 2, 5 – методом конечных элементов [47]; 3, 6 – методом переменных свойств материала [47].

Рисунок 4.12 – Сопоставление результатов расчёта остаточных радиальных σ^0_ρ (4, 5, 6) и осевых σ^0_z напряжений (1, 2, 3) для изотропного упрочнения при $p_{авт} = 1679$ МПа; $S_{гр.отн} = 0,44$

4.3.2 Сравнение результатов расчета напряженного состояния при нагружении и остаточных напряжений для кинематического упрочнения

На рисунке 4.13 и рисунке 4.14 показано сравнение результатов расчёта для кинематического упрочнения. Как видно из графиков, результаты также хорошо согласуются, и наблюдается небольшое отклонение, обусловленное увеличением пластической области.

Если откорректировать внутреннее давление таким образом, чтобы пластическая область составляла 44%, то, как видно из рис. 4.15, 4.16, эпюры напряжений, полученные предложенным методом и методом переменных свойств металла, практически совпадают.

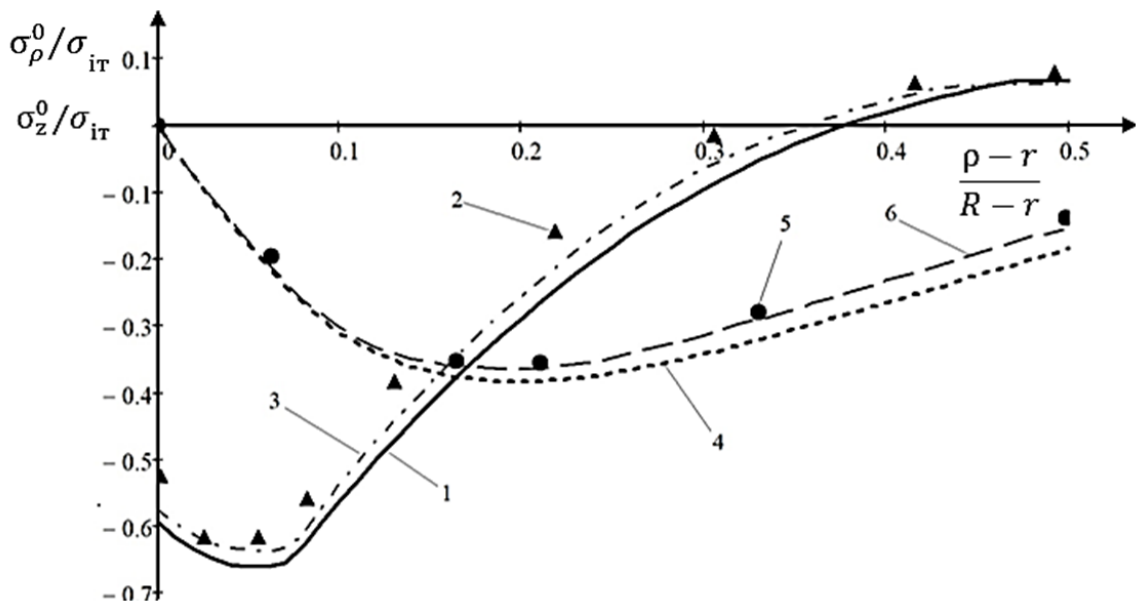


1, 4 – по методике исследования; 2, 5 – методом конечных элементов [47];

3, 6 – методом переменных свойств материала [47].

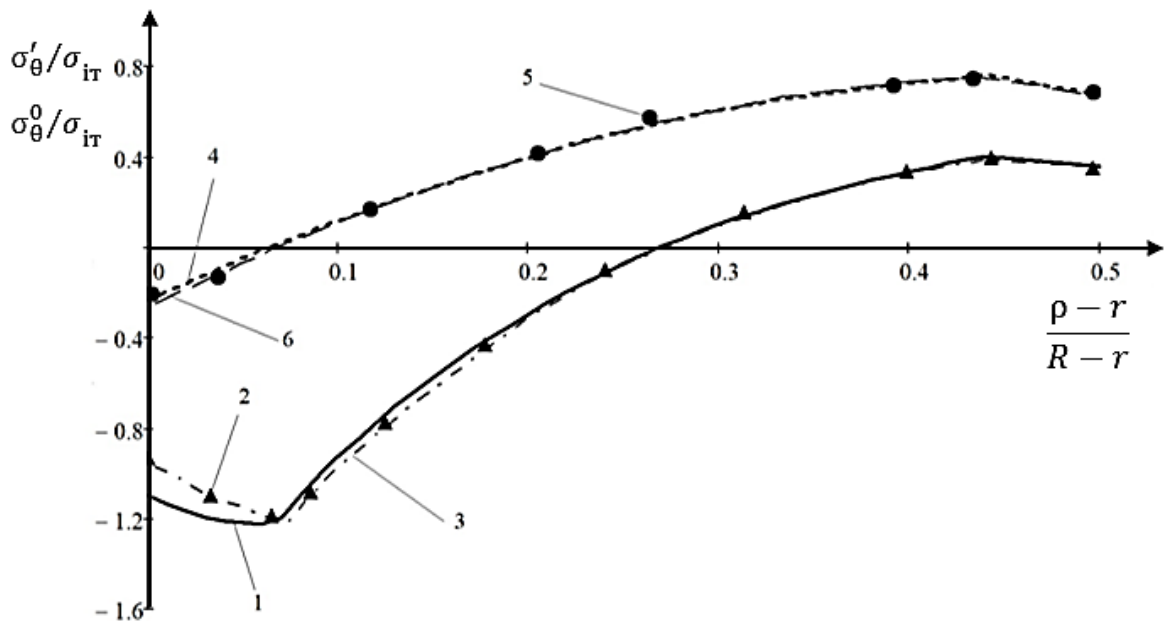
Рисунок 4.13 – Сравнение результатов расчёта окружных напряжений σ'_θ в нагруженном состоянии (4, 5, 6) и остаточных окружных напряжений σ^0_θ (1, 2, 3)

для кинематического упрочнения при $p_{\text{авт}} = 1720$ МПа; $S_{\text{гр.отн}} = 0,47$



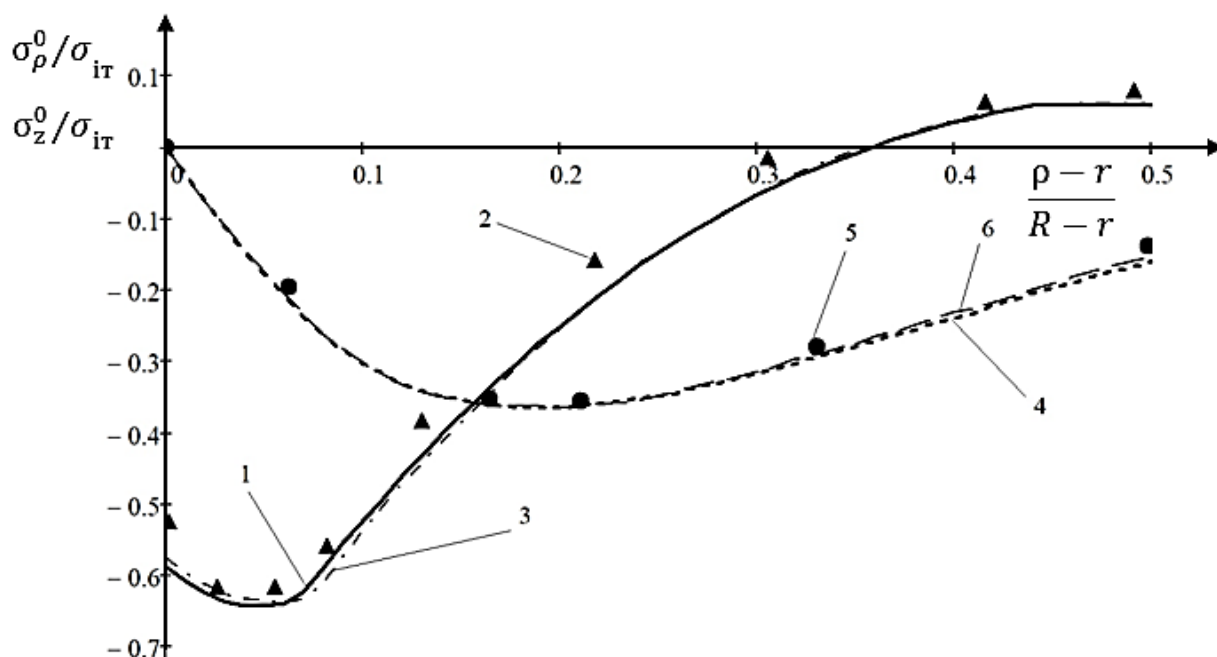
1, 4 – по методике исследования; 2, 5 – методом конечных элементов [47];
3, 6 – методом переменных свойств материала [47].

Рисунок 4.14 – Сопоставление результатов расчёта остаточных радиальных σ_ρ^0 (4, 5, 6) и осевых σ_z^0 напряжений для кинематического упрочнения (1, 2, 3) при $p_{\text{авт}} = 1720$ МПа; $S_{\text{гр.отн}} = 0,47$



1, 4 – по методике исследования; 2, 5 – методом конечных элементов [47]; 3, 6 – методом переменных свойств материала [47].

Рисунок 4.15 – Сопоставление результатов расчёта окружных напряжений σ'_θ в нагруженном состоянии (4, 5, 6) и остаточных окружных напряжений σ_θ^0 (1, 2, 3) для кинематического упрочнения при $p_{\text{авт}} = 1679$ МПа; $S_{\text{гр.отн}} = 0,44$



1, 4 – по методике исследования; 2, 5 – методом конечных элементов [47];
3, 6 – методом переменных свойств материала [47].

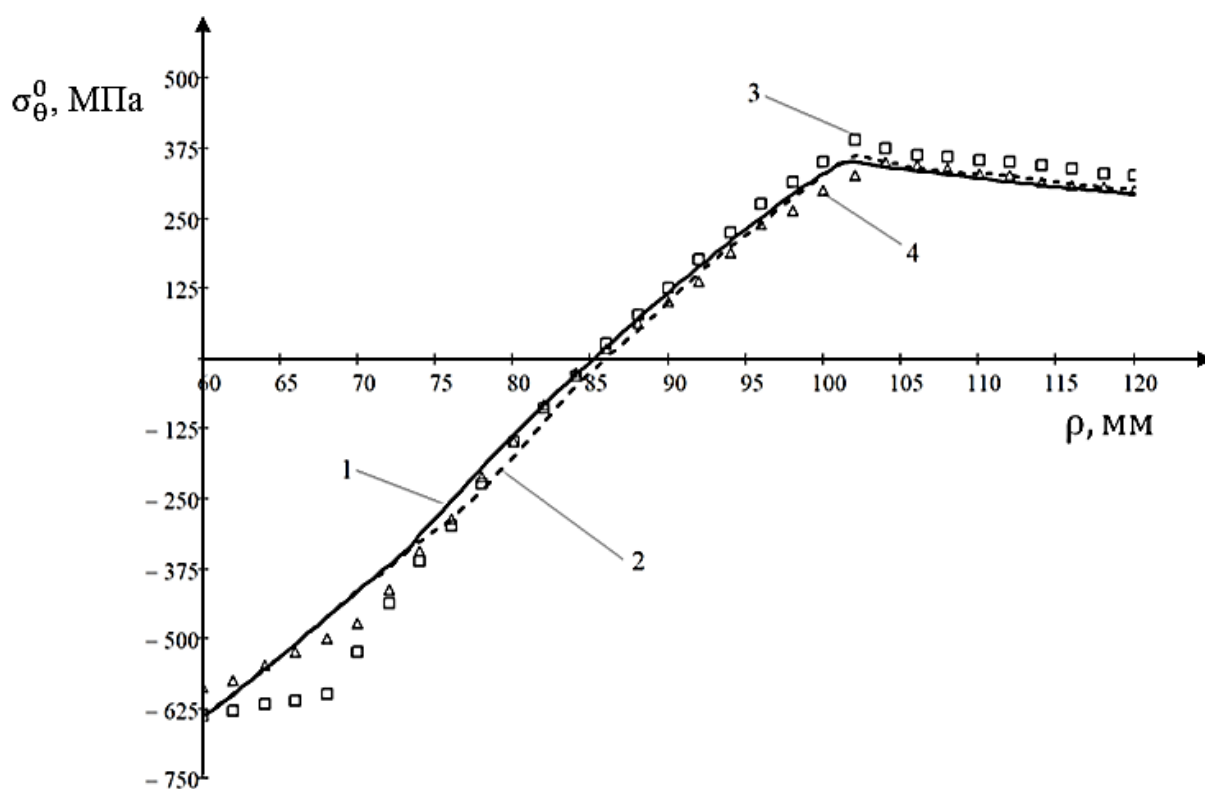
Рисунок 4.16 – Сопоставление результатов расчёта остаточных радиальных σ_ρ^0 (4, 5, 6) и осевых напряжений σ_z^0 (1, 2, 3) для кинематического упрочнения при $p_{авт} = 1679$ МПа; $S_{гр.отн} = 0,44$

4.3.3 Сравнение результатов расчета напряженного состояния при нагружении и остаточных напряжений с учётом упругопластической анизотропии реального материала

При расчёте остаточных напряжений с учётом упругопластической анизотропии реального материала, были использованы экспериментальные данные стали А723-1130 [35, 67] (аналог стали 38ХН3МФА), изменение свойств которой можно описать уравнениями (2.44) – (2.49). Сравнение полученных результатов проводилось с использованием данных, представленных в работе [79]. В работе показаны только окружные напряжения, поскольку именно они определяют усталостную долговечность цилиндров, работающих под давлением.

Расчёты проводились для двух толщин стенок, определяемых отношением радиусов $R_0/r_0 = 2$ и $R_0/r_0 = 2,25$, при относительной толщине пластической области 0,7. На рисунке 4.17 и рисунке 4.18 представлены полученные результаты

Как видно из сопоставления полученных результатов, численные расчёты по предложенной методике и по методу переменных свойств материала практически совпадают, что подтверждает результаты, полученные при изотропной и кинематической моделях упрочнения. При решении методом конечных элементов, наблюдаются некоторые отклонения, которые объясняются авторами работы [79] разными поверхностями пластичности, принятыми при расчётах.



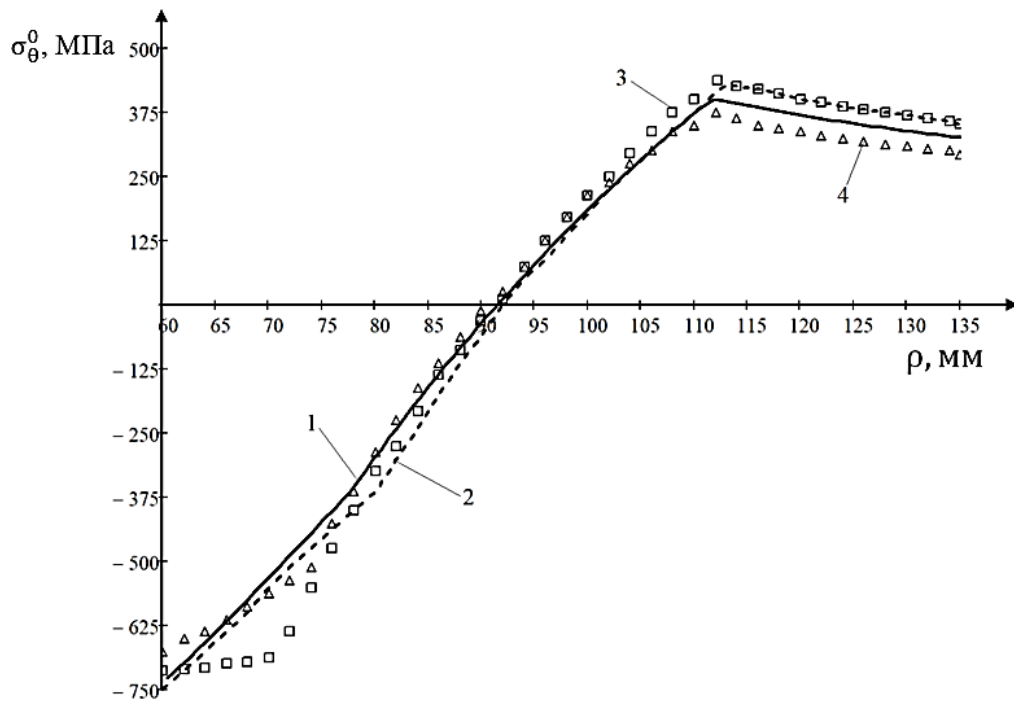
1 – по методике исследования, 2 – методом переменных свойств материала [79],

3 – методом конечных элементов в случае плоской деформации [79],

4 – методом конечных элементов в случае плоского напряженного состояния [79].

Рисунок 4.17 – Окружные остаточные напряжения σ_θ^0 , полученные разными

расчётными методами при $R_0/r_0 = 2$; $S_{гр.отн} = 0,7$

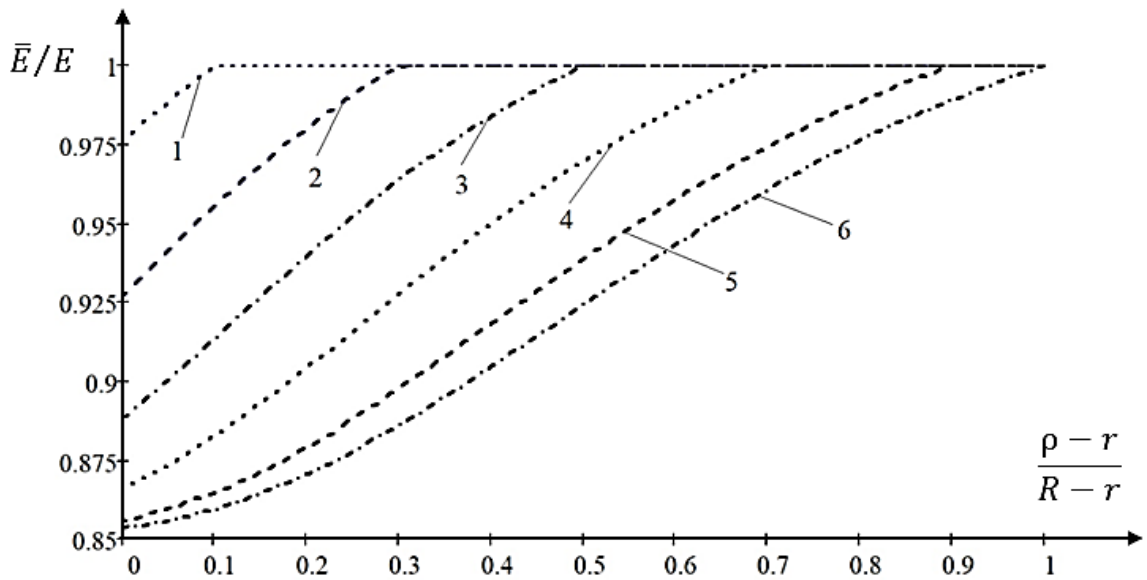


- 1 – по методике исследования; 2 – методом переменных свойств материала [79];
 3 – методом конечных элементов в случае плоской деформации [79];
 4 – методом конечных элементов в случае плоского напряженного состояния [79].

Рисунок 4.18 – Окружные остаточные напряжения σ_{θ}^0 , полученные разными расчётными методами при $R_0/r_0 = 2,25$; $S_{гр.отн} = 0,7$

4.4 Анализ результатов расчёта параметров, характеризующих упругопластическую анизотропию толстостенных цилиндрических оболочек, в зависимости от величины пластической области

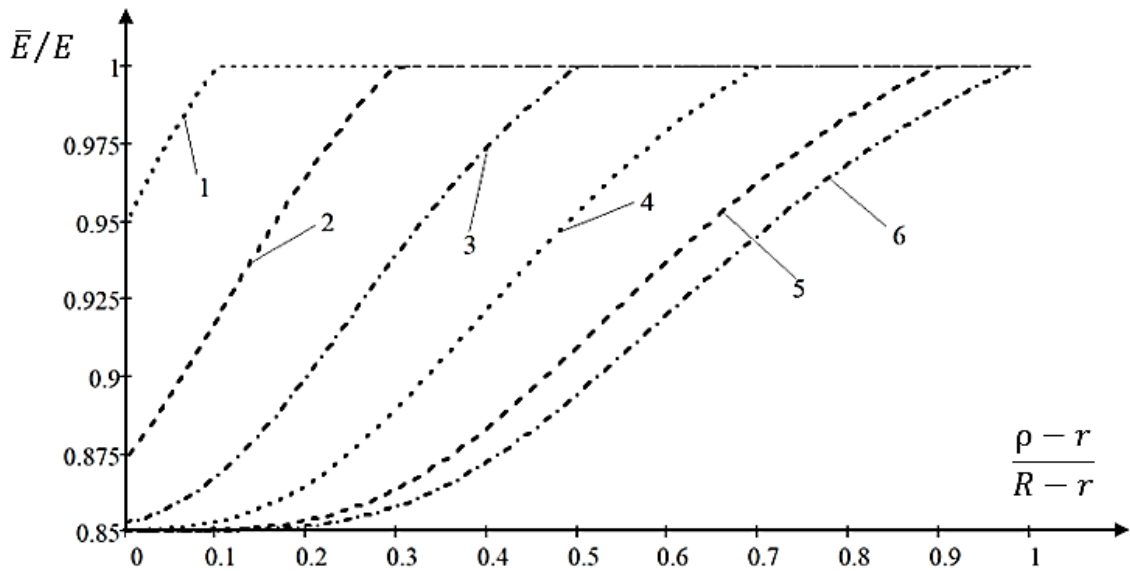
На рисунке 4.19 – 4.22 представлены результаты расчётов параметров, характеризующих изменение механических свойств материала, таких как модуль упругости $\bar{E}$ и предел пластичности $\bar{\sigma}_{iY}$, по толщине цилиндрической оболочки вследствие пластических деформаций и эффекта Баушингера при различных значениях величины пластической области при автофретировании для различных толщин оболочки: $R_0/r_0 = 2$, $R_0/r_0 = 3$. Эти параметры определяют приобретенную упругопластическую анизотропию.



$$1 - S_{\text{гр.отн}} = 0,1; 2 - S_{\text{гр.отн}} = 0,3; 3 - S_{\text{гр.отн}} = 0,5;$$

$$4 - S_{\text{гр.отн}} = 0,7; 5 - S_{\text{гр.отн}} = 0,9; 6 - S_{\text{гр.отн}} = 1,0$$

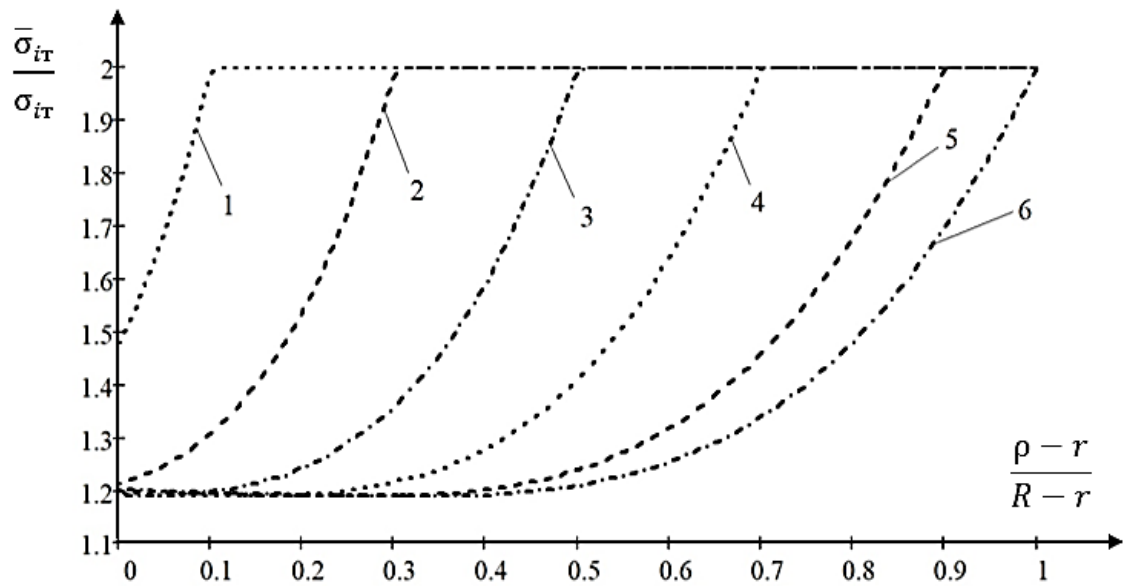
Рисунок 4.19 – Относительное изменение модуля упругости $\bar{E}$ при разгрузке-сжатии по толщине оболочки при различных значениях величины пластической области при автофретировании для $R_0/r_0 = 2$



$$1 - S_{\text{гр.отн}} = 0,1; 2 - S_{\text{гр.отн}} = 0,3; 3 - S_{\text{гр.отн}} = 0,5;$$

$$4 - S_{\text{гр.отн}} = 0,7; 5 - S_{\text{гр.отн}} = 0,9; 6 - S_{\text{гр.отн}} = 1,0$$

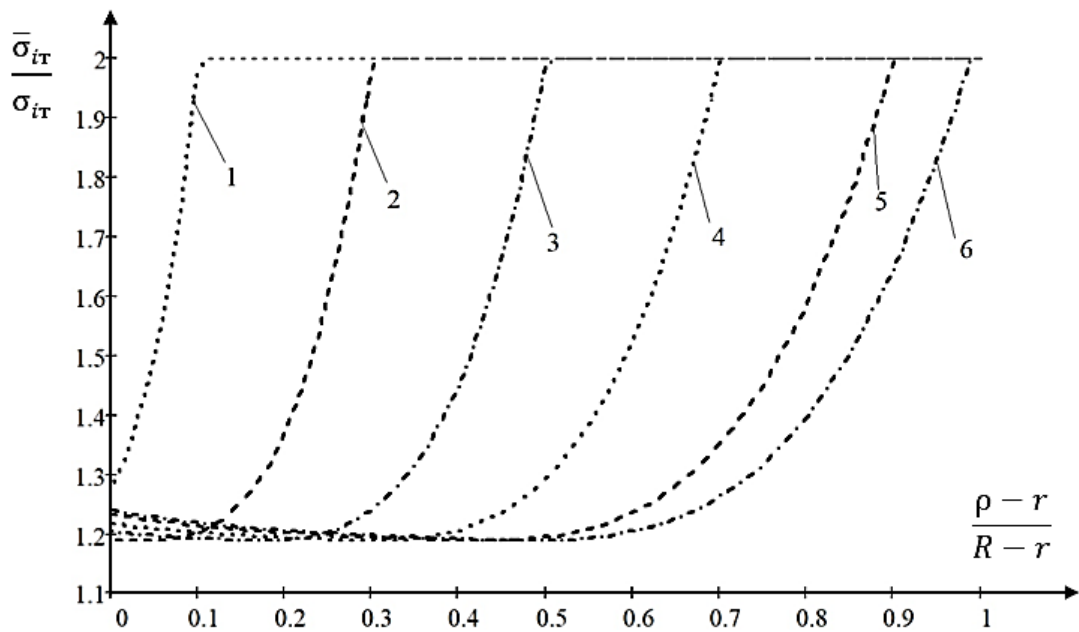
Рисунок 4.20 – Относительное изменение модуля упругости $\bar{E}$ при разгрузке-сжатии по толщине оболочки при различных значениях величины пластической области при автофретировании для $R_0/r_0 = 3$



$$1 - S_{гр.отн} = 0,1; 2 - S_{гр.отн} = 0,3; 3 - S_{гр.отн} = 0,5;$$

$$4 - S_{гр.отн} = 0,7; 5 - S_{гр.отн} = 0,9; 6 - S_{гр.отн} = 1,0$$

Рисунок 4.21 – Относительное изменение предела текучести $\bar{\sigma}_{iT} = \alpha_T \sigma_{iT}$ при разгрузке - сжатии по толщине оболочки при различных значениях величины пластической области при автофретировании для $R_0/r_0 = 2$



$$1 - S_{гр.отн} = 0,1; 2 - S_{гр.отн} = 0,3; 3 - S_{гр.отн} = 0,5;$$

$$4 - S_{гр.отн} = 0,7; 5 - S_{гр.отн} = 0,9; 6 - S_{гр.отн} = 1,0$$

Рисунок 4.22 – Относительное изменение предела текучести $\bar{\sigma}_{iT} = \alpha_T \sigma_{iT}$ при разгрузке - сжатии по толщине оболочки при различных значениях величины пластической области при автофретировании для $R_0/r_0 = 3$

Как видно из рисунков, исследуемые параметры существенно изменяются в зависимости от величины пластической области при автофретировании, так как эффект Баушингера сильно зависит от предшествующей пластической деформации. При увеличении толщины оболочки изменение этих параметров более интенсивное.

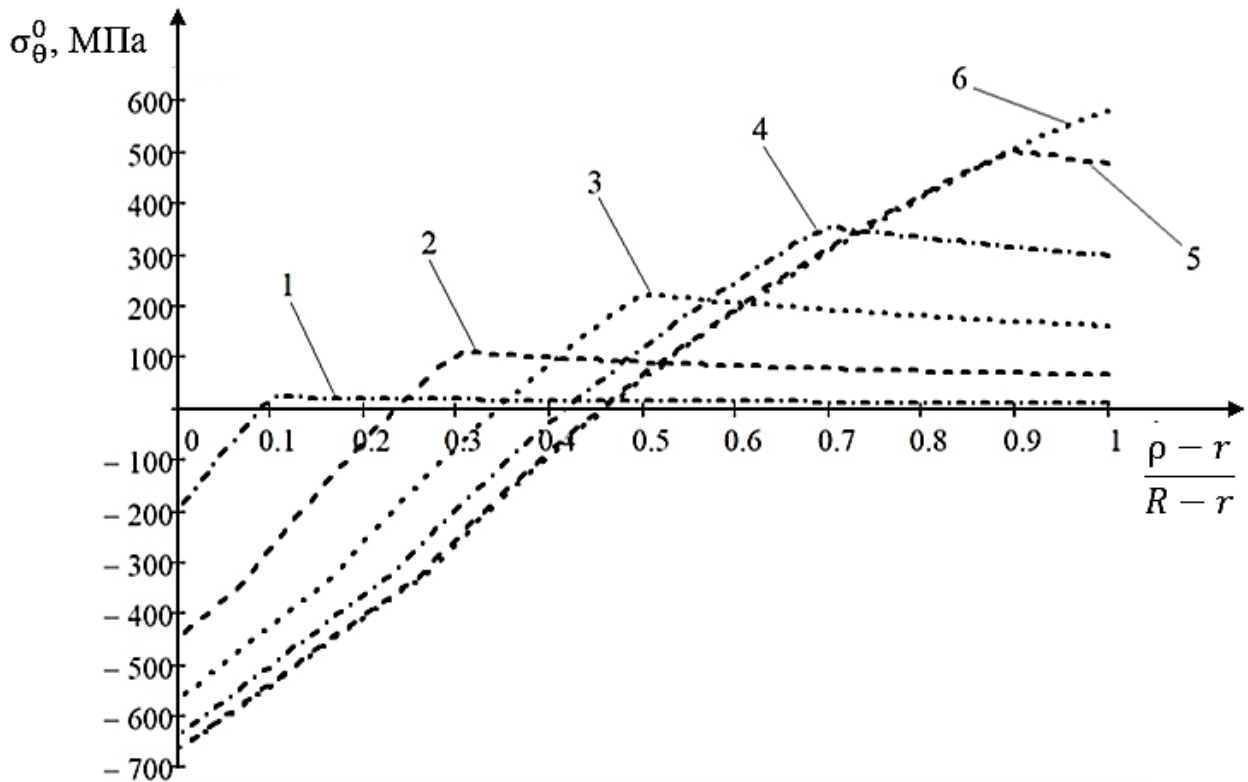
4.5 Изменение остаточных окружных напряжений при различных значениях величины пластической области

На рисунке 4.23 и 4.24 представлены графики изменения остаточных окружных напряжений σ_{θ}^0 по толщине оболочки при различных значениях величины пластической области при гидравлическом автофретировании для различных толщин оболочки: $R_0/r_0 = 2$, $R_0/r_0 = 3$.

Как видно из рисунков, при увеличении пластической области величина сжимающих остаточных окружных напряжений $\sigma_{\theta}^0|_{\rho=r}$ на внутренней поверхности оболочки сначала увеличивается, затем остаётся практически постоянной. Причём, при увеличении толщины оболочки такая стабилизация происходит раньше.

Для определения характера изменения сжимающих остаточных окружных напряжений $\sigma_{\theta}^0|_{\rho=r}$ на внутренней поверхности оболочки при изменении величины пластической области были построены графики для различных толщин оболочки, представленные на рисунке 4.25 и 4.26.

Как видно из рисунков, при $R_0/r_0 = 2$ стабилизация сжимающих остаточных окружных напряжений на внутренней поверхности оболочки наблюдается при $S_{гр.отн} \approx 0,9$, а при $R_0/r_0 = 3$ при $S_{гр.отн} \approx 0,8$.



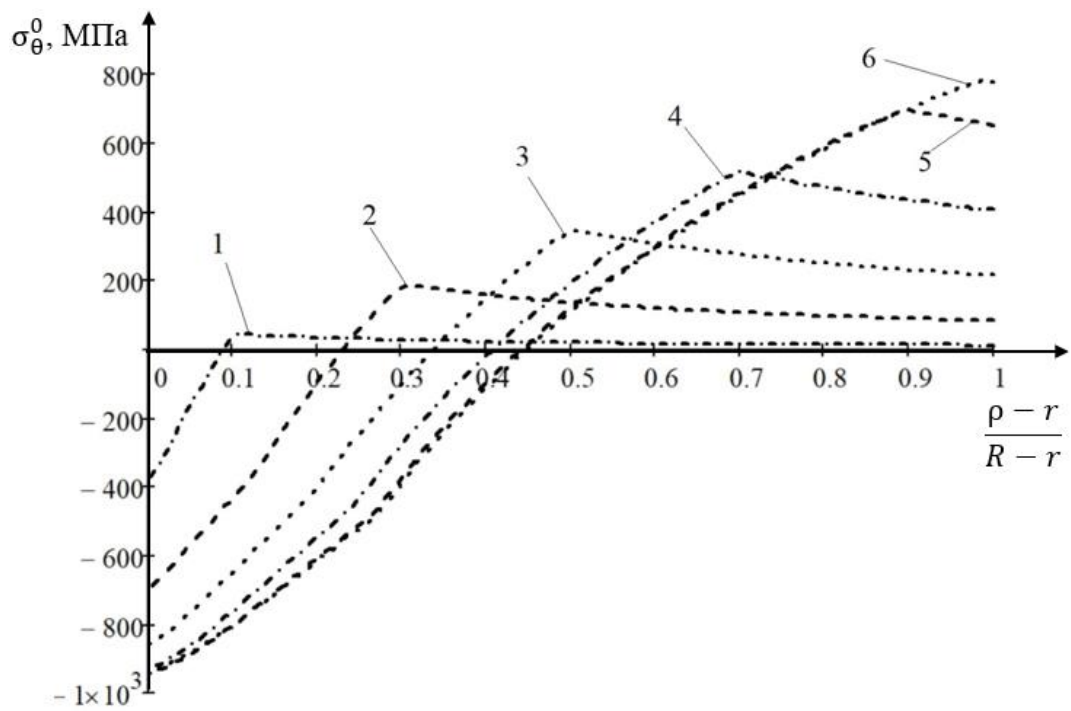
1 – $S_{\text{гр.отн}} = 0,1$; 2 – $S_{\text{гр.отн}} = 0,3$; 3 – $S_{\text{гр.отн}} = 0,5$;

4 – $S_{\text{гр.отн}} = 0,7$; 5 – $S_{\text{гр.отн}} = 0,9$; 6 – $S_{\text{гр.отн}} = 1,0$

Рисунок 4.23 – Распределение остаточных окружных напряжений σ_{θ}^0 по толщине оболочки при различных значениях величины пластической области

при автофретировании для $R_0/r_0 = 2$

Таким образом, можно говорить о рациональном размере пластической области и, соответственно, об эффективном давлении автофретирования, при котором дальнейшее увеличение давления не даёт увеличение несущей способности оболочки. Так, например, как следует из рисунков 4.25 и 4.26 для цилиндрической оболочки из стали А723-1130 при $R_0/r_0 = 2$ это соответствует пластической области $S_{\text{гр.отн}} \approx 0,9$ и давлению $p_{\text{авт}} \approx 892$ МПа а для $R_0/r_0 = 3$ – $S_{\text{гр.отн}} \approx 0,8$ и $p_{\text{авт}} \approx 1388$ МПа.



1 – $S_{\text{гр.отн}} = 0,1$; 2 – $S_{\text{гр.отн}} = 0,3$; 3 – $S_{\text{гр.отн}} = 0,5$;

4 – $S_{\text{гр.отн}} = 0,7$; 5 – $S_{\text{гр.отн}} = 0,9$; 6 – $S_{\text{гр.отн}} = 1,0$

Рисунок 4.24 – Распределение остаточных окружных напряжений σ_{θ}^0 по толщине оболочки при различных значениях величины пластической области при автофретировании для $R_0/r_0 = 3$

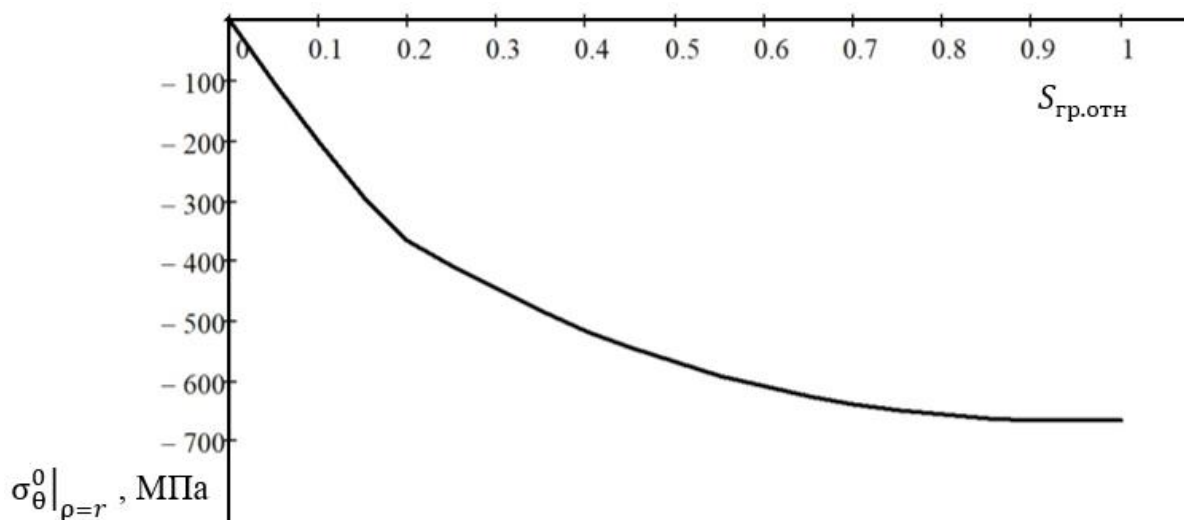


Рисунок 4.25 – Изменение сжимающих остаточных окружных напряжений $\sigma_{\theta}^0|_{\rho=r}$ на внутренней поверхности оболочки при изменении величины пластической области при автофретировании для $R_0/r_0 = 2$.

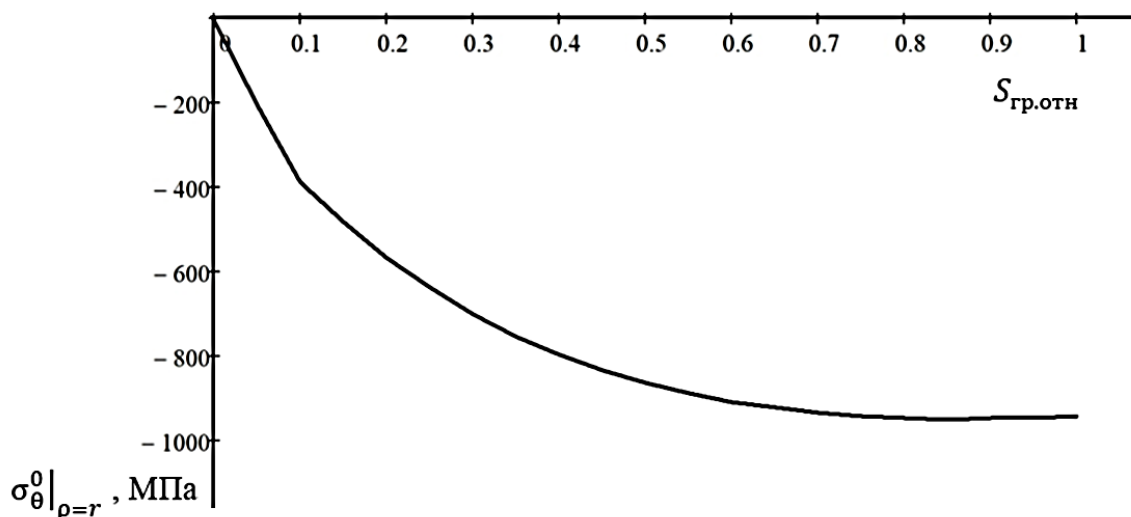


Рисунок 4.26 – Изменение сжимающих остаточных окружных напряжений $\sigma_{\theta}^0|_{\rho=r}$ на внутренней поверхности оболочки при изменении величины пластической области при автофретировании для $R_0/r_0 = 3$.

Выводы по четвертой главе

Сравнительный анализ результатов расчета внутреннего давления цилиндрической оболочки по формулам, полученным аналитически, могут давать значительные погрешности, которые зависят как от толщины оболочки, так и от степени упрочнения материала при пластическом деформировании. Применение построенной в данном исследовании численной методики позволяет учитывать сжимаемость материала, физическую нелинейность, что снижает погрешность вычислений

Согласно проведенному сравнительному анализу результаты расчетов напряженного состояния толстостенных цилиндрических оболочек, полученные по разработанной численной методике и методом переменных свойств материала, методом конечных элементов другими авторами для изотропной и кинематической моделей упрочнения совпадают, что подтверждает достоверность построенной математической модели.

Согласно анализу параметров, характеризующих приобретенную упругопластическую анизотропию, модуль упругости и предел пластичности при обратном нагружении существенно изменяются в зависимости от величины пластической области при автофретировании, так как эффект Баушингера сильно зависит от предшествующей пластической деформации; при увеличении толщины оболочки изменение этих параметров становится более интенсивным.

Результаты расчетов изменения сжимающих остаточных окружных напряжений на внутренней поверхности оболочки при изменении величины пластической области согласно разработанной численной методике позволяют определить рациональный размер пластической области и, соответственно, давление автофретирования, при котором дальнейшее увеличение давления не обеспечивает увеличения несущей способности оболочки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

– Предложен численный подход для расчета напряженно-деформированного состояния при упругопластическом деформировании толстостенных цилиндрических оболочек в процессе гидравлического автофретирования с учётом сжимаемости материала, что значительно уменьшает погрешность вычислений в упругопластической области и значительно повышает точность расчетов.

– Построенная методика позволяет использовать реальную диаграмму деформирования материала, полученную на основе экспериментальных исследований как при нагрузке, так и при разгрузке, а также учитывать упругопластическую анизотропию.

– На основании метода переменных параметров упругости разработана численная методика расчёта остаточных напряжений в толстостенных цилиндрических оболочках с учётом возникающей в процессе нагружения упругопластической анизотропии, вызванной эффектом Баушингера, при гидравлическом автофретировании с продольным растяжением и без.

– Остаточные напряжения, определённые предложенным методом, достаточно хорошо согласуются с результатами, полученными различными авторами и различными методами расчёта для реального материала с учётом возникающей в процессе нагружения упругопластической анизотропии, вызванной эффектом Баушингера, что подтверждает достоверность построенной модели.

– Анализ современных методов определения напряженно-деформированного состояния показал, что предложенный метод является более точным и простым, с точки зрения реализации, так как не требует предварительного решения упругой задачи, а позволяет использовать интегральные уравнения равновесия и совместности деформаций, которые записаны в координатах Эйлера для нелинейной меры деформации Генки.

– Построенная методика расчета позволяет определить рациональный размер пластической области в стенке толстостенной цилиндрической оболочки и, соответственно, давление автофретирования, при котором дальнейшее увеличение давления не обеспечивает увеличения несущей способности оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адигамов, Р.Р. Проявление эффекта Баушингера при знакопеременной деформации / Р.Р. Адигамов, В.А. Андреев, С.О. Рогачев, [и др.] // Черная металлургия: Известия вузов. – 2022. – Том 65. № 7. – С. 455-466.

2. Андрианов, И. К. Аппроксимация диаграммы деформирования металла в области упругопластических деформаций с нелинейным упрочнением / С. И. Феоктистов, И. К. Андрианов, Лин Тхет // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2022. – № 7(63). – С. 8-13. – DOI 10.17084/20764359-2022-63-8. – EDN EZKONZ.

3. Анализ нагружения толстостенных оболочек в пространстве Ильюшина при автофретировании / И. К. Андрианов, С. И. Феоктистов // Прикладная математика и механика. – 2025. – Т. 89, № 2. – С. 295-309. – DOI 10.31857/S0032823525020087.

4. Андрианов, И. К. Основы построения диаграмм деформирования с учетом сжимаемости материала и эффекта Баушингера / И. К. Андрианов, С. И. Феоктистов. – Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный университет, 2022. – 103 с. – ISBN 978-5-7765-1479-1. – DOI 10.17084/978-5-7765-1479-1-2022.

5. Биргер И.А. Сопротивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. - М.: Наука, 1986. – 560 с.

6. Биргер, И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения / И. А. Биргер. - М.: Оборонгиз, 1961. - 358 с.

7. Крыжевич, Г.Б. Модель упругопластического деформирования алюминиевых сплавов и критерии малоциклового усталости конструкций / Г.Б. Крыжевич, А.Р. Филатов // Труды Крыловского государственного научного центра. – 2018. - Специальный выпуск 2.- С. 85–95.

8. Лин Тхет Определение относительной деформации, соответствующей началу образования шейки при испытании алюминиевых сплавов на разрыв / И. К. Андрианов, Тхет Лин, С. И. Феоктистов // Молодежь и наука: актуальные

проблемы фундаментальных и прикладных исследований : Материалы V Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 11–15 апреля 2022 года. Том Часть 2. – Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный университет, 2022. – С. 157-160. – EDN WKDZBK.

9. Лин Тхет Метод аппроксимации диаграммы деформирования металла в области упругопластических деформаций / С. И. Феоктистов, И. К. Андрианов, Х. Лин // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении: материалы VI Дальневосточной конференции с международным участием, Комсомольск-на-Амуре, 05–07 октября 2022 года. – Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный университет, 2022. – С. 210-216.

10. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.

11. Москвитин, В.В. Пластичность при переменных нагрузжениях / В.В. Москвитин. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. – 263 с.

12. Нигматуллин В.И. Экспериментальное исследование влияния предварительной пластической деформации на поведение конструкционных сталей при обратном нагружении / В.И. Нигматуллин // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. – 2011. – № 60. – С. 119-132

13. Образцов И.Ф. Строительная механика летательных аппаратов / И.Ф. Образцов, Л.А. Булычев, В.В. Васильев и др.; Под ред. Образцова И.Ф. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.

14. Писаренко Г.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести / Г.С. Писаренко, Н.С. Можаровский. – Киев: Наукова думка, 1981. – 496 с.

15. Пыхтунова, С.В. К вопросу об эффекте Баушингера / С.В. Пыхтунова // Качество в обработке материалов. – 2015. – № 1(3). — С. 75-77.

16. Смирнов-Аляев Г.А. Теория автоскрепления цилиндров / Г.А. Смирнов-Аляев. - М.: Изд-во оборонной промышленности, 1940. с. 286.

17. Сторожев М.В. Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
18. Складов, Н.М. Авиационные материалы. Справочник в 9 томах. Том 1. Конструкционные стали. Москва: ОНТИ, 1975, 429 с.
19. Угодчиков А.Г., Коротких Ю.Г. Некоторые методы решения на ЭЦВМ нелинейных задач теории пластин и оболочек / А.Г. Угодчиков, Ю.Г. Коротких. – Киев: Наук. думка, 1971. – 219 с.
20. Феоктистов С.И. Автоматизация проектирования технологических процессов и оснастки заготовительно-штамповочного производства авиационной промышленности: монография / С.И. Феоктистов – Владивосток: Дальнаука, 2001. – 183 с.
21. Феоктистов, С.И. Моделирование напряжённо-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек с учётом физической нелинейности материала / С.И. Феоктистов, И.К. Андрианов, Л. Тхет // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2022. – № 3(59). – С. 12-20. – DOI 10.17084/20764359-2022-59-12. – EDN MRVHNMN.
22. Шалин, Р.Е. Авиационные материалы. В 9 т. Т. 4. Алюминиевые и бериллиевые сплавы. Часть 1. Деформируемые алюминиевые сплавы и сплавы на основе бериллия: справочник для инженерно-технических и научных работников / под общ. ред. Р.Е. Шалин. – 6-е изд. перераб. и доп. – М.: Всесоюзный научно-исследовательский институт авиационных материалов (ВИАМ), 1982. – 626 с.
23. Alegre, J. M. Design of an Autofrettaged High-Pressure Vessel, Considering the Bauschinger Effect/ Alegre, J. M., Bravo, P., Preciado, M., // Proceedings of the IMechE. – 2006. - 220(1). - pp. 7–16.
24. Alexandrov, S. Descriptions of Reversed Yielding in Internally Pressurized Tubes / Alexandrov, S., Jeong, W. Chung, K. //J. Pressure Vessel Technol. - 2015 138(1). - pp. 011204-1-011204- 10.

25. Avitzur, B. Autofrettage - Stress Distribution under Load and Retained Stresses after Depressurization – a modified plane-strain case / Avitzur, B. // International Journal of Pressure Vessels and Piping. - 1994. - 57(3). - pp. 271–287.
26. Bacon, G. E. Neutron Diffraction 3 Edition / G. E. Bacon. - United Kingdom: Clarendon Press, 1975. – 633 p.
27. Bastun, V. Bauschinger Effect Prediction in Thick-Walled Autofrettaged Cylindrical Pressure Vessels / Bastun, V., Podil'chuk, I. // J. Pressure Vessel Technol. 2017. - 139(4), - pp. 041404-041404-6.
28. Bland, D. R. Elastoplastic Thick-Walled Tubes of Work-Hardening Material Subject to Internal and External Pressures and to Temperature Gradients / Bland, D. R. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1956. - 4(4). - pp. 209–229.
29. Chakrabarty, J. Theory of Plasticity / J. Chakrabarty. – Butterworth-Heinemann: Amsterdam, 2006. – 900 p.
30. Chen, P. C. T. The Bauschinger and Hardening Effect on Residual Stresses in an Autofrettaged Thick-Walled Cylinder / Chen, P. C. T. // J. Pressure Vessel Technol. – 1986. - 108(1). - pp. 108–112.
31. Cheng, W. A Method for Measurement of Axisymmetric Axial Residual Stresses in Circumferentially Welded Thin-Walled Cylinders / Cheng, W., Finnie, I. // J. Eng. Mater. Technol. – 1985. - 107(3). - -pp. 181–185.
32. Davidson, T. Overstrain of High Strength Open End Cylinders of Intermediate Diameter Ratio / Davidson, T., Barton, C., Reiner, A., Kendall, D. // In Proceedings of the 1st International Congress on Experimental Mechanics, Pergamon Press. – 1963. - pp. 335–352.
33. Dell H. D. Experimental Study of the Bauschinger Effect for Anisotropic Metals / Dell H. D., Eliseev V. V., Shapievskaia V. A. // Mechanics of Solids. – 2014. – Vol. 49, No. 5: ISSN 0025-6544. – pp. 561–567.
34. Durban, D. A General Solution for the Pressurized Elastoplastic Tube / Durban, D., Kubi, M. // J. Appl. Mechanic. -1992 59(1). - pp. 20–26.

35. Faghih, S. Variable Material Properties Approach: A Review on Twenty Years of Progress/ Faghih S., Jahed H., Behraves S. // Journal of Pressure Vessel Technol. – 2018. - Vol. 140(5): 050803. [DOI: 10.1115/1.4039068].

36. Feoktistov, S. I. Analytical description of the Bauschinger effect using experimental data and the generalized Masing principle / S. I. Feoktistov, I. K. Andrianov // Materials Physics and Mechanics. – 2024. – Vol. 52, No. 1. – P. 49-59. – DOI 10.18149/MPM.5212024_5.

37. Gao, X.-L. Strain Gradient Plasticity Solution for an Internally Pressurized Thick-Walled Cylinder of an Elastic Linear-Hardening Material / Gao, X.-L. // Z. angew. Math. Physics. – 2007. - 58(1). - pp. 161–173.

38. Gao, X.-L. Autofrettage and Shakedown Analyses of an Internally Pressurized Thick-Walled Cylinder Based on Strain Gradient Plasticity Solutions / Gao, X.-L., Wen, J.-F., Xuan, F.-Z., Tu, S.-T., // J. Appl. Mechanic. – 2015. - 82(4). - pp. 041010-041010-12.

39. Gao, X. An Exact Elasto-Plastic Solution for an Open-Ended Thick-Walled Cylinder of a Strain-Hardening Material / Gao, X. // International Journal of Pressure Vessels and Piping. - 1992. - 52(1). - pp. 129–144.

40. Gao, X.-L. Elasto-Plastic Analysis of an Internally Pressurized Thick-Walled Cylinder Using a Strain Gradient Plasticity Theory / Gao, X.-L. // International Journal of Solids and Structures. - 2003. 40(23), pp. 6445–6455.

41. George, D. The Application of the Deep Hole Technique for Measuring Residual Stresses in an Autofrettaged Tube / George, D., Smith, D. // Proceedings of ASME Pressure Vessels and Piping. – 2000. - pp. 25–32.

42. Gibson, M. C. A Comparison of Methods for Predicting Residual Stresses in Strain-Hardening, Autofrettaged Thick Cylinders, Including the Bauschinger Effect / Gibson, M. C., Hameed, A., Parker, A. P., Hetherington, J. G // J. Pressure Vessel Technol. - 2005. 128(2). - pp. 217– 222.

43. Gibson, M.C. Determination of residual stress distributions in autofrettaged thick-walled cylinders: Ph.D. Thesis. Defence College of Management and Technology: Michael C. Gibson. - Cranfield University, UK., 2008. – 302 p.

44. Huang, X. P. A General Autofrettage Model of a Thick-Walled Cylinder Based on Tensile-Compressive Stress-Strain Curve of a Material / Huang, X. P. // The Journal of Strain Analysis for. – 2005. - 40(6). - pp. 599–607.

45. Huang, X. P., Autofrettage Analysis of Thick-Walled Cylinder Based on Tensile-Compressive Curve of Material / Huang, X. P., Cui, W. // Key Engineering Materials. – 2004. - 274–276. - pp. 1035–1040.

46. Huang, X. P. Effect of Bauschinger Effect and Yield Criterion on Residual Stress Distribution of Autofrettaged Tube / Huang, X. P., Cui, W. // J. Pressure Vessel Technol. - 2005. - 128(2). - pp. 212–216.

47. Jahed H. An Axisymmetric Method of Elastic-Plastic Analysis Capable of Predicting Residual Stress Field / Jahed H., Dubey R. N. // J. Press. Vessel Technol. – 1997. - Vol. 119, no. 3. - pp. 264–273.

48. Jahed, H. A Variable Material Property Approach for Solving Elastic-Plastic Problems / Jahed, H., Sethuraman, R., Dubey, R. N. // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 1997. - 71(3). - pp. 285–291.

49. James, M. The Measurement of Residual Stresses by X-Ray Diffraction Techniques / James, M., Cohen, J. // Treatise on Materials Science and Technology. – 1978. - pp. 1–62.

50. Kholdi M. Analysis of thick-walled spherical shells subjected to external pressure: Elastoplastic and residual stress analysis / Kholdi M., Loghman A., Ashrafi H. // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part L. Journal of Materials Design and Applications. - 2020. - Vol. 234 (I). - pp. 186-197. DOI: 10.1177/1464420719882958.

51. Koiter, W. On Partially Plastic Thick-Walled Tubes / Koiter, W. // Biezeno Anniversary. – 1953. – Vol. (1). - pp. 232–251.

52. Lee S.L. Residual stress analysis in swage autofrettaged thick-walled cylinders by position-sensitive x-ray diffraction techniques / Lee S.L. // ASMF

International Conference on Pressure Vessels & Piping, Colorado, Technical report. - 1993. - pp. 1–15.

53. Li, G. Elastoplastic Analysis of an Open-Ended Cylinder from the Twelve Polygonal Yield Condition / Li, G., Zeng, X., Li, J., Huang, L. // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. - 1988. 33(2). - pp. 143–152.

54. Livieri, P. Autofrettaged Cylindrical Vessels and Bauschinger Effect: An Analytical Frame for Evaluating Residual Stress Distributions / Livieri, P., Lazzarin, P. // *J. Pressure Vessel Technol.* – 2001. - 124(1). - pp. 38–46.

55. Lu, W. Y. Elastic-Plastic Analysis of a Flat Ring Subject to Internal Pressure / Lu, W. Y., Hsu, Y. C. // *Acta Mechanica*. - 1977. 27(1–4), pp. 155–172.

56. Megahed, M.M. Influence of Reverse Yielding on Residual Stresses Induced by Autofrettage / Megahed, M.M.; Abbas, A.T. // *Int. J. Mech. Sci.* – 1991. – 33. – pp. 139–150. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(91\)90063-9](https://doi.org/10.1016/0020-7403(91)90063-9).

57. Mendelson, A., 1968, *Plasticity, Theory and Application* / A. Mendelson. – Macmillan, New York, 1968. – 376 c.

58. Milligan, R. V. The Bauschinger Effect in a High Strength Steel / Milligan, R. V., Koo, W. H., Davidson, T. E. // *J. Basic Engineering*. – 1966. - 88(2). - pp. 480–488.

59. Morrison, J. L. M. Strength of Thick Cylinders Subjected to Repeated Internal Pressure / Morrison, J. L. M., Crossland, B., and Parry, J. S. C. // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. – 1960. – Vol. 174(1). – pp. 95 - 117.

60. Parker, A. P. Autofrettage of Open-End Tubes—Pressures, Stresses, Strains, and Code Comparisons / Parker, A. P. // *J. Pressure Vessel Technol.* – 2000. - 123(3). - pp. 271–281.

61. Parker, A.P. Technical Note: On the Equivalence of Axisymmetric Bending, Thermal, and Autofrettage Residual Stress Fields / Parker, A., Underwood, J., Throop, J., and Andrasic, C. // *Fracture Mechanics: Fourteenth Symposium – Volume I: Theory and Analysis*, J. Lewis, and G. Sines, eds., ASTM International, p. I-216-I-216-22. – 1983.

62. Parker A. P. Stress Intensity and Fatigue Crack Growth in a Pressurized, Autofrettaged Thick Cylinder / Parker A. P. // Journal of Pressure Vessel Technology. – 2003. - Vol. 125: [DOI: 10.1115/1.1593071]. – pp. 277-281.

63. Parker, A.P. A Re-Autofrettage Procedure for Mitigation of Bauschinger Effect in Thick Cylinders / Parker, A. P.// J. Pressure Vessel Technol. – 2004. - Vol.126(4). - pp. 451–454.

64. Parker, A.P. Assessment and Extension of an Analytical Formulation for Prediction of Residual Stress in Autofrettaged Thick Cylinders / Parker, A.P. // In Proceedings of the PVP2005; Volume 5: High Pressure Technology, Nondestructive Evaluation, Pipeline Systems, Student Paper Competition, Denver, CO, USA. - 17–21 July 2005. - pp. 67–71.

65. Parker, A.P. Autofrettage of Open-End Tubes—Pressures, Stresses, Strains, and Code Comparisons / Parker, A.P. // J. Press. Vessel Technol. – 2000. – 123. - pp. 271–281. <https://doi.org/10.1115/1.1359209>.

66. Parker, A.P. Bauschinger Effect Design Procedures for Autofrettaged Tubes Including Material Removal and Sachs' Method / Parker, A.P.; Underwood, J.H.; Kendall, D.P. // J. Press. Vessel Technol. – 1999. – 121. - pp. 430–437. <https://doi.org/10.1115/1.2883726>.

67. Parker, A.P. Implementation and validation of true material constitutive model for accurate modeling of thick-walled cylinder swage autofrettage / Parker, A.P., Hu Z. // J. Press. Vessel Technol. – 2003. – V 191. - pp. 1–10.

68. Perl M. An Experimental-Numerical Determination of the Three-Dimensional Autofrettage Residual Stress Field Incorporating Bauschinger Effects / Perl M., Perry J. // Journal of Pressure Vessel Technology. – 2006. – Vol. 128(2). – pp. 173 – 178.

69. Perry J. The Influence of the Bauschinger Effect on the Yield Stress, Young's Modulus, and Poisson's Ratio of a Gun Barrel Steel/ Perry J., Perl M., Shneck R., Haroush S. // Journal of Pressure Vessel Technology. – 2006. - Vol. 128: [DOI: 10.1115/1.2172962]. – pp. 179-184.

70. Perry, J. Elasto-Plastic Stresses in Thick-Walled Cylinders / Perry, J., Aboudi, J. // J. Pressure Vessel Technol. – 2003. - 125(3). - pp. 248–252.

71. Prager, W. The Theory of Plasticity: A Survey of Recent Achievements / Prager, W. // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. - 1955. - 169(1). - pp. 41–57.

72. Rees, D. W. A. Autofrettage Theory and Fatigue Life of Open-Ended Cylinders / Rees, D. W. A. // The Journal of Strain Analysis. - 1990. - 25(2). - pp. 109–121.

73. Rees, D. W. A. A Theory of Autofrettage with Applications to Creep and Fatigue / Rees, D. W. A. // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 1987. - 30(1). - pp. 57–76.

74. Rupali Finite Element Analysis for Predicting Residual Stresses of Autofrettaged Spherical Vessels Considering Bauschinger Effect / Rupali, Mondal, S. // International Journal of Scientific & Engineering Research. – 2015. - 6(8). - pp. 912–919.

75. Sachs, G. Evidence of Residual Stresses in Rods and Tubes / Sachs, G. // Feitschrift für Metallkunde. – 1927. – 19. - pp. 352–357.

76. Sedighi, M. Investigation of Residual Stresses in Thick-Walled Vessels with Combination of Autofrettage and Wire-Winding / Sedighi, M., Jabbari, A. H. // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2013. - 111–112. - pp. 295–301.

77. Shufen, R. and Dixit, U.S. A review of theoretical and experimental research on various autofrettage processes / Shufen, R., Dixit, U.S. // ASME Journal of Pressure Vessel Technology. – 2018. – 140. pp. 050802–050802-15.

78. Song, J. Strain Rate Effects on Medium Carbon Steel and Its Effects on Autofrettage / Song, J., Tang, C. Y., Xu, B. Y., Lee, W. B. // Scripta Metallurgica et Materialia. – 1994. - 30(2). - pp. 139–144.

79. Troiano E. Finite Element Investigation of Bauschinger Effect in High-Strength A723 Pressure Vessel Steel / Troiano E., Underwood J.H., Paker A. P. // Journal of Pressure Vessel Technology. - 2006. № 128. pp. 185-189. doi: 10.1115/1.2172616. 39

80. Troiano, E. Experimental Data, Numerical Fit and Fatigue Life Calculations Relating to the Bauschinger Effect in High Strength Armament Steels / Troiano, E.;

Parker, A.P.; Underwood, J.; Mossey, C. // J. Press. Vessel Technol. – 2003. -125. - pp. 330–334. <https://doi.org/10.1115/1.1593072>.

81. Wahi, N. Effect of Optimum Autofrettage on Pressure Limits of Thick-Walled Cylinder / Wahi, N., Ayob, A., Elbasheer, M. K. // International Journal of Environmental Science and Development. – 2011. - 2(4). - pp. 329–333.

82. Zeng, X. The Application of the Twelve-Angled Polygonal Yield Criterion to Pressure Vessel Problems / Zeng, X., Li, J., Li, G, [et al.] // International Journal of Pressure Vessels and Piping. - 1993. - 55(3). - pp. 385–393.

83. Ziegler, H. A Modification of Prager's Hardening Rule, Quarterly of Applied mathematics. - 1959. - 17(1). - pp. 55–65.

84. Znaidi A., Daghfes O., Nasri R. Isotropic and Kinematic Hardening Laws: Plastic Behavior of Mild Steel Under Shear Tests // Daghfes O., Znaidi A., Nasri R. In book: Advances in Mechanical Engineering and Mechanics II, 2022. pp. 59-66 DOI: 10.1007/978-3-030-86446-0_8.