

На правах рукописи



Крат Юлия Георгиевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОННОЙ
НЕУСТОЙЧИВОСТИ В КАНАЛАХ С ПЕСЧАНЫМ
ОСНОВАНИЕМ**

Специальность 05.13.18 –
«Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Комсомольск-на-Амуре – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Вычислительном центре Дальневосточного отделения Российской академии наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,
зав. лабораторией вычислительной механики
Вычислительного центра ДВО РАН
Потапов Игорь Иванович
(г. Хабаровск)

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник лаборатории прикладной
и вычислительной гидродинамики Института гидро-
динамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
Воеводин Анатолий Федорович
(г. Новосибирск)

кандидат технических наук,
зав. лабораторией механики деформирования
Института машиноведения и металлургии ДВО РАН
Прокудин Александр Николаевич
(г. Комсомольск-на-Амуре)

Ведущая организация

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И.
Ильичева ДВО РАН (г. Владивосток)

Защита состоится «21» февраля 2017г. в 13:00 ч. на заседании диссертационного совета Д 999.055.04 в Комсомольском-на-Амуре государственном техническом университете по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, просп. Ленина, д.27.

С диссертационной работой можно ознакомиться в библиотеке КнАГТУ и на сайте www.knastu.ru

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный гербовой печатью, просим направлять в адрес диссертационного совета Д 999.055.04, e-mail: diss@knastu.ru

Автореферат разослан «__» _____ 201__ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент



А.Ю. Лошманов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Изучение процессов возникновения донной неустойчивости, являющихся частным случаем русловых процессов, в реках с песчаным дном имеет большое прикладное значение для решения конкретных инженерных и проектно-исследовательских задач, проектирования гидротехнических сооружений, мостов, водозаборных станций, дамб, запруд, сезонных судоходных трасс, для прогнозирования чрезвычайных ситуаций и их последствий.

Особенностями задач, описывающих русловые процессы, являются:

- Наличие двух типов подвижных границ расчетной области: свободная поверхность речного потока и поверхность дна русла. Обе поверхности изменяются во времени вследствие протекания русловых процессов.

- Нестационарность, нелинейность, многомасштабность связи между характеристиками гидродинамического потока и потока донных наносов.

Экспериментальное изучение процессов возникновения донной неустойчивости осложняется масштабностью изучаемого объекта, высокой стоимостью и продолжительностью исследовательских экспедиций, что делает предпочтительным использование вычислительного эксперимента для изучения процессов возникновения донной неустойчивости.

Трудности проведения вычислительного эксперимента для изучения процессов возникновения донной неустойчивости, протекающих в реках и каналах, обусловлены необходимостью построения математических моделей, учитывающих:

- многомасштабность руслового процесса;
- наличие подвижных границ для изменяющейся во времени расчетной области: свободной поверхности речного потока и поверхности дна русла;
- турбулентный характер движения речного потока;
- нелинейный закон гидравлического сопротивления естественных русел;
- многофазность руслового потока.

Изучение процессов возникновения донной неустойчивости с песчаным основанием связано с необходимостью определения нелинейной зависимости между движением донных наносов и движением гидродинамического потока. Подвижность дна реки приводит к появлению неустойчивости донной поверхности и появлению множества донных форм (рифеля, дюны, антидюны, гряды и др.). Проблеме эволюции донных форм в руслах рек и каналах с песчаным или песчано-гравийным основанием посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных ученых. Не претендуя на полноту, отметим те научные работы, которые заложили основные направления в развитие теории донной неустойчивости и математического моделирования процесса возникновения и развития донных волн.

Характер образования и развития донных волн разными исследователями понимался по-разному. Engelund F. и Fredsoe J. развитие донной неустойчивости связывали с фазовым сдвигом между максимумами средней скорости потока и придонными напряжениями, определяющими движение донных наносов. Kennedy J.F., Кереселидзе Н.Б. возникновение донной неустойчивости связывали с передачей возмущений, возникающих на свободной поверхности потока при некоторых значениях числа Фруда, ко дну. Гончаров В.Н. связывал возникновение донной неустойчивости с вихревым характером обтекания частиц, слагающих дно. В работах Гришанина К.В., Михайловой Н.А., Мельниковой О.Н. показано, что образованию донных волн способствуют имеющиеся в турбулентном потоке пульсации соизмеримые по масштабу с глубиной потока. Длина волны песчаных гряд достигали от 1 до 3 глубин потока, что примерно соответствует размерам крупных турбулентных возмущений. Михайлова Н.А. обосновала это одним из опытов, в котором на дне сформировались донные волны длиной $\lambda \approx 3h$. Coleman S.E., Дебольский В.К., Шуляк Б.А., Бэгнольд считали, что диаметр донного материала определяет характер развития донной неустойчивости: $\lambda = \lambda(d)$.

Несмотря на большое количество работ сложность исследования процесса возникновения донной неустойчивости связана с нерешенной до настоящего времени задачей движения

донных наносов. Вследствие чего многие исследователи донной неустойчивости использовали в своих работах феноменологические формулы движения влекомых наносов. Полученные в таких моделях результаты, позволяют получить качественную оценку донной неустойчивости.

В данной работе на основе аналитической модели движения влекомых наносов Петрова А.Г.-Потапова И.И. предложена математическая модель для исследования возникновения донной неустойчивости, учитывающая влияние гидродинамических параметров потока, физико-механических и гранулометрических характеристик донного материала, турбулентный характер движения речного потока, имеющего свободные границы, а также учет лавинного механизма движения донных наносов. Предложенная модель упрощена до двумерного профильного приближения и одномерного приближения.

Цель настоящей работы является теоретический и численный анализ задач о развитии донной неустойчивости в каналах с песчаным основанием.

Основными задачами работы являются:

- разработка математических моделей, описывающих развитие донной неустойчивости в каналах с песчаным основанием;
- построение численных и аналитических алгоритмов решения задач о развитии донной неустойчивости в одномерной и двумерной постановках и их верификация;
- получение аналитических и численных закономерностей развития донной неустойчивости в каналах с песчаным основанием, учитывающих влияние гидродинамических параметров потока, физико-механических и гранулометрических характеристик донного материала.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- предложены одномерные и двумерная математические постановки задачи о развитии донной неустойчивости, описывающие движение гидродинамического потока над изменяющейся во времени донной поверхностью с учетом турбулентной вязкости потока, транспорта влекомых и лавинных наносов, физико-механических и гранулометрических параметров донного материала;
- разработаны аналитические и численные алгоритмы решения задач о развитии донной неустойчивости в одномерной и двумерной постановках;
- получены аналитические и численные закономерности развития донной неустойчивости в каналах с песчаным основанием, учитывающих влияние гидродинамических параметров потока, физико-механических и гранулометрических характеристик донного материала. Выполнено сравнение полученных аналитических и численных решений с известными экспериментальными и теоретическими данными других авторов.

Положения, выносимые на защиту:

- одномерная математическая модель, позволяющая описывать процесс стохастического развития донных волн с учетом влияния свободной поверхности потока, уклонов дна и придонных касательных напряжений, лавинного обрушения, физико-механических и гранулометрических характеристик донного материала на процесс движения донных наносов;
- одномерная математическая модель задачи русловой устойчивости поверхности песчаного дна в напорном канале прямоугольной формы относительно одномерных по пространству возмущений и ее аналитическое решение, позволяющее определить длину донной волны в зависимости от числа Фруда и числа Рейнольдса, при различных физико-механических и гранулометрических характеристик донного материала и ее сравнение с известными экспериментальными данными других авторов;
- двумерная профильная математическая русловая модель для исследования механизмов развития донной неустойчивости, позволяющая выполнить анализ различных механизмов движения донного материала в зависимости от придонных касательных напряжений, уклонов донной поверхности и градиента гидравлического напора;
- алгоритмы расчета полей скоростей, давления, донной поверхности потока для одномерной и двумерной профильной постановок задач о развитии донной неустойчивости в ре-

ках с песчаным основанием;

- сравнительный анализ полученных решений с экспериментальными данными и решениями других авторов.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость диссертационной работы определяется полученными аналитическими решениями, обобщающими ряд известных феноменологических зависимостей. Разработанные программные комплексы могут быть использованы для проведения инженерных и проектно-исследовательских работ, планирования дноуглубительных работ, для проектирования и обслуживания гидротехнических сооружений, а также для прогнозирования развития русла реки с песчаным или песчано-гравийным основанием. Могут быть рекомендованы к использованию в образовательном процессе, Институтах водных и экологических проблем, Государственном гидрологическом институте, Институте проблем механики.

Достоверность полученных результатов обеспечивается:

- применением современной теории математического моделирования гидродинамических и русловых процессов;

- согласованием полученных решений с известными экспериментальными данными и результатами других авторов подтверждает способность предложенных моделей описывать процессы возникновения и развития волн на донной поверхности русла реки с песчаным и песчано-гравийным основанием.

Вклад автора. Решение задач, сформулированных в диссертационной работе, получено автором лично, либо при его участии. Постановка задач, выбор методов исследования, а также анализ результатов осуществлялось совместно с научным руководителем. Исследование свойств разработанных алгоритмов, проведение вычислительных экспериментов, обработка полученных результатов выполнены автором самостоятельно.

Публикации и апробация работы. По результатам диссертационной работы автором опубликовано 22 научные работы, из них 3 статьи, входящих в список ведущих периодических журналов ВАК. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Предложенные математические модели, алгоритмы решения задач и разработанные программные комплексы проходили апробацию в лаборатории «Вычислительная механика» в Вычислительном центре ДВО РАН при работе над тематикой лаборатории и в процессе реализации федеральной целевой программы Работа выполнена в рамках «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», на 2009 – 2013 годы по теме «Развитие методов и алгоритмов численного моделирования сложных природных процессов и технических систем с применением суперкомпьютерных технологий», 2010 – 2012 гг. (госконтракт от 29 марта 2010 г. № 02.740.11.0626), комплексной программы фундаментальных исследований Дальневосточного отделения РАН «Дальний Восток» (проект Х9 12-III-A-03-034 «Математическое моделирование русловых процессов в реках с песчаным дном», 2012 – 2013 гг.) и проектов Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-98518_р восток(а) «Математическое моделирование русловых процессов для рек с песчано-гравийным основанием», 2012 – 2014 гг., проект № 15-05-07594_а «Математическое моделирование русловых процессов для рек с песчано-гравийным дном», 2015 – 2016гг.).

Основные результаты работы докладывались на IX, X Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (г. Алушта, 2012, 2014), XVIII, XIX Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (г. Алушта, 2013, 2015), Инновационные информационные технологии: Материалы международной научно-практической конференции (Прага, Чешская республика, 2013г.), Всероссийская научно-практическая конференция «Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления» (Хабаровск, 2013 г.), Международная научная конференция «Турбулентность и волновые процессы», посвященная 100-летию со дня рождения академика М.Д. Миллионщикова (г. Москва, 2013 г.), Всероссийская конференция, приуроченная к 95-летию академика Л.В. Овсянникова «Новые математические модели в механике

сплошных сред: построение и изучение» (г. Новосибирск, 2014 г.), 5-ая Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (г. Бийск, 2014 г.), XXXVIII Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова (г. Владивосток, 2014 г.), Всероссийская научная конференция «Обратные краевые задачи и их приложения», посвященная 100-летию со дня рождения профессора М.Т. Нужина (г. Казань, 2014), XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике (г. Казань, 2015 г.), VIII Международная конференция, посвященная 115-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева, «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2015г.), XXI Всероссийская конференция и Молодежная школа-конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики», посвященная памяти К. И. Бабенко (Новороссийск, Абрау-Дюрсо, 2016г.).

Структура и объем диссертационной работы. Диссертационная работа изложена на 116 страницах и состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы (100 источников). Диссертация содержит 33 рисунка.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении изложена актуальность темы диссертационной работы, определены цели и задачи исследования, отражена научная новизна и практическая значимость работы, кратко описано ее содержание.

Первая глава посвящена формулировке общей трехмерной математической постановке для задачи о возникновении донной неустойчивости в каналах с песчаным основанием.

В первом пункте рассматривается физическая постановка задачи о развитии донной неустойчивости в каналах с песчаным дном, определена расчетная область задачи и ее границ, которая показана на рисунке 1. Обоснованы основные допущения, принятые при формулировании задачи о развитии донных волн в реках с песчаным основанием.

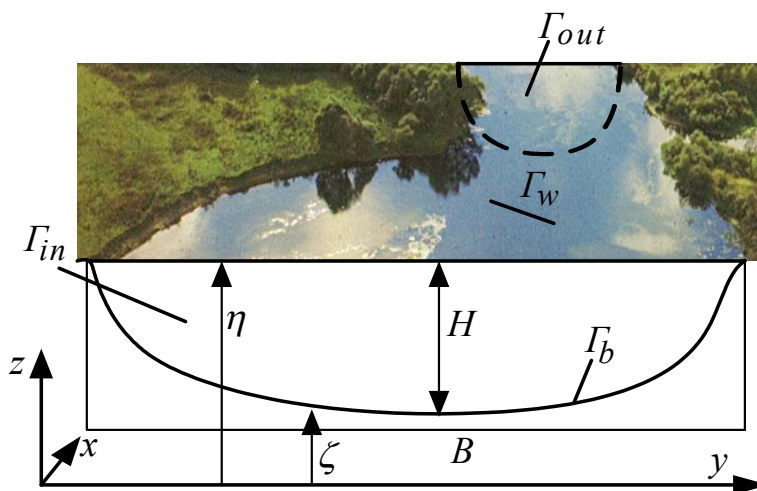


Рисунок 1. Схема расчетной области

Во втором пункте формулируется общая трехмерная математическая постановка задачи о развитии донных волн в каналах с песчаным основанием.

Движение речного потока описывается:

- уравнениями Рейнольдса

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

- уравнением неразрывности

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

- уравнениями состояния

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + v_t \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где t – время, $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\} \equiv \{x, y, z\}$, x , y , z – декартовы координаты расчетной области Ω , V_i – компоненты вектора осредненной скорости потока; F_i – компоненты вектора объемных сил (в том числе и силы Кориолиса), T_{ij} – компоненты тензора Рейнольдса, P – гидродинамическое давление, δ_{ij} – символ Кронекера, v_t – кинематический коэффициент турбулентной вязкости.

Транспорт взвешенных наносов в области описывается уравнением переноса, которое имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c V_j}{\partial x_j} = \frac{\partial c W}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_t}{\sigma_c} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right), \quad (4)$$

где $c = c_s \rho_s$ – объемная массовая концентрация частиц в потоке, c_s – процентная концентрация наносов на единицу объема, ρ_s – плотность частиц, W – гидравлическая крупность частиц, $\sigma_c = 1.33$.

Движение свободной границы η расчетной области описывается уравнением

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + V_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = V_3, \quad i = 1, 2, \quad \vec{x} \in \Gamma_w. \quad (5)$$

Для описания движения нижней границы Γ_b расчетной области используется уравнение Экснера

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s (1 - \varepsilon)} \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = D - E, \quad i = 1, 2, \quad x, y \in \Gamma_b, \quad (6)$$

$$D = W c, \quad E = \frac{v_t}{\sigma_c} \frac{\partial c}{\partial x_3}, \quad \vec{x} \in \Gamma_b,$$

где ρ_s – плотность донных частиц, ε – коэффициент пористости песчаного дна, G_i – компоненты вектора удельного массового расхода донных наносов, D – осаждение частиц, E – взмыв частиц.

На свободной поверхности η выполняются статические граничные условия

$$T_{ij} n_j = R_i, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \vec{x} \in \Gamma_w, \quad (7)$$

$$\frac{v_t}{\sigma_c} \frac{\partial c}{\partial x_i} n_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \vec{x} \in \Gamma_w, \quad (8)$$

где R_i – компоненты вектора силы, заданные на свободной поверхности потока, $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор внешней нормали.

На донной поверхности ζ выполняются статические граничные условия

$$V_i(t, \vec{x}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad t \in (0..t^*), \quad \vec{x} \in \Gamma_b, \quad (9)$$

$$-\frac{v_t}{\sigma_c} \left(\frac{\partial c}{\partial x_i} n_i \right) = -E + D, \quad i = 1, 2, 3, \quad \vec{x} \in \Gamma_b. \quad (10)$$

На входе Γ_{in} и выходе Γ_{out} расчетной области Ω установим следующие граничные условия:

$$V_i(t, \vec{x}) = V_i^{in}(t, \vec{x}), \quad i = 1, 2, 3, \quad \vec{x} \in \Gamma_{in}, \quad (11)$$

$$c(t, \vec{x}) = c_{in}(t, \vec{x}), \quad \vec{x} \in \Gamma_{in}, \quad (12)$$

$$G_i(t, \vec{x}) = G_i^{in}(t, \vec{x}), \quad G_i(t, \vec{x}) = G_i^{out}(t, \vec{x}), \quad i = 1, 2, \quad \vec{x} \in \Gamma_{in}, \Gamma_{out}, \quad (13)$$

$$\eta(t, \vec{x}) = \eta_{out}(t, \vec{x}), \quad t \in (0..t_*), \quad \vec{x} \in \Gamma_{out}, \quad (14)$$

$$\left(cV_i - \frac{v_t}{\sigma_c} \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) n_i = G_{out}^c(\vec{x}), \quad i = 1, 2, \quad \vec{x} \in \Gamma_{out}. \quad (15)$$

Для уравнений (1), (4)–(6) определим начальные условия

$$V_i(0, \vec{x}) = V_i^0(\vec{x}), \quad c(0, \vec{x}) = c_0(\vec{x}), \quad i = 1, 2, 3, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (16)$$

$$\eta(0, \vec{x}) = \eta_0(\vec{x}), \quad \zeta(0, \vec{x}) = \zeta_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Gamma_w, \vec{x} \in \Gamma_b. \quad (17)$$

Здесь V_i^0 – компоненты вектора начальной скорости в начальный момент времени, η_0 – начальный уровень свободной поверхности в области, ζ_0 – начальный уровень донной поверхности в области, c_0 – начальное распределение концентрации в области, c_b – массовая концентрация наносов у дна, V_i^{in} – значения скоростей на входе в расчетную область, c_{in} – распределение концентрации донных наносов на входе в расчетную область, η_{out} – уровень свободной поверхности потока на выходе из расчетной области, G_i^{in} – расход влекомых наносов, поступающий в расчетную область, G_i^{out} – расход влекомых наносов на выходе из расчетной области, G_{out}^c – поток массовой концентрации взвешенных наносов на выходе из расчетной области.

В третьем пункте выполнен обзор моделей движения влекомых наносов для определения компонент вектора влекомых наносов, движущихся в активном придонном слое. В настоящей работе используется аналитическая модель движения влекомых наносов Петрова А.Г.-Потапова И.И., не содержащая в себе новых феноменологических параметров и учитывающая влияние нормальных и касательных напряжений на процесс транспорта донных частиц

$$G_1 = G_0 \left((1 - \chi) - \frac{1}{tg\varphi \cos\gamma} \left(\frac{\chi}{2} + (1 - \chi) \frac{1+s}{s} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} - \frac{1 - \chi}{s tg\varphi \cos\gamma} \frac{\partial p}{\partial \xi_1} \right), \quad (18)$$

$$G_2 = -\frac{4}{5} \frac{G_0}{tg\varphi \cos\gamma} \left(\frac{1+s}{s} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} + \frac{1}{s} \frac{\partial p}{\partial \xi_2} \right), \quad (19)$$

где $G_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s T^{3/2}}{F_a \sqrt{\rho_w \kappa}}, \quad s = f \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w}, \quad F_a = tg\varphi \cos\gamma (\rho_s - \rho_w) g,$

$$\chi = \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \quad T_0 = \frac{9}{8} \frac{\kappa^2 d F_a}{c_x}, \quad T = T_{ij} n_j \tau_i, \quad p = \frac{P}{g \rho_w}.$$

Здесь ξ_1, ξ_2 – ортогональные криволинейные координаты донной поверхности ζ , φ – угол внутреннего трения донных частиц; γ – угол отклонения нормали к донной поверхности от вертикальной оси; ρ_s – плотность частиц; ρ_w – плотность воды; T – придонное касательное напряжение; κ – постоянная Кармана; T_0 – критическое напряжение начала движения донных частиц; d – диаметр частиц потока; c_x – коэффициент лобового сопротивления частиц; g – ускорение свободного падения; λ_g – коэффициент гидравлического сопротивления; U – средняя скорость потока, p – гидравлический напор; τ_i – вектор касательный к донной по-

верхности Γ_b .

Двумерная модель движения влекомых наносов (18)–(19) расширяется моделью лавинного обрушения донного материала

$$G_a = m_a \rho_s \left(\left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right| - \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad m_a = \begin{cases} 1, & \gamma > \varphi, \\ 0, & \gamma \leq \varphi. \end{cases} \quad (20)$$

В четвертом пункте выполнен обзор моделей русловой турбулентности, используемых при моделировании течения русловых потоков. В настоящей работе рассмотрен турбулентный поток, поэтому для построения математической модели описания процессов возникновения и развития донной неустойчивости используется дифференциальная $k-e$ модель русловой турбулентности

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{e}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + v_t \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - e, \quad i=1,2,3, \quad (22)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t}{\sigma_e} \frac{\partial e}{\partial x_i} \right) + \left(C_{e1} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - C_{e2} e \right) \frac{e}{k}, \quad i=1,2,3, \quad (23)$$

где $C_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_e = 1.3$, $C_{e1} = 1.44$, $C_{e2} = 1.92$.

Для модели турбулентности $k-e$ установим начальные и граничные условия

$$k(0, \vec{x}) = k_0(\vec{x}), \quad e(0, \vec{x}) = e_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (24)$$

$$k(t, \vec{x}) = k_{in}(t, \vec{x}), \quad e(t, \vec{x}) = e_{in}(t, \vec{x}), \quad \vec{x} \in \Gamma_{in}, \quad (25)$$

$$\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} n_i = q_k^{out}, \quad \frac{v_t}{\sigma_e} \frac{\partial e}{\partial x_i} n_i = q_e^{out}, \quad \vec{x} \in \Gamma_{out}, \quad (26)$$

где k_0 , e_0 – начальные распределения кинетической энергии и диссипации в области, соответственно, k_{in} , e_{in} – распределение кинетической энергии и диссипации на входе Γ_{in} в расчетную область, q_k^{out} , q_e^{out} – распределение кинетической энергии и диссипации на выходе Γ_{out} из расчетной области.

Во второй главе рассмотрена одномерная задача о развитии донной неустойчивости в открытом канале, при постоянном гидродинамическом расходе. Исследовано влияние малых возмущений транзитного расхода влекомых наносов на процесс возникновения донных волн.

В первом пункте рассмотрена физическая постановка одномерной задачи о развитии донных волн в реках с песчаным дном. Обоснованы основные допущения, принятые при переходе от трехмерной постановки русловой задачи к одномерной.

Расчетная область одномерной задачи и ее границ показаны на рисунке 2.

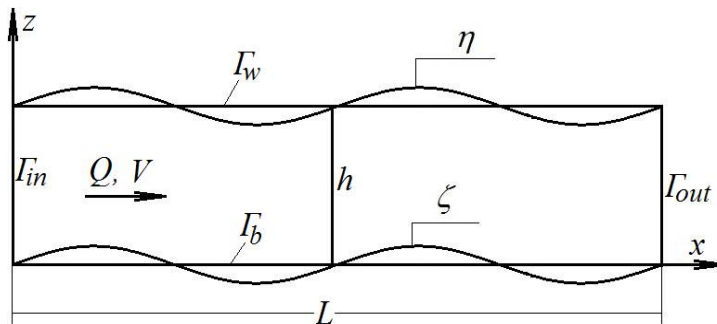


Рисунок 2. Расчетная область

Во втором пункте на основе принятых допущений сформулирована одномерная математическая постановка задачи о развитии донных волн в реках с песчаным дном. Решение задачи выполнялось в предположении о малости амплитуды донных волн к глубине потока. Это позволило упростить постановку задачи и получить систему донных деформаций, включающую

– уравнение Экснера

$$\rho_s(1-\varepsilon)\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad (27)$$

– уравнение движения влекомых наносов

$$G = G_0 \left(1 - \chi - \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} \left(\left(1 - \frac{\chi}{2} \right) - \frac{1-\chi}{s} \frac{Fr}{1-Fr} \right) \frac{\partial\zeta}{\partial x} \right) + G_a. \quad (28)$$

Уравнения (27), (28) замыкаются начальными и граничными условиями

$$\zeta(x, 0) = \zeta_0, \quad x \in \Gamma_b, \quad (29)$$

$$G(0, t) = G_{transit} + \delta_*, \quad G(L, t) = G_{transit}, \quad x \in \Gamma_{in}, \Gamma_{out}, \quad (30)$$

где ζ_0 – начальное значение донной поверхности; $G_{transit}$ – среднее значение транзитного потока влекомых наносов, полученное для установившегося течения над ровным дном; δ_* – стохастические пульсации транзитного расхода влекомых наносов; L – длина расчетной области.

Стохастическое поведение потока влекомых наносов определяется заданием пульсации δ_* расхода транзитного массового потока наносов на входе в расчетную область. Величина пульсаций определяется с использованием закона нормально распределения

$$\delta_* = M_0 10^{-2} \frac{\operatorname{sign}(x_*)}{\sigma_* \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_*^2}{2\sigma_*^2}\right), \quad \sigma_* = 1, \quad x_* = -10 \dots 10. \quad (31)$$

В третьем пункте для решения задачи (27) – (31) о развитии донных волн предложен алгоритм, основанный на методе конечных разностей, используя схему бегущего счета. Завершение расчета осуществляется после выхода на квазистационарный режим критерия w , являющегося среднеквадратичным отклонением донной поверхности ζ от средней линии дна $\bar{\zeta}$:

$$w = \left(\frac{1}{N} \sum (\zeta_i - \bar{\zeta})^2 \right)^{1/2}, \quad (32)$$

где $\bar{\zeta} = \frac{1}{N} \sum \zeta_i$, N – количество узлов; ζ_i – значения донной поверхности в i -ом узле.

В четвертом пункте представлены результаты численного моделирования по развитию донных волн. На рисунке 3 представлены графики изменения донной поверхности во времени для различных чисел Фруда невозмущенного потока, каждый из которых получены на 50 выборках. Видно, что рост амплитуды донных волн и их длины происходит в первую 1000 секунд численного эксперимента, что хорошо согласуется с известными экспериментальными данными Coleman S.E., Venditti J.G. После чего критерий установления (32) перестает изменяться, несмотря на продолжающуюся эволюцию дна. Из представленных графиков можно определить среднюю длину волны донных возмущений и среднеквадратичное отклонение. Отсюда следует, что исследуемая задача не имеет стационарного решения. Это важный методологический результат, поскольку указывает на невозможность получения в экспериментах детерминированных взаимосвязей между гидродинамическими параметрами потока и геометрическими параметрами донных волн в своих экспериментах. Такой вывод хорошо подтверждается многочисленными экспериментальными данными Coleman S.E., Venditti J.G.

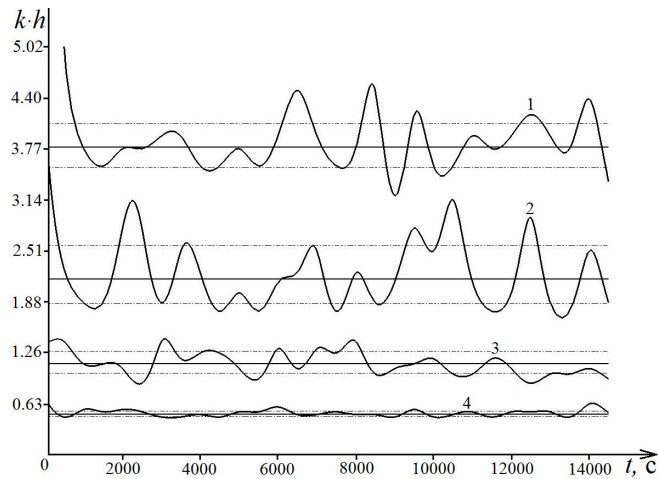


Рисунок 3. Рост длин волн донных возмущений

Сравнивая зависимость, полученную по предложенной модели, между числом Фруда невозмущенного потока и средними значениями относительной длины волны донных возмущений (рис. 4, кривая 2) с экспериментальными данными Guy N.P., Simons D.V., Richardson E.V. и решением Кеннеди (рис. 4, кривая 1), можно отметить, что они качественно согласуются.

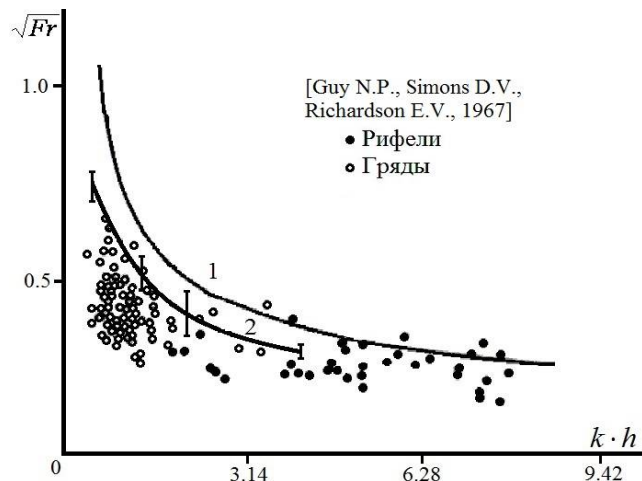


Рисунок 4. Связь между числом Фруда невозмущенного потока и относительной длиной волны донных возмущений

На основе проведенного сравнительного анализа результатов моделирования можно сделать вывод о том, что в рамках использованной модели исследуемая русловая задача не имеет стационарного решения при малых стохастических возмущениях потока влекомых наносов. Полученные в результате моделирования длины волн согласуются с экспериментальными данными и не противоречат аналитическим зависимостям линейного анализа донной устойчивости. Показано, что возмущение расхода влекомых наносов приводит к возникновению и развитию донных волн.

В третьей главе сформулирована одномерная задача о развитии донной неустойчивости в напорном канале.

Обоснованы основные допущения, принятые при переходе от трехмерной постановки русловой задачи к одномерной. Пример расчетной области представлен на рисунке 5.

Для одномерной модели движения руслового потока с использованием оригинальной формулы движения влекомых наносов Петрова А.Г.-Потапова И.И. (18) получено новое уравнение русловых деформаций

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + A \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial x} + B \frac{\partial \zeta}{\partial x} - C \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - D \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0, \quad (33)$$

где

$$A = c S Fr^2 h, B = 3 S Fr (a + c Fr \lambda_g) U, C = (b - c(1 + Fr)) S Fr U h, D = c S Fr^2 v_t h. \quad (34)$$

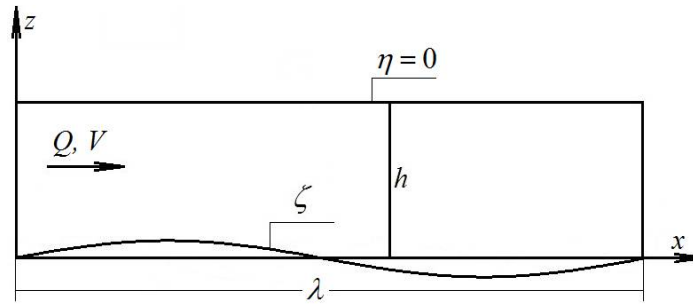


Рисунок 5. Расчетная область напорного канала

Для линейризованной постановки (33) одномерной задачи получена аналитическая зависимость, позволяющая определить длину донной волны для различных физико-механических и гранулометрических характеристик донного материала

$$\lambda = \frac{2\pi c S Fr^2}{\sqrt{1 + S Re Fr [c(1 + Fr) - b - 3 S Fr^2 c(a + c \lambda_g Fr)]} - 1} h, \quad (35)$$

где $Re = \frac{U h}{v_t}$ – число Рейнольдса, $Fr = \frac{U^2}{gh}$ – число Фруда.

Полученное аналитическое решение (35) для длины донной волны сравнивалось с экспериментальными данными и феноменологическими зависимостями Бэгнольда, Шуляка Б.А. и Coleman S.E.

На рисунке 6 показано сравнение полученного аналитического решения (35) с феноменологическими формулами Coleman S.E., Бэгнольда и Шуляка Б.А., которые представлены кривыми (5)–(7), соответственно. Решения, полученные по аналитической зависимости (35), представлены кривыми (1)–(4). Видно, что при различных числах Фруда, полученное решение (35) хорошо согласуется с феноменологическими зависимостями. Следовательно, полученное решение (35) обобщает формулы: Coleman S.E., Бэгнольда и Шуляка Б.А.

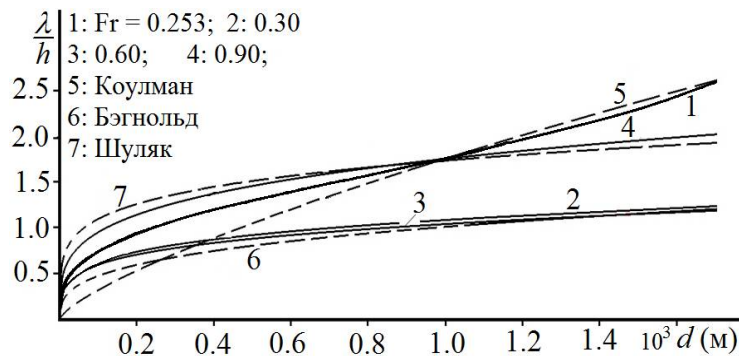


Рисунок 6. Зависимость длины волны донных возмущений от диаметра донных частиц для различных чисел Фруда

На рисунке 7 представлены зависимости длины волны донных возмущений от диаметра донных частиц. Точечными множествами определены экспериментальные данные различных авторов Coleman S.E., Nakagawa H., Kuru W.C. Кривая 1 определяется формулой $\lambda = 31.12 d^{3/4}$, которая получена Coleman S.E. в результате обработки экспериментальных данных. Кривая 2 построена по полученному решению (35).

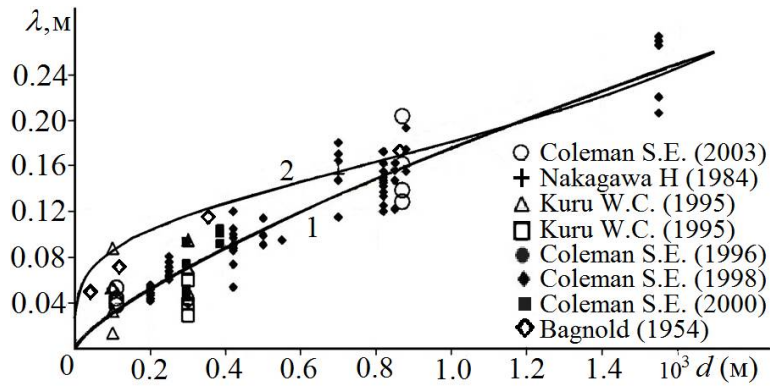


Рисунок 7. Зависимость длины донной волны от размеров донных наносов для напорного канала

Отметим, что хорошее количественное и качественное согласование полученного аналитического решения (35) с экспериментальными данными, наблюдается только в области длинноволнового приближения $h \ll \lambda$. Это связано с тем, что используемая в работе гидродинамическая модель является длинноволновой моделью мелкой воды. Поэтому сравнение зависимости (35) с экспериментальными данными Coleman S.E., Nakagawa H., Kuru W.C. в коротковолновой области имеют существенное различие, однако оно не превышает границы стандартного отклонения выборки экспериментальных данных. Следовательно, можно утверждать, что полученное, в рамках линейного приближения задачи, аналитическое решение (35) согласуется с экспериментальными данными не только качественно, но и количественно.

В четвертой главе предложена двумерная профильная математическая модель, позволяющая исследовать механизмы движения донного материала над периодическим дном.

В первом пункте формулируется физическая постановка двумерной профильной задачи о развитии донных волн в напорном канале. Расчетная область русловой задачи и ее границ показана на рисунке 8.

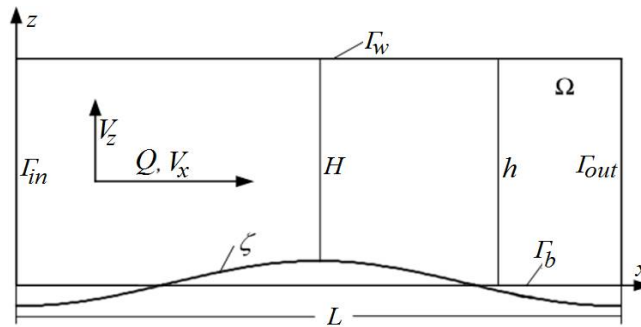


Рисунок 8. Расчетная область

Во втором пункте выполнено упрощение общей трехмерной математической постановки (1)–(26) до ее двумерного профильного приближения со следующими обозначениями:

$$x_1 = x, \quad x_2 = z, \quad V_1 = V_x, \quad V_2 = V_z$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad i, j = 1, 2, \quad (36)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (37)$$

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + \nu_t \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, \quad (38)$$

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{e}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + v_t \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - e, \quad i, j = 1, 2, \quad (40)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t}{\sigma_e} \frac{\partial e}{\partial x_i} \right) + \left(C_{e1} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - C_{e2} e \right) \frac{e}{k}, \quad i, j = 1, 2, \quad (41)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s (1 - \varepsilon)} \frac{\partial G}{\partial \xi} = 0, \quad (42)$$

$$G = G_0 T^{3/2} \left((1 - \chi) - \frac{1}{\text{tg} \varphi \cos \gamma} \left(\frac{\chi}{2} + (1 - \chi) \frac{1+s}{s} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - \frac{1 - \chi}{s \text{tg} \varphi \cos \gamma} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + G_a, \quad (43)$$

$$T_{ij} n_j = R_i, \quad i, j = 1, 2. \quad (44)$$

Уравнения (36) – (44) замыкаются периодическими граничными условиями в расчетной области Ω с границей $\partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_w \cup \Gamma_b$ представленной на рисунке 8.

На входе Γ_{in} и выходе Γ_{out} расчетной области Ω установим периодические граничные условия:

$$V_i(t, x, z) = V_i(t, x + L, z), \quad \int_0^H V_i(t, x, z) = Q \delta_{i1}, \quad i = 1, 2, \quad x, z \in \Gamma_{in}, \Gamma_{out}, \quad (45)$$

$$G(t, x) = G(t, x + L), \quad \vec{x} \in \Gamma_{in}, \Gamma_{out}, \quad (46)$$

$$k(t, x, z) = k(t, x + L, z), \quad e(t, x, z) = e(t, x + L, z), \quad x \in \Gamma_{in}, \Gamma_{out}. \quad (47)$$

На верхней Γ_w и нижней Γ_b границах расчетной области Ω выполняются статические условия:

$$V_i(t, \vec{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \vec{x} \in \Gamma_w, \Gamma_b. \quad (48)$$

Для математической постановки (36) – (44) установим начальные условия:

$$\zeta(0, \vec{x}) = \zeta_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Gamma_b, \quad (49)$$

$$k(0, \vec{x}) = k_0(\vec{x}), \quad e(0, \vec{x}) = e_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega. \quad (50)$$

В третьем пункте для поставленной профильной русловой задачи предложен метод ее решения. На основе метода контрольных объемов выполнена дискретизация расчетной области для решения гидродинамической задачи и предложены дискретные аналоги для определения полей горизонтальной и вертикальной скоростей и давления.

В четвертом пункте рассмотрены особенности выполнения граничных условий для уравнений гидродинамики на примере движения потока жидкости по напорному каналу с периодическим дном.

В пятом пункте рассмотрена методика определения придонного касательного напряжения, которая позволит выполнить расчет нижней границы расчетной области напорного канала.

В шестом пункте рассмотрен метод решения изменения донной поверхности напорного канала. Используя метод контрольных объемов предложен одномерный дискретный аналог.

В седьмом пункте изложен пошаговый алгоритм решения русловой задачи в двумерной профильной постановке.

В восьмом пункте на основе предложенной математической модели (36)–(50) были выполнены расчеты для анализа механизмов возникновения и развития донной неустойчиво-

сти. Изучались поля расходов влекомых наносов и скоростей изменения донной поверхности при обтекании гидродинамическим потоком периодического дна.

На рисунках 9, 10 представлены численные расчеты, полученные по математической модели (36)–(50) с использованием аналитической модели расхода наносов (43).

Кривыми 1 показан расход наносов (рис.9) и формируемые расходом наносов скорости изменения дна (рис.10). Кривые 2-4 на рисунках 9, 10 отражают вклад различных механизмов в процесс изменения донной поверхности.

Кривыми 2 показан вклад в расход донных частиц (рис.9) и скорость изменения дна (рис.10), определяемый движением донных частиц под воздействием придонного касательного напряжения T .

Кривыми 3 показан вклад в расход донных частиц (рис.9), определяемые механизмом гравитационного осыпания (рис.10), связанного с уклоном дна $\partial\zeta/\partial x$.

Кривыми 4 показан вклад в расход донных частиц (рис.9) и скорость изменения дна (рис.10), определяемый придонным градиентом напора $\partial p/\partial x$.

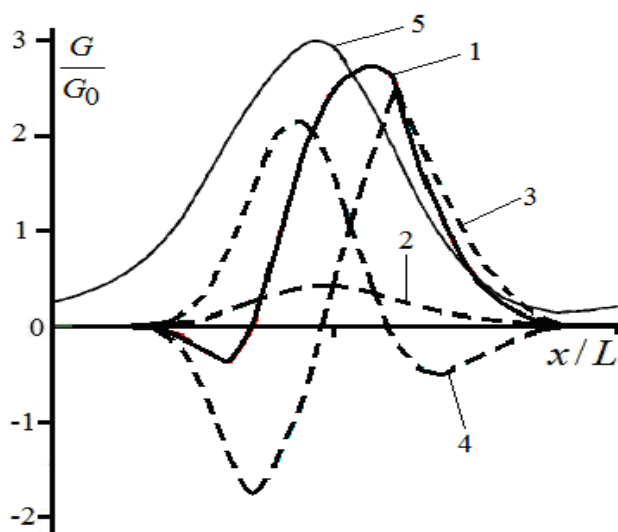


Рисунок 9. Расход донного материала

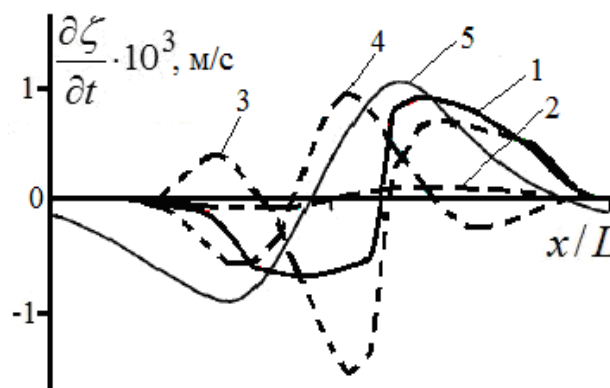


Рисунок 10. Скорость изменения дна

Кривыми 5 показан расход влекомых наносов и скорость изменения донной поверхности, полученные в работе Richards K.J. и Taylor P.A. с использованием феноменологической формулы движения влекомых наносов Бэгнольда. Отметим качественное согласование расходов движения донного материала и скоростей изменения дна по аналитической и феноменологической моделям.

Из полученных результатов следует, что важнейшими механизмами при развитии донной неустойчивости являются механизмы транспорта донных наносов, связанные с уклонами дна и градиентами придонного напора. Максимальный расход наносов определяемый данными механизмами в 2.5 и 2.1 раза превосходит расход наносов, определяемый придонными касательными напряжениями. Из проведенных расчетов следует, что направление развития донных возмущений определяется балансом между диссипативным механизмом, связанным с уклоном дна и механизмом генерации донных волн, связанным с придонным градиентом напора.

Также проведен анализ механизмов движения донного материала над периодическим дном в зависимости от параметра перекошенности донной волны. Показано, что для развитых донных волн расходы донных частиц, связанные с уклоном донной поверхности и придонным давлением, являются разнонаправленными и доминирующими при определении направления развития донных волн по отношению к расходам от сдвиговых напряжений.

Основные результаты и выводы по диссертационной работе

Основные результаты и выводы по диссертационной работе заключаются в следующем:

1. Предложена новая одномерная стохастическая модель формирования донных волн, не содержащая в себе феноменологических параметров. Особенностью предложенной математической модели является использование аналитической формулы расчета влекомых наносов, которая учитывает влияние уклонов донной поверхности, свободной поверхности потока и придонного касательного напряжения на движение донного материала. Модель также учитывает лавинный механизм движения донного материала. Разработан алгоритм решения задачи, основанный на методе конечных разностей. Получены численные закономерности, определяющие рост и эволюцию длины волны донных возмущений во времени, в зависимости от числа Фруда. Изучено влияние малых возмущений транзитного расхода влекомых наносов на процесс возникновения донных волн. Выполнен сравнительный анализ полученных решений с экспериментальными данными и решениями других авторов.

2. Предложена новая одномерная математическая модель, описывающая процесс возникновения и развития донной неустойчивости в напорных каналах. Особенностью предложенной математической модели является использование аналитической формулы расчета влекомых наносов, которая учитывает влияние уклонов донной поверхности, придонного нормального и касательного напряжений на движение донного материала. Получено новое уравнение русловых деформаций, для которого найдено аналитическое решение, позволяющее определить длину волны донных возмущений в зависимости от чисел Фруда и Рейнольдса, а также от физико-механических и гранулометрических параметров донного материала. Полученное решение обобщает ряд феноменологических зависимостей и хорошо согласуется с экспериментальными данными.

3. Предложена новая двумерная профильная математическая русловая модель для исследования механизмов развития донной неустойчивости. Особенностью предложенной модели является использование аналитической формулы движения влекомых наносов, которая позволила выполнить анализ различных механизмов движения донного материала в зависимости от придонных касательных напряжений, уклонов донной поверхности и градиента гидравлического напора. Разработан алгоритм решения задачи, основанный на методе контрольных объемов. Проведен анализ механизмов движения донного материала над периодическим дном в зависимости от параметра перекошенности донной волны. Показано, что для развитых донных волн расходы донных частиц, связанные с уклоном донной поверхности и придонным давлением, являются разнонаправленными и доминирующими при определении направления развития донных волн по отношению к расходам от сдвиговых напряжений. Выполнено сравнение полученных результатов с решениями других авторов.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Крат, Ю.Г. Модель стохастического развития донных волн / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2013. – Вып. 2. – С. 85-91.

2. Крат, Ю.Г. Устойчивость дна в напорных каналах / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // Компьютерные исследования и моделирование. – 2015. – Т. 7, №5. – С. 1061 – 1068.

3. Крат, Ю.Г. Влияние размера частиц донных наносов на длину волны донных возмущений в напорных каналах / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57, №3. – С. 60 – 64.

4. Свидетельство №2014662714 Российская Федерация. Программный комплекс для моделирования стохастических процессов генерации донных волн для рек с песчаным основанием: Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ / Ю.Г. Крат, И.И.

- Потапов; заявитель и правообладатель ВЦ ДВО РАН. Заявл. 15.10.2014г.; зарегестр. 08.12.2014г. – 1 с.
5. Крат, Ю.Г. Влияние нерегулярности потока на процесс образования донных волн / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // Материалы IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ 2012), Алушта. – М: Изд-во МАИ, 2012. – С. 371.
 6. Крат, Ю.Г. Стохастическая модель развития донных волн / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // Инновационные информационные технологии: Материалы международной научно-практической конференции. Том 2. / Гл. ред. С.У. Увайсов; Отв. Ред. И.А. Иванов – М.: МИЭМ НИУ ВШЭ, 2013. – Т. 2. - С. 286-291.
 7. Крат, Ю.Г. Русловая модель стохастического развития донных волн / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // Материалы XVIII Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС 2013), Алушта. М: Изд-во МАИ, 2013. – С. 245.
 8. Крат, Ю.Г. Стохастическая модель развития донных волн / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления: материалы всероссийской научн.-практ. конф., Хабаровск. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013. – С. 173-179.
 9. Крат, Ю.Г. О развитии песчаных волн в напорном канале / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // Международная научная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика М.Д. Миллионщикова «Турбулентность и волновые процессы»: сборник тезисов, Москва. - М.: ООО «Интуит.ру», 2013. – С. 130.
 10. Крат, Ю.Г. Влияние физико-механических и гранулометрических параметров донного материала на развитие длины донной волны / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения: 5-ая Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых / Алт. гос. тех. ун-т, БТИ. – Бийск: Изд-во Алт. гос. тех. ун-та, 2014. – С. 91.
 11. Крат, Ю.Г. Об устойчивости дна в напорных каналах / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // Всероссийская конференция, приуроченная к 95-летию академика Л.В. Овсянникова «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение»: тезисы докладов. – Новосибирск, 2014. – С. 205.
 12. Крат, Ю.Г. Решение задачи устойчивости песчаного дна напорного канала / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // Материалы X Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ 2014 г.), Алушта. – М: Изд-во МАИ, 2014. – С. 341 – 342.
 13. Крат, Ю.Г. Анализ устойчивости донной поверхности в напорных каналах / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // XXXVIII Дальневосточная математическая школа-семинар им. академика Е.В. Золотова, Владивосток: сб. материалов [Электронный ресурс]. – Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2014. - 1опт.компакт-диск (CD-ROM).
 14. Крат, Ю.Г. Постановка и решение задачи устойчивости дна напорного канала / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // Обратные краевые задачи и их приложения (ОКЗ и их приложения): материалы конференции [Электронный ресурс]: (тексто-графические материалы). – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – 1 электрон.опт.диск (CD-ROM).
 15. Крат, Ю.Г. Образование донных волн в напорном канале / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // Материалы XIX Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС 2015), Алушта. – М: Изд-во МАИ, 2015. – С. 471 – 472.
 16. Крат, Ю.Г. Возникновение и развитие донных волн в напорном канале / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике: сборник докладов. – Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2015. – С. 2068 - 2069.
 17. Крат, Ю.Г. Развитие донных волн в напорном канале / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // VIII Международная конференция, посвященная 115-летию со дня рождения академика М.А.

Лаврентьева, «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике»: тезисы докладов. – Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 2015. – С. 130 – 131.

18. Крат, Ю.Г. Математическое моделирование донной неустойчивости в профильной постановке / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов // XXI Всероссийская конференция и Молодежная школа-конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики», посвященная памяти К. И. Бабенко: тезисы докладов. – М.: Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 2016. – С. 89.

19. Крат, Ю.Г. Влияние нерегулярного возмущения потока на образование донных волн / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов: препринт №175. – Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2012. – 22 с.

20. Крат, Ю.Г. Математическая модель стохастического развития донных волн / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов: препринт №187. – Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2012. – 12 с.

21. Крат, Ю.Г. Об устойчивости песчаного дна напорного канала / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов: препринт №197. – Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2014. – 13 с.

22. Крат, Ю.Г. Устойчивость дна в напорных каналах канала / Ю.Г. Крат, И.И. Потапов: препринт №201. – Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2014. – 10 с.

КРАТ ЮЛИЯ ГЕОРГИЕВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОННОЙ
НЕУСТОЙЧИВОСТИ В КАНАЛАХ С ПЕСЧАНЫМ ОСНОВАНИЕМ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук