На правах рукописи

Самусенко Александр Маркович

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Комсомольск-на-Амуре — 2016

Работа выполнена на кафедре высшей математики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Дальневосточный государственный университет путей сообщения».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент, **Виноградова Полина Витальевна.**

Официальные оппоненты: **Алексеев Геннадий Валентинович,** доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики ДВО РАН, заведующий лабораторией «Вычислительной аэро-гидродинамики».

Вихтенко Эллина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет», доцент кафедры ПОВТиАС.

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Дальневосточный федеральный университет».

Защита диссертации состоится 21 апреля 2016 года г. в 13 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 999.055.04 при Комсомольском–на–Амуре государственном техническом университете по адресу: 681013, г. Комсомольск–на–Амуре, проспект Ленина, 27 корпус 3, аудитория 201/3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Комсомольского–на–Амуре государственного технического университета по адресу:

`https://sovet.knastu.ru/diss_defense`

Автореферат разослан "   "   2016 г.

Учёный секретарь диссертационного совета кандидат физико-математических наук, доцент, **Лошманов Антон Юрьевич.**

Общая характеристика работы.

Актуальность темы и степень её разработанности. Математическое моделирование процессов в которых присутствует перенос вещества приводит к начально-краевым задачам нестационарного характера. К таким процессам относятся, например, распространение загрязняющих веществ промышленных предприятий в атмосфере или водоёмах, процессы переноса кислорода и других химических элементов в кровеносной системе организма, океанические течения, процессы конвекции в пористых средах и др.

Проекционные и проекционно-сеточные методы являются в настоящее время основными при исследовании и поиске приближенного решения таких задач. Основы данных методов заложены в известных трудах И. Г. Бубнова, Б. Г. Галёркина, Г. И. Петрова, В. Ритца, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, В. Я. Ривкинда, Л. В. Канторовича и других учёных. Общие положения о проекционных методах изложены, например, в трудах К. Флетчера, М. А. Красносельского, Г. М. Вайникко, О. А. Ладыженской, П. П. Забрейко, С. Г. Михлина, Г. И. Марчука, В. И. Агошкова и других учёных. Однако, несмотря на столь широкий диапазон исследований и количество научных трудов в области приближенных методов, существует ряд открытых проблем. К ним относятся: доказательство сходимости построенного приближенного решения к точному, поиск эффективных оценок скорости сходимости приближенного решения к точному. Данная работа посвящена исследованию проекционных методов для численного решения различных моделей переноса. Среди многообразия таких уравнений исследуются параболические уравнения высокого порядка в цилидрической и нецилидрической областях, дифференциально-операторные уравнения третьего порядка по времени, задача конвекции-диффузии-реакции.

Начально-краевые задачи для параболических уравнений высокого порядка появляются при математическом моделировании процессов образования снега, движения газовых фракций в лёгких, используются при построении поверхностей в компьютерой графике, для восстановления изображений и др. Кроме того, задачи такого рода в нецилидрических областях возникают в проблемах атомной энергетики, в частности, в задачах, связанных с безопасностью атомных реакторов, при моделировании процесса электрического взрыва проводников и др. Изучением данного класса задач на предмет существования и единственности решения занимались С. Г. Крейн, А. Г. Подгаев, А. И. Кожанов, Н. Е. Истомина, Ю. Т. Сильченко и др. Обзор существующих аналитических методов решения классического уравнения нестационарной теплопроводности в подвижных областях проведён Э. М. Карташовым. Решение задач, с меняющимися во времени границами, крайне редко удаётся найти в явном виде. Для численного решения задач в нецилиндрической области А. Г. Зарубин и П. В. Виноградова использовали метод Галёркина. Однако, применение предложенного ими метода Галёркина с выбором базисных элементов по главному оператору уравнения создаёт достаточно большие трудности при поиске базисных функций. В силу сказанного, актуальным представляется исследование методов приближенного решения параболических уравнений высокого порядка в нецилидрической области с использованием метода Петрова-Галёркина, который позволяет находить базисные функции в явном виде.

Во многих работах сходимость приближённых решений к точным и устойчивость методов получена лишь для обобщённых решений. В большом числе научных трудов приводится экспериментальное тестирование численных методов поиска приближенного решения, чаще всего в данных работах отсутствует математическое обоснование используемых методов. В связи с этим, актуальным является исследование численных методов решения такого рода задач на предмет сходимости в сильных нормах.

Многие краевые и начально-краевые задачи для квазилинейных уравнений с частными производными, возникающие в математической физике, механике, гидродинамике и других областях, могут быть сформулированы как краевые задачи для соответствующих дифференциально-операторных уравнений с монотонным оператором. Среди нелинейных дифференциально-операторных уравнений наиболее детально изучены уравнения первого и второго порядка. Разрешимость различных линейных дифференциально-операторных уравнений третьего порядка исследовали, например, А. Р. Алиев, V. Kalantarov. К дифференциально-операторным уравнениям третьего порядка в гильбертовом пространстве могут быть сведены, например, некоторые уравнения возникающие при изучении процессов релаксации при переносе тепла, нестационарных акустических волн и др. Актуальным является исследование краевой задачи для нелинейных дифференциально-операторных уравнений третьего порядка, доказательство существования и единственности сильного решения данной задачи, поиск оценки скорости сходимости приближенного решения, построенного по методу Галёркина, к сильному решению.

Существует большое число задач, в которых возникает как конвективный, так и диффузионный перенос. Г. И. Марчук рассмотрел вопросы оценки загрязнения атмосферы и подстилающей поверхности примесями, провёл математическое моделирование данных процессов и предложил метод предвычисления областей размещения промышленных предприятий с соблюдением санитарных норм. A. Bejan и T. Stocker исследовали климатические и математические модели конвекции в пористых средах таких, как, например, волокнистые изоляции, геологические пласты, каталитические реакторы, сотовые пористые материалы и др. А. И. Лобанов исследовал математические модели сложных многокомпонентных систем биологической природы. Кроме того, обратные задачи для моделей распространения загрязнений исследовали А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Г. В. Алексеев, О. М. Бабешко, А. В. Фурсиков и другие учёные. Смешанные конечные элементы для решения задач переноса использовали К. А. Чехонин и В. К. Булгаков. Оценки скорости сходимости вычислительного алгоритма решения задачи конвекции получены посредством численного эксперимента в работах А. Ф. Воеводина, О. Н. Гончаровой и других учёных. А. Г. Зарубин и Ю. О. Суэтина исследовали стационарную краевую задачу для модельного уравнения конвекции-диффузии-реакции, в частности, доказали сходимость приближенного решения, построенного по методу Галёркина, к точному, получили оценки скорости сходимости. Актуальным представляется дальнейшее развитие указанного метода для решения нестационарного модельного уравнения конвекции-диффузии-реакции с использованием разностной схемы для дискретизации по времени.

Цель работы. Целью работы является применение и развитие проекционных методов для численного решения нестационарных уравнений переноса, а именно, параболических уравнений высокого порядка в цилидрической и нецилидрической областях, дифференциально-операторных нелинейных уравнений третьего порядка и модельного уравнения ковекции-диффузии-реакции.

Задачи исследования. Задачами исследования являются:
— установить сходимость и получить оценки скорости сходимости приближенных решений, построенных методом Петрова-Галёркина, начально-краевых задач для одномерных параболических уравнений высокого порядка в цилиндрической и нецилиндрической областях;
— получить оценки скорости сходимости приближённых решений, построенных методом Галёркина, для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка по времени с главным самосопряженным оператором и подчиненным ему нелинейным монотонным оператором, а также, используя разработанный в диссертации метод, провести анализ разрешимости данной задачи;
— установить сходимость и получить оценки скорости сходимости приближённых решений, построенных проекционно-разностным методом, для нестационарной математической модели конвекции-диффузии-реакции;
— разработать комплекс программ численного решения начально-краевых задач, возникающих при моделировании процессов переноса: параболических уравнений четвёртого порядка в цилиндрической и нецилидрической областях, модельного уравнения конвекции-диффузии-реакции, и провести анализ результатов вычислительного эксперимента численного решения математических моделей переноса.

Методы исследования. В работе используются методы функционального анализа, методы вычислительной математики, кроме того, используются пакеты математических компьютерных программ, методы и технологии разработки программного обеспечения.

Достоверность результатов, полученных в диссертации подтверждается:
— строгим теоретическим доказательством и математическим обоснованием всех результатов представленных в работе;
— сравнением точных и приближенных решений, построенных по предложенным в работе методам.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:
— для начально-краевой задачи для параболического уравнения высокого порядка доказана сходимость приближённых решений, построенных по методу Галёркина-Петрова, к точному. Получены новые равномерные оценки скорости сходимости приближённых решений, построенных по методу Галёркина-Петрова, к точному;
— для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка по времени с главным самосопряженным оператором и подчиненным ему нелинейным монотонным оператором установлены оценки скорости сходимости приближённых решений, построенных по методу Петрова, к точному. Проведён анализ разрешимости данной задачи на основе разработанного в работе метода;
— для начально-краевой задачи для параболического уравнения высокого порядка в нецилидрической области доказана сходимость и получены новые равномерные оценки скорости сходимости приближённых решений, построенных по методу Петрова-Галёркина, к точному;
— для начально-краевой задачи со смешанными граничными условиями для нестационарного модельного уравнения конвекции-диффузии-реакции доказана сходимость и получены новые оценки скорости сходимости приближенных решений, построенных проекционно-разностным методом, к точному;
— разработан комплекс программ численного решения начально-краевых задач, возникающих при моделировании процессов переноса: параболических уравнений четвёртого порядка в цилиндрической и нецилидрической областях, нестационарного модельного уравнения конвекции-диффузии-реакции;
— проведено тестирование вычислительных методов решения начально-краевых задач, возникающих при моделировании процессов переноса. Установлено соответствие практической и теоретической погрешностей приближенных решений.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования и развития приближённых методов решения параболических уравнений высокого порядка в цилидрической и нецилидрической областях, уравнений третьего порядка, модельного уравнения конвекции-диффузии-реакции. Разработанные программы могут быть использованы для численного решения математических моделей имеющих вид начально-краевых задач для параболических уравнений четвёртого порядка с аддитивным возмущением в цилидрической и нецилидрической областях, модельного уравнения конвекции-диффузии-реакции.

Область исследования. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по следующим областям исследований: Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей; Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий; Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Апробация работы. Доклады, основанные на результатах диссертации, сделаны на конкурсе молодых учёных Хабаровского края (Хабаровск, 2012, 2014), на 5 международной научной конференции "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования"(Воронеж, 2012), на 20 международной конференции "Математика. Компьютер. Образование"(Пущино, 2013), на 11 международной Казанской летней научной школе-конференции "Теория функций, её приложения и смежные вопросы"(Казань, 2013), на 21 международной конференции "Математика. Компьютер. Образование"(Дубна, 2013), на всероссийской научно-практической конференции творческой молодежи с международным участием "Научно-техническое и экономическое сотрудничество стран АТР в XXI веке"(Хабаровск, 2014), на Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы"(Воронеж, 2015), на семинарах кафедры "Высшая математика"Дальневосточного государственного университета путей сообщения (Хабаровск, 2013, 2014, 2015), на семинаре института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук под руководством чл.-корр. РАН Буренина А. А. (Комсомольск-на-Амуре, 2015), на семинаре Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук (Хабаровск, 2015), на 3 всероссийской научно-практической конференции "Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления"(Хабаровск, 2015).

Личный вклад автора. Публикации. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в работу. Подготовка к публикациям полученных результатов происходила совместно с соавторами, причём вклад диссертанта был определяющим.

Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах, из них 3 ([1], [2], [3]) – в российских журналах, рекомендованных ВАК. Получены три свидетельства о регистрации программ для ЭВМ [4], [5], [6] приравненных к публикациям в которых излагаются основные научные результаты. Часть работ выполнена в соавторстве. В работе [1] автору принадлежат теорема и результаты второго параграфа, в работе [2] результаты первого и второго параграфа, в работе [3] теорема 1 и результаты второго параграфа.

Структура диссертации. Диссертация изложена на 94 страницах, включает в себя введение, три главы, разбитые на параграфы, заключение и список литературы из 123 наименований.

Работа выполнена при поддержке стипендиями Н. Н. Муравьёва-Амурского и учёного совета Дальневосточного государственного университета путей сообщения.

Автор и ученик выражает глубокую признательность Анатолию Георгиевичу Зарубину за веру в меня, бескорыстную помощь и его мудрые советы. Автор и ученик выражает глубокую признательность Полине Витальевне Виноградовой за постоянное внимание, бескорыстную помощь и необыкновенное терпение.

Содержание работы

Во введении дана общая характеристика работы, обоснована актуальность и степень разработанности темы исследований, сформулированы цель работы и задачи исследования, указаны положения выносимые на защиту, представлено краткое содержание диссертационной работы.

Первая глава диссертации посвящена исследованию и применению проекционного метода для решения нестационарных уравнений высокого порядка, а именно, параболических уравнений высокого порядка и дифференциально-операторных уравнений третьего порядка по времени с главным самосопряженным оператором и подчинённым ему нелинейным монотонным оператором.

Параболические уравнения высокого порядка, в частности четвёртого порядка, возникают при математическом моделировании процессов образования снега, движения газовых фракций в лёгких, процессов восстановления изображений и в других областях. При этом интерпретация искомой функции зависит от конкретного процесса описываемого математической моделью. Так, например, неизвестная функция может быть значением температуры, положением в пространстве, интенсивностью или другим параметром. Дифференциально-операторные уравнения третьего порядка с главным самосопряжённым оператором и подчинённым ему нелинейным оператором возникают при математическом моделировании процессов релаксации при переносе тепла, в математической физике, механике, гидродинамике и других областях.

Данная глава состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе приводятся вспомогательные утверждения и функциональные пространства. Они применяются в диссертационном исследовании для поиска оценок скорости сходимости используемых в работе методов.

Во втором параграфе исследуются параболические уравнения высокого порядка в цилиндрической области. Для таких задач доказывается сходимость приближенных решений, построенных по методу Петрова-Галёркина, к точному в пространстве Соболева $W_2^{2m,1}(Q)$, а также устанавливаются оценки скорости сходимости.

В области $Q = (-1, 1)\times(0, T)$, где $T < \infty$, исследуется следующая начально-краевая задача:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + (-1)^m a(t)\frac{\partial^{2m} u(x,t)}{\partial x^{2m}} + \sum_{j=0}^{r} b_j(x,t)\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} = f(x,t), \qquad (1)$$

$$(x,t) \in Q,$$

с краевыми условиями

$$u(-1,t) = \frac{\partial u(-1,t)}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial^{m-1} u(-1,t)}{\partial x^{m-1}} = \qquad (2)$$

$$= u(1,t) = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \ldots = \frac{\partial^{m-1} u(1,t)}{\partial x^{m-1}} = 0, \quad t \in [0, T]$$

и начальным условием

$$u(x,0) = 0, \quad -1 \le x \le 1. \qquad (3)$$

Здесь $0 \le r \le 2m-1$ целое число, функция $a(t)$ имеет непрерывную производную по t на $[0, T]$, причем $a(t) \ge a_0 > 0$, для всех $t \in [0, T]$. Функции $b_j(x,t)$ непрерывны в $\overline{Q}$.

Вводится пространство $H_1 = W_2^{2m}(-1,1) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{m}(-1,1)$, где $\overset{\circ}{W}{}_2^{m}(-1,1)$ подпространство функций из пространства Соболева $W_2^m(-1,1)$, обращающихся в 0 на границе отрезка $[-1,1]$ вплоть до производных $(m-1)$ порядка.

Через A и $K(t)$ обозначены следующие операторы

$$Az(x) = (-1)^m \frac{\partial^{2m} z(x)}{\partial x^{2m}},$$

$$K(t)z(x) = \sum_{j=0}^{r} b_j(x,t)\frac{\partial^j z(x)}{\partial x^j}$$

для любой функции $z(x)$ из пространства H_1.

Пусть $\varphi_j(x)$ - решение задачи

$$A\varphi_j(x) = (-1)^m \frac{d^{2m}\varphi_j(x)}{dx^{2m}} = e_j(x),$$

$$\varphi_j(-1) = \varphi_j^{'}(-1) = \dots = \varphi_j^{(m-1)}(-1) =$$

$$= \varphi_j(1) = \varphi_j^{'}(1) = \dots = \varphi_j^{(m-1)}(1) = 0,$$

где $e_j(x)(j = 0, 1, 2, \dots)$ – заданная полная ортонормированная система функций в $L_2(-1, 1)$.

Через H^n обозначена линейная оболочка функций $e_0(x), e_1(x), .., e_n(x)$ и через P_n ортопроектор в $L_2(-1, 1)$ на линейную оболочку H^n. Пусть H_1^n- линейная оболочка функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$.

Приближённое решение $u_n(x, t)$ задачи $(1){-}(3)$ по методу Галёркина-Петрова находится в виде конечной суммы

$$u_n(x, t) = \sum_{s=0}^{n} a_s(t)\varphi_s(x),$$

где неизвестные коэффициенты $a_s(t)$ являются решениям дифференциально-операторного уравненения

$$P_n \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} + a(t)Au_n(x, t) + P_n K(t)u_n(x, t) = P_n f(x, t),$$

с начальным условием

$$u_n(x, 0) = 0.$$

Основным результатом второго параграфа первой главы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$, $a(t) \geq \delta > 0$ и $a(t)$ имеет производную $a^{'}(t) \leq 0$. Пусть функция $f(x, t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$, имеет производную $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ из пространства $L_2(Q)$, $f(x, 0) = 0$ и выполнено следующее неравенство*

$$(K(t)z, z)_{L_2(-1,1)} \geq 0.$$

Тогда задача $(1){-}(3)$ имеет решение $u(x, t)$ из пространства $W_2^{2m,1}(Q)$, и это решение единственно. Приближённые решения $u_n(x, t)$, построенные по методу Петрова-Галёркина для задачи $(1) - (3)$, сходятся к точному решению по норме пространства $W_2^{2m,1}(Q)$. При этом имеет место оценка быстроты сходимости

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t) - u_n(x, t)\|_{L_2(-1,1)} \leq M_1 g(n), \tag{4}$$

где $g(n) = n^{-m+\frac{1}{2}}$ и постоянная $M_1 \geq 0$ не зависит n.

В третьем параграфе исследуются нелинейные дифференциально-операторные уравнения третьего порядка с главным самосопряженным оператором и подчиненным ему нелинейным монотонным оператором. Используя метод Галёркина с базисом специального вида, доказано существование и единственность сильного решения. Получены оценки скорости сходимости приближенного решения, зависящие от собственных чисел главного оператора уравнения.

Через H_1 обозначено сепарабельное гильбертово пространство, плотно и компактно вложенное в сепарабельное гильбертово пространство H.

Рассмотрена задача

$$w'''(t) + Bw(t) - K[w(t)] = r(t), \tag{5}$$

$$w(0) = w(T) = w'(0) = 0. \tag{6}$$

Здесь $w(t)$ – неизвестная функция, определённая на отрезке $[0, T]$. Функция $r(t)$ задана и также определена на конечном отрезке $[0, T]$.

Сделаны предположения о том, что для оператора B выполнены следующие условия.

1. B – самосопряженный оператор в H с областью определения $D(B) = H_1$.

2. Существует $\gamma > 0$ такая, что $(Bu, u)_H \le -\gamma \|u\|_H^2$ для любого $u \in H_1$.

Нелинейный оператор $K[\cdot]$ является монотонным.

Через $L_2(0, T; H)$ обозначено гильбертово пространство всех сильно измеримых на $[0, T]$ функций, для которых конечна норма

$$\|u(t)\|_{0,2} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Через $W_2^3(H, H_1)$ обозначено пространство функций $u(t)$ таких, что $\frac{d^j u}{dt^j} \in L_2(0, T; H)$ $(j = 0, 1, 2, 3)$. В пространстве $W_2^3(H, H_1)$ введена следующая норма

$$\|u(t)\|_{2,3} = \left(\sum_{j=0}^{3} \int_0^T \left\| \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right\|_H^2 dt + \int_0^T \|Bu(t)\|_H^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}_2^3 (H, H_1)$ обозначено подпространство функций $u(t)$ из $W_2^3(H, H_1)$, для которых выполнено условие $u(0) = u(T) = u'(0) = 0$.

Полная ортонормированная система собственных элементов оператора $-B$ обозначена через e_1, e_2, $\ldots, e_n, \ldots$, а через λ_1, λ_2, $\ldots, \lambda_n, \ldots$ обозначены соответствующие собственные числа такие, что $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$, $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Через P_n обозначен ортопроектор в H на линейную оболочку H^n элементов e_1, e_2, $\ldots$, e_n. В подпространстве H^n исследована задача

$$w_n'''(t) + Bw_n(t) - P_n K[w_n(t)] = P_n r(t), \tag{7}$$

$$w_n(0) = w_n(T) = w'_n(0) = 0. \tag{8}$$

Определение 0.0.1. *Решения* $w_n(t)$ *задачи* (7)–(8) *назовем приближенными решениями задачи* (5)–(6), *построенными по методу Галёркина.*

В данном параграфе доказаны существование и единственность решений задачи (5)–(6). При дополнительных условиях на оператор K установлена однозначная разрешимость задачи (7)–(8) в пространстве $W_2^3(H, H_1)$.

Установлена следующая оценка скорости сходимости приближенных решений задачи (5)–(6), построенных по методу Галёркина, к точному решению:

$$\|(-B)^{\frac{1}{2}}(w_n - w)\|_{0,2} \leq M_2 \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}.$$

где постоянная $M_2 \geq 0$ не зависит от n и t.

В четвертом параграфе для математической модели имеющей вид параболического уравнения четвёртого порядка с начальным и краевыми условиями проведён численный эксперимент.

Пусть в (1)–(3) $m = 2$, $r = 3$, функции $b_j(x,t)$ такие, что $(K(t)z, z)_{L_2(-1,1)} \geq 0$, тогда имеем начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a(t)\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \sum_{j=0}^{3} b_j(x,t)\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} = f(x,t), \qquad (x,t) \in Q, \tag{9}$$

$$u(-1,t) = \frac{\partial u(-1,t)}{\partial x} = u(1,t) = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{10}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad -1 \leq x \leq 1. \tag{11}$$

На основе исследованного в диссертации метода разработана программа численного решения математических моделей, имеющих вид параболического уравнения четвёртого порядка (9)–(11) в цилиндрической области. В зависимости от заданных функций $a(t)$, $b_j(x,t)$ и правой части $f(x,t)$ программа находит приближенное решение и строит его график. Путем проведённых численных экспериментов установлено, что поведение погрешности построенных приближенных решений соотвествует оценке (4), полученной в теореме 1.

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию метода Петрова-Галеркина для решения параболических уравнений высокого порядка в нецилиндрической области. Нецилиндрические области и задачи такого рода возникают при математическом моделировании процессов переноса тепла, в медицине, экологии, при моделировании процессов тепловой защиты для космических аппаратов и во многих других областях.

Данная глава состоит из трёх параграфов.

В первом параграфе приводится постановка начально-краевой задачи для параболических уравнений высших порядков в нецилиндрической области.

Через D обозначена криволинейная трапеция с образующими, параллельными оси Ox и ограниченными кривыми $x = \psi(t)$, $x = \varphi(t), 0 \le t \le T$. Пусть функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$, причём $0 < \mu \le \varphi(t) - \psi(t)$.

В области D рассмотрена следующая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} + \sum_{j=0}^{r} a_j(x,t) \frac{\partial^j u}{\partial x^j} = f(x,t), 0 \le r \le 2m-1, \tag{12}$$

$$u(\psi(t),t) = u(\varphi(t),t) = \ldots = \frac{\partial^{m-1} u(\psi(t),t)}{\partial x^{m-1}} = \frac{\partial^{m-1} u(\varphi(t),t)}{\partial x^{m-1}} = 0, \tag{13}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad \psi(0) \le x \le \varphi(0). \tag{14}$$

Во втором параграфе для задачи (12)–(14) доказана сходимость и установлены оценки скорости сходимости приближённых решений, построенных по методу Петрова-Галёркина, к точным.

Функции $\gamma_s(\xi)$ являются решением задачи

$$\frac{d^{2m} \gamma_s(\xi)}{d\xi^{2m}} = \sin(s\pi\xi),$$

$$\gamma_s(0) = \gamma_s(1) = \ldots = \frac{d^{m-1}\gamma_s(0)}{d\xi} = \frac{d^{m-1}\gamma_s(1)}{d\xi} = 0.$$

Пусть P_n-ортопроектор в $L_2(0,1)$ на линейную оболочку функций $e_s(\xi) = \sin(s\pi\xi)$,$s = 1, \ldots, n$. Согласно методу Петрова-Галёркина приближённое решение задачи (12)–(14) находится в виде конечной суммы

$$u_n(x,t) = \sum_{s=1}^{n} c_s(t) \gamma_s \left(\frac{x - \psi(t)}{\varphi(t) - \psi(t)} \right).$$

Здесь неизвестные коэффициенты $c_s(t)$ являются решениями задачи Коши

$$P_n \frac{\partial v_n(\xi,t)}{\partial t} + P_n \frac{(-1)^m}{(\varphi(t) - \psi(t))^{2m}} \frac{\partial^{2m} v_n(\xi,t)}{\partial \xi^{2m}} +$$

$$+ P_n \sum_{j=0}^{r} \frac{a_j(\xi(\varphi(t) - \psi(t)) + \psi(t), t)}{(\varphi(t) - \psi(t))^j} \frac{\partial^j v_n(\xi,t)}{\partial \xi^j} = P_n f(\xi(\varphi(t) - \psi(t)) + \psi(t), t),$$

$$v_n(\xi, 0) = 0,$$

где $v_n(\xi,t) = \sum\limits_{s=1}^{n} c_s(t)\gamma_s(\xi)$.

Основным результатом второго параграфа является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,t) \in L_2(D)$, $f(x,0) = 0$ и имеет производную по t из $L_2(D)$. Пусть функции $\varphi(t), \psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$, а функции $a_j(x,t)$ имеют непрерывную производную по t. Пусть коэффициенты $a_j(x,t)$ такие, что*

$$\int\limits_{\psi(t)}^{\varphi(t)} a_j(x,t)\frac{\partial^j z(x)}{\partial x^j} z(x)dx \geq 0$$

для любой функции $z(x)$ из $W_2^{2m}(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{m}(\psi(0), \varphi(0))$. Тогда

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int\limits_{\psi(t)}^{\varphi(t)} |u(x,t) - u_n(x,t)|^2 dx \leq M_3 n^{-2m+1}, \tag{15}$$

где постоянная $M_3 \geq 0$ не зависит от n.

В третьем параграфе для математической модели, имеющей вид параболического уравнения четвёртого порядка в нецилидрической области, проведён численный эксперимент.

Пусть в (12)–(14) $m = 2$, $r = 3$, тогда имеем начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \sum_{j=0}^{3} a_j(x,t) \frac{\partial^j u}{\partial x^j} = f(x,t), \tag{16}$$

$$u(\psi(t),t) = u(\varphi(t),t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\psi(t),t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\varphi(t),t) = 0, \tag{17}$$

$$u(x,0) = 0, \psi(0) \leq x \leq \varphi(0). \tag{18}$$

На основе исследованного в диссертации метода разработана программа численного решения математических моделей, имеющих вид параболического уравнения 4 порядка (16) – (18) в нецилидрической области. В зависимости от заданных функций $a_j(x,t)$ и правой части $f(x,t)$ программа находит приближенное решение и строит его график. Путем проведённых численных экспериментов установлено, что поведение погрешности построенных приближенных решений соотвествует оценке (15), полученной в теореме 2.

Третья глава диссертационной работы посвящена проекционно-разностному методу решения нестационарного модельного уравнения конвекции-диффузии-реакции. Данная задача возникает при моделировании различных процессов переноса, например, при моделировании процессов загрязнения окружающей среды, процессов переноса кислорода и других химических элементов в кровеносной системе организма, динамики популяции особей, для определения безопасных мест установки заводов и др.

Данная глава состоит из четырёх параграфов.

В первом параграфе приведена постановка задачи конвекции-диффузии-реакции и приведены вспомогательные утверждения.

Обозначим $\overline{\Omega} = [0,1] \times [0,1]$. В цилиндре $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times [0,T]$ рассмотрена начально-краевая задача для уравнения диффузии-конвекции-реакции:

$$\frac{\partial \varphi(x,y,t)}{\partial t} - \nu \Delta \varphi(x,y,t) + (\overline{u}, \nabla \varphi(x,y,t)) + k(x,y,t)\varphi(x,y,t) = \tag{19}$$

$$= h(x,y,t),$$

$$\varphi(x,y,0) = 0, \ \ (x,y) \in \Omega, \tag{20}$$

$$\varphi(0,y,t) = \varphi(1,y,t) = 0, \tag{21}$$

$$\varphi(x,0,t) = \frac{\partial \varphi(x,1,t)}{\partial y} = 0, \tag{22}$$

где $\varphi(x,t)$ - концентрация загрязняющего вещества, $k(x,y,t)$ - неотрицательная функция, характеризующая распад загрязняющего вещества, $\nu > 0$ - коэффициент диффузии, $\overline{u} = (u_1, u_2)$ - заданный соленоидальный вектор скорости, $h(x,y,t)$ - плотность объёмных источников.

Положим $H_1 = W_{2,0}^2(\Omega) = \{z(x) : z(x) \in W_2^2(\Omega), z(0,y) = z(1,y) = z(x,0) = 0, \frac{\partial z}{\partial y}(x,1) = 0\}$.

На H_1 определены операторы $A = -\nu\Delta$, $K(t) = (\overline{u}, \nabla \cdot) + k(x,y,t)I$. Тогда задачу (19)-(22) в пространстве H можно записать в операторном виде

$$u'(t) + Au(t) + K(t)u(t) = h(t), \quad u(0) = 0. \tag{23}$$

Делается предположение о том, что $u_2(x,1,t) = 0$, функции $\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$, $\frac{\partial k(x,y,t)}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 k(x,y,t)}{\partial t^2}$ непрерывны в $\overline{Q}$.

Второй параграф посвящен исследованию метода Петрова-Галёркина для решения нестационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции.

Через $\{e_s\}_{s=1}^{\infty}$ обозначена полная ортонормированная система элементов в $L_2(\Omega)$. Последовательность $\gamma_s \in H_1$ $(s = 1, 2, \ldots)$ определяется уравнением $A\gamma_s = e_s$. Через P_n обозначен ортопроектор в $L_2(\Omega)$ на линейную оболочку H^n элементов e_1, e_2, $\ldots$, e_n.

Метод Петрова-Галёркина для приближенного решения задачи (23) приводит к следующему уравнению:

$$P_n u_n'(t) + Au_n(t) + P_n K(t) u_n(t) = P_n h(t), \ u_n(0) = 0,$$

где $u_n(t) = \sum\limits_{s=1}^{n} \alpha_s(t)\gamma_s$.

Доказана сходимость построенного приближённого решения к точному, найдены оценки скорости сходимости приближённых решений к точным.

В третьем параграфе проведена полная дискретизация задачи (19) – (22).

На отрезке $[0,T]$ вводится равномерная сетка

$$\overline{\omega} = \{t_s = s\tau, s = 0, 1, \dots N, \tau N = T\}.$$

Вектор $\omega_n^\tau = \left\{\omega_n^s : \omega_n^s = \sum_{j=1}^n \alpha_j^s \gamma_j\right\}_{s=0}^N$ является решением следующей задачи

$$P_n \frac{\omega_n^{s+1} - \omega_n^s}{\tau} + A\omega_n^{s+1} + P_n K(t_s)\omega_n^{s+1} = P_n h(t_s), \tag{24}$$

$$\omega_n^0 = 0 \qquad s = 0, 1, \dots, N-1. \tag{25}$$

Решение ω_n^τ задачи (24)–(25) назовем приближенным решением задачи (23), построенным по проекционно-разностному методу.

Доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $h(t) \in C^2([0,T]; L_2(\Omega))$, $h(0) = 0$, $h'(0) \in D(A^{1/2})$. Тогда существует $\tau_0 > 0$ такое, что для всех $\tau \leq \tau_0$ имеет место оценка*

$$\sup_s \|\omega_n^s - u(t_s)\|_{L_2(\Omega)} \leq M_4 \left(\tau + \frac{1}{n^{3/4}}\right), \tag{26}$$

где постоянная $M_4 \geq 0$ не зависит от n и t.

В четвёртом параграфе проведена численная реализация разработанного проекционно-разностного метода решения нестационарного модельного уравнения конвекции-диффузии-реакции. При этом в качестве $e_{ks}(x,y)$ использовались функции вида:

$$e_{ks}(x,y) = 2\sin(k\pi x)\sin(s\pi y).$$

Тогда

$$\gamma_{ks}(x,y) = \sin(k\pi x)\frac{(-1)^s s(e^{-k\pi y} - e^{k\pi y}) + 2k\sin(s\pi y)ch(k\pi)}{\pi^2 k\nu ch(k\pi)(k^2+\pi^2)}.$$

На основе исследованного в диссертации метода разработана программа численного решения нестационарного модельного уравнения конвекции-диффузии-реакции (19) – (22). Для поиска приближенного решения уравнения конвекции-диффузии-реакции используется проекционно-разностный метод. Для аппроксимации по пространственным переменным используется метод Петрова-Галёркина. В зависимости от заданных пользователем функций, описывающих распад загрязняющего вещества, плотность объёмных источников, значение соленаидального вектора скорости и коэффициент диффузии программа находит приближенное решение нестационарной задачи конвекции-диффузии-реакции и строит его график. Путем проведённых численных экспериментов установлено, что поведение погрешности построенных приближенных решений соотвествует оценке (26), полученной в теореме 3.

Заключение

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Для начально-краевой задачи для параболического уравнения высокого порядка рассматриваемого в цилиндрической и нецилидрической областях доказана сходимость приближённых решений, построенных по методу Галёркина-Петрова, к точному. Получены новые равномерные оценки скорости сходимости приближённых решений, построенных по методу Галёркина-Петрова, к точному.

2. Для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка с главным самосопряженным оператором и подчиненным ему нелинейным монотонным оператором установлены оценки скорости сходимости приближенных решений, построенных методом Галёркина с базисом специального вида, доказаны существование и единственность сильного решения.

3. Для начально-краевой задачи со смешанными граничными условиями для двумерного нестационарного модельного уравнения конвекции-диффузии-реакции доказана сходимость численного алгоритма и получены новые оценки скорости сходимости приближенных решений, построенных проекционно-разностным методом, к точному.

4. Разработан комплекс программ численного решения начально-краевых задач, возникающих при моделировании процессов переноса: параболических уравнений четвёртого порядка в цилиндрической и нецилидрической областях, нестационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции.

5. Проведено тестирование вычислительных методов решения начально-краевых задач, возникающих при моделировании процессов переноса. Установлено соответствие практической и теоретической погрешностей приближенных решений.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи автора в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК

1. Зарубин, А.Г. Метод моментов решения начально-краевой задачи для параболических уравнений высших порядков / А.Г. Зарубин, А.М. Самусенко // Вестник ТОГУ. – 2011. – № 4(23). – С. 53-62.

2. Виноградова, П.В. Проекционный метод для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка с нелинейным монотонным оператором / П.В. Виноградова, А.М. Самусенко // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. XV, № 4(52). – С. 64-70.

3. Виноградова, П.В. Метод Галёркина-Петрова для одномерных параболических уравнений высокого порядка в областях с меняющейся границей / П.В. Виноградова, А.Г. Зарубин, А.М. Самусенко // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 3-10.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

4. Самусенко, А.М. Численное решение задачи конвекции-диффузии-реакции / А.М. Самусенко // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015611148. – дата регистрации 26.01.2015.

5. Самусенко, А.М. Численное решение параболического уравнения 4 порядка в цилидрической области / А.М. Самусенко // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015613965. – дата регистрации 31.03.2015.

6. Виноградова, П.В. Численное решение параболического уравнения 4 порядка в нецилидрической области методом Петрова-Галёркина/ П.В. Виноградова, А.М. Самусенко // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015617251. – дата регистрации 03.07.2015.

Прочие публикации

7. Виноградова, П.В. О методе Галёркина для нелинейного дифференциально-операторного уравнения третьего порядка / П.В. Виноградова, А.М. Самусенко // V Международная научная конференция "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования": материалы докладов, Воронеж , 11-16 сентября 2012 г. – Воронеж : Изд. Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2013. – С. 72.

8. Виноградова, П.В. Метод Галёркина-Петрова для параболических уравнений высокого порядка в областях с меняющейся границей / П.В. Виноградова, А.М. Самусенко // Двадцатая международная конференция "Математика. Компьютер. Образование."Международная школа-конференция "Биофизика сложных систем. Анализ и моделирование". : материалы докладов, Пущино, 28 января - 2 февраля 2013 г. – М. : Изд. R&C dynamics, 2013. – С. 132.

9. Зарубин, А.Г. Метод моментов решения задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений / А.Г. Зарубин, А.М. Самусенко // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Теория функций, её приложения и смежные вопросы : материалы Одиннадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции, Казань, 22 - 28 августа 2013 г. – Казань : Изд. Казанский университет. – 2013. – Т.46. – С. 202-203.

10. Самусенко, А.М. О влиянии базиса на метод моментов решения параболического уравнения / А.М. Самусенко // Двадцать первая международная конференция "Математика.Компьютер.Образование". Международная конференция "Анализ сложных биологических систем.Эксперимент и модели". Эксперимент и модели. : материалы докладов, Дубна , 3 - 7 февраля 2014 г. – М. : Изд. R&C dynamics, 2014. – С. 104.

11. Самусенко, А.М. Решение параболических уравнений четвёртого порядка в нецилиндрической области методом моментов / А.М. Самусенко // Научно-техническое и экономическое сотрудничество стран АТР в XXI веке : труды Всероссийской научно-практической конференции творческой молодёжи с международным участием, Хабаровск , 23 - 25 апреля 2014 г. – Хабаровск : Изд. ДВГУПС, 2014. – Т. 1. – С. 256-261.

12. Самусенко, А.М. Об одном численном методе решения уравнения диффузии-конвекции-реакции / А.М. Самусенко // Современные методы теории функций и смежные вопросы : материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 27 января - 2 февраля 2015 г. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. – С. 119.

13. Самусенко, А.М. Численное решение модельной задачи распространения загрязняющих веществ / А.М. Самусенко // Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления : материалы III всероссийской научно-практической конференции, Хабаровск, 30 июня - 4 июля 2015 г. – Хабаровск : Изд. Тихоокеан. гос. ун-та, 2015. – С. 157-159.