МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КОМСОМОЛЬСКИЙ-НА-АМУРЕ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Васильев Алексей Сергеевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ В ОБЛАСТИ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель: д.т.н.,
профессор Н.А. Тарануха

Комсомольск-на-Амуре – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы.

Численным исследованиям конструкций из композитных материалов посвящено много работ. В настоящее время композитные материалы активно используют в различных современных отраслях промышленности: строительстве, автомобилестроении и кораблестроении. Как известно, композитные материалы состоят из двух или более компонентов, различающихся по составу и разделенных выраженной границей. В таких материалах имеются усиливающие элементы в виде нитей, волокон или хлопьев более прочного материала.

Компонентами композитов являются самые разнообразные материалы: металлы, керамика, стекла, пластмассы. В наше время распространены полимерные композитные материалы: стеклопластики, углепластики, органопластики. Известны многокомпонентные композиционные материалы – полиматричные, когда в одном материале сочетают несколько матриц, или гибридные, включающие в себя разные наполнители. Традиционным композитом является железобетон, сочетающий в себе совместную работу бетона и стальной арматуры, активно используемый в строительстве зданий и сооружений. Существуют различные подходы и методики для расчета строительных конструкций из железобетона. При этом, исходя из действующих нормативных документов, расчет ведется по двум группам предельных состояний: по несущей способности и по пригодности к нормальной эксплуатации.

Большая распространенность композитов требует изучения их свойств, влияние на жесткость и несущую способность конструкций на разных этапах их работы под нагрузкой. Расчет таких конструкций можно выполнять методом конечных элементов с использованием шагово-итерационных процедур на базе общих принципов механики деформируемого твердого тела и численных методов решения физически нелинейных задач. Это позволяет проследить за характером напряженно-деформируемого состояния конструкций на различных этапах нагружения, включая предельные. При этом, информация о физической нелинейности материалов конструкции содержится в матрице жесткости системы.

Существуют различные подходы для учета совместной работы нескольких материалов в составе одного, при изменении механических характеристик этих материалов под нагрузкой. Однако единой, общей методики для этого на настоящий момент нет.

Цель работы: разработать математическую модель и методику расчета линейных и физически нелинейных задач численного исследования композитных материалов и конструкций в области их предельных состояний.

Задачи:

– Провести анализ и систематизацию математических моделей критериев прочности материалов и конструкций.

– На основе выбранного критерия прочности построить математическую модель для исследования прочности материалов в составе композита. В качестве численного метода исследований использовать МКЭ, с применением новой матрицы жесткости нелинейного композитного конечного элемента на основе математической модели критерия прочности.

– Разработать численные процедуры и спроектировать программный комплекс для численного исследования свойств материалов в составе композита и напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных материалов в области их предельной прочности и жесткости.

– Разработать методику для численного исследования напряженно-деформированное состояние конструкций из композитных материалов на различных этапах статического нагружения, включая предельные. Выполнить тестирование и практическую апробацию математической модели и программного комплекса.

– Выполнить сопоставление и анализ полученных результатов. Сделать выводы и рекомендации по применению данной математической модели, методики и программного комплекса

Предмет исследования: статические линейные и нелинейные задачи численного исследования композитов и конструкций из композитных материалов в области их предельных состояний.

Объект исследования: разработанные математическая модель, методика и программные продукты для исследования напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных материалов на различных этапах нагружения, включая предельные;

Научная новизна работы. Основные результаты, полученные автором при проведении исследований:

1) Проанализированы и систематизированы математические модели критериев прочности материалов и конструкций.

2) Построена математическая модель для расчета напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных материалов на различных этапах нагружения.

3) Разработаны численные процедуры и спроектирован программный комплекс для численного исследования напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных материалов и свойств этих материалов.

4) Для конструкций из композитных материалов разработаны:

1) методика численного исследования напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных материалов, учитывающая физически-нелинейные свойства материалов в составе композита;

2) матрица жесткости для расчетов композитных конструкций методом конечных элементов по разработанной математической модели, учитывающей нелинейность материалов;

3) сформулирована, проверена и использована идея комбинирования объемов для определения приведенных механических характеристик при вычислении матрицы жесткости композитного конечного элемента.

Практическая значимость

Разработана методика исследования напряженно-деформированного состояний конструкций из композитных материалов в области предельной прочности, с учетом изменения механических характеристик этих материалов в результате нагружения конструкции. По данной методике, для конструкции из композитного материала, смоделированной объемными конечными элементами, при простых напряженных состояниях, расчетным путем можно определить напряженно-деформированное состояние на различных этапах нагружения, вплоть до предельного. При этом можно учитывать любое количество составляющих внутри композита в пределах объема конечного элемента. Эти составляющие характеризуются своими объемами, и данную методику можно применить для композитов, имеющих в своем составе локальные инородные включения, газовые пузыри, технологические отверстия.

Сформулированы рекомендации по применению данной методики для расчетов конструкций

Для численного исследования конструкций из композитных материалов в области предельной прочности разработан и реализован программный комплекс.

Полученные результаты были использованы в разделе, связанном с математическим моделированием задач для объектов современной океанотехники, при выполнении гранта: Задание № 9.356.2014/К на выполнение научных проектов Минобрнауки России в рамках выполнения проектной части государственного задания в сфере научной деятельности образовательными организациями ВПО Минобрнауки России на 2014-2016 годы. Тема НИР «Проведение теоретических и экспериментальных исследований эксплуатационных качеств судов на базе Дальневосточного опытового бассейна для регионов Арктики и Дальнего Востока РФ». 2014-2016 гг.

Так же полученные научные и практические результаты используются в учебном процессе при чтении лекций на кафедре «Кораблестроение» в ФГБОУ КнАГТУ

Положения, выносимые на защиту.

- Систематизация математических моделей критериев прочности материалов и конструкций.
- Новая математическая модель, включающая аппроксимацию функциональных зависимостей диаграмм деформирования материалов в составе композита, а так же матрицу жесткости физически-нелинейного композитного конечного элемента (КЭ).
- Численные процедуры, алгоритмы и программы, реализующие данную математическую модель на основе МКЭ.
- Методика исследования НДС конструкций из композитных материалов в области предельной прочности, с учетом изменения механических характеристик этих материалов в результате нагружения в составе композита.
- Идея комбинирования объемов для определения приведенных механических характеристик при вычислении матрицы жесткости композитного конечного элемента.
- Полученные результаты расчетов по математической модели данной диссертации, основанные на методе конечных элементов и математических моделях критериев прочности материалов, согласуются с экспериментальными исследованиями и расчетами в других программных продуктах, для перемещений и напряжений конструкций из композитных материалов.

Апробация диссертации

Основные положения и отдельные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

– Международной заочной научно-практической конференции «Современное общество, образование и наука». Тамбов, 2014 г.

– Международном симпозиуме «Наука. Инновации. Техника и технологии: проблемы, достижения и перспективы», г. Комсомольск-на-Амуре. 2015 г.

– The 29th Asia-Pacific Technical Exchange and Advisory Meeting on Marine Structures (TEAM-2015). – Vladivostok, 2015, Russia.

– Научный семинар в институте машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (ФГБУН ИМиМ ДВО РАН), 2016.

– Расширенный научный семинар профильных кафедр ФГБОУ ВПО КнАГТУ, 2016.

Публикации по работе

По теме диссертационной работы опубликовано 4 статьи в ведущих рецензируемых журналах из списка ВАК, 3 статьи в материалах и трудах конференций, 4 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора

В совместных работах [98-100], [18-19], [130] автор выполнял теоретические исследования и проводил обработку результатов. Работа [20] выполнена автором лично.

Благодарность

Автор выражает благодарность научному руководителю – д. т. н., профессору Николаю Алексеевичу Таранухе за вклад в виде практических советов и консультаций по теме диссертации.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 165страниц, включая 84 рисунка, 11 таблиц, 3 приложения на 9 страницах. Список литературы включает 130 наименований.

Содержание глав диссертации.

ВВЕДЕНИЕ содержит актуальность темы; цели и задачи исследования; предмет и объект исследования; научную новизну; практическую значимость.

В ПЕРВОЙ ГЛАВЕ на основании обзора отечественной и зарубежной литературы можно сделать вывод о существовании множества различных математических моделей и подходов для определения прочности композитных материалов, расчета конструкций и изделий из них. Наибольшее распространение в области исследований композитов имеют феноменологически - статистические подходы, основанные на аппроксимации экспериментальных данных при простейших испытаниях материала. Выполнен обзор методов экспериментального исследования композитных материалов. Отмечен вклад в исследование композитов таких авторов, как А.А. Гвоздев, В.Ф. Зинченко, Н.И. Карпенко, С.Ф. Клованич, В.М. Круглов, В.А. Латишенко, Г. П. Черепанов, А.В. Яшин, Z.P. Bazant, V. Cervenka, A. Kelly. E.P. Warnke, K.J. Willam.

В конце первой главы выполнена постановка задачи исследования, определена структура диссертационной работы.

ВО ВТОРОЙ ГЛАВЕ произведен анализ математических моделей критериев прочности материалов и их систематизация. Описаны преимущества и недостатки этих математических моделей. Так же описаны и систематизированы критерии прочности конструкций. Для задач, решаемых в рамках диссертационной работы, определен критерий прочности конструкции, характеризующий разрушающую нагрузку и предельные деформации на этапе полного разрушения.

В ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ построена математическая модель для исследования конструкций из композитных материалов в области предельной прочности, основанная на МКЭ. Разработана матрица жесткости нелинейного композитного КЭ. Нелинейность модели основывается на аппроксимационных функциональных зависимостях диаграмм деформирования материалов ε – σ. Предлагаемая математическая модель, основанная на МКЭ, позволяет определять напряженно-деформированное состояние в каждом КЭ и конструкции в целом, на различных этапах нагружения и разрушения конструкции, включая предельные. При этом можно учитывать любое количество составляющих внутри композита в пределах конечного элемента.

В ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЕ представлены алгоритмы работы программ, реализующих разработанную автором математическую модель. В качестве компилятора использовалась программная среда Matlab 2009b, использующая язык программирования Matlab. Алгоритмы в данной главе представлены как на данном языке программирования, так и посредствам блок-схем.

В ПЯТОЙ ГЛАВЕ осуществляется тестирование разработанной математической модели и программного обеспечения при исследовании статически-определимых конструкций из композитных материалов, их сравнение с результатами экспериментов и расчетами в других программных продуктах.

В ШЕСТОЙ ГЛАВЕ исследуется статически-неопределимая трехопорная рама из композитного материала в области предельной прочности, производится анализ полученных результатов. При этом расчет автора сравнивается с результатами расчетов в ПК ANSYS и ПК ЛИРА. Представлены формы искривления и разрушения рамы на различных этапах нагружения, эпюры напряжений связующего и армирующего материалов, результаты перемещений на различных этапах нагружения, вплоть до предельного.

В ЗАКЛЮЧЕНИИ приведены основные выводы по исследованию и даны рекомендации по применению данной математической модели, методике и программного комплекса.

Глава 1 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1 Обзор математических моделей критериев прочности материалов

1.1.1. Базовые математические модели прочности материалов.

В зависимости от условий нагружения, материал может находиться в различных механических состояниях: упругом, пластическом, в состоянии разрушения. Под предельным подразумевают такое напряженное состояние, при котором происходит качественное изменение свойств материала — переход от одного механического состояния к другому. Для пластических материалов предельным считается напряженное состояние, соответствующее заметным остаточным деформациям, а для хрупких — такое, при котором начинается разрушение материала. В данном разделе приводятся базовые математические модели (ММ)[3, 90]пяти известных теорий прочности.

1.1.1.1 Математическая модель первой теории прочности — теории наибольших нормальных напряжений.

Теория наибольших нормальных напряжений — основана на гипотезе о том, что опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии. Приведенные напряжения при объемном напряженном состоянии[3, 90]:

$$\sigma_{np}^{I} \leq \sigma_1, \tag{1.1}$$

где σ_1 – наибольшее из трех главных напряжений, σ^{I}_{np} – величина максимально возможных напряжений, исходя из расчетного сопротивления материала. В общем случае $\sigma^{I}_{np}=R$, гдеR–расчетное сопротивление материала при одноосном растяжении или сжатии.

Первая теория прочности подтверждается опытами только при растяжении хрупких материалов и лишь в тех случаях, когда все три главные напряжения не однозначны и различны по величине.

1.1.1.2 Математическая модель второй теории прочности – теории наибольших относительных удлинений

Вторая теория прочности — теория наибольших относительных удлинений исходит из гипотезы о том, что разрушение связано с величиной наибольших относительных удлинений. Следовательно, опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшая по модулю относительная линейная деформация достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии.

В этом случае приведенные напряжения при объемном напряженном состоянии[3, 90]:

$$\sigma_{пр}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \tag{1.2}$$

Где μ – коэффициент Пуассона, σ_1, σ_2 и σ_3 – главные напряжения, причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$[93].

Вторая теория, как и первая, недостаточно подтверждается опытами, что объясняется не учетом особенностей строения реальных тел. Первая и вторая теории прочности отображают хрупкое разрушение путем отрыва (в первой это связывается с $\sigma_{макс}$, второй — с $\varepsilon_{макс}$).

1.1.1.3 Математическая модель третьей теории прочности – теории наибольших касательных напряжений

Третья теория прочности — теория наибольших касательных напряжении. В основу теории положена гипотеза о том, что два напряженных состояния — сложное и линейное — эквиваленты в смысле прочности, если наибольшие касательные напряжения одинаковы. Приведенные напряжения при объемном напряженном состоянии[3, 90]:

$$\sigma_{пр}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \tag{1.3}$$

Третья теория прочности отображает наступление текучести в материале, а также разрушение путем сдвигов. Она хорошо подтверждается опытами с пластическими материалами, одинаково сопротивляющимися растяжению и сжатию при условии, что главные напряжения имеют разные знаки.

1.1.1.4 Математическая модель четвертой теории прочности – энергетической.

Энергетическая теория прочности (теория наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения) исходит из предпосылки о том, что количество потенциальной энергии формоизменения, накопленной к моменту наступления опасного состояния (текучести материала), одинаково как при сложном напряженном состоянии, так и при простом растяжении. Приведенные напряжения при объемном напряженном состоянии[3]:

$$\sigma_{np}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \qquad (1.4)$$

Четвертая теория прочности отображает наступление текучести. Она хорошо подтверждается опытами с пластическими материалами, имеющими одинаковый предел текучести при растяжении и сжатии.

1.1.1.5 Математическая модель пятой теории прочности - теории прочности Мора.

Теория прочности Мора подходит как для проверки прочности хрупких материалов, так и для проверки на прочность пластичных материалов[90].

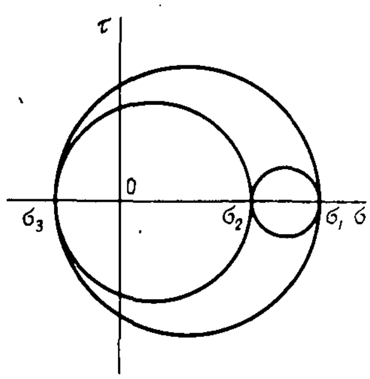


Рисунок 1.1. – Круги Мора для объемного напряженного состояния в точке[3].

$$\sigma_{np} = \sigma_1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_c}\sigma_3 \qquad (1.5)$$

Данную теорию легко интерпретировать с помощью кругов напряжений, как показано на рисунке 1.1. Мора дает результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными в тех случаях, когда круги напряженного состояния в точке тела располагаются между кругами, соответствующими одноосному растяжению и сжатию, т.е. при $\sigma_1>0$, $\sigma_3<0$. Отличительной чертой теории Мора от рассмотренных ранее является то, что она полностью базируется на экспериментальных данных и по мере их накопления может уточняться.

1.1.2 Математические модели критериев прочности, основанные на концепции предельной поверхности (прочности)

Для оценки прочности структурно-неоднородных материалов (многие композиты, бетоны, скальные породы, термореактивные пластмассы), предложено большое количество критериев предельного состояния. В настоящее время известно более 200 различных критериев. Провести их классификацию и сопоставление очень сложно. Однако, большинство из них базируется на предложенной Вестергардом (1920 г.) концепции предельной поверхности [49, 57, 68, 105, 113, 117, 125, 129]. В общем виде функции предельной поверхности характеризуются двумя выражениями:

$$F(T_\sigma) > 0 \text{ или } F(T_\varepsilon) > 0, \qquad (1.6)$$

где T_σи T_ε– соответственно тензоры напряжений и деформаций; $F(T_\sigma)$ и $F(T_\varepsilon)$ – функции напряженного и деформированного состояния.

1.1.2.1. Математическая модель критерия прочности С.Ф. Клованича

Рассмотрим общую концепцию построения предельной поверхности на основе модели функции прочности, разработанной М.М. Филоненко - Бородичем [105], использованной и модифицированной в работе С.Ф. Клованича [49].Как известно, условие прочности должно описывать выпуклую и гладкую поверхность, симметричную относительно диагонали пространства главных напряжений $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$. Строится эта поверхность обычно в местной цилиндрической системе координат σ_o, τ_o, θ, связанной с исходной σ_1, σ_2, σ_3 соотношениями [49]:

$$\sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad ; \tag{1.7}$$

$$\tau_o = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \quad ; \tag{1.8}$$

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos\left(\sqrt{2}\,\frac{D_3}{\tau_o^3}\right), \tag{1.9}$$

где D_3 – третий инвариант девиатора напряжений, равный

$$D_3 = (\sigma_1-\sigma_o)(\sigma_2-\sigma_o)(\sigma_3-\sigma_o) \tag{1.10}$$

Предложенная система координат называется октаэдрической, σ_o – октаэдрические нормальные напряжения, τ_o – октаэдрические касательные напряжения, θ – угол вида напряженного состояния (угол Лодэ).

Поверхность прочности описывается уравнением

$$F(\sigma_o, \tau_o, \theta) \equiv 0 \tag{1.11}$$

Уравнения такого типа строятся на базе опытных данных при частных видах напряженных состояний способом, предложенным М.М. Филоненко-Бородичем . Согласно [105], для однозначного описания функций прочности необходимо пять параметров материала, полученных в результате экспериментов, соответствующих частным случаям напряженного состояния: прочность материала при одноосном сжатии и растяжении R_c и R_p, прочность при двухосном равномерном сжатии и растяжении R_{2c} и R_{2p}, и прочность при трехосном равномерном сжатии *H*. Причем для различных материалов количество данных параметров материала может быть уменьшено при помощи эмпирических формул, связывающих их между собой [49]:

$$R_{2c} \approx \sqrt{2}R_c, \quad R_{2p} \approx R_p, \quad H = 0.72\frac{R_c R_p}{R_c - R_p} \tag{1.12}$$

В формуле (1.12) приведены эмпирические зависимости для бетона

На рисунке 1.2 показана поверхность прочностиматериала.

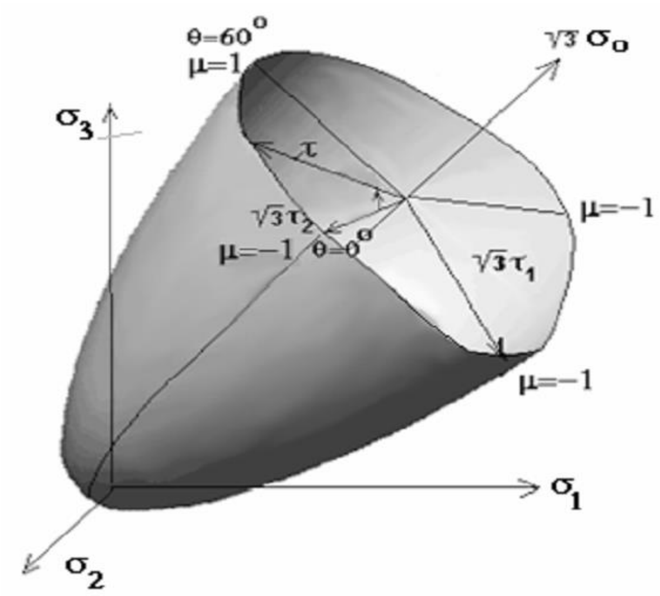


Рисунок 1.2 – Поверхность прочности [49].

Сначала для значений $\theta=0^o$ и $\theta=60^o$ формируются две кривые, как показано на рисунке 1.3.

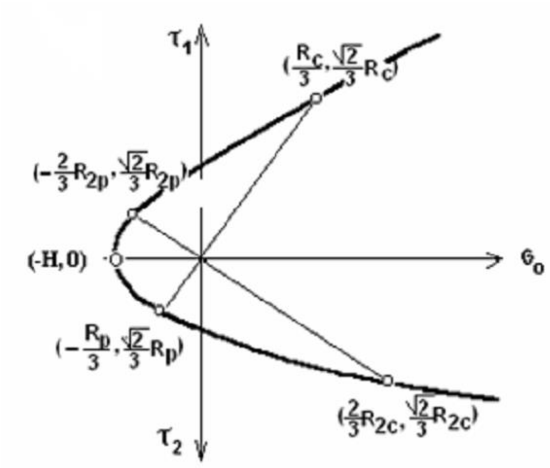


Рисунок 1.3 – Меридиональное сечение поверхности прочности [49].

Кривые $\tau_1(\sigma_o)$ и $\tau_2(\sigma_o)$ строятся на основе опытных данных, при $\sigma_1=\sigma_2>\sigma_3$ и $\sigma_1>\sigma_2=\sigma_3$. Затем осуществляется интерполяция для углов θ, находящихся в интервале $0^o\le\theta\le60^o$. Для описания меридиональных кривых можно использовать квадратичные функции. Сечения поверхности при $\theta=0^o$ и $\theta=60^o$ представляются в виде [49].

$$\sigma_o = A_1\tau_1^2 + B_1\tau_1 + C_1; \quad \sigma_o = A_2\tau_2^2 + B_2\tau_2 + C_2 \tag{1.13}$$

Коэффициенты в выражениях(1.13) находятся в результате подстановки координат характерных точек на рисунке 1.3 и равны [49]:

$$A_1 = \frac{9}{2}\frac{R_c - R_{2p} - H(R_c - R_{2p})}{R_c R_{2p}(R_c - R_{2p})}, \tag{1.14}$$

$$B_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{(R_c^2 - R_{2p}^2)H - R_c R_{2p}(2R_c - R_{2p})/3}{R_c R_{2p}(R_c - R_{2p})}, \tag{1.15}$$

$$C_1 = -H\ , \tag{1.16}$$

$$A_2 = \frac{9}{2}\frac{R_p R_{2c} - H(R_{2c} - R_p)}{R_p R_{2c}(R_{2c} - R_p)}, \tag{1.17}$$

$$B_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{(R_{2c}^2 - R_p^2)H - R_{2c}R_p(R_{2c} - 2R_p)/3}{R_{2c}R_p(R_{2c} - R_p)}, \tag{1.18}$$

$$C_2 = -H \tag{1.19}$$

Девиаторное сечение поверхности прочности изображено на рисунке 1.4.

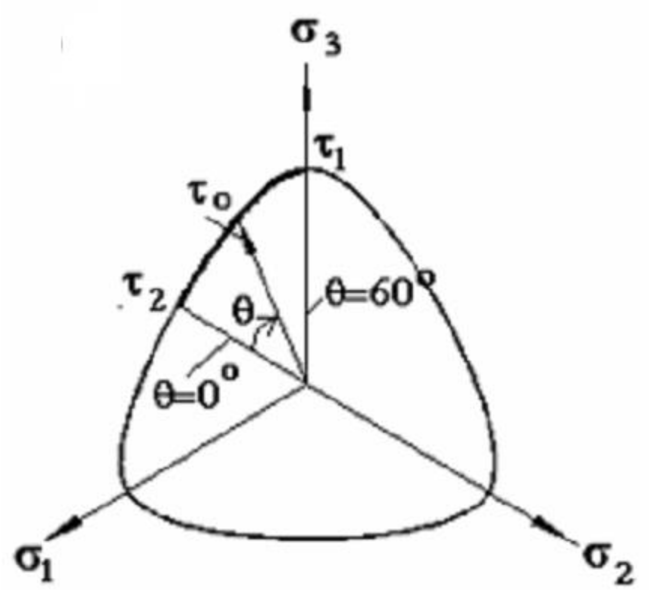


Рисунок 1.4. – Девиаторное сечение [49].

Сечение имеет два радиуса τ_1 и τ_2, соответствующим значениям угла вида напряженного состояния $\theta=0^o$ и $\theta=60^o$. Величина τ_o, соответствующая промежуточным значениям $0^o \le \theta \le 60^o$ может быть найдена приближенно путем криволинейной интерполяции между двумя граничными случаями, то есть:

$$\tau_o = \tau_1 \rho(\theta), \tag{1.20}$$

или

$$F(\sigma_o, \tau_o, \theta) = \tau_o - \tau_1 \rho(\theta) > 0, \tag{1.21}$$

где функция $\rho(\theta)$ описывает сегмент сечения при $0^o \leq \theta \leq 60^o$.

Подставляя значение τ_o из (1.20) в первое из уравнений (1.13), получаем предельную поверхность в виде[49]:

$$\sigma_o = \frac{A_1}{\rho^2}\tau_o^2 + \frac{B_1}{\rho}\tau_o + C_1. \tag{1.22}$$

Интерполяционная функция должна удовлетворять следующим условиям:

$$\rho(\theta = 60^\circ) = 1; \quad \rho(\theta = 0^\circ) = \frac{\tau_2}{\tau_1}; \quad \left.\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right|_{\theta = 0^\circ} = \left.\frac{\partial \theta}{\partial \theta}\right|_{\theta = 60^\circ} = 0 \tag{1.23}$$

Соблюдение условий(1.23) обеспечивает неразрывность и гладкость девиаторного сечения. Исследованиям девиаторного сечения поверхности прочности посвящен ряд работ [27, 42, 53, 110, 125].

1.1.2.2Математическая модель критерия прочности William-Warnke.

Критерий William-Warnke применяется для прогнозирования разрушения структурно-неоднородных (различных композитов, бетонов, горных пород) материалов. В общем случае он имеет вид [70, 129]:

$$F_i = \sqrt{D_2} + \sqrt{\frac{5}{2}}\rho(\theta)\left(\frac{R_{2c}R_c - R_p R_c}{3R_{2c}R_p} I_1 - R_c\right) > 0, \tag{1.24}$$

где I_1 – первый инвариант тензора напряжений, D_2 – второй инвариант девиаторной части тензора напряжений:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad D_2 = \frac{1}{6}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right). \tag{1.25}$$

При этом радиусы τ_1 и τ_2 на рисунке 1.4, соответствующие значениям угла вида напряженного состояния, равны [70, 129]:

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{R_{2c}R_p}{2R_{2c}R_c + R_p R_c}; \tag{1.26}$$

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{R_{2c} R_p}{3R_{2c} R_p + R_{2c} R_c - R_p R_c}. \tag{1.27}$$

Функция ρ(θ) описывает сегмент эллипса при $0^o \leq \theta \leq 60^o$, и может быть записана:

$$\rho(\theta) = \frac{2\tau_2(\tau_2^2 - \tau_1^2 \cos(\theta) + \tau_2(2\tau_1 - \tau_2)\sqrt{4(\tau_2^2 - \tau_1^2 \cos^2(\theta) + 5\tau_1^2 - 4\tau_2\tau_1}}{4(\tau_2^2 - \tau_1^2)\cos^2(\theta) + (\tau_2 - 2\tau_1)^2} \tag{1.28}$$

Зависимость, предложенная William-Warnke[129], является уравнением эллипса, описывающим девиаторное сечение. Данная зависимость используется в программном комплексе ANSYS, COMSOL Multiphysics 3D и других программных комплексах.

1.1.2.3. Математическая модель критерия прочности Друкера - Прагера

Модель критерия Друкера – Прагера [117], разработанная в 1952 году, определяет разрушение материалов под влиянием пластических деформаций. В общем виде данный критерий записывается следующим оразом:

$$F(T_\sigma) = A + BI_1 - \sqrt{D_2} > 0 \tag{1.29}$$

Здесь Аи В – константы, определяемые из экспериментальных данных

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{R_c R_t}{R_c + R_t}\right);\ B = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{R_t - R_c}{R_c + R_t}\right) \tag{1.30}$$

Данный критерий подходит как для пластичных, так и для хрупких материалов. Однако, его применение дает большие погрешности, если прочности материала при сжатии и растяжении отличаются на порядок и выше.

1.1.2.4. *Математическая модель критерия прочности Базанта*

Критерий З.П. Базанта [114] – двухинвариантный деформационный критерий разрушения материала. Применяется в основном для хрупких материалов и представляет собой предельную поверхность прочности в форме параболы в осях первого и второго инвариантв тензора деформаций. При эом в осях главных деформаций предельной поверхностью является поверхность вращения второго порядка. Условие прочности для модели Базанта описывается следующим выражением:

$$F(T_\varepsilon) = AL_1 + \sqrt{B^2 L_1^2 + CJ_2} - d > 0\,, \tag{1.31}$$

где L_1– первый инвариант тензора деформаций, J_2–второй инвариант девиаторной части тензора деформаций, A, B, C, d–коэффициенты, которые вычисляются исходя из результатов лабораторных испытаний материала. Для построения парабы достаточно трех испытаний: R_c,R_t, H. При этом

$$L_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\,, \tag{1.32}$$

$$J_2 = \frac{1}{6}\left((\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xz}^2) \right), \tag{1.33}$$

$F(T_\varepsilon)$ – функция деформированного состояния

1.1.3 Математическая модель прочности ортотропных материалов

Существующие критерии прочности представляют собой аналитическую аппроксимацию экспериментальных результатов. Критерий Нориса [124] подходит в первую очередь для ортотропных материалов. Условие пластичности ортотропных материалов, формулируется в виде квадратичной функции компонентов напряжений:

$$\left(\frac{\sigma_x}{R_x}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x \sigma_y}{R_x R_y}\right) + \left(\frac{\sigma_y}{R_y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{T_{xy}}\right) \le 1\,, \tag{1.34}$$

где σ_x и σ_y – нормальные напряжения, приложенные вдоль направлений упругой симметрии x и y, R_x и R_y – прочность в направлениях упругой симметрии x и y, τ_{xy}и T_{xy} – касательные напряжения и прочность на сдвиг в плоскости xy. При этом при разработке условия прочности учитывается взаимное расположение трех систем координатных осей: анизотропии материала *(x, y, z)*, главных напряжений (σ_1,σ_2,σ_3) и произвольных осей, совпадающих с направлением приложенных напряжений *(a, b, c)*. Данный критерий был предложен Норисом [124] и не учитывает зависимость прочности при сдвиге от направления касательных усилий и неупругие свойства полимерного связующего [102]. Однако его можно использовать для оценки прочности материалов с различной сопротивляемостью сжатию и растяжению. Если знаки напряжений известны, $\sigma_x > 0$ и $\sigma_y > 0$ то R_x и R_y – прочность материала на растяжение. Если $\sigma_x < 0$ и $\sigma_y < 0$ то R_x и R_y – прочность материала на сжатие [21]. Соотношение (1.34) определяет в пространстве поверхность, называемую предельной для ортотропного материала. Теория прочности и механика разрушения ортотропных и анизотропных материалов разрабатывалась в трудах Нориса [124], Захарова [36] и других авторов [4, 14,28, 75, 84, 85, 104].

1.1.4. Математические модели на основе кривых деформирования материалов

Не смотря на обилие различных критериев прочности, особое внимание уделяется кривым деформирования материалов, характеризующим закон деформирования этих материалов. Для различных типов композитных материалов кривые деформирования могут заметно различаться между собой. Более того, эти кривые могут быть различны для каждого материала в составе композита. В общем же характер кривых деформирования композита зависит от процентного содержания составляющих его материалов, схемы нагружения направления армирования, температуры, режима и продолжительности нагружения. При этом для очень малого количества материалов зависимость $\varepsilon - \sigma$ линейна. Диаграммы деформирования материалов при одноосном сжатии и растяжении важны как с точки зрения расчетов конструкций, так и для построения более общих моделей. Анализ кривых деформирования композитов, способы их аппроксимации, применение в расчетах, нашли отражение в работах С.Ф. Клованича [45, 49], Ю.М. Тарнопольского [102], Н.И. Карпенко [41, 42], В.А. Дзюбы [34] и других авторов [19,30, 56,99, 100, 114, 115, 122, 130]. Более подробно модели кривых деформирования рассмотрены в третьей главе

1.1.5 Обзор моделей прочности материалов, используемых в программе ANSYS.

ANSYS - универсальная программная система конечно-элементного (МКЭ) анализа. Модуль ANSYSMechanicals позволяет анализировать сложные конструкции и решать задачи механики деформируемого твердого тела. Комбинация конкретных соотношений для условия текучести, закона течения и закона упрочнения определяет ту или иную модель пластического поведения материала. В программе ANSYS моделируются следующие типы пластического поведения: классическое линейное кинематическое упрочнение; полигональное кинематическое упрочнение; линейное изотропное упрочнение; полигональное изотропное упрочнение; анизотропное поведение; модели материалов Друкера-Прагера, Вильяма и Варнке, Базанта, Ананда. Кроме того, пользователь может задать свой вариант пластической модели.Описание основных моделей прочности материалов, используемых в программе ANSYS, приведено ниже [9].

- Модель классического линейного кинематического упрочнения[9] описывает поведение обычных металлических материалов, схематизированная диаграмма деформирования которых имеет упругий участок и участок линейного упрочнения. Применима к большинству обычных, начально изотропных конструкционных металлов в области малых деформаций. Используется модифицированное условие текучести Мизеса и ассоциированный закон течения. Проявлением кинематического упрочнения является эффект Баушингера.

- Модель полигонального кинематического упрочнения[9] также относится к металлам, но в большей степени применима к тем из них, диаграмма которых имеет более одного линейного участка упрочнения. Эта модель использует схему наложения, или схему Бесселинга, для описания сложного полигонального поведения материала путем комбинирования отдельных откликов, полученных на основе более простых зависимостей “напряжение-деформация”. Используется модифицированное условие текучести Мизеса и ассоциированный закон течения. Проявлением кинематического упрочнения является эффект Баушингера.

- Модель линейного изотропного упрочнения[9] относится к обычным, широко применяемым металлическим материалам с линейным упрочнением. Применима к изотропным материалам и при значительных деформациях предпочтительнее модели с кинематическим упрочнением. Условие текучести Мизеса используются вместе с уравнениями теории течения Прандтля-Рейсса. Эффект Баушингера не учитывается.
- Модель полигонального изотропного упрочнения[9] описывает поведение обычных материалов, упрочняющихся с ростом деформаций, и описывает более точно при больших деформациях. Используется условие текучести Мизеса, эффект Баушингера не моделируется.
- Модель анизотропного поведения[9] описывает материалы, которые ведут себя различно при растяжении и сжатии или по разному деформируются в разных направлениях. Применение изотропного упрочнения позволяет с помощью такой модели определить работу упрочнения в анизотропном материале. Используется модифицированное условие текучести Мизеса и ассоциированный закон течения.
- Модель Друкера-Прагера[117] применима к таким зернистым, гранулированным материалам, как горные породы, бетон или грунты. Используется условие текучести Мизеса, зависящее от среднего давления, чтобы моделировать увеличение предела текучести материала при всестороннем давлении. Закон течения может быть ассоциированным или неассоциированным. Упрочнение отсутствует.

Модель Вильяма – Варнке[129], используемая для прогнозирования разрушения структурно-неоднородных материалов. Данная модель описывает дивиаторное сечение поверхности прочности материала с помощью уравнения эллипса.

Модель Базанта[114] представляет собой двухинвариантный критерий разрушения бетонов и других хрупких материалов. Согласно данной модели, предельной поверхностью прочности материала явлется парабола. При этом в осях главных деформаций предельной поверхностью является поверхность вращения вторго порядка.

- Модель Ананда [9] описывает поведение металлов при повышенных температурах, но может использоваться и при более низких. Это модель изотропного материала, упрочняющегося с ростом скорости нагружения; модель, которая обычно вводится заданием параметров состояния, а не с помощью кривой “напряжение-деформация”. Модель Ананда использует условие текучести Мизеса с ассоциированным законом течения.

Данные модели используются в программном комплексе ANSYSв том числе для расчетов прочности композитных материалов и конструкций из них.

1.2 Обзор исследований прочности композитных материалов и конструкций

1.2.1 Математические модели и численные исследования композитных материалов и конструкций

1.2.1.1 Обзор исследований железобетона

Первые исследования пластичности материалов нашли отражение в работах [40,126,128]. Однако классические теории, используемые А.А. Ильюшиным [40], не применимы для большинства композитных материалов и бетона в частности. Это связано, прежде всего, с различной сопротивляемостью бетонов растяжению – сжатию, способностью к трещинообразованию. Для железобетона в настоящее время существуют различные теоретические направления, занимающиеся конечно-элементным моделированием его с трещинами при сложном напряженном состоянии.

Первое направление, где бетон представляется как нелинейно-упругий изотропный материал, нашло отражение в работах В.М. Круглова [53, 54], А.П. Кричевского [52] и других авторов [11, 27, 50]. Бетон в железобетонном элементе с трещинами представляется трансверсально-изотропным материалом с плоскостью изотропии, параллельной плоскости трещины [27].

Иное представление имеют работы Н.И. Карпенко и А.А. Гвоздева [25], в которых используется гипотеза о деформационной ортотропии материала, когда направление ортотропных осей совпадает с направлениями осей главных напряжений. Однако, в дальнейших работах Н.И. Карпенко, железобетону свойственна деформационная анизотропия, обусловленная процессом трещинообразования и дискретным расположением арматуры [42]. В отличие от первого направления, железобетон с трещинами моделируется физически нелинейным анизотропным материалом, представляющим собой распределенную по объему арматуру, ожесточенную за счет остаточных связей ее с бетоном на участке между трещинами. Достоинством подхода является возможность учета сложного, не ортогонального армирования, а также таких явлений, как ослабление бетонных сечений каналами арматуры, сдвиг берегов трещин, нагельный эффект в арматуре, сил зацепления в трещине. Дальнейшие исследование прочности бетона при трехосном напряженном состоянии были осуществлены в работах С.Ф. Клованича [44-49], И.Н. Ахвердова [6], А.В. Яшина [110, 111] и других авторов [42, 112, 113,129].Краткий обзор исследований моделей железобетона приведен в работе [18].

Современные методики расчетов сводятся, как правило, к конечноэлементному моделированию железобетонных конструкций. Основы метода конечных элементов (МКЭ) заложены в трудах В.А. Постнова [71], К. Бэйта [16], О. Зенкевича [38] и других авторов [2,24].

M.T. Suidan и W.C. Schnobrich [127] одними из первых применили пространственные изопараметрические конечные элементы для расчетов балок.

Первые нелинейные методики расчета железобетонных конструкций с использованием шагового итерационных методов расчета использовали в своих трудах A. Nilson [123], H.A. Franklin [118], V. Cervenka [116].

Следует так же отметить работы А.А. Гвоздева и Н.И. Карпенко [25], в которых железобетон представляется как комплексный материал, а арматура при помощи коэффициента армирования представляется «размазанной» по сечению элемента.

В математических моделях С.Ф. Клованича [45, 48, 49] арматура представлена стержневыми конечными элементами, а учет ее направления в составе железобетонных конструкций осуществляется при помощи направляющих косинусов в результате суммирования матриц упругости бетона и арматуры. При этом, для учета работы бетона между трещинами использовался коэффициент В.И. Мурашова [63]. В [48, 49] выполняется исследование железобетонных элементов при плоском напряженном состоянии на базе теории течения бетона и МКЭ. Теория течения нашла применение как у самого С.Ф. Клованича[46,48, 49,], так и в работах З. Бажанта [7], В.М. Круглова [54] и других авторов [61,119]. Деформационные зависимости бетона без трещин в работе [49] сформулированы в виде связи октаэдрических напряжений и деформаций. При этом материал считается однородным и изотропным, а связь между октаэдрическими напряжениями и сдвигами нелинейна, как и связь между октаэдрическими нормальными напряжениями и деформациями. Для определения секущих модулей упругости используется функциональная зависимость для диаграммы деформирования бетона при одноосном сжатии в относительных координатах.

Диаграммы деформирования материалов всегда пользовались вниманием у исследователей. В работе Н.И. Карпенко, Т.А. Мухамедиева и А.Н. Петрова [41] предложена и исследована зависимость $\varepsilon - \sigma$. Данная зависимость сравнительно проста и легко приводится к касательным и секущим модулям упругости материала. Однако здесь отсутствует абсолютно упругий участок диаграммы, то есть даже при малых деформациях модель нелинейна и секущий модуль упругости на диаграмме уменьшается. При этом зависимость двухветвевая, то есть содержит в себе как восходящий, так и нисходящий участки диаграммы деформирования. Это позволяет применение данной зависимости в моделях при переменных скоростях роста напряжений, а так же при разгрузке. Исследованиям ниспадающей ветви на диаграмме деформирования бетона с последующим использованием ее в расчетах посвящено множество работ[114, 115, 122].

1.2.1.2 *Обзор исследований различных композитов*

В работах [73, 74] для анализа прочности конструкций применяется математическая модель схемы суммирования жесткостей по слоям, в совокупности с феноменологическими критериями прочности для однонаправленно - армированных образцов. В качестве критериев прочности в данных работах используются: теория максимальных нормальных напряжений, а так же критерии прочности Хилла и Фишера. При этом для расчетов оболочечных конструкций используются уравнения безмоментной теории оболочек, а так же гипотезы Кирхгофа – Лява.

Расчетные модели для определения несущей способности конструкции обсуждаются в работах Е.А. Ланкиной [58] и В.В. Болотина [12]. Они основаны на различных схемах редуцирования жесткостей многослойных композитов. При этом послойное разрушение происходит при нарушении феноменологического условия прочности однонаправленного армированного слоя. В работах [65, 66] предложены стохастические модели разрушения, основанные на процессе развития макроскопических трещин и накоплении рассеянных повреждений. Данные модели учитывают расслоение композита вследствие повреждения матрицы, а так же разрывы отдельных волокон.

Анализ кривых деформирования композитов, способы их аппроксимации, применение в расчетах, нашли отражение в работах С.Ф. Клованича [45, 49], Ю.М. Тарнопольского [102], Н.И. Карпенко [41, 42], В.А. Дзюбы [34] и других авторов [30, 56, 99, 114, 115, 122].

Важным аспектом структурного подхода к исследованию композитов является вопрос адгезионной прочности на границе различных сред. В работе А. Келли[120] адгезия волокна композита с его матрицей учитывает только касательные напряжения от взаимодействия противоположных берегов трещин при сдвиге. Более общий подход на теорию адгезии, включающий случаи хрупких материалов нитей и матрицы, был применен в работе Г.П. Черепанова[107]. Здесь напряжения и смещения на границе раздела выражаются через аналитическую функцию. При этом данная модель может быть использована для решения задач с любым числом трещин скольжения. Так же в работе [107]подробно представлены математические модели механизмов разрушения различных композитов с учетом трещинообразования.

В работе [106] изложены результаты изучения прочностных свойств зернистых композитов на полимерной основе с сильной адгезионной связью. Подтверждено, что при достаточно большой прочности адгезионной связи между материалом матрицы и арматурными включениями, разрушение происходит сразу в матрице. При этом в композитах со слабой адгезией первоначально происходит отслоение матрицы от арматурных включений, и лишь затем разрушается сама матрица.

Микромеханика композитов и модели их деформирования и разрушения изложены в работах И.Г. Жигуна [35], Р. Кристенсена [51], Л. Нильсена [64] и других авторов [12, 17, 21, 22, 33, 56,69, 91, 104]. При изучении упругих свойств ориентированных композитов известно, что в определенных пределах их можно считать ортотропными и трансверсально-изотропными упругими телами [102].

Общий подход к оценке работоспособности конструкций из композитных материалов предложен Ю.В. Соколкиным и В.А. Скачковым[87]. В основе подхода лежит статистическая модель процесса микро- и макроскопического разрушения, определяемая по локальной характеристике – вероятности разрушения элементов микроструктуры. При этом макроскопическое разрушение конструкции оценивается по критическому значению накопленных макроскопических повреждений, которое для материала является константой и определяется расчетно – экспериментальным путем.

В работе Ю.В. Соколкина и А.А. Ташкинова [88] предлагается подход, связанный с применением структурно-феноменологических моделей и краевых задач механики деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. На основании этого подхода в [89], для описания усталостного поведения композита ставится стохастическая краевая задача, позволяющая прогнозировать изменение жесткости материала на структурном и макроскопическом уровнях, а так же оценивать предел выносливости композита при различных видах циклического нагружения. В [67, 92] установлено, что при циклическом нагружении полимерных материалов имеют место два различных процесса накопления повреждений: рассеянное разрушение связей по всему объему материала и локальное накопление повреждений. При этом разрушение полимера происходит в результате развития и распространения одной или нескольких магистральных трещин, называемых усталостными.

В [101] исследуются особенности деформирования конструкций из высоконаполненных композитов на примере кругового цилиндра при различных программах нагружения и приводятся модели механического поведения таких материалов.

В работе В.В. Васильева[21] описываются прикладные методы расчета типовых элементов конструкций с учетом основных особенностей композитов. Приведены математические модели механики композитных материалов, использованные для различных видов конструкций. Данные модели основаны на уравнениях теории упругости ортотропной среды и позволяют описывать напряженно-деформированное состояние широкого класса композитных систем.

1.2.2 Экспериментальные исследования композитных материалов и конструкций

Одной из главных задач при создании методов и средств диагностики жесткости и прочности композитов является задача установления взаимосвязей между показателями их физико-механических свойств. Обзор экспериментальных данных об изучении физико-механических свойств композитов приведен в работе В.Ф. Зинченко [39]. Первые работы по неразрушающему контролю свойств бетонов В.А. Латишенко [59, 60] и Н.А. Крылова [55] показали необходимость получения комплекса информативных физических характеристик материала (механических, акустических, электрических, тепловых) и установления связи между этими характеристиками. Диагностикой изменчивости прочности исходной арматуры на стадии изготовления изделия из композита занимался А.В. Сандалов. Для определения степени поврежденности волокон и оценки их прочности был использован оптический контроль органожгутов в процессе намотки их на изделие.

Однако, значительную информацию об изменении структуры композита, с учетом взаимодействия его компонентов и появления трещин, можно получить в результате измерения физических характеристик при механических нагрузках на конструкцию. Методы диагностики физико-механических показателей создаются на основе различных подходов [10, 60, 62, 72, 77, 78]. Достаточно распространены неразрушающие и полуразрушающие методы испытаний образцов материалов и изделий.

Для исследования несущей способности конструкций из композитных материалов часто используют феноменологически – статистический подход (ФСП). Он имеет несколько направлений, одно из которых применил и развил В.А. Латишенко [60] в своей работе. Данное направление базируется на подборе математических моделей деформирования и разрушения образца, и уточняется за счет введения для этих моделей поправочных коэффициентов или функций, определяемых статистическим путем.

Другое направление ФСП предполагает использование феноменологических моделей в основном при выявлении релевантных факторов [1]. Искомые взаимосвязи при этом описываются с помощью зависимостей в виде полиномов, подбираемых статистическими методами по результатам экспериментов, в ходе которых варьируются значения релевантных факторов [77, 78].

В работах [15, 37, 62, 72] для балок и колец экспериментально определены разрушающие нагрузки. Так же показаны области в конструкции, где появились разрушения и указан их вид (от нормальных или сдвиговых (поперечных) напряжений). Однако, в данных работах определяется лишь внешняя нагрузка и не определяются напряжения, при которых происходит разрушение. Теоретическая оценка характера разрушения и анализ напряженно-деформированного состояния выполнялись на основе усреднения параметров жесткости и прочности композита.

В работах Н.А. Таранухи и других авторов [94, 95]разрабатывалась математическая модель определения статических и динамических характеристик стержней из нестандартизированных материалов, допускающих большие упругие деформации. При этом для проведения тестовых (модельных) экспериментов по исследованию характеристик стержней из нестандартизированных материалов разработан и реализован аппаратно-программный комплекс[96].

В работе А.К. Сборовского и другихавторов[79] предлагается иной подход к оценке несущей способности конструкций из композитных материалов. Состояние связующего и структуры армирования композита диагностируются раздельно при нормировании параметров, поддающихся контролю без разрушения изделия. Приводится пример контрля по комплексу характеристик трехслойной безнаборной обшивки. Для эксперимента использовались ультразвуковые колебания, измерялась их скорость в наружных слоях композита по направлениям армирования, а так же под углом 45^0 к ним. Определялась толщина слоев, затухание ультразвуковых колебаний по нормали к обшивке и динамическая микротвердость наружных слоев. Серьезные нарушения структуры армирования и относительного содержания компонентов в составе композита, обнаруживаются в результате отклонений от заданных значений скорости ультразвуковых колебаний и соотношений между ними. Жесткость наружных слоев оценивается как произведение модулей упругости материала этих слоев на их толщину. Сдвиговая прочность среднего слоя оценивается по результатам ультразвуковых колебаний, а состояние связующего наружных слоев – по результатам контроля микротвердости. По мнению авторов, данная система контроля обеспечивает оценку основных факторов, которые определяют несущую способность конструкций.

1.3 Выводы по литературному обзору

На основании обзора отечественной и зарубежной литературы можно сделать вывод о существовании множества различных математических моделей и подходов для определения прочности композитных материалов, расчета конструкций и изделий из них. Однако, для исследования композитных материалов неоднородной структуры, классические модели прочности не применимы. Наибольшее распространение в области исследований композитов имеют феноменологически - статистические подходы, основанные на аппроксимации экспериментальных данных при простейших испытаниях материала. Выполнен обзор методов экспериментального исследования композитных материалов. Отмечен вклад в исследование композитов таких авторов, как А.А. Гвоздев, В.Ф. Зинченко, Н.И. Карпенко, С.Ф. Клованич, В.М. Круглов, В.А. Латишенко, Г.П. Черепанов, А.В. Яшин, Z.P. Bazant,V. Cervenka, A. Kelly.E.P. Warnke,K.J. Willam.

1.4 Идея диссертации и постановка задачи исследования

1.4.1 Идея диссертации

Разработать математическую модель ичисленную методику расчета линейных и физически нелинейных задач для исследования композитных материалов и конструкций в области их предельных состояний. Предполагаемая методика заключается в следующем:

1) Проведение анализа и систематизации математических моделей критериев предельной прочности материалов и конструкций для определения их предельных состояний.

2) Выполнение расчета и исследования конструкций из композитных материалов. В качестве численного метода использовать метод конечных элементов. Входные данные: физико-механические характеристики материалов; информация об архитектуре и граничных условиях конструкции (содержится в расчетной схеме).

3) Сравнение полученных результатов с данными реальных экспериментов, а так же с результатами расчетов модельных экспериментов, полученными в других программных продуктах (ЛИРА, ANSYS, и др.).

4) Методику расчета построить на основе принятого закона деформирования материалов в составе композита, а так же идее комбинирования объемов для определения приведенных механических характеристик при вычислении матрицы жесткости композитного конечного элемента.

5) Численный расчет выполнить итерационно, на каждом шаге итерации механические характеристики материалов должны изменяться согласно законам, описывающим кривые деформирования. На этом будет основана физическая нелинейность задач.

6) На каждом шаге нагружения получать результаты напряженно-деформированного состояния. Критерием разрушения конструкции считать превышение предела прочности армирующего материала в составе

композита. На последнем шаге нагружения будут получены несущая способность и максимальные перемещения конструкции.

Для предложенной методики необходимо:

– Разработать математическую модель для расчета конструкций из композитных материалов, включающую новую матрицу жесткости нелинейного композитного конечного элемента.

– Разработать численные процедуры и программное обеспечение для выполнения численных расчетов.

– Подтвердить адекватность разработанной методики. Для этого необходимо выполнить тестовую проверку и практические расчеты для реальных конструкций и сравнить полученные автором теоретические результаты с результатами прямых экспериментов по этим же конструкциям, а так же с расчетами в других программных продуктах.

1.4.2 Постановка задачи исследования

Для исследования предельной прочности композитных материалов и конструкций, следует:

– Провести анализ и систематизацию критериев прочности материалов и конструкций.

– На основе анализа критериев прочности построить математическую модель для исследования прочности материалов в составе композита. В качестве численного метода исследований использовать метод конечных элементов (МКЭ).

– Разработать матрицу жесткости композитного нелинейного конечного элемента, учитывающую при этом работу всех материалов в пределах объема конечного элемента. Нелинейность учесть при помощи разработанных автором аппроксимационных зависимостей для диаграмм деформирования материалов в составе композита

– Сформулировать, проверить и использовать идею комбинирования объемов для определения приведенных механических характеристик при вычислении матрицы жесткости композитного конечного элемента.

– Разработать численные процедуры и спроектировать программный комплекс для численного исследования свойств материалов в составе композита и напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных материалов в области их предельной прочности и жесткости.

– Разработать методику для численного исследования напряженно-деформированное состояние конструкций из композитных материалов на различных этапах статического нагружения, включая предельные. Выполнить тестирование и практическую апробацию математической модели и программного комплекса.

– Выполнить сопоставление и анализ полученных результатов. Сделать выводы и рекомендации.

1.4.3 Структура диссертации

Структура диссертационной работы представлена на рисунке 1.5.

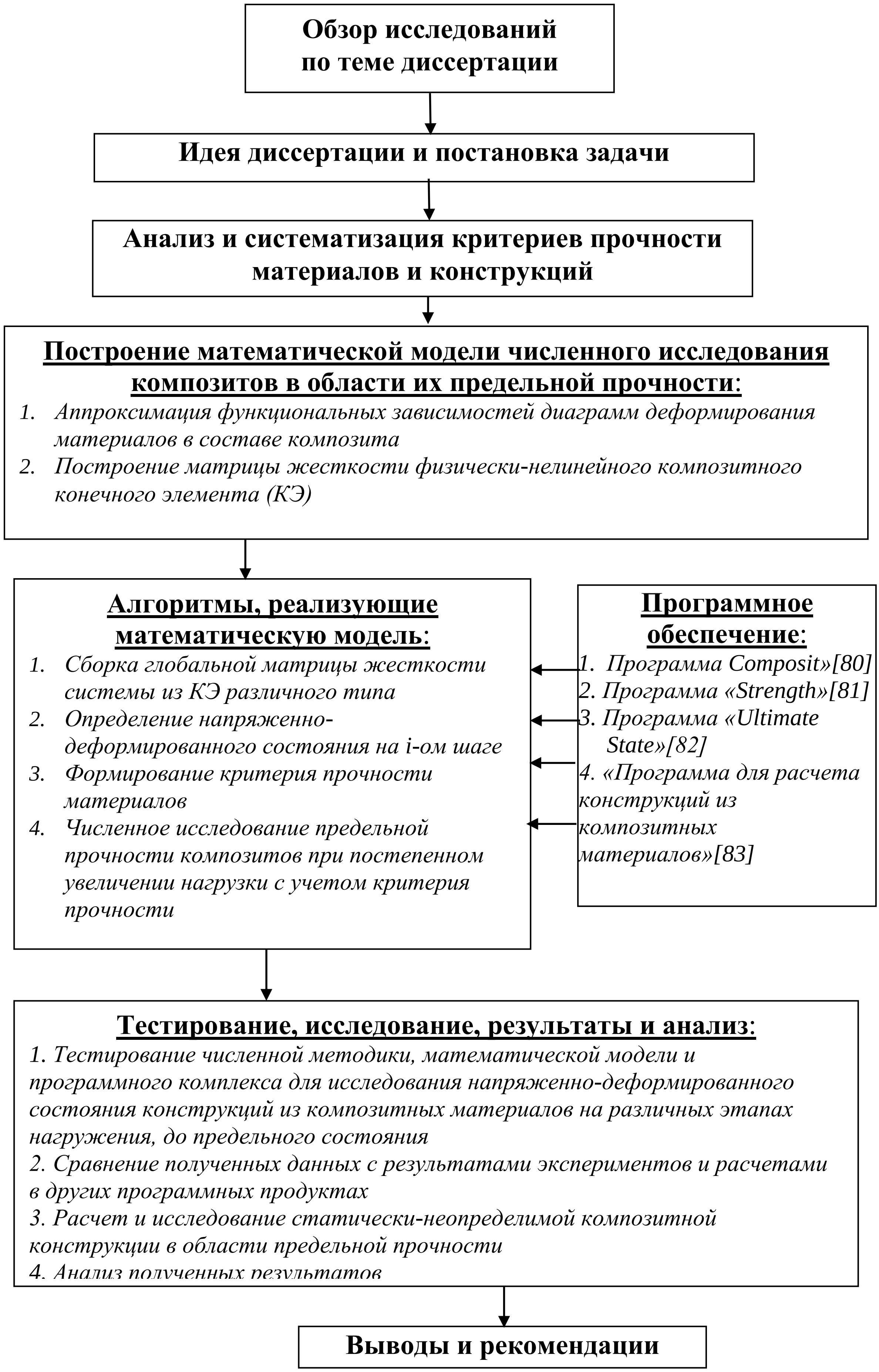


Рисунок 1.5. – Структура диссертационной работы

Глава 2 СИСТЕМАТИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КРИТЕРИЕВ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

2.1 Основные критерии прочности конструкций из композитов

Нормативные документы [29, 86], содержат критерии прочности строительных конструкций и могут применяться для различных типов конструкций и деталей, в частности из композитных материалов.

Критерии прочности конструкций, в соответствии с [29], делятся на две основных группы:

- предельные состояния первой группы, приводящие к полному разрушению конструкции.

- предельные состояния второй группы, затрудняющие нормальную эксплуатацию конструкций или уменьшающие долговечность зданий и сооружений по сравнению с предусматриваемым сроком службы.

2.1.1 Критерии прочности конструкций при полном разрушении

Критерий означает, что напряжения и деформации в конструкциях от различных воздействий с учетом начального напряженного состояния (преднапряжение, температурные и другие воздействия) не должны превышать значений, соответствующих полной потере прочности конструкции и ее разрушения.

2.1.1.1 Критерий по разрушающей нагрузке и максимальным деформациям

Данный критерий предполагает установление разрушающей нагрузки на конструкцию и максимальных деформаций (перемещений) при этой нагрузке.

2.1.1.2 Критерий по устойчивости формы или ее положения

Данный критерий применяется для установления устойчивости тонкостенных конструкций, а так же при опрокидывании и скольжении подпорных стен, всплытие заглубленных или подземных резервуаров [29].

2.1.1.3 Критерий по усталостному разрушению

Данный критерий представляет собой расчет на выносливость конструкций, находящихся под воздействием многократно повторяющейся нагрузки — подвижной или пульсирующей: подкрановых балок, шпал, рамных фундаментов и перекрытий и т. п.) [29];

2.1.1.4 Критерий по разрушению от совместного воздействия силовых факторов и неблагоприятных влияний внешней среды

Предполагает разрушение в результате периодического или постоянного воздействия агрессивной среды, действия попеременного замораживания и оттаивания, воздействия пожара и т. п. [29].

2.1.2 Критерии прочности конструкций по непригодности к нормальной эксплуатации.

Данная группа критериев включает следующие: по образованию трещин; по раскрытию трещин; по деформациям.

2.1.2.1 Критерий по образованию трещин.

Данный критерий означает, что усилия, напряжения или деформации в конструкциях от различных воздействий не должны превышать соответствующих им предельных значений, воспринимаемых конструкцией при образовании трещин.

2.1.2.2 Критерий по раскрытию трещин

По данному критерию ширина раскрытия трещин в конструкции от различных воздействий не должна превышать предельно допустимых значений.

2.1.2.3.Критерий по деформациям.

Критерий прочности конструкций по деформациям состоит в том, что прогибы, углы поворота, перемещения и амплитуды колебания конструкций от различных воздействий не должны превышать соответствующих предельно допустимых значений, регламентируемых нормативными документами (постоянных, временных длительных и кратковременных нагрузок при ограничении деформаций технологическими или конструктивными требованиями; постоянных и временных длительных нагрузок при ограничении деформаций эстетическими требованиями [86].

2.1.3 Анализ критериев прочности конструкций

Нормативные документы, приведенные в разделе 2.1, содержат также аналитические методики для расчета элементов строительных конструкций (балок, колонн), используемые для проверки результатов, полученных по собственной модели автора [19, 99, 100, 130]. Систематизация критериев прочности конструкций приведена на рисунке 2.2. Для конструкций, исследованных в настоящей работе, использован критерий 2.2.1.1, характеризующий разрушающую нагрузку и предельные деформации на этапе полного разрушения.

В зависимости от условий работы конструкции, вида материала и его физико-механических характеристик, выбираются критерии, характеризующие ее разрушение. Расчет конструкций осуществляется согласно критериям предельных состояний, как по методикам из нормативных документов [29, 86], так и при помощи численных методов строительной механики, в частности метода конечных элементов с применением итерационных процедур и основных принципов механики деформируемого твердого тела. Для выбора математической модели критерия прочности, использованного в расчетах, автором были проанализированы различные математические модели критериев прочности. Их краткий обзор и анализ приведены в работах [20,98].

В настоящее время хорошо разработаны теории прочности однородных изотропных упругих и упругопластических материалов. Однако, как уже было сказано, композиты представляют собой совместную работу двух или нескольких материалов, обладающих различными физико-механическими свойствами, поэтому обычные теории прочности для них не применимы.

2.2 Анализ математических моделей критериев прочности материалов для численного исследования конструкций.

Как известно, не существует универсальной математической модели критерия прочности, подходящей для любого материала и условий работы конструкции. В данном разделе приведен анализ различных математических моделей критериев прочности для расчетов и исследования конструкций. Систематизация математических моделей (ММ) критериев прочности материалов представлена на рисунке 2.1

Существуют базовые математические модели теорий прочности (1.1.1). ММ первой теории прочности (1.1.1.1), исходя из опытов, работает только при растяжении хрупких материалов, когда все три главные напряжения не однозначны и различны по величине. ММ второй теории (1.1.1.2) отображает хрупкое разрушение путем отрыва. В целом же теоретические прогнозы, сделанные на основе данных критериев, как самостоятельные теории не находят применения в инженерных расчетах и рассматриваются как очень грубое приближение к реальной картине нагружения.

ММ третьего (1.1.1.3) и четвертого (1.1.1.4) критериев прочности называют так же критериями пластичности. Данные критерии отображают наступление текучести в материале, а также разрушение путем сдвигов. Они хорошо подтверждается опытами с пластическими материалами, одинаково сопротивляющимися растяжению и сжатию при условии, что главные напряжения имеют разные знаки.

ММ теории прочности Мора (1.1.1.5) полностью базируется на экспериментальных данных и по мере их накопления может уточняться. Однако существуют недостатки этой теории, связанные с трудностями построения огибающей кругов Мора и не учет (как и в теории наибольших касательных напряжений) промежуточного главного напряжения.

Вышеперечисленные теории справедливы для однородных и изотропных материалов с одинаковым пределом прочности при растяжении и сжатии. Однако для расчетов неоднородных композитных материалов данные теории не применимы. В связи с этим появилось множество математических моделей критериев прочности, предложенных для новых конструкционных материалов. Большое распространение получили феноменологические подходы, основанные на аппроксимации экспериментальных данных при простейших испытаниях на одноосное сжатие, растяжение, сдвиг и т. д. Значительная их часть основана на концепции предельной поверхности (1.1.2.). ММ критерия прочности С.Ф. Клованича (1.1.2.1), основанная на подходе М.М. Филоненко – Бородича [105]позволяет учитывать пять параметров материала для однозначного описания функции прочности. При этом данная математическая модель прочности описывается меридиональным и девиаторным сечением и является наиболее полным критерием прочности материала при сложных напряженных состояниях. Однако, применение данной математической модели осложняется большим количеством экспериментальных данных (пять параметров материала), необходимых для ее описания.

Критерий прочности William-Warnke(1.1.2.2) так же основывается на функции предельной поверхности, однако использует три независимых параметра материала, соответствующих частным случаям напряженного состояния: предел прочности при одноосном сжатии, предел прочности при одноосном растяжении, предел прочности при двуосном сжатии. Данная математическая модель изначально была разработана для бетонов и активно используется при расчетах структурно-неоднородных материалов с большой разницей между пределами прочности на сжатие и растяжение.

ММ критерия Друкера – Прагера (1.1.2.3) зависит от двух параметров материала: предела прочности при одноосном растяжении и предела прочности при одноосном сжатии. Данная модель подходит как для пластичных, так и для хрупких материалов. Однако, ее применение дает большие погрешности, если прочности материала при сжатии и растяжении отличаются на порядок и больше.

В отличие от вышеперечисленных моделей, математическая модель критерия Базанта (1.1.2.4) основана на тензоре деформаций и является двухинвариантным критерием разрушения для бетонов, горных пород, пластиков и других подобных материалов. Предельная поверхность строится в осях первого инварианта тензора деформаций и второго инварианта девиатора деформаций и представляет собой параболу. Для описания параболы достаточно трех точек, а значит и трех параметров материала.

ММ критерия прочности Норриса (1.1.3) является ортотропной, то есть пригодна для случая, когда оси анизотропии совпадают с осями приложенных напряжений. Данная модель может быть применена для однонаправленных композитов, однако не учитывает ряд особенностей многих композитных материалов: существенность анизотропии, зависимость прочности при сдвиге от направления касательных усилий, свойства связующего материала в композите.

ММ на основе кривых деформирования материалов (1.1.4) получили широкое распространение и применяются для упрощения расчетов. Для различных типов композитных материалов кривые деформирования могут заметно различаться между собой. Более того, эти кривые различны для каждого материала в составе композита. В общем же характер кривых деформирования композита зависит от процентного содержания составляющих его материалов, схемы нагружения направления армирования, температуры, режима и продолжительности нагружения.

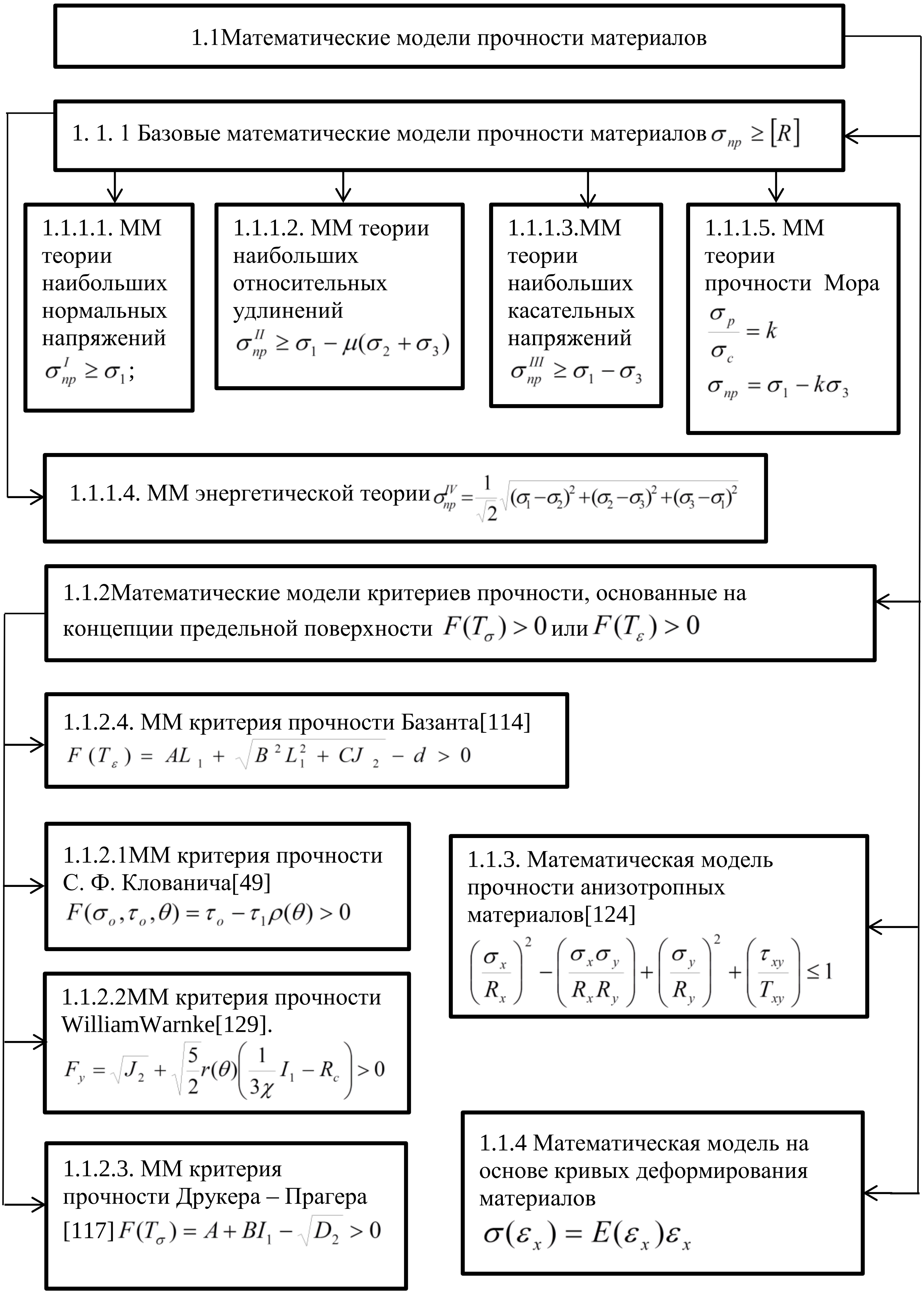


Рисунок 2.1 – Систематизация математических моделей критериев прочности материалов.

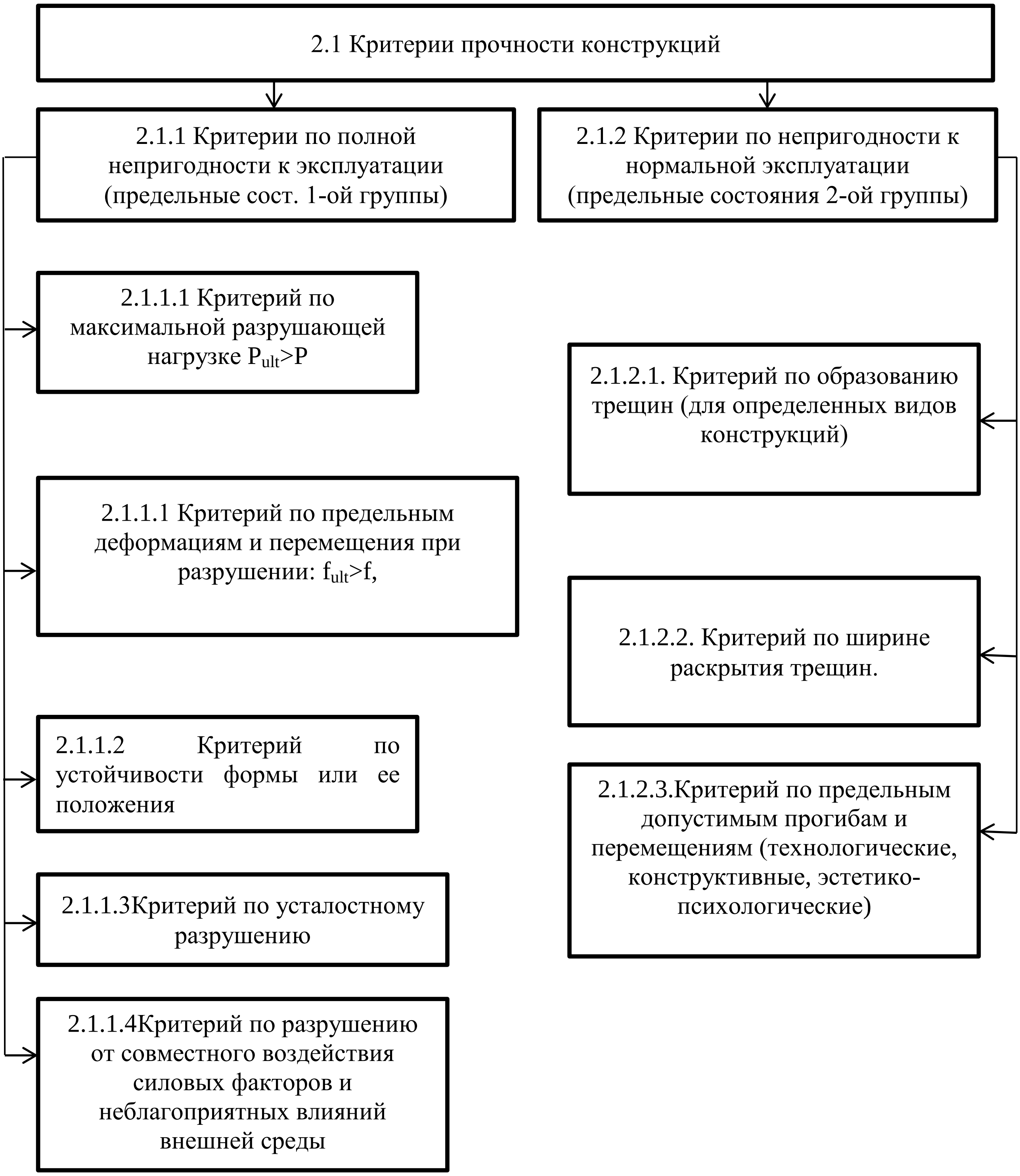


Рисунок 2.2 – Систематизация критериев предельных состояний конструкций

2.3 Выводы по второй главе

1. Для конструкций, исследованных в настоящей работе, использован критерий прочности, характеризующий разрушающую нагрузку и предельные деформации на этапе полного разрушения.

2. Для расчетов конструкций, исследуемых в данной работе, наиболее подходят математические модели критериев (1.1.2.1), (1.1.2.2), (1.1.2.4). Данные критерии считаются универсальными, подходят для большинства трансверсально изотропных и структурно – неоднородных композитов при любых видах напряженных состояний конструкций.

3. При простых видах нагружения возможно использование диаграмм деформирования (1.1.4) при одноосном растяжении и сжатии. Они важны как для непосредственного применения в расчетах, так и для построения более общих моделей деформирования материалов, относящихся к неодноосным напряженным состояниям.

4. В связи с этим возникает необходимость более подробного изучения диаграмм деформирования материалов и применении их для исследования конструкций.

Глава 3 ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

3.1 Традиционная система разрешающих уравнений и постановка задачи

Как известно, формулирование разрешающего уравнения (системы уравнений) – центральная, ключевая часть процедуры формирования математической модели [97]. Как правило, в систему искомых функций входят компоненты вектора перемещений {U}={u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)}, а так же по шесть компонентов тензора напряжений {σ}={σ_x(x,y,z),σ_y(x,y,z),σ_z(x,y,z), τ_{xy}(x,y,z), τ_{yz}(x,y,z), τ_{xz}(x,y,z)} и деформаций {ε}={ε_x(x,y,z),ε_y(x,y,z),ε_z (x,y,z), γ_{xy}(x,y,z), γ_{yz}(x,y,z), γ_{xz}(x,y,z)}.

Определение указанных функций применительно к инженерным задачам называется расчетом конструкций. Согласно теории упругости, необходимо решить краевые задачи для традиционной системы уравнений, включающих [49, 76]:

уравнение равновесия

$$[\Phi]^T\{\sigma\}=\{G_v\}, \tag{3.1}$$

геометрические уравнения(Коши)

$$\{\varepsilon\}=[\Phi]\{U\}, \tag{3.2}$$

определяющие(физические) уравнения

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}, \tag{3.3}$$

$$\Phi=\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

где Ф – матрица дифференциальных операторов, {G_v}={X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)} – вектор-функция объемных сил; *[D]* – матрица механических характеристик материала размером 6 x 6 для упругого изотропного материала.

$$D=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Здесь Е – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона. Решая (3.1), (3.2), (3.3) относительно неизвестных перемещений можно получить разрешающее уравнение в виде:

$$[\Phi]^T[D][\Phi]\{U\}=\{G_v\} \tag{3.6}$$

Перечисленные уравнения необходимо дополнить кинематическими и статическими граничными условиями. Используя найденные компоненты векторов перемещений, напряжений и деформаций, а так же критерии прочности материалов конструкции, можно осуществлять расчеты в области предельных состояний конструкций. Для инженерных задач, связанных с расчетом конструкций, используют приближенные численные методы.

3.2. Конечноэлементная модель и разрешающее уравнение МКЭ

3.2.1 Матрица жесткости конечного элемента.

Векторы $\{R\}_i$ и $\{q\}_i$ связаны выражением [48]

$$\{R\}_i=[K]_i\{q\}_i, \tag{3.7}$$

где $[K]_i$ – матрица жесткости i-го элемента, $\{R\}_i$ – вектор усилий КЭ i-го КЭ, $\{q\}_i$ – вектор перемещений i-го КЭ

Учитывая блочную структуру векторов $\{R\}_i$ и $\{q\}_i$, матрицу жесткости так же можно представить в блочном виде.

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & \cdots & [K]_{i1}^{(k)} & \cdots & [K]_{i1}^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [K]_{ij}^{(1)} & \cdots & [K]_{ij}^{(k)} & \cdots & [K]_{ij}^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [K]_{im}^{(1)} & \cdots & [K]_{im}^{(k)} & \cdots & [K]_{im}^{(m)} \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

Каждый из блоков матрицы $[K]_{ij}^{(k)}$ определяет реакции в j-ом узле от единичных перемещений в k-ом узле i-го элемента.

Для получения матриц жесткости отдельных элементов необходимо рассмотреть вопрос о переходе от узловых перемещений к перемещениям, деформациям и напряжениям внутри конечных элементов. Известно, что этот переход осуществляется приближенно путем задания так называемых интерполяционных функций. Характер этих функций должен быть таким, чтобы обеспечить, по крайней мере, неразрывность перемещений при переходе от элемента к элементу. При уменьшении размеров элементов это должно привести к решению, стремящемуся к точному. Запишем связь между узловыми перемещениями и перемещениями внутри элемента в виде

$$\{U\} = [C]\{q\}_i = \lfloor [C]^{(1)} [C]^{(2)} \cdots [C]^{(k)} \cdots [C]^{(m)} \rfloor \{q\}_i, \qquad (3.9)$$

где [C] – матрица интерполяционных функций. Определив соотношение (3.9) с помощью (3.2) и (3.3) можно найти компоненты деформаций и напряжений по области i-го конечного элемента [49]:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{q\}_i, \quad \{\varepsilon\} = [\Phi][C]\{q\}_i = [B]\{q\}_i, \qquad (3.10)$$

Здесь [B] – так называемая матрица деформаций, которая, в связи с блочной структурой вектора $\{q\}_i$ так же имеет блочную структуру $[B] = \lfloor [B]^{(1)} [B]^{(2)} \cdots [B]^{(k)} \cdots [B]^{(m)} \rfloor$.

Для получения матрицы жесткости конечного элемента воспользуемся соотношением (3.6). С учетом выражений (3.9) и (3.10), умножая (3.6) в левой части на $[C]^T$ и интегрируя по объему конечного элемента, получим [49]:

$$\left(\int_{V_i}[B]^T[D][B]dV\right)\{q\}_i+\int_{V_i}[C]^T\{G_V\}dV=0 \qquad (3.11)$$

Сравнивая полученное выражение с соотношением (3.7) получаем:

$$[K]_i=\int_{V_i}[B]^T[D][B]dV,\ \{R\}_i=\{P_V\}_i=\int_{V_i}[C]^T\{G_V\}dV \qquad (3.12)$$

Принимая во внимание блочность матриц [B] и [C], типовые блоки матриц жесткости $[K]_l^{(k)}$ и вектора узловых внешних сил $\{P_V\}_i^{(k)}$ могут быть записаны следующим образом [49]:

$$\{P_V\}_i^{(k)}=\int_{V_i}\left([C]^{(k)}\right)^T\{G_V\}dV \qquad (3.13)$$

$$[K]_{ij}^{(k)}=\int_{V_i}[B]^{(j)\,T}[D][B]^{(k)}dV \qquad (3.14)$$

Выражение (3.13) представляет собой узловые сосредоточенные силы, эквивалентные распределенной по объему нагрузке.

3.2.2 Разрешающее уравнение МКЭ

Для описания деформированного и напряженного состояния тела, расчлененного на конечные элементы, необходимо все элементы соединить в единое целое, т.е. удовлетворить условиям кинематической и статической совместности для конструкции в целом. Эти условия устанавливаются для узловых точек системы и имеют вид[49]:

$$\{\overline{q}\}^{(k)}=\{\overline{q}\}_i^k;\ \{\overline{P}\}^{(k)}=\sum_{i\in k}\{R\}_i^{(k)}; \qquad (3.15)$$

где $\{\overline{q}\}^{(k)}$ - вектор перемещений k-го узла системы; $\{\overline{P}\}^{(k)}$ - вектор сил в k-ом узле; $i\in k$ - суммирование по всем i-ым элементам, сходящимся в k-ом узле системы.

Между векторами $\{\overline{P}\} = \{\{\overline{P}\}^{(1)} \{\overline{P}\}^{(k)} \{\overline{P}\}^{(p)}\}$ и $\{\overline{q}\} = \{\{\overline{q}\}^{(1)} \{\overline{q}\}^{(k)} \{\overline{q}\}^{(p)}\}$ существует связь[49]:

$$\{\overline{P}\} = [\overline{K}]\{\overline{q}\}, \tag{3.16}$$

где $[\overline{K}]$ - матрица жесткости системы, имеющая блочную структуру, с числом блоков, соответствующих общему числу узлов системы р.

$$[\overline{K}] = \begin{bmatrix} [\overline{K}]_1^{(1)} & \cdots & [\overline{K}]_1^{(k)} & \cdots & [\overline{K}]_1^{(p)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\overline{K}]_l^{(1)} & \cdots & [\overline{K}]_l^{(k)} & \cdots & [\overline{K}]_l^{(p)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\overline{K}]_p^{(1)} & \cdots & [\overline{K}]_p^{(k)} & \cdots & [\overline{K}]_p^{(p)} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Каждый блок матрицы $[\overline{K}]$определяется с учетом (3.15) по формуле[49]:

$$[\overline{K}]_l^{(k)} = \sum_{i \in k} [K]_{il}^{(k)} , \tag{3.18}$$

где $[K]_{il}^{(k)}$ - блок матрицы жесткости i-го элемента, определяющий реакции в k-ом узле от единичных перемещений в l-ом узле.

3.3 Учет нелинейности физических свойств материалов.

В расчетах учитывалась физическая нелинейность, обусловленная непропорциональной связью между деформациями и напряжениями:

$$\{\sigma\{\varepsilon\}\} = [D\{\varepsilon\}]\{\varepsilon\} \tag{3.19}$$

Таким образом, вектор напряжений в конечных элементах конструкции на i-ом шаге нагружения вычисляется согласно следующей формуле:

$$\{\sigma\{\varepsilon\}\}^{i+1} = [D\{\varepsilon\}]^i \{\varepsilon\}^{i+1}, \tag{3.20}$$

где $[D\{\varepsilon\}]^i$ – матрица механических характеристик материала на i-ом шаге нагружения.

Непропорциональность связи между деформациями и напряжениями может быть учтена при помощи диаграмм деформирования материалов.

Следует отметить, что в данной работе речь идет именно о кратковременном нагружения. При этом будут рассмотрены несколько зависимостей, связывающих относительные деформации с напряжениями (ε_b - σ_b) при одноосном сжатии и растяжении.

3.3.1.Математические модели прочности материалов на основе диаграмм деформирования

3.3.1.1.Диаграммы состояния материалов, основанные на математической модели из нормативных документов

К качестве иллюстрирующего примера будет рассмотрена работа железобетона, как наиболее изученного и распространенного композитного материала. В качестве примера работы связующего в составе композита можно рассмотреть бетон.

Нормативные документы СП63.13330.2012 [86] содержат математические модели для построения диаграмм растяжения и сжатия бетона. Стандартный вид диаграммы деформирования бетона σ - ε изображен на рисунке 3.2

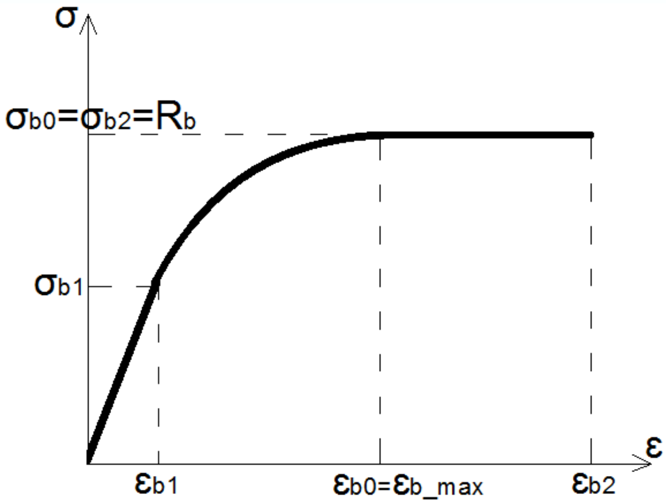


Рисунок 3.2 – Диаграмма деформирования материала

Однако в качестве диаграмм состояния тяжелого, мелкозернистого и напрягающего бетонов, определяют упрощенную трехлинейную диаграмму сжатого и растянутого бетона

При $0 \le \varepsilon_b \le \varepsilon_{b1}$

$$\sigma_b = \varepsilon_b E_0, \quad \varepsilon_{b1} = \frac{\sigma_{b1}}{E_0} = \frac{0.6Rb}{E_0} \tag{3.21}$$

При $\varepsilon_{b1} \le \varepsilon_b \le \varepsilon_{b0}$

Для тяжелого бетона принимают ε_b=0.002

$$\sigma_b = \left[(1 - \frac{\sigma_{b1}}{Rb}) \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{b1}} + \frac{\sigma_{b1}}{Rb} \right] Rb = \frac{0.4Rb\varepsilon_b - Rb\varepsilon_{b1} + 0.6Rb\varepsilon_{b0}}{\varepsilon_{b0} - \varepsilon_{b1}} \tag{3.22}$$

При $\varepsilon_{b0} \le \varepsilon_b \le \varepsilon_{b2}$

$$\sigma_b = R_b \tag{3.23}$$

Здесь Rb – прочность материала при сжатии. Значение относительных деформаций ε_{b2} = 0.0035 для тяжелого, мелкозернистого и напрягающего бетонов класса B60 и ниже, при непродолжительном действии нагрузки. Для высокопрочных бетонов класса по прочности на сжатие B70-B100 ε_{b2} принимается по линейному закону от 0.0033 при B70 до 0.0028 при B100.

Диаграммы растяжения строятся аналогично диаграммам сжатия. При этом расчетные значения сопротивления материала сжатию Rb заменяют на расчетные значения сопротивления материала растяжению Rbt. Значения предельных относительных деформаций при растяжении ε_{bt0} принимают 0.0001. Значение относительных деформаций ε_{bt2} = 0.00015 для тяжелого, мелкозернистого и напрягающего бетонов при непродолжительном действии нагрузки. Ниже приведены упрощенные диаграммы растяжения и сжатия, для связующего (бетона) с различными механическими характеристиками, приведенными в таблице 3.1:

Таблица 3.1

№	Модуль упругости E	Прочность на сжатие Rb	Прочность на растяжение Rbt
Образец 1	3*10^10	20*10^6	1.75*10^6
Образец 2	3.7*10^10	32*10^6	2.25*10^6
Образец 3	3.95*10^10	43*10^6	2.75*10^6

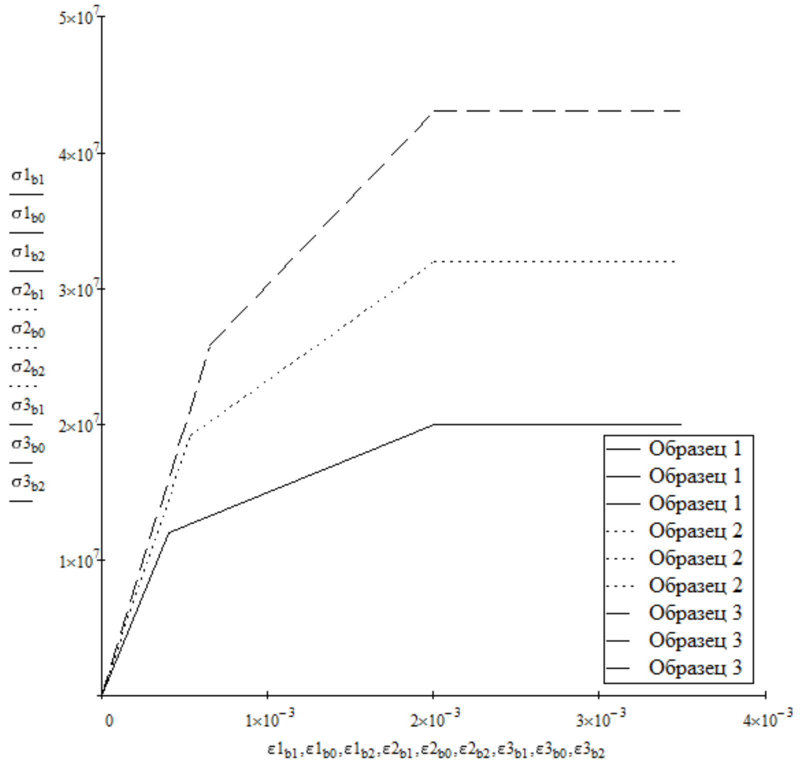


Рисунок 3.3. – Упрощенные диаграммы деформирования бетона при сжатии на основе математической модели из СП63.13330.2012.

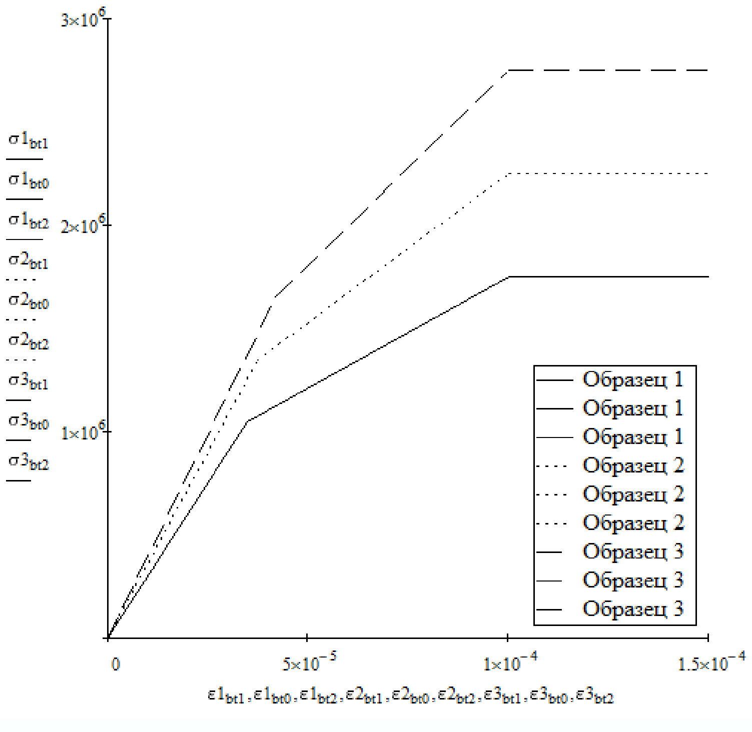


Рисунок 3.4 – Упрощенные диаграммы деформирования бетона при растяжении на основе математической модели из СП63.13330.2012.

На рисунках 3.3 и 3.4 приведены диаграммы соответственно для сжатых и растянутых материалов из таблицы 3.1. Как видно, каждая диаграмма состоит из трех прямых, полученных в результате использования выражений (3.21),(3.22),(3.23).

3.3.1.2 Математическая модель Н.И. Карпенко для диаграмм сжатия и растяжения материала

Для учета деформационных зависимостей использовались зависимости для получения диаграмм деформирования при одноосном сжатии и растяжении, разработанные Н.И. Карпенко. Данные диаграммы позволяют учесть как восходящую, так и ниспадающую ветвь. Однако применение участка ниспадающей ветви в данной работе рассматриваться и использоваться не будет. Для расчетов используются секущие модули упругости при сжатии и растяжении, соответственно $E_0 v_b$ и $E_0 v_{bt}$. Здесь E_0 – начальный модуль упругости, v_bи v_{bt}– коэффициентs изменения секущего модуля при сжатии и растяжении, вычисляемые для соответствующих диаграмм по следующим формулам [42]:

$$v_b = v_{b\_\max} + (v_0 - v_{b\_\max})\sqrt{1-\omega_1\eta_b - \omega_2\eta_b^2} \qquad (3.24)$$

$$v_{bt} = v_{bt\_\max} + (v_0 - v_{bt\_\max})\sqrt{1-\omega_1\eta_{bt} - \omega_2\eta_{bt}^2}\,, \qquad (3.25)$$

где $1 \geq v_b \geq 0$; $1 \geq v_{bt} \geq 0$; v_{b_max} и v_{bt_max} – значение изменения секущих модулей v_b и v_{bt} в вершине диаграммы; η_b и η_{bt} – уровни напряжений ($0 \leq \eta \leq 1$); ω_1, ω_2 – параметры кривизны диаграмм. Основные параметры для v_bопределяются следующим набором формул:

$$v_{b\_\max} = \frac{-Rb}{E_0\varepsilon_{b\_\max}},\ \eta_b = \frac{\sigma_{b,x}}{-Rb},\ \omega_2 = 1-\omega_1,\ \omega_1 = 2-2.5v_{b\_\max} \qquad (3.26)$$

$$\varepsilon_{b\_\max} = -\frac{B10^6}{E_0}\frac{1+\dfrac{0.75B}{60}+\dfrac{0.2}{B}}{0.12+\dfrac{B}{60}+\dfrac{0.2}{B}} = \frac{-Rb*(Rb^2+6*10^7 Rb+9*10^{12})}{E_0(Rb^2+5.4*10^6 Rb+6.75*10^{12})}, \qquad (3.27)$$

где B – кубиковая прочность материала при одноосном сжатии. Для бетона B=4*Rb*/3. Выражая v_{b_max} через (3.27) получим:

$$v_{b\_\max} = \frac{66*10^6 Rb+12Rb^2+81*10^{12}}{720*10^6 Rb+12Rb^2+108*10^{12}} \qquad (3.28)$$

Основные параметры для v_{bt}определяются следующим набором формул:

$$v_{bt\_max} = (0.6 + 0.15R_{bt}/25),\ \varepsilon_{bt\_max} = \sigma_{bt,x}/E_0 v_{bt\_max},\ \eta_{bt} = \sigma_{bt,x}/R_{bt} \qquad (3.29)$$

Коэффициенты Пуассона при сжатии и растяжении находятся из следующих соотношений:

$$\mu_{b\_max} = \mu_0 + 1 - \sqrt[3]{v_{b\_max}},\ \mu_b = \mu_{b\_max} + (\mu_0 - \mu_{b\_max})\sqrt{1-\eta^2}, \qquad (3.30)$$

$$\mu_{bt} = \mu_0 v_{bt}, \qquad (3.31)$$

Здесь μ_{b_max} и μ_{bt_max} – значение коэффициентов Пуассона в вершинах диаграмм сжатия и растяжения, μ_0 – начальный коэффициент Пуассона.

В результате, секущий модуль упругости и коэффициент Пуассона бетона при сжатии находятся из следующих соотношений:

$$E(\sigma_{b,x})^- = E_0 v_b = E_0\left[v_{b\_max} + (1-v_{b\_max})\sqrt{1-(2-2.5v_{b\_max})\frac{\sigma_{b,x}}{-Rb} - (2.5v_{b\_max}-1)\left(\frac{\sigma_{b,x}}{-Rb}\right)^2}\right], \qquad (3.32)$$

$$\mu_b = \mu_{b\_max} + (\mu_0 - \mu_{b\_max})\sqrt{1-\left(\frac{\sigma_{b,x}}{-Rb}\right)^2} \qquad (3.33)$$

Характеристики бетона при растяжении вычисляются из следующих выражений:

$$E(\sigma_{bt,x})^+ = E_0 v_{bt} = E_0\left[v_{bt\_max} + (1-v_{bt\_max})\sqrt{1-(2-2.5v_{bt\_max})\frac{\sigma_{bt\_x}}{Rbt} - (2.5v_{bt\_max}-1)\left(\frac{\sigma_{bt,x}}{Rbt}\right)^2}\right] \qquad (3.34)$$

$$\mu_{bt} = \mu_0 v_{bt} \qquad (3.35)$$

В выражениях (3.32), (3.34) $E(\sigma_{b,x})^-$ и $E(\sigma_{bt,x})^+$ - соответственно секущие модули упругости при сжатии и растяжении.

На рисунках 3.5 и 3.6 приведены диаграммы одноосного сжатия и растяжения, согласно модели Н. И. Карпенко [42], для образцов 1, 2 и 3 и таблицы 3.1.

В диаграмме сжатия на рисунке 3.5 ниспадающая ветвь на промежутке $\varepsilon_{b0} \le \varepsilon_b \le \varepsilon_{b2}$, заменяется прямой с координатами (ε_{b_max}, Rb) и (0.0035,Rb). В диаграмме растяжения на рисунке 3.6 ниспадающая ветвь на промежутке $\varepsilon_{bt0} \le \varepsilon_{bt} \le \varepsilon_{bt2}$ так же заменяется прямой (ε_{bt_max}, Rbt) и (0.00015,Rbt).

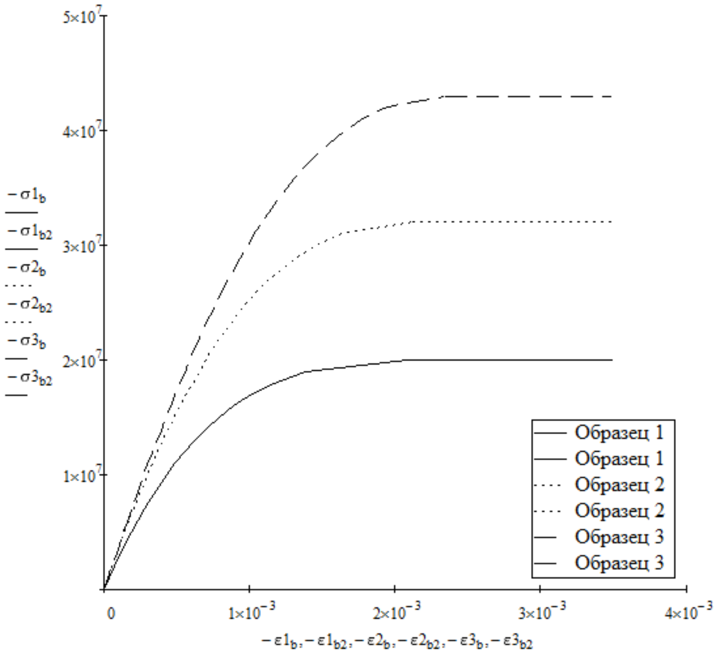


Рисунок 3.5. – Диаграммы деформирования образцов при сжатии по математической модели Н.И. Карпенко

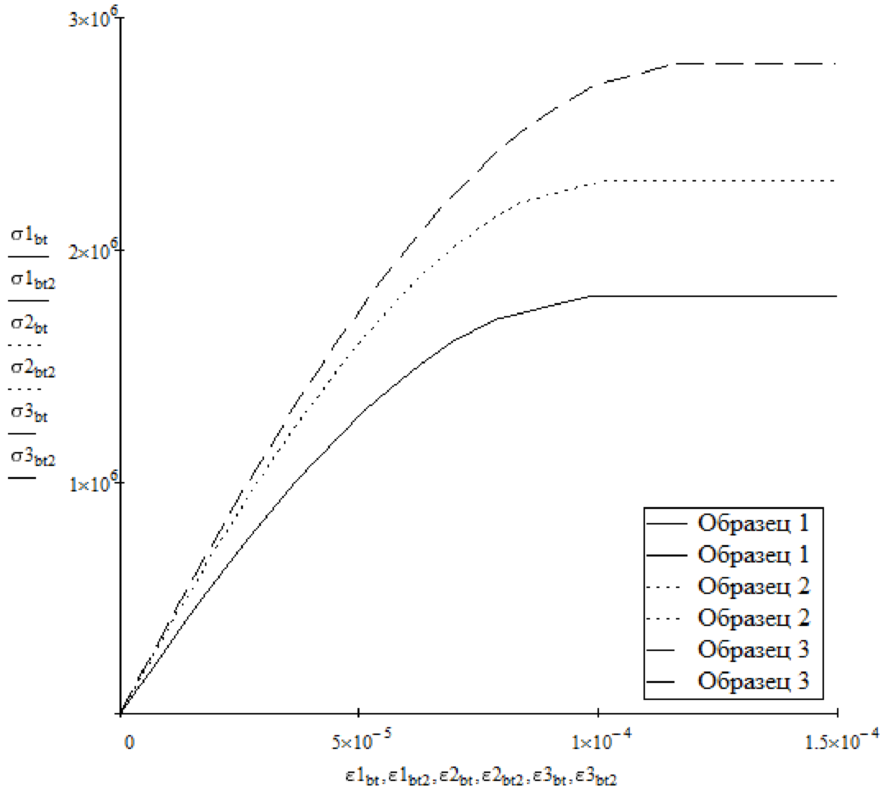


Рисунок 3.6 - Диаграммы деформирования образцов при растяжении по математической модели Н.И. Карпенко

3.3.1.3 Математическая модель для диаграмм деформирования, разработанная автором.

Упругая часть диаграммы сжатия при $0 \le \varepsilon_b \le \varepsilon_{b1}$ характеризуется прямой с координатами (0;0), (0.55Rb/E_0; 0.55Rb). Отрезок $\varepsilon_{b1} \le \varepsilon_b \le \varepsilon_{b0}$, где материал проявляет свойства ползучести и нелинейности, можно интерполировать с помощью полинома.

$$\sigma_b(\varepsilon_b) = a_1\varepsilon_b + b_1\varepsilon_b{}^2 + c_1\varepsilon_b{}^3 + d_1\varepsilon_b{}^4,\ E(\varepsilon_b) = \frac{\sigma_b(\varepsilon_b)}{\varepsilon_b} = a_1 + b_1\varepsilon_b + c_1\varepsilon_b{}^2 + d_1\varepsilon_b{}^3 \quad (3.36)$$

Для определения коэффициентов полинома необходимо решить систему из следующих уравнений:

$$0.55Rb = a_1 * \frac{0.55Rb}{E_0} + b_1\left(\frac{0.55Rb}{E_0}\right)^2 + c_1\left(\frac{0.55Rb}{E_0}\right)^3 + d_1\left(\frac{0.55Rb}{E_0}\right)^4, \quad (3.37)$$

$$\frac{E_0\varepsilon_{b\_max} + Rb}{2\varepsilon_{b\_max}} = a_1 + 2b_1\left(\frac{0.55Rb}{E_0}\right) + 3c_1\left(\frac{0.55Rb}{E_0}\right)^2 + 4d_1\left(\frac{0.55Rb}{E_0}\right)^3, \quad (3.38)$$

$$Rb = a_1\varepsilon_{b\_max} + b_1\varepsilon_{b\_max}^2 + c_1\varepsilon_{b\_max}^3 + d_1\varepsilon_{b\_max}^4, \quad (3.39)$$

$$0 = a_1 + 2b_1\varepsilon_{b\_max} + 3c_1\varepsilon_{b\_max}^2 + 4d_1\varepsilon_{b\_max}^3, \quad (3.40)$$

где a_1, b_1, c_1, d_1 – коэффициенты полинома. На промежутке $\varepsilon_{b0} \le \varepsilon_b \le \varepsilon_{b2}$ связь ε_b – σ_bаппроксимируется прямой с координатами (ε_{b_max}, Rb), (0.0035,Rb).

Аналогично для диаграммы растяжения упругая часть на промежутке $0 \le \varepsilon_{bt} \le \varepsilon_{bt1}$ характеризуется прямой с координатами (0;0), (0.55Rbt/E_0; 0.55Rbt). Отрезок $\varepsilon_{bt1} \le \varepsilon_{bt} \le \varepsilon_{bt0}$, где материал проявляет свойства ползучести и нелинейности, интерполируется полиномом.

$$\sigma_{bt}(\varepsilon_{bt}) = a_2\varepsilon_{bt} + b_2\varepsilon_{bt}{}^2 + c_2\varepsilon_{bt}{}^3 + d_2\varepsilon_{bt}{}^4,\ E(\varepsilon_{bt}) = \frac{\sigma_{bt}(\varepsilon_{bt})}{\varepsilon_{bt}} = a_2 + b_2\varepsilon_{bt} + c_2\varepsilon_{bt}{}^2 + d_2\varepsilon_{bt}{}^3 \quad (3.41)$$

Для этого необходимо решить систему из следующих уравнений:

$$0.55Rbt = a_2 * \frac{0.55Rbt}{E_0} + b_2\left(\frac{0.55Rbt}{E_0}\right)^2 + c_2\left(\frac{0.55Rbt}{E_0}\right)^3 + d_2\left(\frac{0.55Rbt}{E_0}\right)^4, \quad (3.42)$$

$$\frac{E_0\varepsilon_{bt\_max} + Rbt}{2\varepsilon_{bt\_max}} = a_2 + 2b_2\left(\frac{0.55Rbt}{E_0}\right) + 3c_2\left(\frac{0.55Rbt}{E_0}\right)^2 + 4d_2\left(\frac{0.55Rbt}{E_0}\right)^3, \quad (3.43)$$

$$Rbt = a_2\varepsilon_{bt\_\max} + b_2\varepsilon_{bt\_\max}^2 + c_2\varepsilon_{bt\_\max}^3 + d_2\varepsilon_{bt\_\max}^4, \tag{3.44}$$

$$0 = a_2 + 2b_2\varepsilon_{bt\_\max} + 3c_2\varepsilon_{bt\_\max}^2 + 4d_2\varepsilon_{bt\_\max}^3, \tag{3.45}$$

где a_2, b_2, c_2, d_2 – коэффициенты полинома, которые находятся из решения системы уравнений (3.42),(3.43),(4.44),(4.45), аналогично коэффициентам при сжатии.

На промежутке $\varepsilon_{bt0} \le \varepsilon_{bt} \le \varepsilon_{bt2}$ связь ε_{bt} – σ_{bt}аппроксимируется прямой с координатами (ε_{bt_max}, Rbt), (0.00015,Rbt).

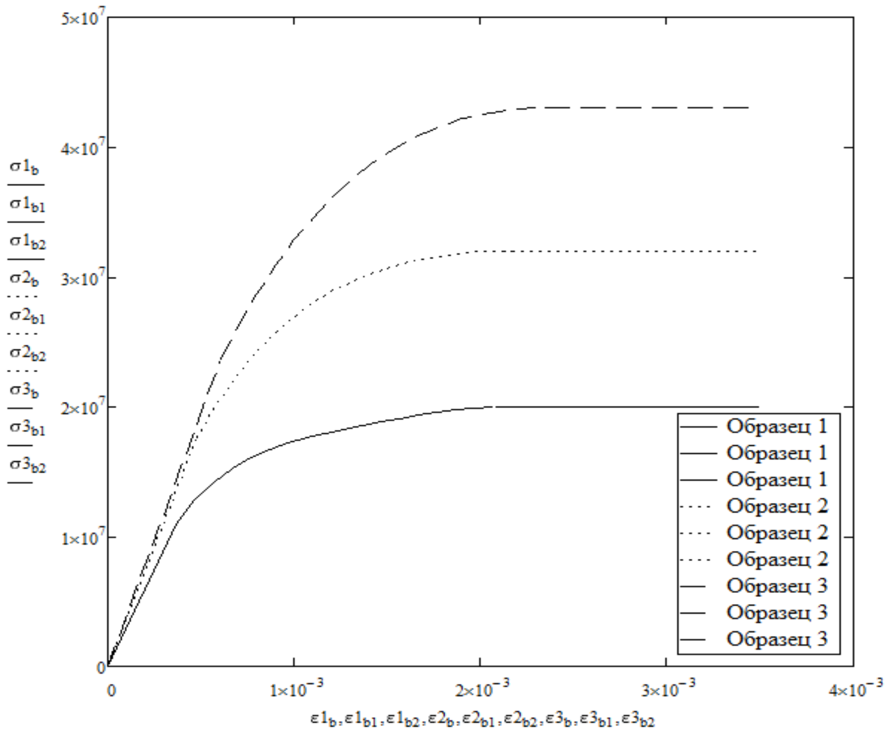


Рисунок 3.7 - Диаграммы деформирования образцов при сжатии по модели автора

На рисунках 3.7 и 3.8 приведены диаграммы деформирования при сжатии и растяжении, построенные по математической модели автора, построенные для каждого из трех образцов материала.

Сравнение математических моделей диаграмм деформирования приводится на рисунках 3.8 и 3.9

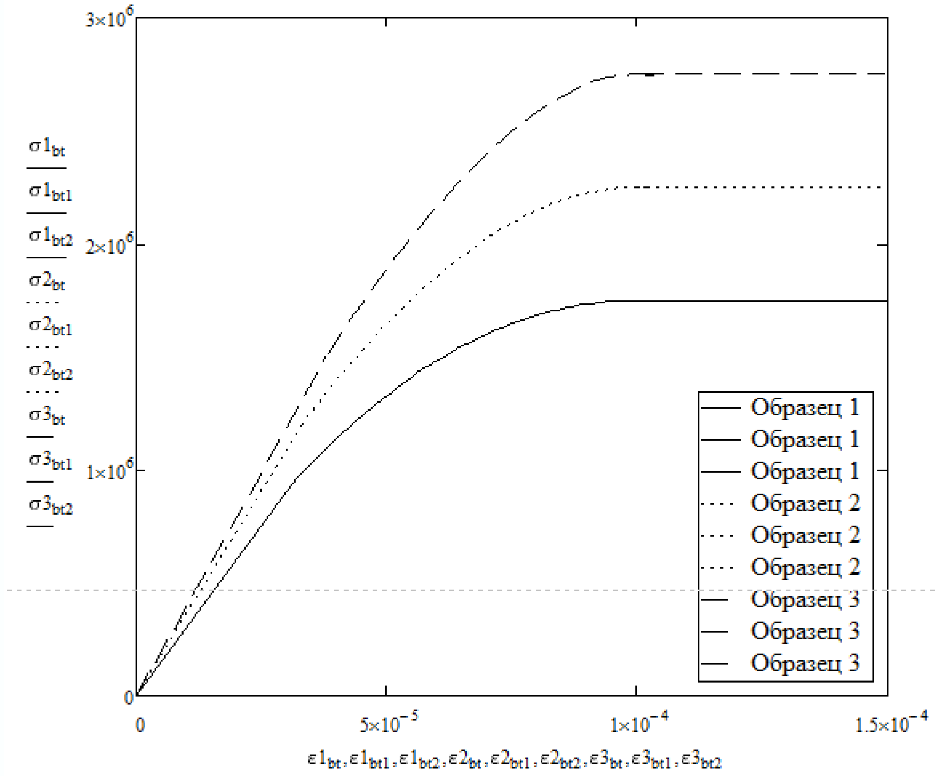


Рисунок 3.8 - Диаграммы деформирования образцов при растяжении по модели автора

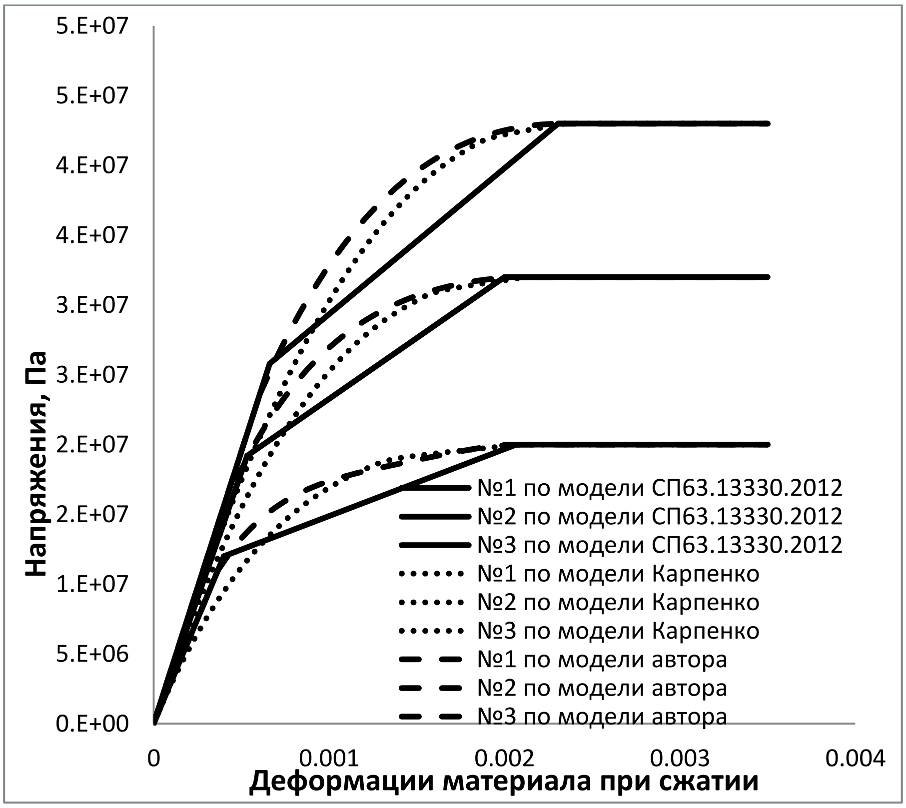


Рисунок 3.9 – Сравнение диаграмм деформирования при сжатии для каждого из образцов по модели СП63.13330.2012, модели Н. И. Карпенко и модели автора.

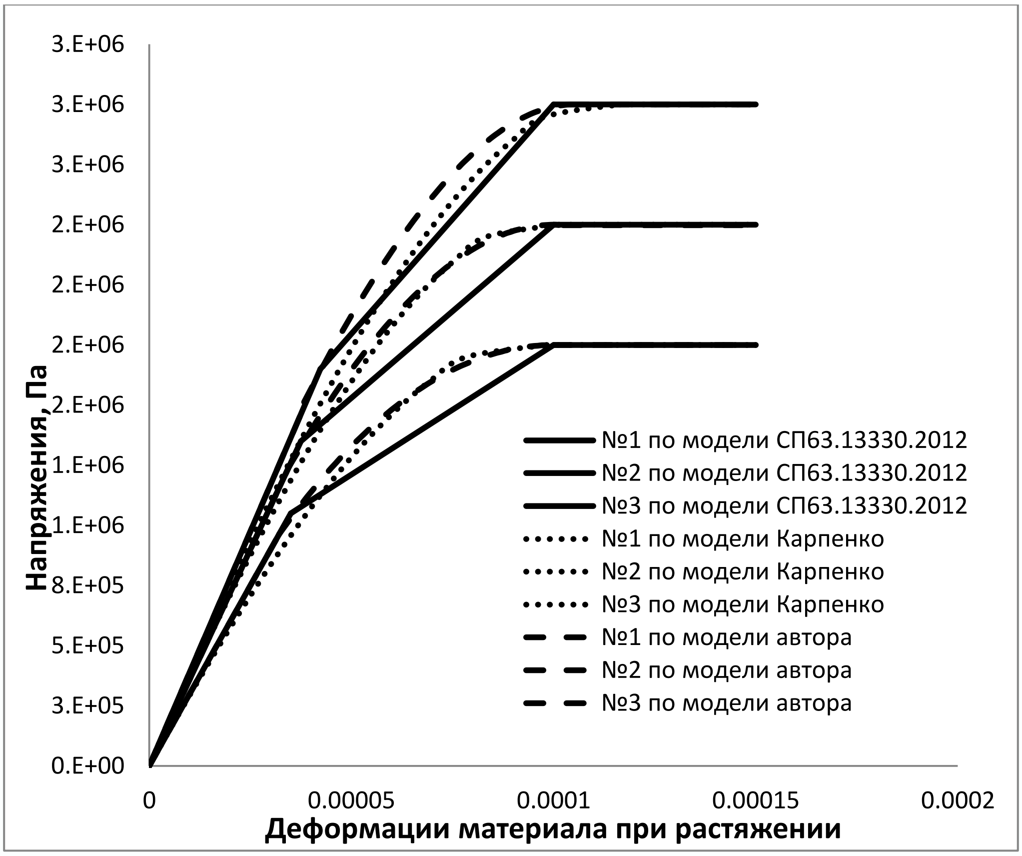


Рисунок 3.10 – Сравнение диаграмм деформирования при растяжении для каждого из образцов по модели СП63.13330.2012, модели Н.И. Карпенко и модели автора.

Взяв за эталон диаграммы Н.И. Карпенко, можно заметить, что наблюдается удовлетворительно совпадение диаграмм при растяжении и сжатии для бетонов с различными механическими характеристиками.

Сравним деформационные зависимости, полученные автором, с экспериментальными кривыми деформирования полимерного связующего для стеклопластиков. В таблице 3.2 приведены характеристики эпокси-полиамидных пленок[102] Э-33 и Э– 15. Такие полимеры являются связующим материалом в некоторых разновидностях стеклопластика

Таблица 3.2.

Материал пленки	E_0, кг/мм^2	R, кг/мм^2	$\varepsilon_{\_max}$, %
Э-33	250	4.6	2.7
Э-15	235	3.9	2.8

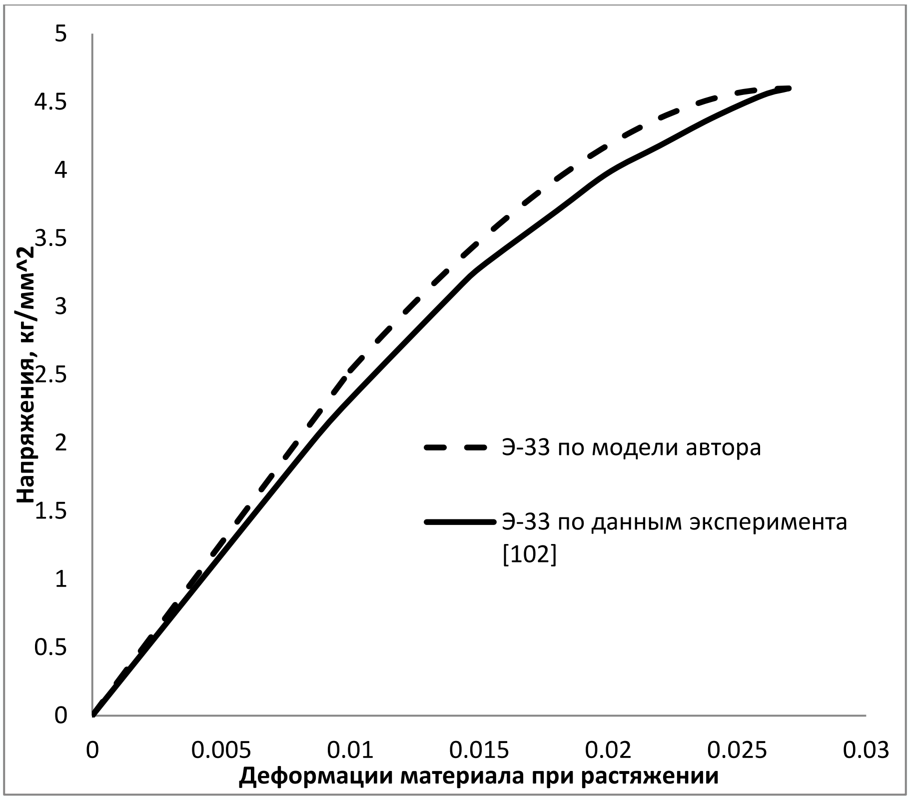


Рисунок 3.11. – Сравнение диаграмм деформирования при растяжении пленки Э-33 по модели автора с результатами эксперимента [102]

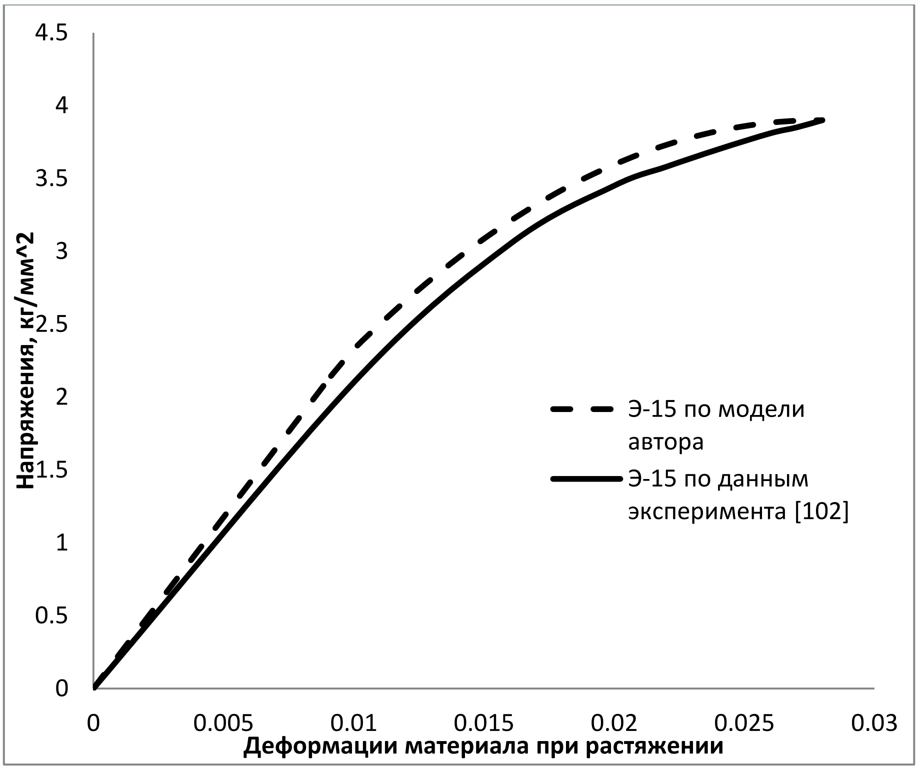


Рисунок 3.12. - Сравнение диаграмм деформирования при растяжении пленки Э-15 по модели автора с результатами эксперимента [102]

На рисунках3.11 и 3.12 представлены диаграммы растяжения полимерных пленок из [102] и аналогичные диаграммы, построенные автором.Как видно, наблюдается удовлетворительная корреляция между экспериментальными диаграммами и диаграммами автора.

3.3.1.4 Механические характеристики арматуры.

Прочность и деформативность арматурных сталей характеризуется диаграммой σ_s – ε_s. В работе [49] предлагается использовать кусочно-линейные функции.

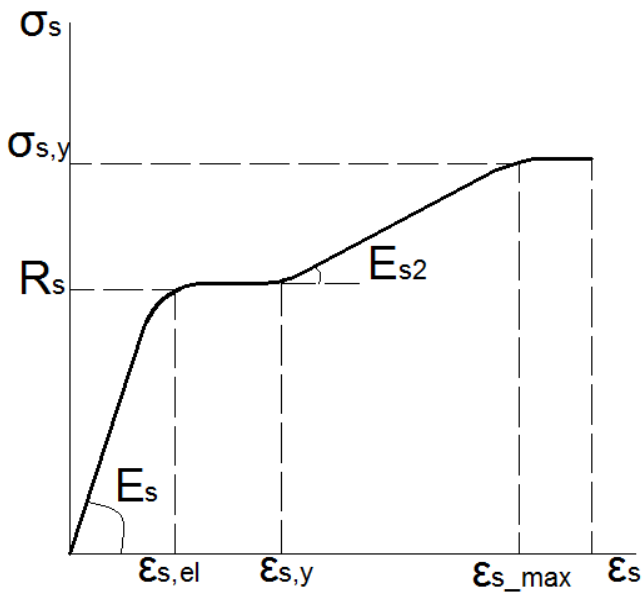


Рисунок 3.13 – Диаграмма деформирования армирующего материала в составе композита

При этом

$$\varepsilon_{s,el} = \frac{R_S}{E_s}, \qquad E_{s2} = \frac{\sigma_{s,y} - R_s}{\varepsilon_{s,\mathrm{int}} - \varepsilon_{s,y}} \tag{3.46}$$

Здесь $\sigma_{s,y}$ – временное сопротивление арматуры, R_s – ее расчетное сопротивление, E_s – модуль упругости арматуры, $\varepsilon_{s,y}$=0.02. Прочность и деформативность армирующих элементов в составе композита представлена диаграммой на рисунке 3.13

3.4 Матрица жесткости композитного нелинейного конечного элемента

3.4.1 Комбинирование механических характеристик материалов

Объединим в одном конечном элементе несколько материалов, входящих в состав композита. В этом случае модуль упругости и коэффициент Пуассона рассматривается как некоторые приведенные характеристики, зависящие одновременно от соответствующих характеристик обоих (всех) материалов, входящих в состав композитной конструкции. Для определения этих приведенных характеристик используется идея комбинированных объемов, о сути которой будет рассказано ниже.

Композитный конечный элемент представляет собой совместную работу всех материалов, находящихся внутри него, при этом сохраняя свойство сплошности материала. Для вычисления упругих характеристик композитного КЭ применим комбинирование объемов материалов, из которых он состоит. При этом приведенный модуль упругости $E_{пр}$ с учетом диаграмм деформирования материалов, для композитного КЭ вычисляется по следующей формуле:

$$E_{np} = \frac{E(\varepsilon_x)_1 V_1 + E(\varepsilon_x)_2 V_2 + \ldots + E(\varepsilon_x)_n V_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n} \quad , \qquad (3.47)$$

где E_1, E_2, E_n– соответственно нелинейные модули упругости материалов в составе композитного КЭ; V_1, V_2 и V_n - соответственно объемы каждого из материалов в составе композитного КЭ, Аналогично вычислим приведенный коэффициент Пуассона μ_{np}

$$, \qquad \mu_{np} = \frac{(\mu_1)_x V_1 + (\mu_2)_x V_2 + \ldots + (\mu_n)_x V_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n} \qquad (3.48)$$

где $(\mu_1)_x$,$(\mu_2)_x$и $(\mu_n)_x$– соответственно коэффициенты Пуассона для каждого материала в композитном КЭ.

Подставляя (3.47) и (3.48) в стандартную матрицу упругости, получим матрицу механических характеристик для композитного объемного конечного элемента, сочетающего совместную работу различных сред.

$$D_{np}=\frac{E_{np}(1-\mu_{np})}{(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu_{np}}{1-\mu_{np}} & \frac{\mu_{np}}{1-\mu_{np}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_{np}}{1-\mu_{np}} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu_{np}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_{np}}{1-\mu_{np}} & \frac{\mu_{np}}{1-\mu_{np}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu_{np}}{2(1-\mu_{np})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu_{np}}{2(1-\mu_{np})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu_{np}}{2(1-\mu_{np})} \end{bmatrix} \qquad (3.49)$$

Данные выражения выполняются при условии изотропии каждого материала по объему КЭ. Отметим, что механические характеристики матрицы $D_{пр}$ - могут складываться из любого числа составляющих, находящихся внутри композитного КЭ. Эти составляющие определяются своими объемами, и формулы (3.47) и (3.48) можно применить для композитов, имеющих в своем составе инородные включения, газовые пузыри, технологические отверстия.

При этом формулы (3.47) и (3.48) позволяют осуществлять предельный переход к моно материалам, что делает данные выражения универсальными.

3.4.2 Композитный конечный элемент в форме параллелепипеда

Рассмотрим i-ый конечный элемент в виде параллелепипеда с восемью узловыми точками. Вектор-столбец узловых перемещений этого элемента имеет 24 компонента, объединенных в 8 блоков по числу узлов [49]:

$$\{q\}_i=\left\{\{q\}_1^{(k)}\ldots\{q\}_i^{(k)}\ldots\{q\}_i^{(8)}\right\}, \qquad (3.50)$$

где каждый вектор равен $\{q\}_i^{(k)}=\left\{q_1^{(k)}q_2^{(k)}q_3^{(k)}\right\}=\{u_k v_k w_k\}$.

Аналогичную структуру имеет и вектор узловых сил:

$$\{R\}_i=\left\{\{R\}_i^{(1)}\ldots\{R\}_i^{(k)}\ldots\{R\}_i^{(8)}\right\}, \qquad (3.51)$$

где $\{R\}_i^{(k)} = \{R_1^{(k)} R_2^{(k)} R_3^{(k)}\}$.

На рисунке 3.14 изображен типовой конечный элемент прямоугольного параллелепипеда с восемью узлами, по три перемещения в каждом узле.

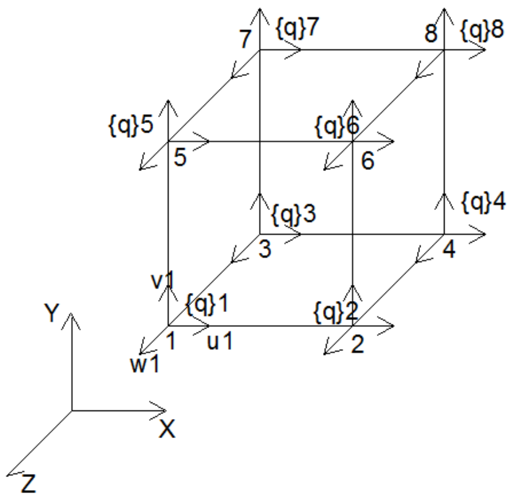


Рисунок 3.14 – Типовой КЭ в форме параллелепипеда.

Связь между векторами (3.50) и (3.51) осуществляется с помощью матрицы жесткости, которая имеет блочную структуру.

$$\{R\}_i = [K]_i \{q\}_i \quad , \tag{3.52}$$

где $[K]_i$ – матрица жесткости i-го элемента. Учитывая блочную структуру векторов $\{R\}_i$ и $\{q\}_i$, матрицу жесткости так же можно представить в блочном виде [49]:

$$[K]_{i,j}^{(k)} = \begin{bmatrix} [K]_{i,1}^{(1)} & \cdots & [K]_{i,8}^{(8)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [K]_{i,8}^{(1)} & \cdots & [K]_{i,8}^{(8)} \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

Матрица интерполяционных функций в данном случае будет иметь 8 блоков по числу узлов: $[C] = \lfloor [C]^{(1)} \ldots [C]^{(k)} \ldots [C]^{(8)} \rfloor$.

Каждый из блоков равен $[C]^{(k)} = E_3 C_k(x, y, z)$, где E_3 – единичная матрица третьего порядка. Закон изменения перемещений u,v и w по области элемента принимается в виде полиномов с суммарным числом постоянных коэффициентов, равным 24.

$$u(x,y,z)=\alpha_1+\alpha_4 x+\alpha_7 y+\alpha_{10}z+\alpha_{13}xy+\alpha_{16}yz+\alpha_{19}xz+\alpha_{22}xyz$$
$$v(x,y,z)=\alpha_2+\alpha_5 x+\alpha_8 y+\alpha_{11}z+\alpha_{14}xy+\alpha_{17}yz+\alpha_{20}xz+\alpha_{23}xyz \qquad (3.54)$$
$$w(x,y,z)=\alpha_3+\alpha_6 x+\alpha_9 y+\alpha_{12}z+\alpha_{15}xy+\alpha_{18}yz+\alpha_{21}xz+\alpha_{24}xyz$$

Функции (3.54) обеспечивают непрерывность при переходе от одного элемента к другому. Выражениям (3.54) отвечает соотношение[49].

$$\begin{Bmatrix} C_1(x,y,z) \\ \vdots \\ C_k(x,y,z) \\ \vdots \\ C_8(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots & x_8 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_k & \cdots & y_8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1y_1z_1 & x_2y_2z_2 & \cdots & x_ky_kz_k & \cdots & x_8y_8z_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ \vdots \\ xyz \end{Bmatrix} \qquad (3.55)$$

Данные соотношения формулируют не в общей системе координат x,y,z, а в местной, трехмерной, нормализованной ξ,η,ζ, связанной с общей выражениями

$$\xi=\frac{x-x_c}{a};\ \eta=\frac{y-y_c}{b};\ \varsigma=\frac{z-z_c}{c} \qquad (3.56)$$

Здесь *a* – половина длины конечного элемента в направлении оси X; *b* – половина длины конечного элемента по оси *Y*; *c* – половина длины конечного элемента по оси *Z*; *ξ, η, ζ* – нормализованные координаты типового конечного элемента, x_c, y_c, z_c – координаты центра тяжести конечного элемента; *x, y, z* – координаты каждого из 8-ми узлов конечного элемента в виде параллелепипеда.

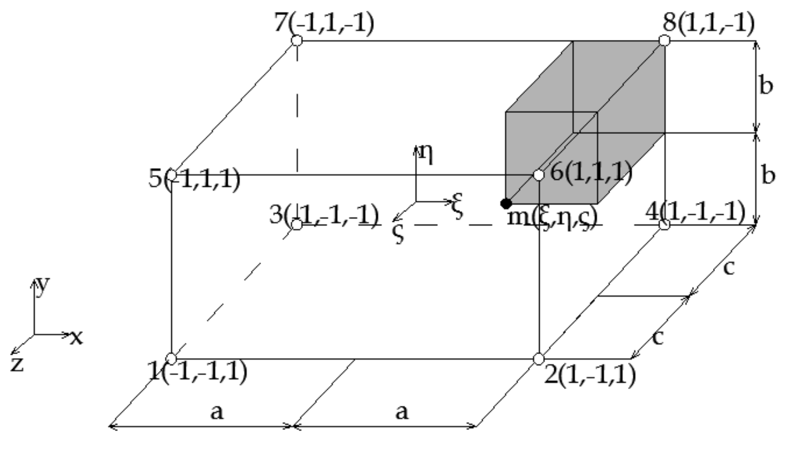


Рисунок 3.15 - Нормализованные координаты [49]

На рисунке 3.15 показан конечный элемент в виде прямоугольного параллелепипеда в нормализованных координатах.

Подставляя в (3.55) нормализованные координаты узлов +1 или -1, будем иметь в новой системе координат[49].

$$\begin{Bmatrix} C_1(\xi,\eta,\varsigma) \\ \vdots \\ C_k(\xi,\eta,\varsigma) \\ \vdots \\ C_8(\xi,\eta,\varsigma) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \pm 1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & \cdots & \pm 1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -1 & \cdots & \pm 1 & \cdots & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \vdots \\ \xi\eta\varsigma \end{Bmatrix} \tag{3.57}$$

В результате обращения средней матрицы и матричного перемножения получаются выражения для интерполяционных функций. Для произвольного k-го узла интерполяционная функция представляет собой произведение одномерных полиномов первого порядка.

$$C_k(\xi,\eta,\varsigma) = N^{(k)}(\xi)N^{(k)}(\eta)N^{(k)}(\varsigma), \tag{3.58}$$

где $N^{(k)}(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi_k\xi)$, $N^{(k)}(\eta) = \frac{1}{2}(1+\eta_k\eta)$, $N^{(k)}(\varsigma) = \frac{1}{2}(1+\varsigma_k\varsigma)$ (3.59)

В результате получается:

$$C_k(\xi,\eta,\varsigma) = \frac{1}{8}(1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma) \tag{3.60}$$

Рисунок 3.15 иллюстрирует физический смысл выражения (3.60) , который заключается в том, что каждая из зависимостей представляет собой отношение объема соответствующего заштрихованного параллелепипеда с вершиной в данной точке к объему всего конечного элемента.

Матрица деформаций содержит восемь блоков:

$$[B] = \lfloor [B]^{(1)}[B]^{(2)} \cdots [B]^{(k)} \cdots [B]^{(8)} \rfloor$$

Стандартный блок ее равен[49]:

$$B_i^{(k)}=[\varPhi]C_k(\xi,\eta,\varsigma)=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}\frac{\xi_k(1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma)}{a} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\eta_k(1+\xi_k\xi)(1+\varsigma_k\varsigma)}{b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\varsigma_k(1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta)}{c}\\ \frac{\eta_k(1+\xi_k\xi)(1+\varsigma_k\varsigma)}{b} & \frac{\xi_k(1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma)}{a} & 0\\ 0 & \frac{\varsigma_k(1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta)}{c} & \frac{\eta_k(1+\xi_k\xi)(1+\varsigma_k\varsigma)}{b}\\ \frac{\varsigma_k(1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta)}{c} & 0 & \frac{\xi_k(1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma)}{a}\end{bmatrix} \qquad (3.61)$$

Следовательно, матрица жесткости элемента также блочная. При этом каждый из блоков может быть вычислен по формуле:

$$[K]_{ij}^{(k)}=\iiint\limits_{V_i}([B]^{(j)})^T[D]_{np}[B]^{(k)}dV \qquad (3.62)$$

Произведя замену переменных, и имея в виду, что элементарный объем равен:

$$dV=dxdydz=abc(d\xi d\eta d\varsigma), \qquad (3.63)$$

получается выражение для вычисления матрицы жесткости конечного элемента в виде параллелепипеда:

$$[K]_{ij}^{(k)}=abc\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}([B]^{(j)})^T[D]_{np}[B]^{(k)}d\xi d\eta d\varsigma \qquad (3.64)$$

При этом каждый элемент матрицы жесткости $[K]^k_{i,j}$ состоит из подматрицы третьего порядка:

$$[K]_{i,j}^{(k)}=\begin{bmatrix}K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3}\\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3}\\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3}\end{bmatrix} \qquad (3.65)$$

В результате получим матрицу жесткости для КЭ в виде параллелепипеда, которая будет иметь размеры 24x24.

Учитывая, что в прямоугольном элементе в виде параллелепипеда 8 узлов. Вводя переменные k=1:8 и j=1:8, после взятия определенного интеграла (3.64), имея ввиду постоянство *[D]*$_{np}$ по объему элемента, получим:

$$K_{1+n,1+m}=\frac{D_{np_{1,1}}bc(\eta_j\eta_k+3)(\varsigma_j\varsigma_k+3)\xi_j\xi_k}{72a}+\frac{D_{np_{4,4}}ac(\xi_j\xi_k+3)(\varsigma_j\varsigma_k+3)\eta_j\eta_k}{72b}$$
$$+\frac{D_{np_{6,6}}ab(\xi_j\xi_k+3)(\eta_j\eta_k+3)\varsigma_j\varsigma_k}{72c}$$

$$K_{1+n,2+m}=\frac{D_{np_{1,2}}c(\varsigma_j\varsigma_k+3)\xi_j\eta_k}{24}+\frac{D_{np_{4,4}}c(\varsigma_j\varsigma_k+3)\eta_j\xi_k}{24}$$

$$K_{1+n,3+m}=\frac{D_{np_{1,3}}b(\eta_j\eta_k+3)\xi_j\varsigma_k}{24}+\frac{D_{np_{6,6}}b(\eta_j\eta_k+3)\varsigma_j\xi_k}{24}$$

$$K_{2+n,1+m}=\frac{D_{np_{2,1}}c(\varsigma_j\varsigma_k+3)\eta_j\xi_k}{24}+\frac{D_{np_{4,4}}c(\varsigma_j\varsigma_k+3)\xi_j\eta_k}{24}$$

$$K_{2+n,2+m}=\frac{D_{np_{2,2}}ab(\xi_j\xi_k+3)(\varsigma_j\varsigma_k+3)\eta_j\eta_k}{72b}+\frac{D_{np_{4,4}}bc(\eta_j\eta_k+3)(\varsigma_j\varsigma_k+3)\xi_j\xi_k}{72a}$$
$$+\frac{D_{np_{5,5}}ab(\xi_j\xi_k+3)(\eta_j\eta_k+3)\varsigma_j\varsigma_k}{72c} \qquad (3.66)$$

$$K_{2+n,3+m}=\frac{D_{np_{2,3}}a(\xi_j\xi_k+3)\eta_j\varsigma_k}{24}+\frac{D_{np_{5,5}}a(\xi_j\xi_k+3)\varsigma_j\eta_k}{24}$$

$$K_{3+n,1+m}=\frac{D_{np_{3,1}}b(\eta_j\eta_k+3)\varsigma_j\xi_k}{24}+\frac{D_{np_{6,6}}b(\eta_j\eta_k+3)\xi_j\varsigma_k}{24}$$

$$K_{3+n,2+m}=\frac{D_{np_{3,2}}a(\xi_j\xi_k+3)\varsigma_j\eta_k}{24}+\frac{D_{np_{5,5}}a(\xi_j\xi_k+3)\eta_j\varsigma_k}{24}$$

$$K_{3+n,3+m}=\frac{D_{np_{3,3}}ab(\xi_j\xi_k+3)(\eta_j\eta_k+3)\varsigma_j\varsigma_k}{72c}+\frac{D_{np_{5,5}}ac(\xi_j\xi_k+3)(\varsigma_j\varsigma_k+3)\eta_j\eta_k}{72b}$$
$$+\frac{D_{np_{6,6}}bc(\eta_j\eta_k+3)(\varsigma_j\varsigma_k+3)\xi_j\xi_k}{72a}$$

В результате преобразований имеем:

$$K_{1+n,1+m}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{1-\mu_{np}}{a^2}\xi_k\xi_j(1+\dfrac{1}{3}\eta_k\eta_j)(1+\dfrac{1}{3}\varsigma_k\varsigma_j)+\dfrac{1-2\mu_{np}}{2}\times\ldots\\ \ldots\times\left[\dfrac{1}{b^2}\eta_k\eta_j(1+\dfrac{1}{3}\xi_k\xi_j)(1+\dfrac{1}{3}\varsigma_k\varsigma_j)+\dfrac{1}{c^2}\varsigma_k\varsigma_j(1+\dfrac{1}{3}\xi_k\xi_j)(1+\dfrac{1}{3}\eta_k\eta_j)\right]\end{array}\right]\times\ldots$$
$$\ldots\times\frac{a(E(\varepsilon_x)_1V_1+E(\varepsilon_x)_2V_2\ldots+E(\varepsilon_x)_nV_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})}$$

$$K_{1+n,2+m}=\frac{1}{ab}(1+\frac{1}{3}\varsigma_k\varsigma_j)\left[\frac{1}{2}\xi_k\eta_j+\mu_{np}(\xi_j\eta_k-\eta_j\xi_k)\right]\times\ldots$$
$$\ldots\times\frac{a(E(\varepsilon_x)_1V_1+E(\varepsilon_x)_2V_2\ldots+E(\varepsilon_x)_nV_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})}$$

$$K_{1+n,3+m}=\frac{1}{ac}(1+\frac{1}{3}\eta_k\eta_j)\left[\frac{1}{2}\xi_k\varsigma_j+\mu_{np}(\xi_j\varsigma_k-\varsigma_j\xi_k)\right]\times\ldots$$

$$\ldots\times\frac{a(E(\varepsilon_x)_1V_1+E(\varepsilon_x)_2V_2\ldots+E(\varepsilon_x)_nV_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})}$$

$$K_{2+n,1+m}=\frac{1}{ab}(1+\frac{1}{3}\varsigma_k\varsigma_j)\left[\frac{1}{2}\xi_j\eta_k+\mu_{np}(\xi_k\eta_j-\eta_k\xi_j)\right]\times\ldots$$

$$\ldots\times\frac{a(E(\varepsilon_x)_1V_1+E(\varepsilon_x)_2V_2\ldots+E(\varepsilon_x)_nV_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})}$$

$$K_{2+n,2+m}=\left[\begin{array}{l}\frac{1-\mu_{np}}{b^2}\eta_k\eta_j(1+\frac{1}{3}\xi_k\xi_j)(1+\frac{1}{3}\varsigma_k\varsigma_j)+\frac{1-2\mu_{np}}{2}\times\ldots\\ \ldots\times\left[\frac{1}{a^2}\xi_k\xi_j(1+\frac{1}{3}\eta_k\eta_j)(1+\frac{1}{3}\varsigma_k\varsigma_j)+\frac{1}{c^2}\varsigma_k\varsigma_j(1+\frac{1}{3}\xi_k\xi_j)(1+\frac{1}{3}\eta_k\eta_j)\right]\end{array}\right]\times\ldots \qquad (3.67)$$

$$\ldots\times\frac{a(E(\varepsilon_x)_1V_1+E(\varepsilon_x)_2V_2\ldots+E(\varepsilon_x)_nV_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})}$$

$$K_{2+n,3+m}=\frac{1}{bc}(1+\frac{1}{3}\xi_k\xi_j)\left[\frac{1}{2}\eta_k\varsigma_j+\mu_{np}(\eta_j\varsigma_k-\varsigma_j\eta_k)\right]\times\ldots$$

$$\ldots\times\frac{a(E(\varepsilon_x)_1V_1+E(\varepsilon_x)_2V_2\ldots+E(\varepsilon_x)_nV_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})}$$

$$K_{3+n,1+m}=\frac{1}{ac}(1+\frac{1}{3}\eta_k\eta_j)\left[\frac{1}{2}\varsigma_k\xi_j+\mu_{np}(\varsigma_j\xi_k-\xi_j\varsigma_k)\right]\times\ldots$$

$$\ldots\times\frac{a(E(\varepsilon_x)_1V_1+E(\varepsilon_x)_2V_2\ldots+E(\varepsilon_x)_nV_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})}$$

$$K_{3+n,2+m}=\frac{1}{bc}(1+\frac{1}{3}\xi_k\xi_j)\left[\frac{1}{2}\varsigma_k\eta_j+\mu_{np}(\varsigma_j\eta_k-\eta_j\varsigma_k)\right]\times\ldots$$

$$\ldots\times\frac{a(E(\varepsilon_x)_1V_1+E(\varepsilon_x)_2V_2\ldots+E(\varepsilon_x)_nV_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})}$$

$$K_{3+n,3+m}=\left[\begin{array}{l}\frac{1-\mu_{np}}{c^2}\varsigma_k\varsigma_j(1+\frac{1}{3}\xi_k\xi_j)(1+\frac{1}{3}\eta_k\eta_j)+\frac{1-2\mu_{np}}{2}\times\ldots\\ \ldots\times\left[\frac{1}{b^2}\eta_k\eta_j(1+\frac{1}{3}\xi_k\xi_j)(1+\frac{1}{3}\varsigma_k\varsigma_j)+\frac{1}{a^2}\xi_k\xi_j(1+\frac{1}{3}\eta_k\eta_j)(1+\frac{1}{3}\varsigma_k\varsigma_j)\right]\end{array}\right]\times\ldots$$

$$\ldots\times\frac{a(E(\varepsilon_x)_1V_1+E(\varepsilon_x)_2V_2\ldots+E(\varepsilon_x)_nV_n)}{32(1+\mu_{np})(1-2\mu_{np})}$$

Здесь $n = 1 + 3(j - 1)$; $m = 1 + 3(k - 1)$. В результате получаем матрицу жесткости КЭ размером 24х24. После расчета матрицы жесткости композитного конечного элемента в виде параллелепипеда, составляется матрица индексов, а затем и общая матрица жесткости системы. Затем, используя вектор сил и общую матрицу жесткости, находится вектор перемещений по формуле:

$$\{\overline{q}\} = [\overline{K}]^{-1}\{\overline{P}\}, \tag{3.68}$$

где $[\overline{K}]^{-1}$ - обратная общая матрица жесткости системы.

3.4.3 Метод последовательных приближений для решения нелинейных задач.

Методы решения нелинейных задач описаны В. А. Постновым [71] и другими авторами [48,49]. Суть метода последовательных приближений состоит в том, что общая матрица жесткости системы определяется на каждом этапе через узловые перемещения, полученные на предыдущем этапе:

$$[\overline{K}(q^{n-1})][q^n] = [\overline{P}], \tag{3.69}$$

где n – номер этапа приближения. Из (1) получаем перемещения на n-ом этапе приближения:

$$q^n = [\overline{K}(q^{n-1})]^{-1}[\overline{P}] \tag{3.70}$$

На первом этапе, при n=1, значения узловых перемещений, от которых зависит матрица жесткости системы, равны нулю. В результате все члены, связанные с нелинейностью, обращаются в нуль, и получается обычная упругая матрица жесткости.

3.5 Алгоритм разрушения композитного материала в конструкции

Данный алгоритм предназначен для расчета конструкций при простом напряженном состоянии, т. к. использует диаграммы деформирования материала при одноосном растяжении и сжатии. При постоянном увеличении нагрузки на конструкцию происходит постепенное ее разрушение вследствие изменения механических характеристик материала. В результате происходит изменение механических характеристик матриц жесткости каждого КЭ в дискретной модели конструкции. Характеристики меняются согласно зависимостям $\varepsilon - \sigma$, предложенным автором. На рисунке 3.16приведен механизм разрушения при наличии двух материалов в составе композита: связующего и арматуры.

Данный алгоритм характеризует разрушение конструкции с ориентированным расположением арматуры в составе композита. Композитный материал представляет собой совместную работу двух материалов: связующего и армирующего. При постепенном разрушении связующего, основную нагрузку начинает принимать на себя армирующие элементы. Конструкция разрушается вследствие превышения предела прочности (текучести) армирующих элементов в наиболее опасных и подверженных разрушению ее участках

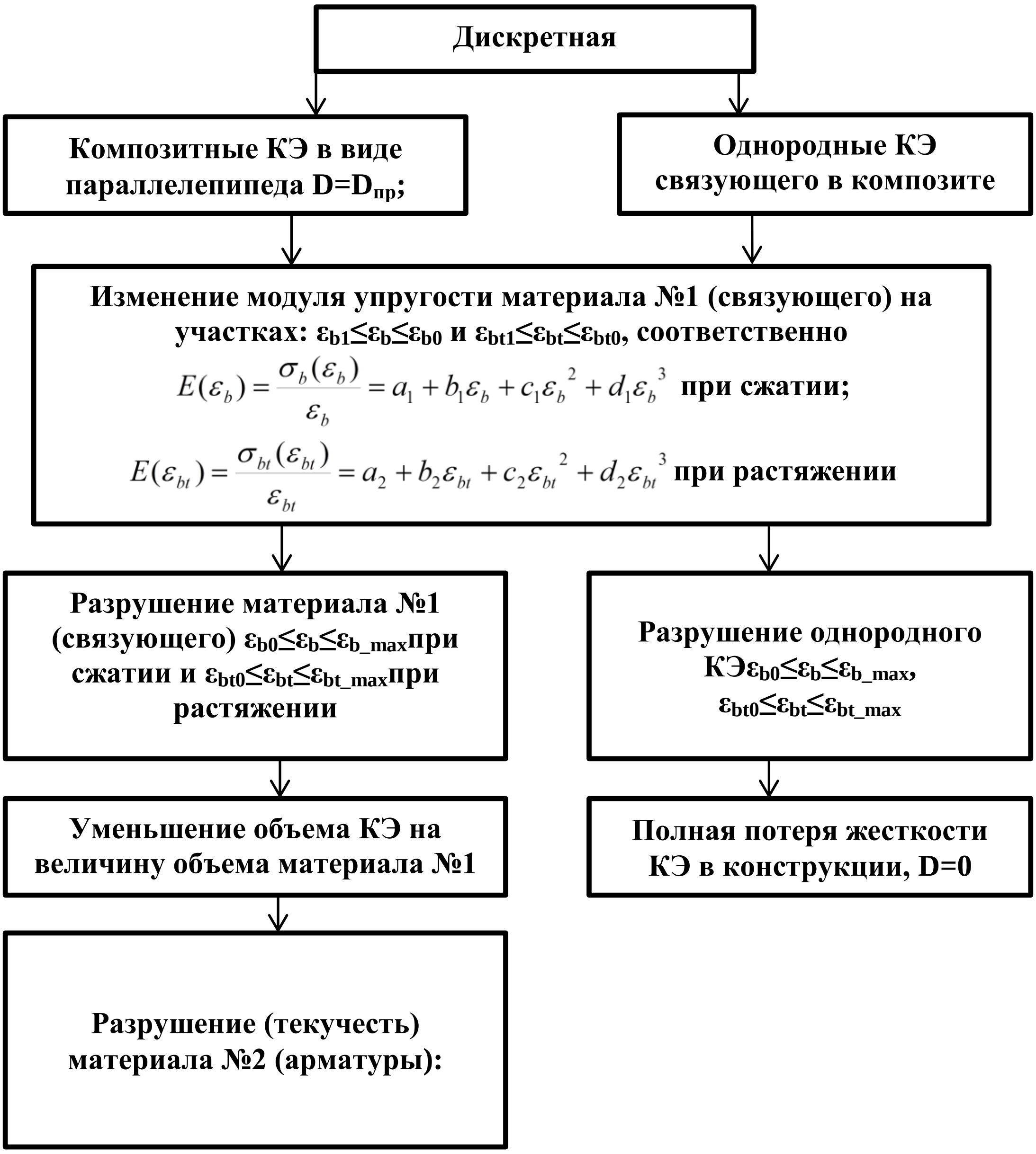


Рисунок 3.16 – Механизм разрушения материалов.

3.6 Выводы по третьей главе

1. Используя механические характеристики материалов: предел прочности при растяжении, предел прочности при сжатии, модуль упругости, в результате решения системы уравнений, находится закон деформирования материала при растяжении и сжатии.

2. На основе диаграмм деформирования материалов сформирована матрица жесткости для композитного нелинейного конечного элемента, учитывающего переменную жесткость каждого из материалов в своем составе. Данная матрица жесткости, реализующая идею комбинирования объемов, учитывает в своем составе работу всех материалов в композитном конечном элементе.

3. Сформирован алгоритм для численного исследования композитных материалов в области предельной прочности. Данный алгоритм реализован в программах [80, 81, 82, 83], о которых пойдет речь в следующей главе.

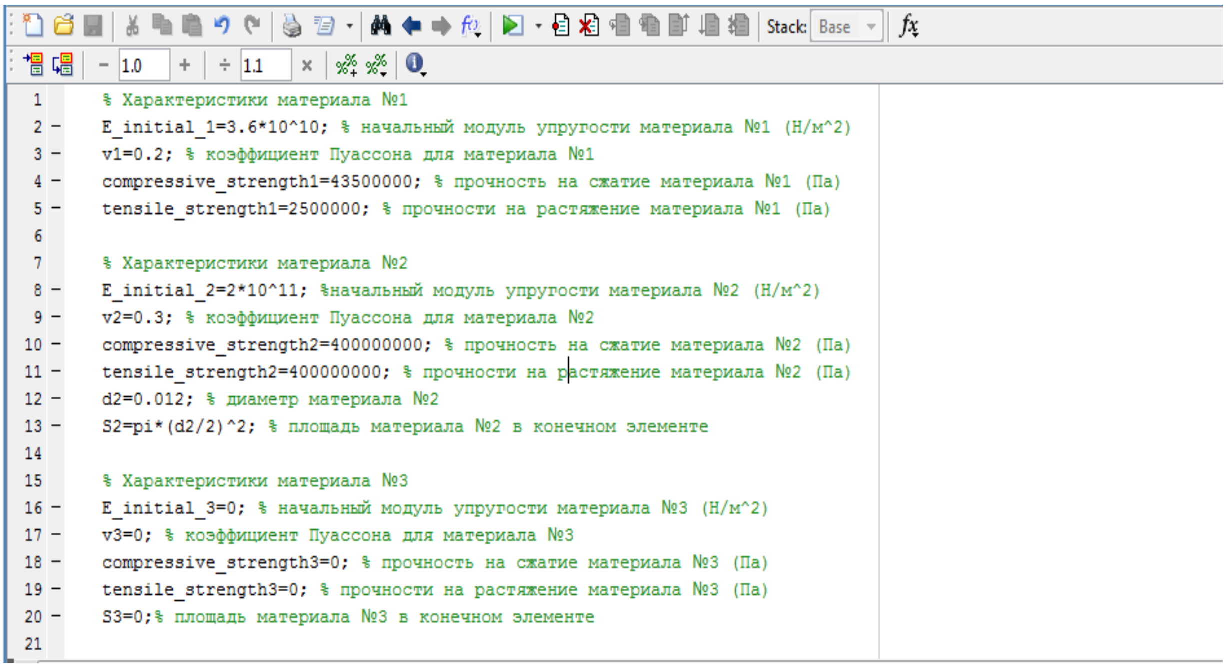
Глава 4. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ, РЕАЛИЗУЮЩЕЕ РАЗРАБОТАННУЮ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ

4.1 Алгоритмы, используемые в разработанных программах

В данном разделе будут рассмотрены программы, имеющие свидетельства о государственной регистрации программы на ЭВМ и используемые в дальнейших расчетах предельных состояний конструкций.

4.1.1 Алгоритм сборки глобальной матрицы жесткости системы

Программа Composit[80] содержит алгоритм, позволяющий рассчитывать коэффициенты матриц жесткости для однородных и композитных конечных элементов, из которых составлять общую матрицу жесткости системы. Входные данные: физико-механические характеристики материалов; матрица индексов, содержащая информацию об архитектуре конструкции и граничных условиях.



```
% Характеристики материала №1
E_initial_1=3.6*10^10; % начальный модуль упругости материала №1 (Н/м^2)
v1=0.2; % коэффициент Пуассона для материала №1
compressive_strength1=43500000; % прочность на сжатие материала №1 (Па)
tensile_strength1=2500000; % прочности на растяжение материала №1 (Па)

% Характеристики материала №2
E_initial_2=2*10^11; %начальный модуль упругости материала №2 (Н/м^2)
v2=0.3; % коэффициент Пуассона для материала №2
compressive_strength2=400000000; % прочность на сжатие материала №2 (Па)
tensile_strength2=400000000; % прочности на растяжение материала №2 (Па)
d2=0.012; % диаметр материала №2
S2=pi*(d2/2)^2; % площадь материала №2 в конечном элементе

% Характеристики материала №3
E_initial_3=0; % начальный модуль упругости материала №3 (Н/м^2)
v3=0; % коэффициент Пуассона для материала №3
compressive_strength3=0; % прочность на сжатие материала №3 (Па)
tensile_strength3=0; % прочности на растяжение материала №3 (Па)
S3=0;% площадь материала №3 в конечном элементе
```

Рисунок 4.1 – Характеристики материалов.

На программу «Composit» получено свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ № 2014661694. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 16 января 2015 года. В качестве компилятора использовалась программная среда Matlab 2009b, использующая язык программирования Matlab[5, 31, 32, 43].

Матрицы жесткости для КЭ вычислялись, исходя из математической модели, приведенной в третьей главе. Матрица индексов, характеризующая связность узлов и последовательность элементов, а так же граничные условия, строилась в программе Excel, а затем импортировалась в среду Matlab.

Ниже приведен алгоритм формирования общей матрицы жесткости системы на языке Matlab[31] для линейного расчета изотропного материала:

```
MG=sparse(100000,100000);
for n=1:ni1; i=1:m1;
    I=W(n,i);
MG(I,I)=MG(I,I)+K;
end
…………
MGS=MG(1:p,1:p);
```

где *MG* – пустая матрица размером 100000 на 100000, которая впоследствии будет заполняться значениями из матриц жесткости конечных элементов; *ni1* – общее количество КЭ в системе; *m1* – количество степеней свободы КЭ, для прямоугольного параллелепипеда m1=24; *W(n,i)* – матрица индексов; *p* – количество перемещений в расчетной схеме.

Следующий алгоритм – основан на сборке матрицы жесткости в векторной форме [31] и модифицирован для нелинейных расчетов. При этом каждый КЭ имеет вои механические характеристики. Данный алгоритм значительно быстрее предыдущего по скорости вычислений и позволяет использования матриц жесткости нелинейных конечных элементов.

```
mk=m1^2;
m=mk*ni1;
x=zeros(m,1); z=zeros(m,1); y=ones(m,1);

for n=komp_material; m=1:m1^2;
Z(n,m)=K_reduc.*E(n);
```

```
end
for n=material_1; m=1:m1^2;
Z(n,m)=K1.*E(n);
end
for n=1:ni1; i=1:m1; I=W(n,i);
ii=repmat(I(:),1,m1); jj=ii';
l=mk*(n-1)+(1:mk);
x(l)=ii(:); z(l)=jj(:);  y(l)=Z(n,:); end
 MGS=sparse(x,z,y,100000,100000);
MGS=MGS(1:p,1:p);
```

Команды в третьей строке создают два нулевых вектора *x* и *z* с количеством элементов m, и один единичный вектор *y* с аналогичным количеством единиц. Векторы `komp_material` и `material_1` соответствуют номерам композитных и однородных КЭ в расчетной схеме. `K_reduc и K1` соответственно неполные матрицы жесткости КЭ.`Z(n,m)` – матрица, состоящая из последовательно расположенных матриц жесткости КЭ, каждый КЭ со своими механическими характеристиками. Функция `repmat(I(:),1,m1)` формирует массив, в котором будет количество строк, соответствующее вектору *I(:)* и количество столбцов *m1*, содержащих значения этого вектора. Команды `x(l)=ii(:); z(l)=jj(:); y(l)=Z(n,:);` преобразуют матрицы *ii*, *jj* и *Z* в столбцы и сохраняют их в соответствующих позициях векторов x, z, y. Затем, при помощи функции sparse все векторы собираются в единую матрицу жесткости системы.

4.1.2 Алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния конструкции

Данный алгоритм применяется в программе Strength[81](свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ №2015610762 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 16 января 2015 года). Входные данные: общая матрица жесткости системы, вектор сил, вектор модулей упругости материала.

Данный алгоритм решает систему уравнений равновесия с последующим определением перемещений каждого узла элемента по трем направлениям, совпадающим с направлениями координатных осей, вычислять компоненты тензоров напряжений и деформаций для каждого конечного элемента.

Направление сил на узлы:

```
load Sili;
P=10000; % Значение силы, действующей на конструкцию (Н)

k1=1:p;
F(k1)=0;

F(Sili)=-P/length(Sili); % Задание вектора сил
```

Команда «`load Sili`» загружает в систему MATLAB вектор, содержащий номера перемещений в узлах, вдоль которых направляются силы. Создается вектор F(k1)=0, длиной от 1 до максимального номера перемещения в системе. Команда `F(Sili)=-P/length(Sili` распределяет нагрузку по соответствующим узлам.

Ниже приведен алгоритм расчета перемещений и формирование векторов перемещений вдоль каждой из координатных осей.

```
U=MGS\F; O=isnan(U); U(O==1)=0;
F=F(:);
for s1=1:p/3;
Po_osi_x(s1)=U(s1*3-2); Po_osi_y(s1)=U(s1*3-1);
Po_osi_z(s1)=U(3*s1);
Vector_peremesheniy_Po_Osi_x= Po_osi_x(:);
Vector_peremesheniy_Po_Osi_y= Po_osi_y(:);
Vector_peremesheniy_Po_Osi_z= Po_osi_z(:);

Vector_peremesheniy=U;
end
```

Данные команды вычисляют вектор перемещений U, а затем делят его на три вектора перемещений вдоль каждой из осей. Зная перемещения, осуществляются расчеты напряжений и деформаций каждого КЭ.

Ниже приведены части алгоритмов для расчетов деформаций и напряжений системы:

```
% Расчет деформаций
V=W';
q=(p+1):300000;
U(q)=0;
[ni1,m1]=size(W);
```

```
Ui=zeros(m1,ni1);

for n=1:ni1; i=1:m1;
Ui(i,n)=U(V(i,n));
   Defor=B*Ui;
end

% Расчет напряжений
Napr=zeros(6,ni1); % создание нулевой матрицы напряжений для ее
заполнения
Napr_1=Stress(W,U,D1,material_1,a1,b1,c1);
Napr_komp=Stress(W,U,D_komp,komp_material,a1,b1,c1);
for n=material_1; m=1:6;
Napr(m,n)=Napr_1(m,n).*E(n); % напряжениявКЭматериала №1
end
for n=komp_material; m=1:6;
Napr(m,n)=Napr_komp(m,n).*E(n); % напряжения в композитных
конечных элементах
end
```

Здесь V – транспонированная матрица индексов; q – вектор перемещений, не входящих в систему; B – матрица деформаций КЭ.

4.1.3 Алгоритм учета физической нелинейности материалов

Данные алгоритмы реализованы программой Ultimate State [82](свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ №2015618399 2015 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 7 августа 2015 года). Данное приложение использует диаграммы деформирования материалов и необходимо для учета нелинейности во время расчета. Алгоритмы данной подпрограммы изменяют механические характеристики материалов конструкции во время расчета до полного разрушения КЭ. Для учета нелинейности применяются зависимости, используемые в третьей главе.

```
Step=1; % 0 - линейный расчет, 1 - включить нелинейность
if Step==0
E1(1:ni1)=E_initial_1; E2(1:ni1)=E_initial_2;
E3(1:ni1)=E_initial_3;
E4(1:ni1)=E_initial_4; E5(1:ni1)=E_initial_5;
elseif Step==1

E1=deformation_stress_depend(compressive_strength1,tensile_stren
gth1,E_initial_1,Defor,ni1);
```

```
end
E(1:ni1)=E1; % модуль упругости связующего материала
E(komp_material)=(E1(komp_material).*S1+E2(komp_material).*S2+E3
(komp_material).*S3+E4(komp_material).*S4+E5(komp_material).*S5)
...
./(S1+S2+S3+S4+S5); % модуль упругости в каждом композитном КЭ
конструкции

v=(v1*S1+v2*S2+v3*S3+v4*S4+v5*S5)./(S1+S2+S3+S4+S5); %
приведенныйкоэффициентПуассона
```

Данный алгоритм позволяет использовать несколько различных материалов как в самой конструкции, так и в составе композитного конечного элемента. `E_initial_` – начальный модуль упругости каждого из материалов. Функция`deformation_stress_depend`реализует диаграммы деформирования материалов. Общий модуль упругости определяется как сумма отношений модулей упругости каждого из материалов в конечном элементе к соответствующим площадям этих материалов в КЭ. Аналогично определяется коэффициент Пуассона композитного КЭ.

Далее приведен алгоритм работы функции `deformation_stress_depend`:

```
function E=deformation_stress_depend(compressive_strength,…
tensile_strength,E_initial,Defor,ni1)
Rc=compressive_strength; Rt=tensile_strength;
Defor_compressive_max=(Rc*(Rc^2+6*10^7*Rc+9*10^12))/(E_initial*(
Rc^2+5.4*10^6*Rc+6.75*10^12));
Defor_tensile_max=0.0001;
A1=[0.55*Rc/E_initial (0.55*Rc/E_initial)^2
(0.55*Rc/E_initial)^3 (0.55*Rc/E_initial)^4
    1 2*0.55*Rc/E_initial 3*(0.55*Rc/E_initial)^2
4*(0.55*Rc/E_initial)^3
    Defor_compressive_max Defor_compressive_max^2
Defor_compressive_max^3 Defor_compressive_max^4
    1 2*Defor_compressive_max 3*Defor_compressive_max^2
4*Defor_compressive_max^3];
B1=[0.55*Rc
    (E_initial+Rc/Defor_compressive_max)/2
Rc
    0];
A2=[0.55*Rt/E_initial (0.55*Rt/E_initial)^2
(0.55*Rt/E_initial)^3 (0.55*Rt/E_initial)^4
    1 2*0.55*Rt/E_initial 3*(0.55*Rt/E_initial)^2
4*(0.55*Rt/E_initial)^3
    Defor_tensile_max Defor_tensile_max^2 Defor_tensile_max^3
Defor_tensile_max^4
```

```
    1 2*Defor_tensile_max 3*Defor_tensile_max^2
4*Defor_tensile_max^3];
B2=[0.55*Rt
    (E_initial+Rt/Defor_tensile_max)/2
Rt
    0];
X_compressive=A1\B1; X_tensile=A2\B2;

Def(1,1:ni1)=Defor(1,1:ni1);

for n=1:ni1
if  (0>Def(n)) && (Def(n)>-0.55*Rc/E_initial)
E(n)=E_initial;
elseif Def(n)<-0.55*Rc/E_initial && Def(n)>-
Defor_compressive_max;
    E(n)=X_compressive(1)+X_compressive(2)*(-
Def(n))+X_compressive(3)*(-Def(n))^2+X_compressive(4)*(-
Def(n))^3;
elseif Def(n)<-Defor_compressive_max;
E(n)=0;
elseif Def(n)>0 && Def(n)<0.55*Rt/E_initial
E(n)=E_initial;
elseif Def(n)>0.55*Rt/E_initial && Def(n)<Defor_tensile_max

E(n)=X_tensile(1)+X_tensile(2)*Def(n)+X_tensile(3)*Def(n)^2+X_te
nsile(4)*Def(n)^3;
elseif Def(n)>Defor_tensile_max;
E(n)=0;
end
end
end
```

Здесь `compressive_strength` – прочность материала при сжатии; `tensile_strength` – прочность материала при растяжении; `E_initial` – начальный модуль упругости; `Defor` – деформации, полученные на предыдущем этапе нагружения; `ni1` – количество КЭ в расчетной схеме. Данная функция применяет деформационные зависимости материалов при сжатии и растяжении, согласно зависимости, построенной во второй главе.

4.1.4 Алгоритм для численного исследования композитных материалов и конструкций в области предельной прочности

ПО «Программа для расчета конструкций из композитных материалов»[83](свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ №2015618400 2015 г.),используя все вышеперечисленные алгоритмы, и осуществляет расчеты конструкций в нелинейной постановке. Для уточнения решения нелинейной системы уравнений на каждом этапе нагружения используется метод последовательных приближений.

На рисунке 4.2 приведен алгоритм формирования системы МКЭ. Используя компоненты матрицы индексов и коэффициенты матриц жесткости каждого КЭ, формируется общая матрица жесткости системы. В результате решения системы уравнений, находятся перемещения, а затем и напряженно-деформированное состояние конструкции.

На рисунке 4.3 показан краткий алгоритм разрушения конструкции при наличии двух материалов в составе композита: связующего и арматуры. Итерационный процесс и постепенное увеличение нагрузки продолжается до тех пор, пока не будет превышен предел прочности частиц более прочного материала в составе композита (арматуры), т. к. именно стержни (нити, хлопья) более прочного материала берут на себя впоследствии основную нагрузку. От прочности арматуры в конструкции зависит ее несущая способность. Данный алгоритм предполагает наличие двух совместно работающих материалов в конструкции, однако на его примере их может быть любое количество. Как можно заметить, итерационный процесс сопровождается постепенным изменением исключением КЭ из модели и увеличением шага нагрузки на конструкцию.

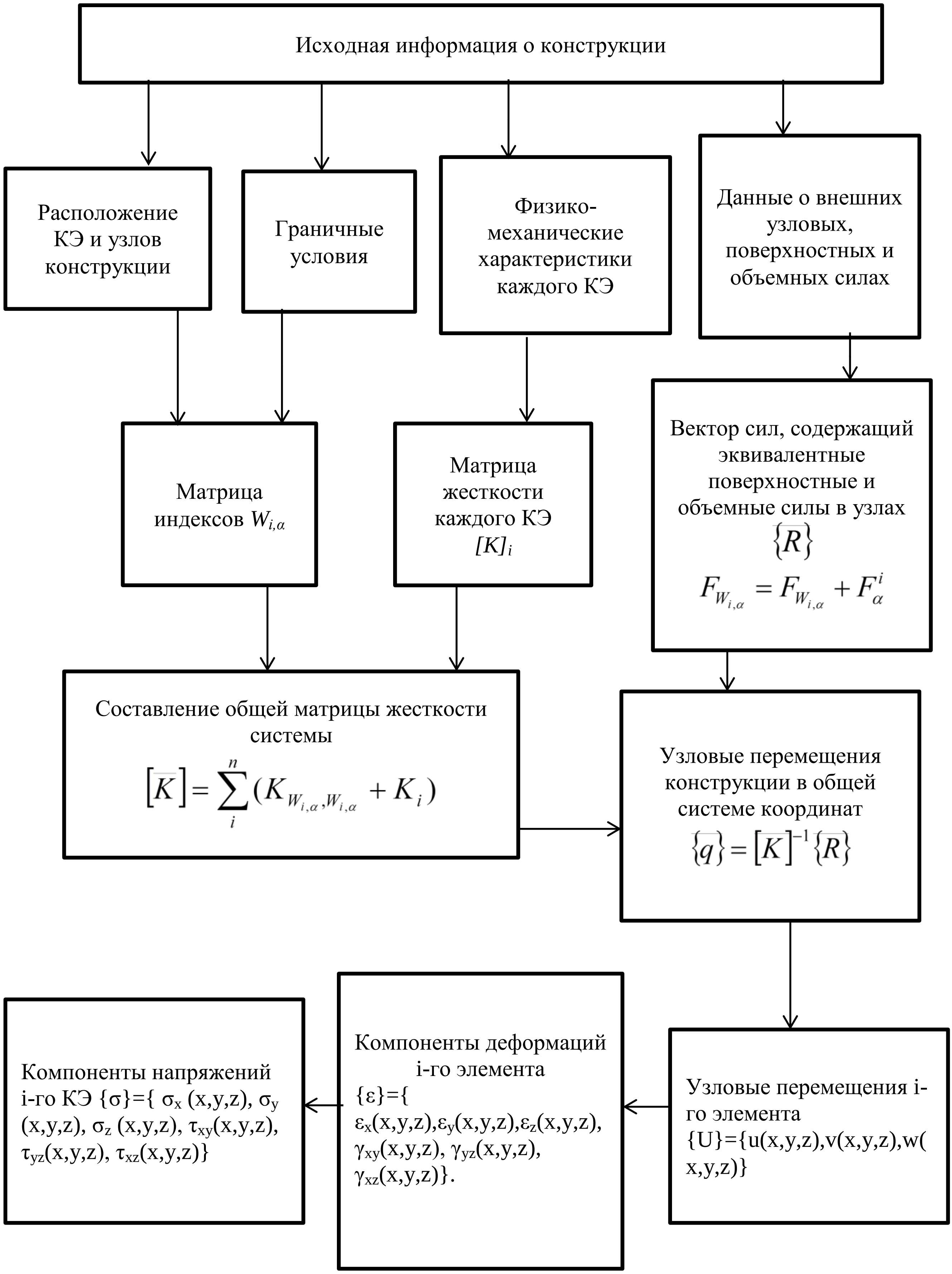


Рисунок 4.2. – Схема формирования и расчета системы МКЭ.

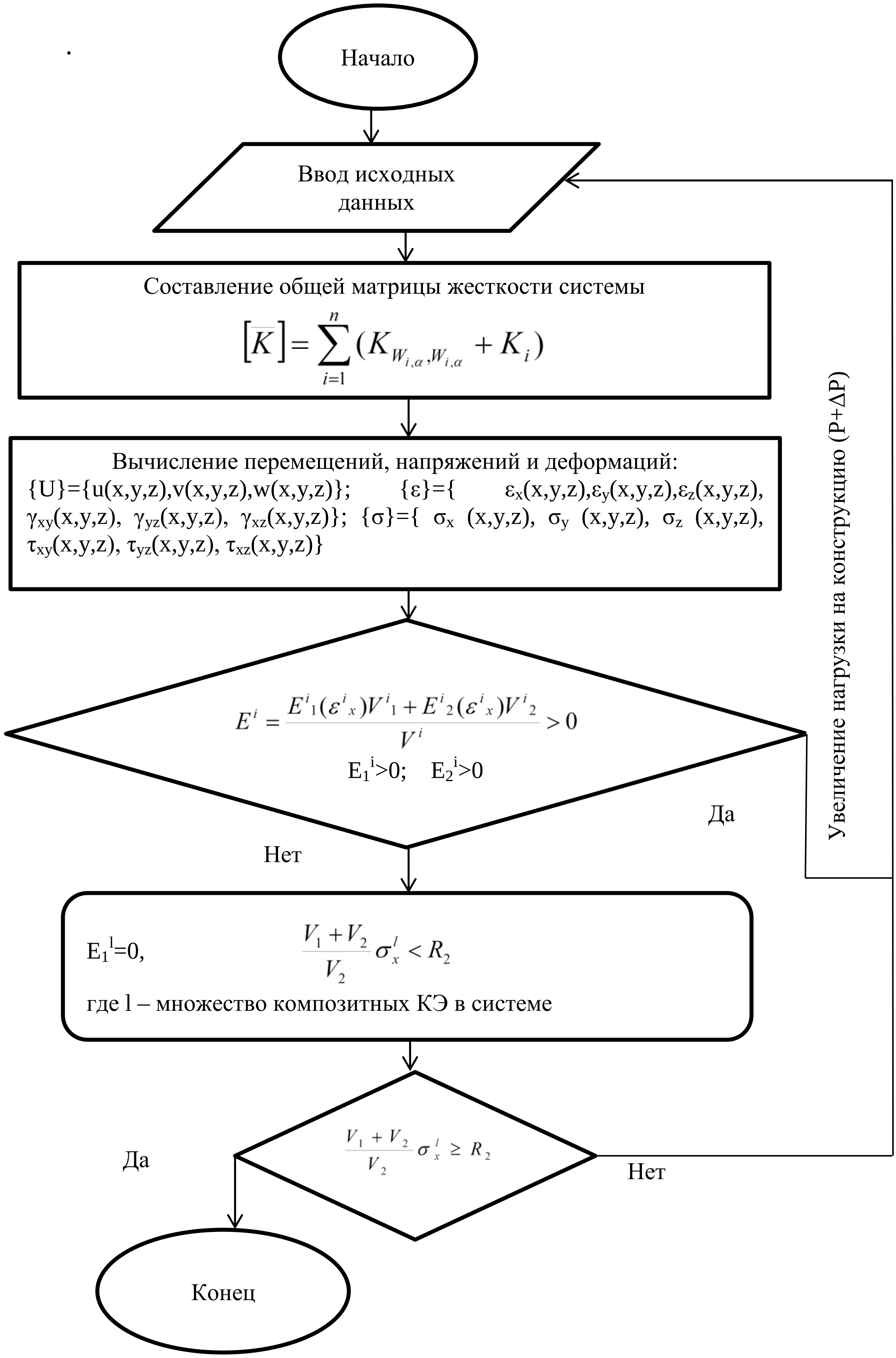


Рисунок 4.3 – Блок – схема алгоритма работы программы

4.2 Задача исследования напряженно-деформированного состояния статически-определимой балки на изгиб при фиксированной нагрузке.

Рассмотрим статически определимую балку прямоугольного сечения. Размеры балки следующие: длина 3200 мм, ширина 100 мм, высота 600 мм. Модуль упругостиE=3x10^{10} Па, аналогичный модулю упругости бетона класса В25.Коэффициент Пуассона μ=0.2. Расчетная схема балки изображена на рисунке 4.4. Нагрузка P=10 кН. Приложена на расстоянии 0,8 метра от краев балки, как показано на рисунке.

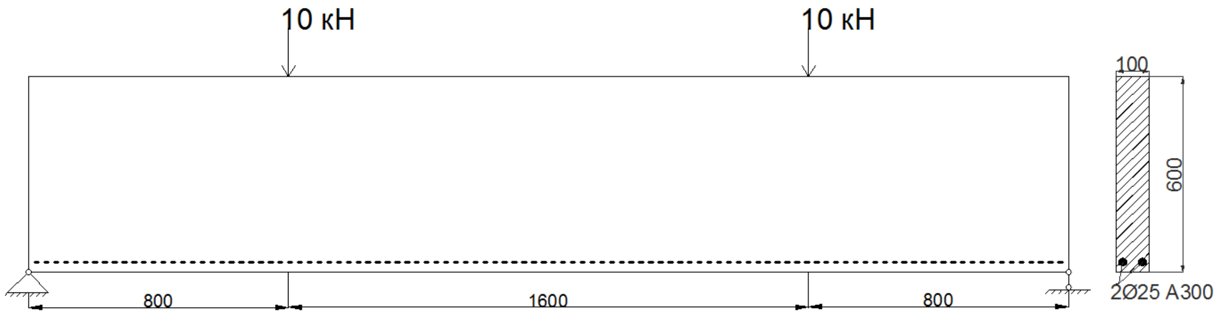


Рисунок 4. 4 – Размеры и расчетная схема балки.

Для нахождения перемещений в середине пролета балки (ее прогиба) использовались и сравнивались три метода: аналитический; расчет в ПК ЛИРА (МКЭ стержневой); расчет с помощью алгоритмов автора, с использованием конечных элементов в виде прямоугольного параллелепипеда в программной среде MATLAB. На рисунке 4.5 представлена схема разбивки балки на конечные элементы.

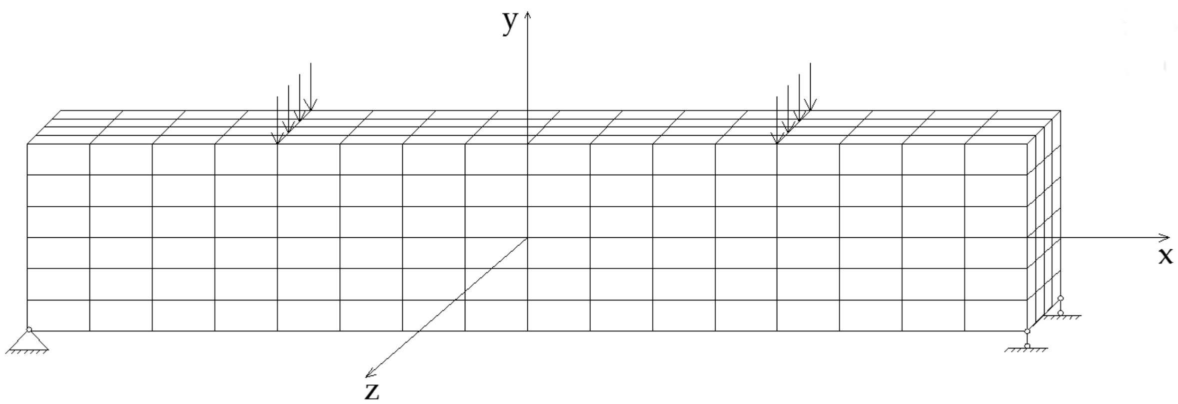
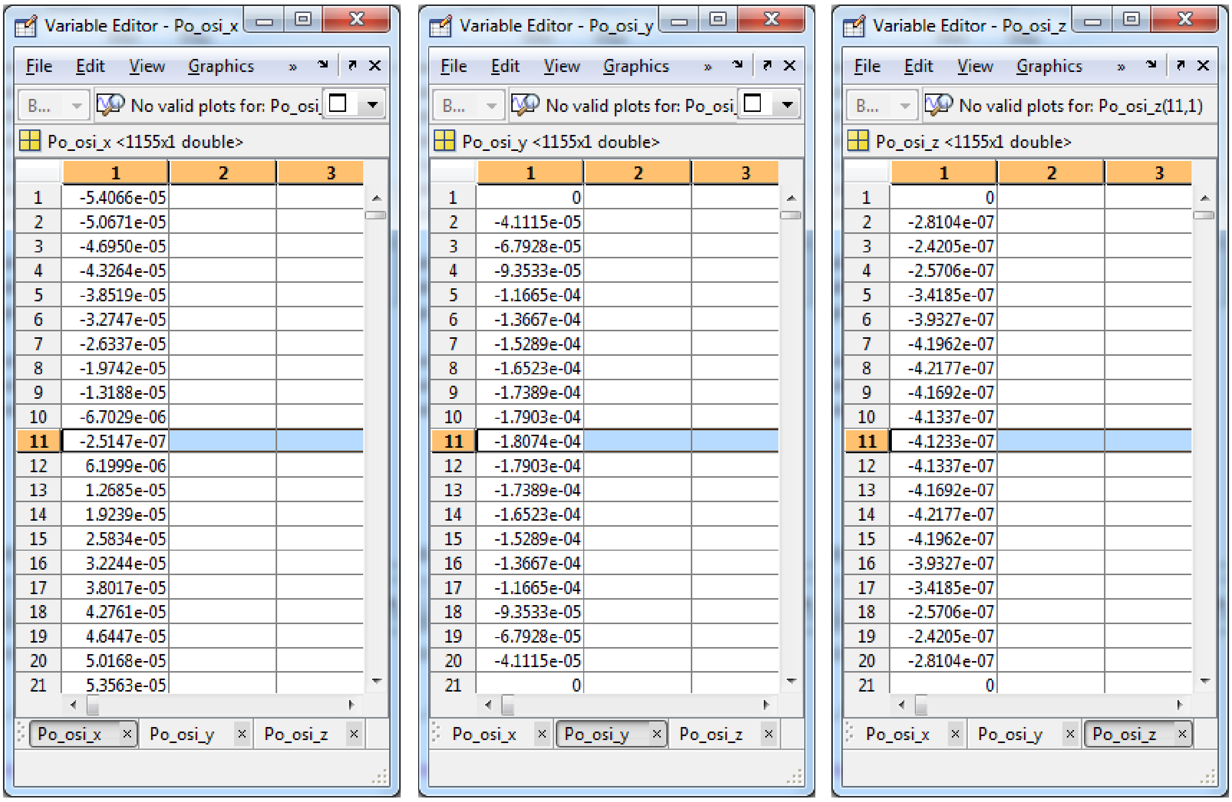


Рисунок 4.5 – Схема разбивки на КЭ

На рисунке 4.6 изображены векторы перемещений вдоль нижней границы балки.



	Po_osi_x (1)	Po_osi_y (1)	Po_osi_z (1)
1	-5.4066e-05	0	0
2	-5.0671e-05	-4.1115e-05	-2.8104e-07
3	-4.6950e-05	-6.7928e-05	-2.4205e-07
4	-4.3264e-05	-9.3533e-05	-2.5706e-07
5	-3.8519e-05	-1.1665e-04	-3.4185e-07
6	-3.2747e-05	-1.3667e-04	-3.9327e-07
7	-2.6337e-05	-1.5289e-04	-4.1962e-07
8	-1.9742e-05	-1.6523e-04	-4.2177e-07
9	-1.3188e-05	-1.7389e-04	-4.1692e-07
10	-6.7029e-06	-1.7903e-04	-4.1337e-07
11	-2.5147e-07	-1.8074e-04	-4.1233e-07
12	6.1999e-06	-1.7903e-04	-4.1337e-07
13	1.2685e-05	-1.7389e-04	-4.1692e-07
14	1.9239e-05	-1.6523e-04	-4.2177e-07
15	2.5834e-05	-1.5289e-04	-4.1962e-07
16	3.2244e-05	-1.3667e-04	-3.9327e-07
17	3.8017e-05	-1.1665e-04	-3.4185e-07
18	4.2761e-05	-9.3533e-05	-2.5706e-07
19	4.6447e-05	-6.7928e-05	-2.4205e-07
20	5.0168e-05	-4.1115e-05	-2.8104e-07
21	5.3563e-05	0	0

Рисунок 4.6 – Перемещения вдоль осей координат OX, OY, OZ.

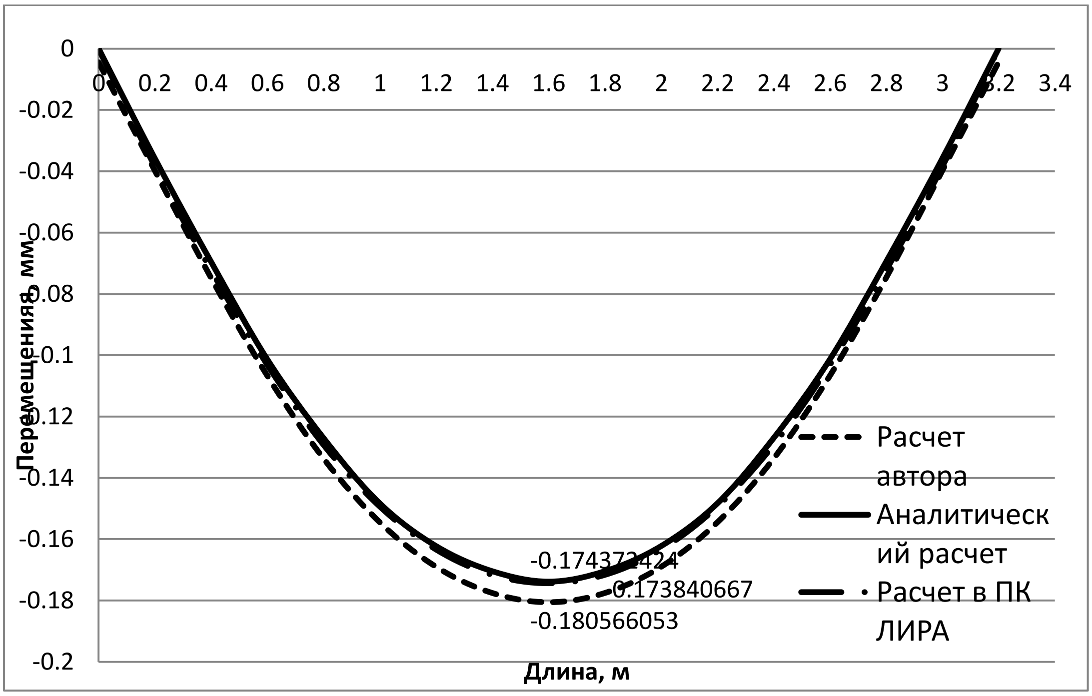
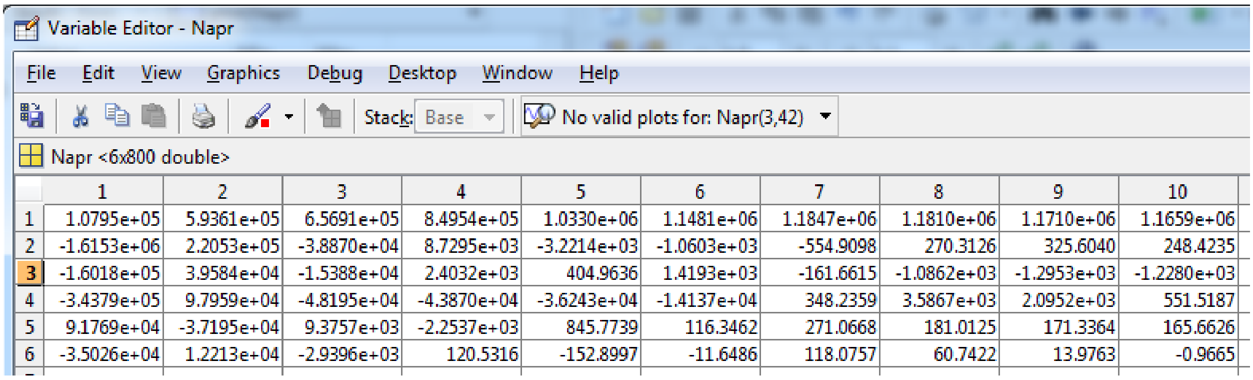


Рисунок 4.7 - Результаты расчета прогибов при аналитическом расчете, расчете в ПК ЛИРА и расчете авторов.

Прогиб балки характеризуется вертикальным перемещением вдоль оси OY. Рассмотрим результаты прогибов по всей длине балки, на рисунке 4.7.

Используя векторы перемещений, вычисляются значения напряжений и деформаций в каждом КЭ. На рисунке 4.8 изображены компоненты тензоров напряжений в серединах КЭ конструкции.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.0795e+05	5.9361e+05	6.5691e+05	8.4954e+05	1.0330e+06	1.1481e+06	1.1847e+06	1.1810e+06	1.1710e+06	1.1659e+06
2	-1.6153e+06	2.2053e+05	-3.8870e+04	8.7295e+03	-3.2214e+03	-1.0603e+03	-554.9098	270.3126	325.6040	248.4235
3	-1.6018e+05	3.9584e+04	-1.5388e+04	2.4032e+03	404.9636	1.4193e+03	-161.6615	-1.0862e+03	-1.2953e+03	-1.2280e+03
4	-3.4379e+05	9.7959e+04	-4.8195e+04	-4.3870e+04	-3.6243e+04	-1.4137e+04	348.2359	3.5867e+03	2.0952e+03	551.5187
5	9.1769e+04	-3.7195e+04	9.3757e+03	-2.2537e+03	845.7739	116.3462	271.0668	181.0125	171.3364	165.6626
6	-3.5026e+04	1.2213e+04	-2.9396e+03	120.5316	-152.8997	-11.6486	118.0757	60.7422	13.9763	-0.9665

Рисунок 4.8 – Компоненты тензора напряжений в каждом КЭ

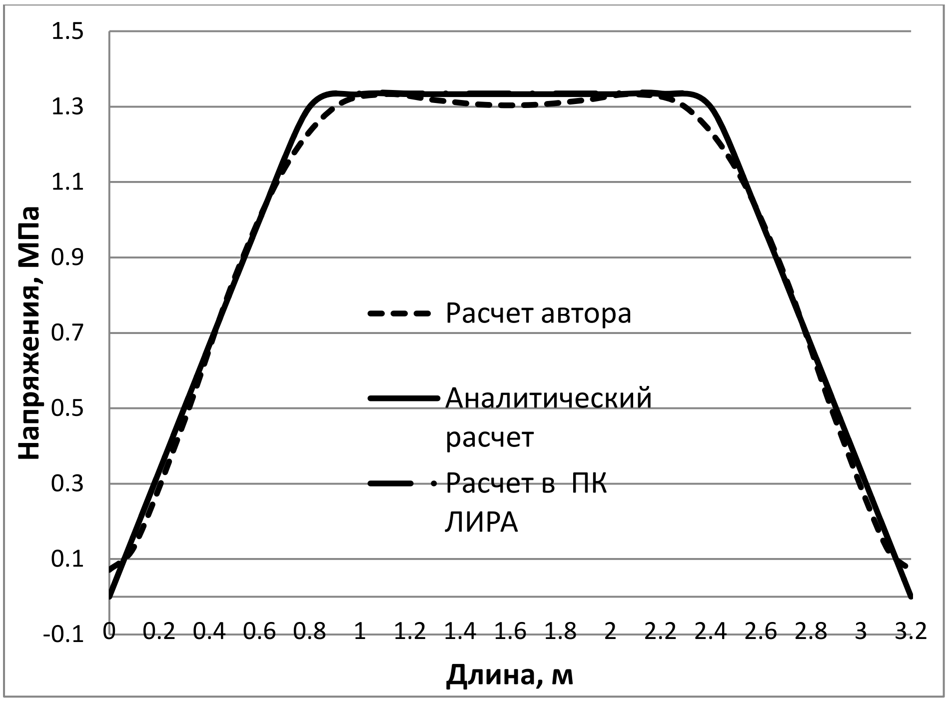


Рисунок 4.9 - Напряжения σx на нижней границе балки при расчетах: автора, ПК ЛИРА, аналитическом.

На рисунке 4.9 приводятся эпюры напряжений на границе балки при каждом из расчетов. При этом в результате расчета в ПК ЛИРА получаются изгибающие моменты *M* на различных участках балки. Используя известную формулу из [3], напряжения в балке составят.

$$\sigma(x) = \frac{M(x)}{I} \times \frac{h}{2}, \tag{4.2}$$

где I – момент инерции сечения балки, h – высота балки (измерение вдоль оси Y), $M(x)$ – изгибающие моменты по длине балки.

Как можно заметить, перемещения и напряжения при аналитическом расчете и расчете в ПК ЛИРА почти полностью совпадают. Нормальные напряжения, вычисленные каждым из вышеперечисленных способов, так же имеют близкие по значениям результаты. Анализ результатов расчета приведен в таблице 4.1

Таблица 4.1

Методы расчета	Прогиб в середине пролета при P=10 кН (мм)	Наибольшее нормальное напряжение при P=10 кН (МПа)
Расчет автора	0.18038	1.305282
Расчет в ПК ЛИРА	0.17437	1.335333
Аналитический расчет	0.17384	1.333333
Отклонение результатов расчета	Отклонение по максимальному прогибу	Отклонение по наибольшему нормальному напряжению
Отклонение расчета автора от аналитического расчета	3.3%	-2.3%
Отклонение расчета автора от расчета в ПК ЛИРА	3.6%	-2.1%

Данная таблица показывает, что погрешность расчетов автора от расчета в ПК ЛИРА и аналитического не превышает 4%. Можно сделать вывод, что полученные результаты хорошо коррелируют между собой.

Рисунок 4.10 иллюстрирует напряжения эпюры напряжений в различных участках балки: на нижней границе, верхней границе и нейтральной оси. Как можно увидеть, на нейтральной оси напряжения практически равны нулю.При этом, максимальные значения эпюры напряжений имеют именно на верхней и нижней границах.

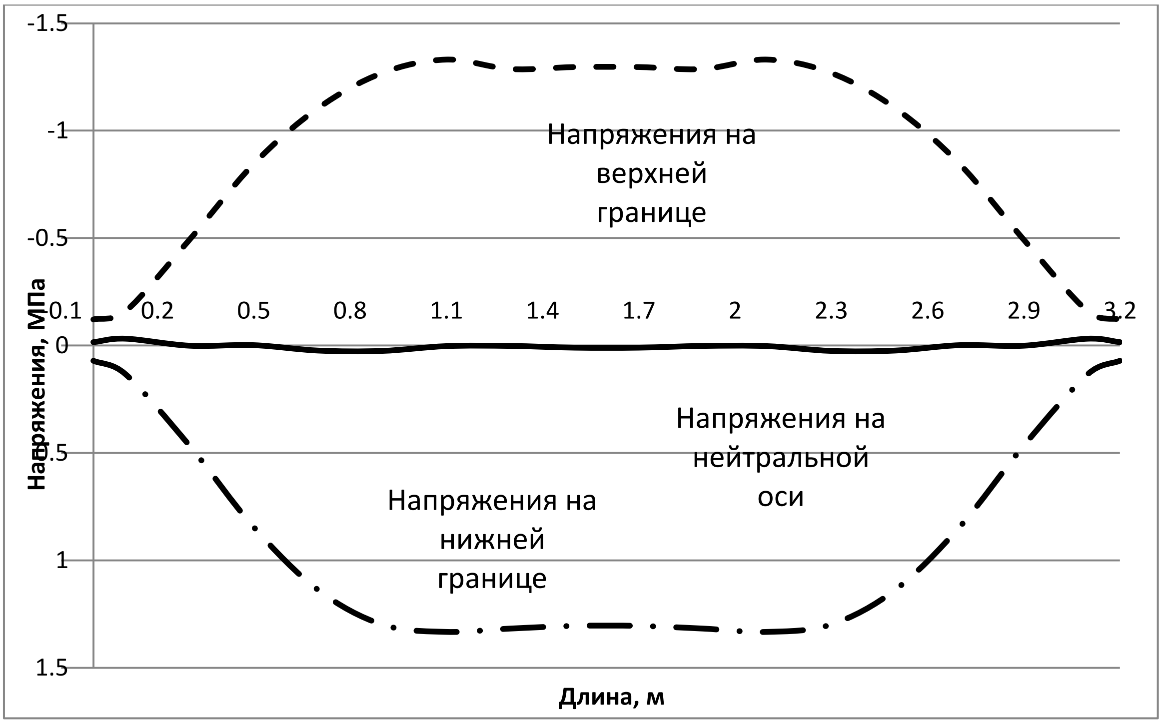


Рисунок 4.10 – Напряжения на верхней границе балки, на нижней границе и на нейтральной оси.

Как можно увидеть, на нейтральной оси напряжения практически равны нулю.При этом, максимальные значения эпюры напряжений имеют именно на верхней и нижней границах.

4.3 Выводы по четвертой главе

Для исследования композитов в области предельной прочности разработан комплекс программ:

– «Composit» содержит алгоритм, позволяющий рассчитывать коэффициенты матриц жесткости для однородных и композитных конечных элементов, из которых составлять общую матрицу жесткости системы.

– «Strength» решает систему уравнений равновесия с последующим определением перемещений каждого узла элемента по трем направлениям, совпадающим с направлениями координатных осей, вычислять компоненты тензоров напряжений и деформаций для каждого конечного элемента.

– «UltimateState» использует диаграммы деформирования материалов и необходимо для учета нелинейности во время расчета. Алгоритмы данной подпрограммы изменяют механические характеристики материалов конструкции во время расчета до полного разрушения КЭ.

– «Программа для расчета конструкций из композитных материалов» использует вышеперечисленные алгоритмы и осуществляет расчеты конструкций в нелинейной постановке. Для уточнения решения нелинейной системы уравнений на каждом этапе нагружения используется метод последовательных приближений.

Программы зарегистрированы, получены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Тестирование некоторых разработанных программ на линейном расчете статически-определимой балки их изотропного материала, показало хорошую корреляцию при сравнении с расчетом в ПК ЛИРА и аналитическим расчетом. В следующей главе представлены расчеты конструкций из композитных материалов.

Глава 5 ТЕСТИРОВАНИЕ РАЗРАБОТАННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ПРОГРАМНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯНА ПРИМЕРАХ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИЧЕСКИ-ОПРЕДЕЛИМЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

5.1 Исследование статически-определимых конструкций из композитных материалов при фиксированной нагрузке

Рассмотрим два швеллера поперечного сечения 388 x 120 x 12/10, изготовленных из стеклопластика и стеклоуглепластика [103]. Стеклоуглепластиковый швеллер был изготовлен пултрузионным способом, при равномерном введении в полки швеллера углеродного жгута УК (30 ктекс). При этом объемное содержание углеродного волокна в материале полки составило 20%. Модуль упругости стеклопластика E_{stek}=34400МПа, модуль упругости углепластика E_{ugl} = 78800 МПа, коэффициент Пуассона для обоих материалов μ приблизительно 0.25. Установка для испытания на изгиб полноразмерного профиля изображена на рисунке 5.1

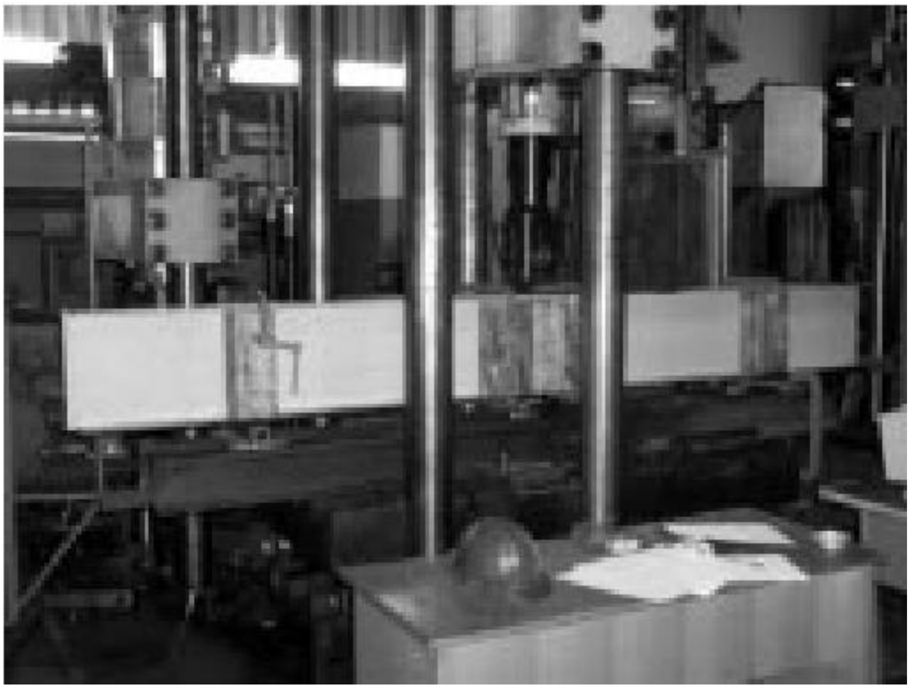


Рисунок 5.1 – Установка для испытания швеллера [103].

Как уже было сказано, исследуется два швеллера: стеклопластиковый и стеклоуглепластиковый. Поперечные сечения этих швеллеров изображены на рисунке 5.2

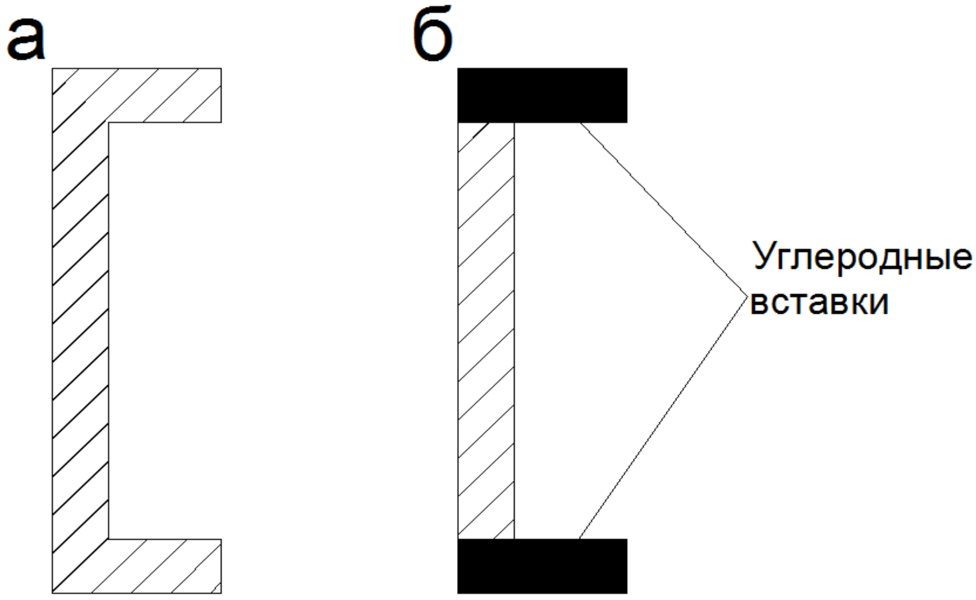


Рисунок 5.2. – Схемы поперечных сечений швеллеров: а – стеклопластиковый, б – стеклоуглепластиковый.

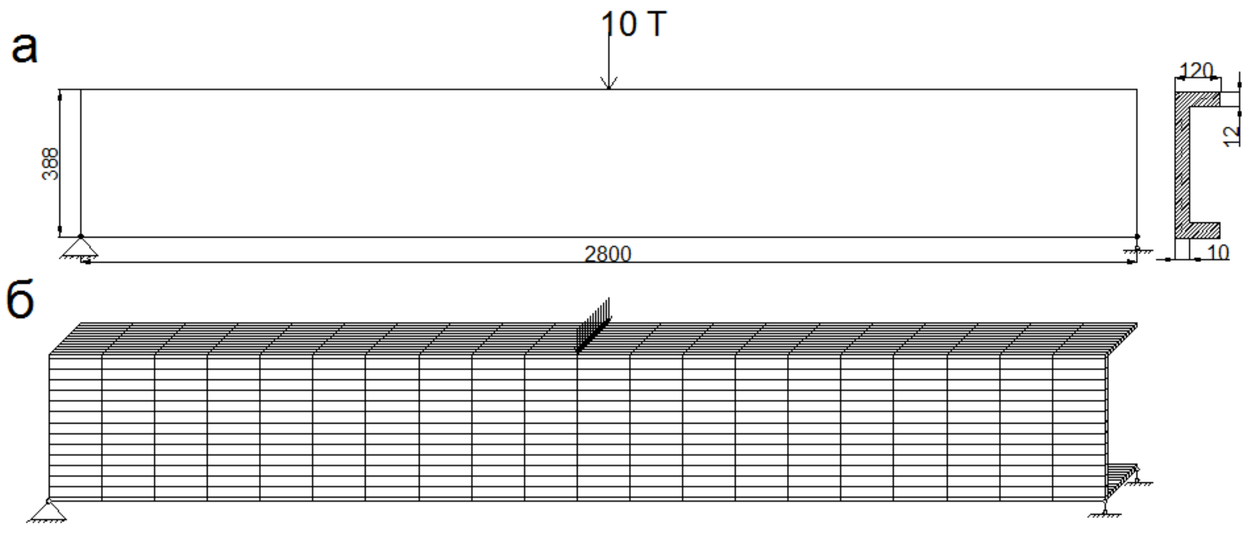


Рисунок 5.3. - Модель швеллера: а - расчетная схема и конструкция стеклоуглепластикового швеллера, б – схема разбивки на конечные элементы.

На рисунке 5.3 изображены размеры и расчетная схема швеллера. Для моделирования сетки использовались КЭ в форме параллелепипеда. Стеклоуглепластиковый швеллер состоит из КЭ двух типов соответствующих характеристикам стеклопластика и углепластика. Согласно установке для испытаний, нагрузка направлена в середину пролета.

Координаты центра тяжести швеллера находятся согласно известным соотношениям [3] и составляют x_c~30 мм, y_c~194 мм. На рисунке 5.4 изображено смоделированное конечными элементами поперечное сечение швеллера, где точка O соответствует координатам центра тяжести. Перемещения этой точки вдоль оси OY считается прогибом швеллера.

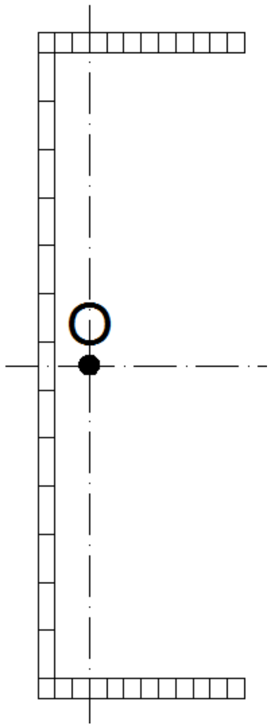


Рисунок 5.4 – Поперечное сечение швеллера

На рисунке 5.5 изображены смещения центра тяжести в результате нагрузки на каждую из моделей швеллера. В таблице 5.1 приведено сопоставление максимальных прогибов, полученных в результате сравнения расчета автора с экспериментальными данными, для швеллеров из стеклопластика и из стеклоуглепластика.

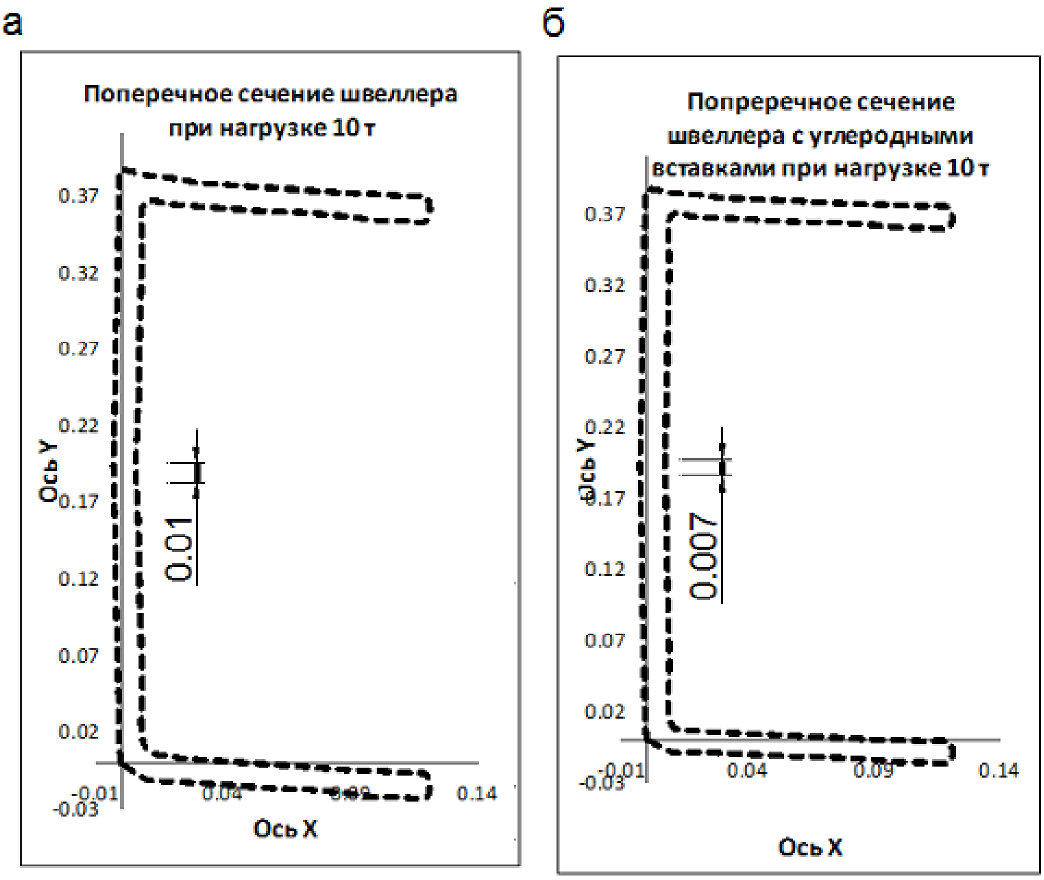


Рисунок 5.5 – Перемещение центра тяжести в поперечном сечении середины швеллера: а - стеклопластикового швеллера б - стеклопластикового швеллера с углеродными вставками.

Таблица 5.1

Материал	Нагрузка, т	Эксперимент[103], мм	Расчет автора, мм	Отклонение результата расчета автора, %
Стеклопластик	10	9,4	10,17	7,6
Стеклоуглепластик	10	6,7	7,14	6,16

Отклонение максимального прогиба для стеклопластикового и стеклоуглепластикового швеллеров в результате расчета автора от экспериментального исследования [103] составило соответственно 7.6% и 6.16%. Как можно заметить, получены допустимые отклонения расчета автора от экспериментальных данных [103].

5.2 Исследование статически определимых конструкций из композитных материалов в области их предельных состояний.

Расчеты осуществлялись в разработанных автором программах [80, 81, 82, 83], реализующих метод конечных элементов в программной среде Matlab. Для учета совместной работы нескольких материалов в одном КЭ, использовался композиционный конечный элемент в форме параллелепипеда. Стыковка КЭ осуществлялась при помощи матрицы индексов, содержащей информацию о геометрии модели и граничных условиях. Построение матрицы индексов осуществлялось в программе Excel, с последующим импортом полученных данных в Matlab. Нагрузки прикладывались в соответствующих узлах с учетом направления координатных осей глобальной системы координат. Физическая нелинейность модели учитывалась путем расчета по деформациям с использованием модели, разработанной автором.

Иллюстрирующим материалом, характеризующим работу композитов, является железобетон, как наиболее изученный и распространенный композитный материал. Расчет железобетонных конструкций может прекращаться при превышении армирующими элементами (арматуры) предела текучести, либо при разрушении связующего(бетона) по всему поперечному сечению. Ниже приведены примеры исследования статически-определимых железобетонных балок.

5.2.1. Сравнение расчета автора с расчетом в программном комплексе Concord для статически – определимой балки из композитного материала без предварительного напряжения.

За объект моделирования принята железобетонная статически определимая балка прямоугольного сечения. Результаты расчетов с применением композитной нелинейной матрицы жесткости сопоставлялись с результатами расчетов в программном комплексе Concord[49], а так же со

СНиП [86]. Расчетная схема, геометрические размеры и схема армирования представлены на рисунке 5.6 а. Сечение балки прямоугольное. В нижней части заложено два арматурных стержня А300 диаметром 25 мм.

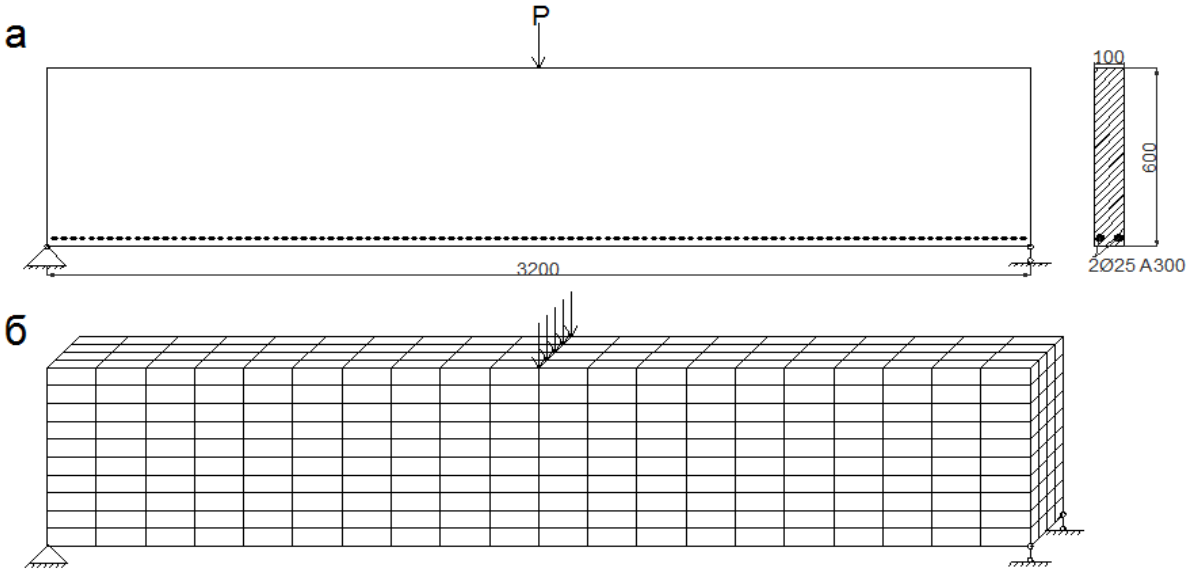


Рисунок 5.6 - Модель балки: а - расчетная схема и конструкция железобетонной балки, б – схема разбивки на конечные элементы.

Геометрия модели и схема разбивки балки на конечные элементы приведена на рисунке 5.6 б. Конструкция состоит из 800 КЭ. Из них 40 элементов сочетают в себе совместную работу двух сред: бетона и стальной арматуры. Начиная с первой ступени, нагружение осуществлялось вертикальными силами по $\Delta P = 10$ кН. Исходные характеристики материалов: связующее(бетон)$R_b = 20$ МПа, $R_{bt} = 1.75$ МПа, $E_b = 30000$ МПа, $\mu = 0.2$, $\varepsilon_b = 0.002$, $\varepsilon_{bt} = 0.0001$; армирующие элементы (арматура)$R_s = 400$ МПа, $E_s = 200000$ МПа.

Предварительные расчеты по СНиП[86]: высота сжатой зоны x=20 см, разрушающая нагрузка P=200 кН, первые трещины появились при 36 кН. Прогиб к моменту разрушения 9.3 мм.

Значения прогиба характеризуются максимальными перемещениями в середине балки под действием вертикальной нагрузки. На рисунке 5.7 показано изменение максимальных перемещений в балке на различных этапах нагружения.

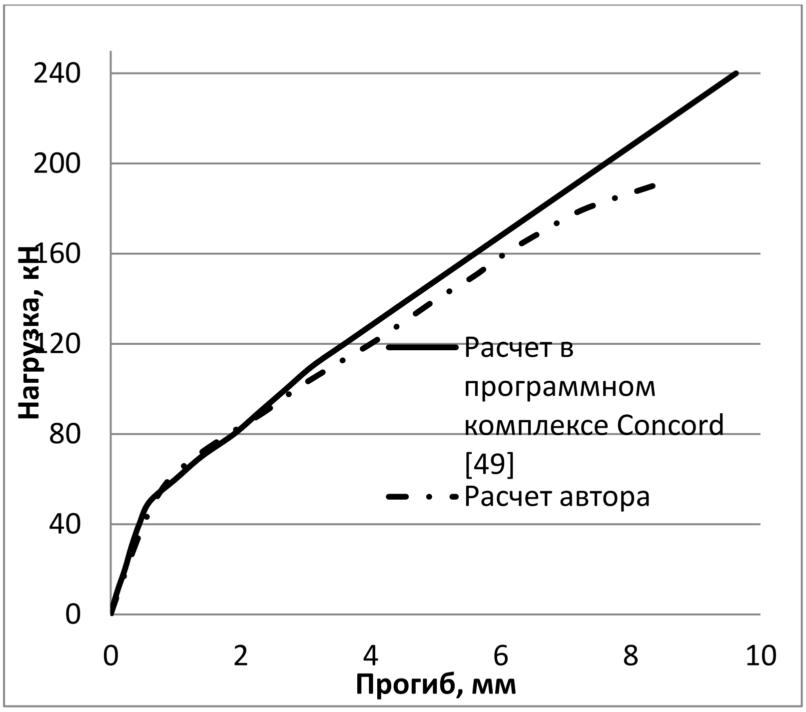


Рисунок 5.7 – Изменение прогибов под нагрузкой

На рисунке 5.7 сравнивается расчет по модели автора, с расчетом в программном комплексе Concord[49]. Расчет с композитной матрицей показал потерю несущей способности при 190 кН и прогибе 8.34 мм. Первые условные трещины в растянутой зоне появились при нагрузке 40 кН. Напряжение в бетоне в этот момент составило -4.8 МПа.

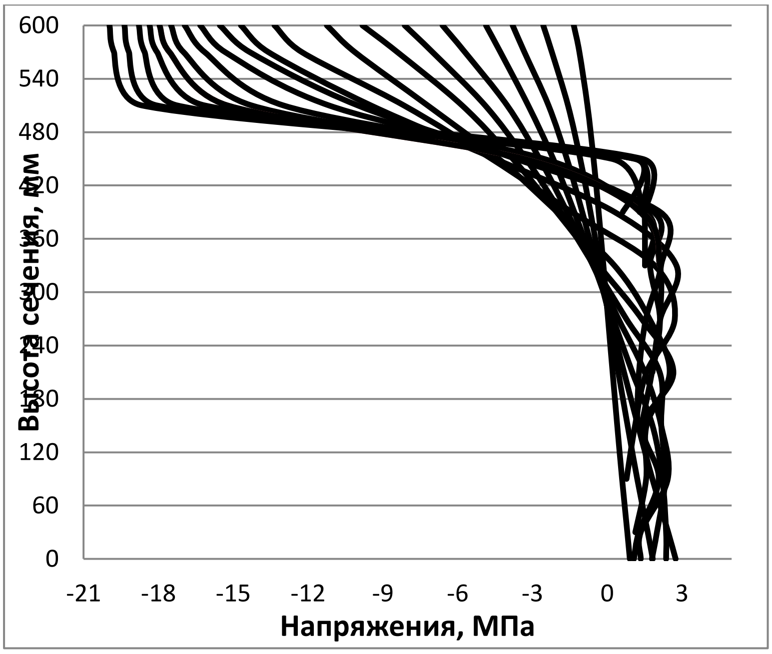


Рисунок 5.8 – Эпюры напряжений в поперечном сечении в середине пролета балки от действия внешней нагрузки.

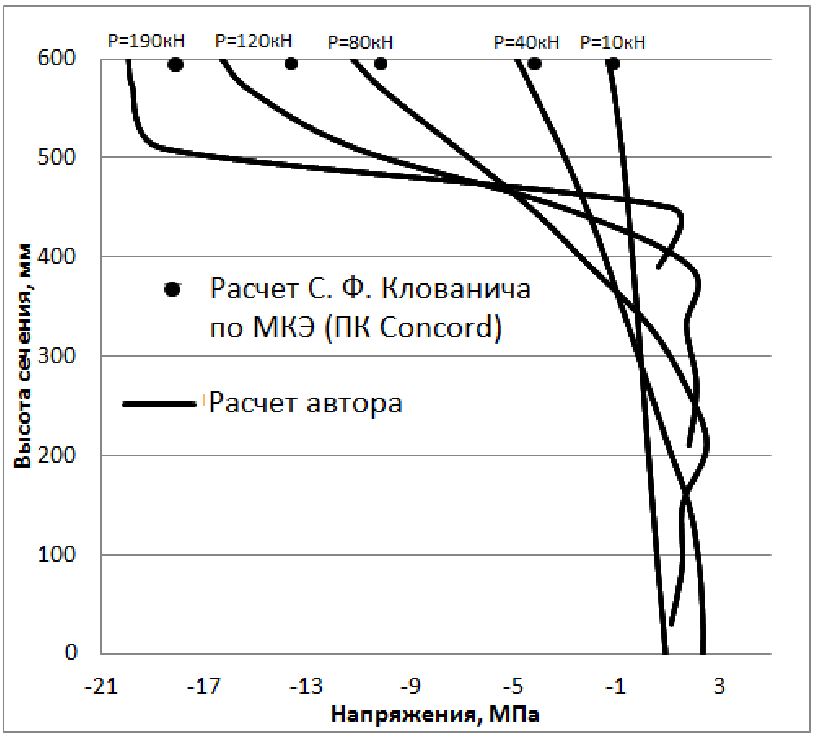


Рисунок 5.9 – Сравнение некоторых эпюр в поперечном сечении балки(расчета автора с наибольшими значениями аналогичных эпюр, полученными в ПК Concord[49])

При потере несущей способности нормальные напряжения в верхних слоях балки составили -20 МПа. На рисунке 5.8 изображены эпюры нормальных напряжений в плоскости симметрии балки на различных этапах нагружения. При этом видно, как в результате разрушения смещается нейтральная ось. Рисунок 5.9 иллюстрирует сравнение отдельных эпюр между расчетом автора и ПК Concord[49]. Отклонение в эпюрах нормальных напряжений при расчете автора от Concord[49]увеличивается по ходу нагружения и составляет максимально -10.16 % при нагрузке 190 кН. В таблицах 5.2 и 5.3 приводятся сопоставление результатов расчетов: прогибов под нагрузкой в момент разрушения и предельной нагрузки на конструкцию.

Таблица 5.2

№	Максимальный прогиб			Погрешность результатов от расчета Concord [49]	
	Расчет Concord [49]	Расчет автора	СНиП	Расчет автора	СНиП
	Δ, мм	Δ, мм	Δ, мм	%	%
1	9.62	8.34	9.3	13.31	3.32

Таблица 5.3

№	Разрушающая нагрузка			Погрешность результатов от расчета Concord [49]	
	Расчет Concord[49]	Расчет автора	СНиП	Расчет автора	СНиП
	P, кН	P, кН	P, кН	%	%
1	240	190	200	20.83	16.67

Исследование статически-определимой балки в области предельной прочности при равномерно возрастающей нагрузке показало следующие результаты: погрешности расчета автора и по нормативной методике от программного комплекса Concord[49]составили соответственно 13.31% и 3.32% для максимальных прогибов; 20.83% и 16.67% для разрушающей нагрузки.

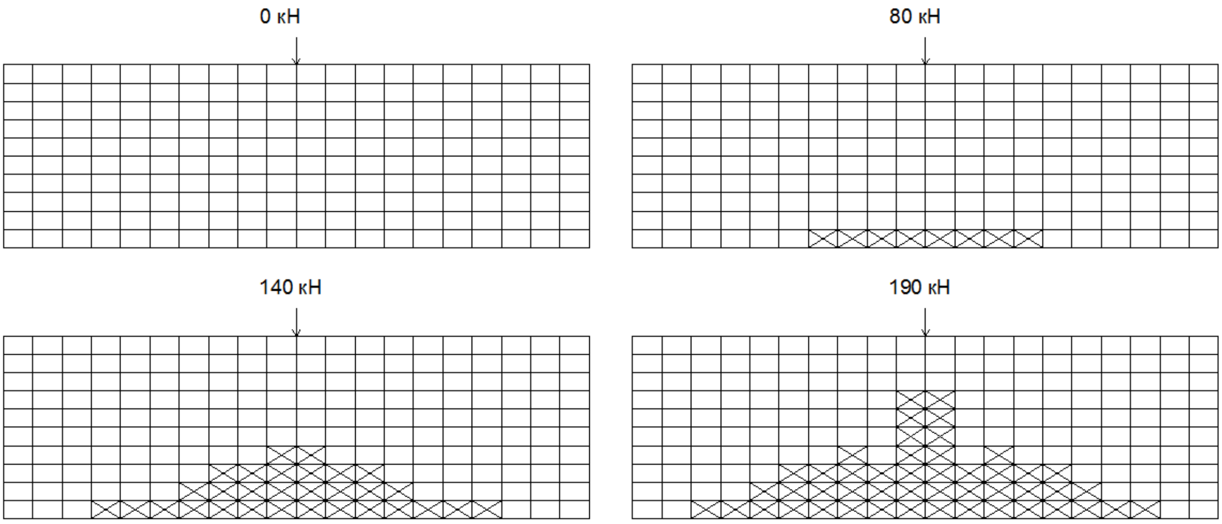


Рисунок 5.10 – Разрушение конечных элементов балки на различных этапах нагружения.

Рисунок 5.10 иллюстрирует процесс разрушения в балке и исключение конечных элементов из модели. При исключении конечного элемента из характерного слоя, напряжения в этом слое так же отсутствуют, что подтверждается эпюрами нормальных напряжений по высоте сечения балки на каждой стадии нагружения.

5.2.2 Сравнение расчета автора с экспериментальными исследованиями статически-определимых балок из композитного материала.

Рассмотрим железобетонную статически определимую балку прямоугольного сечения без предварительного напряжения. Нагрузка в виде сосредоточенных сил прикладывалась симметрично. Натурные экспериментальные исследования [70], проводились на лабораторной установке, представленной на рисунке 5.11. Прочность материала на растяжение при изгибе, определяли путем испытания образцов в возрасте трех месяцев. Для определения напряженно-деформированного состояния железобетонных балок при статической нагрузке были испытаны четыре балки. Образцы в процессе испытания нагружали ступенями с шагом ΔP=5 кН.

Целью статических испытаний[70] являлось установление величины статической разрушающей нагрузки. В процессе испытания определялись напряжения в бетоне растянутой зоны до образования трещин, момент появления трещин, максимальный прогиб балки при потере несущей способности.На каждой ступени производились замеры ширины раскрытия трещин, фиксировалась нагрузка и прогиб.

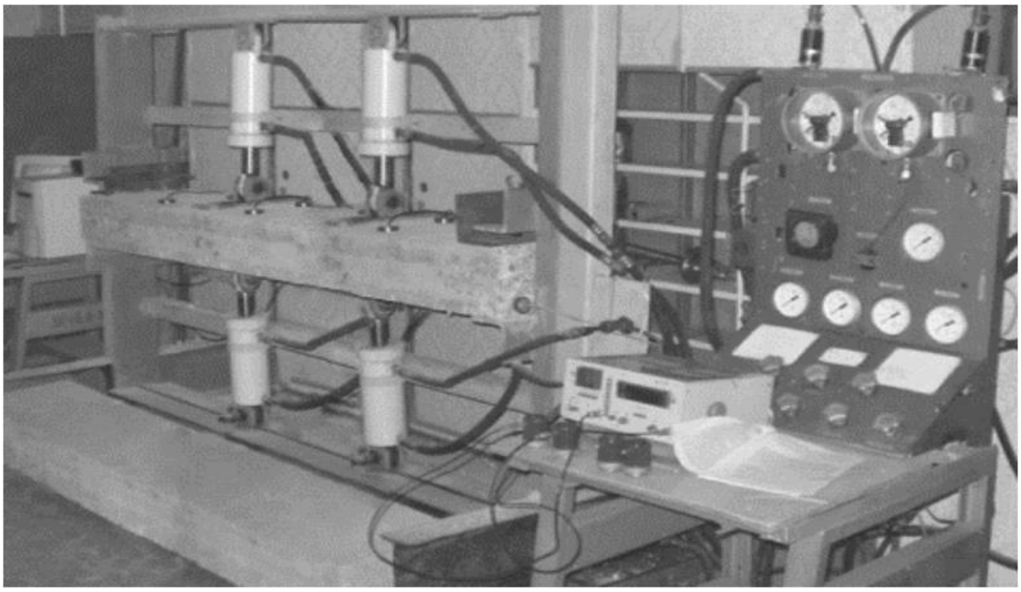


Рисунок 5.11 – Экспериментальная лабораторная установка для оценки прочности железобетонной балки [70].

Критерием исчерпания прочности железобетонных образцов являлось появление текучести в армирующих элементах (арматуре). Момент начала текучести арматуры определялся по превышению ее предела текучести.

Расчетная схема, геометрические размеры и схема армирования представлены на рисунке 5.12.

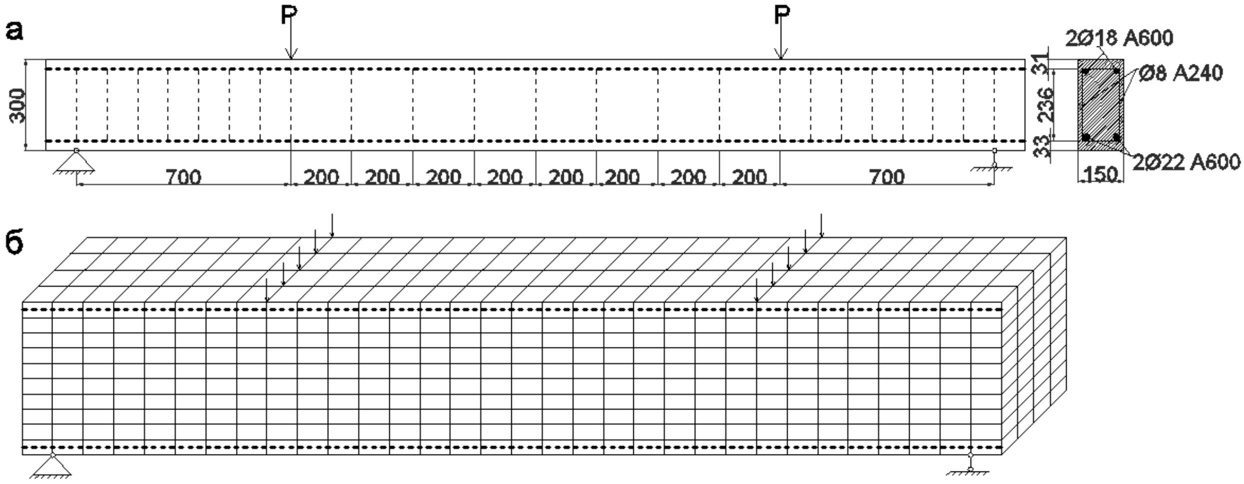


Рисунок 5.12 - Модель балки: а - расчетная схема железобетонной балки, б – схема разбивки на конечные элементы.

Геометрия модели и схема разбивки балки на конечные элементы приведена на рисунке 5.12 а и 5.12 б соответственно. Конструкция состоит из 1280 конечных элементов. Из них 128 элементов сочетают в себе совместную работу двух сред: бетона и стальной арматуры. При этом, поперечная арматура в модели не учитывалась ввиду ее малого диаметра и низкого влияния на несущую способность балки при изгибе. Однако, использование ее в эксперименте необходимо для предотвращения разрушений по наклонным сечениям.

Нагрузка на балку прикладывалась симметрично в виде сосредоточенных сил ступенями аналогично опытным. С первой ступени, нагружение осуществлялось вертикальными силами по $\Delta P = 5$ кН. Исходные характеристики материалов соответствуют опытным значениям и принимались равными: связующее(бетон) - $R_b = 18.5$МПа, $R_{bt} = 1.6$ МПа, $E_b = 30000$ МПа, $\mu = 0.2$;армирующие элементы (арматура):$R_s = 510$ МПа, $E_s = 190000$ МПа.

Предварительные расчеты по СНиП: высота сжатой зоны x=72.9 мм, разрушающая нагрузка P=129.44 кН, первые трещины появились при 17.67 кН. Прогиб к моменту разрушения 7.01 мм. Разрушение конечно-элементной модели произошло вследствие преобладающего действия изгибающего момента в середине пролета балки.

Значения прогиба характеризуются максимальными перемещениями в середине балки под действием вертикальной нагрузки. На рисунке 5.13 показано изменение максимальных перемещений балки на различных этапах нагружения. Приводится сравнение расчетов в ПК COMSOL [70], ПК ЛИРА, автора и результатов эксперимента. Разрушающая нагрузка в расчете автора – 140 кН. Прогиб при этом составил 8,6 мм.

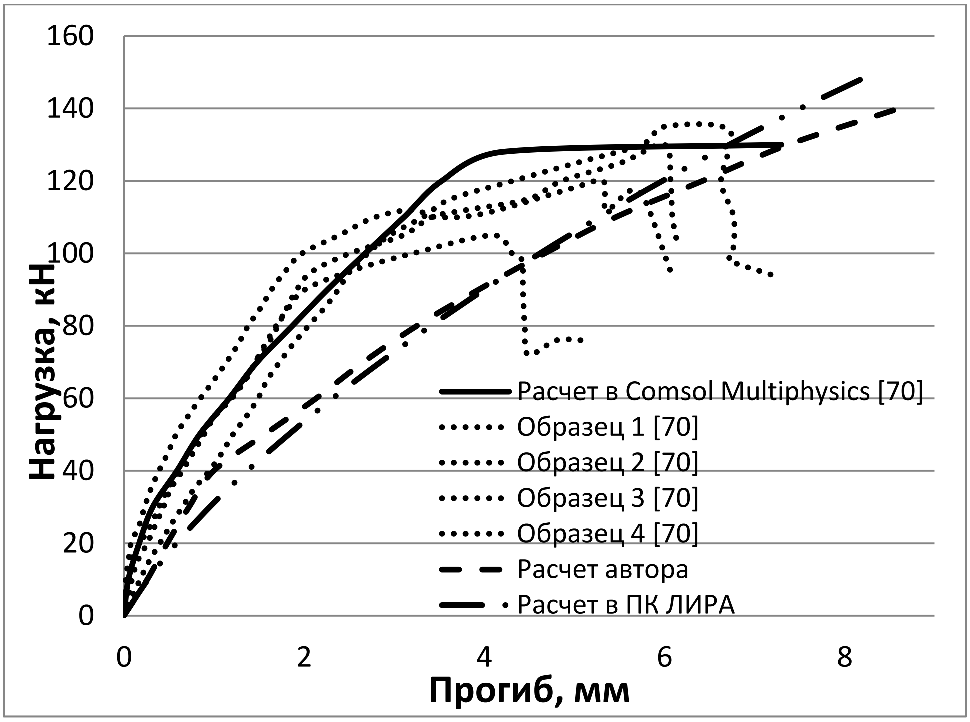


Рисунок 5.13 - Изменение прогибов под нагрузкой.

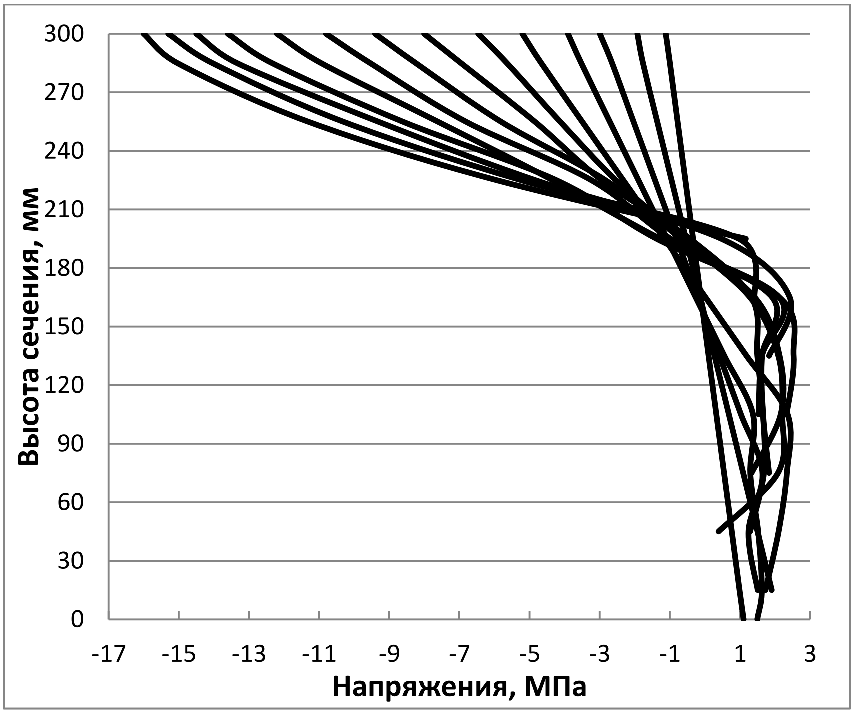


Рисунок 5.14 - Эпюры напряжений в поперечном сечении в середине пролета балки от действия внешней нагрузки.

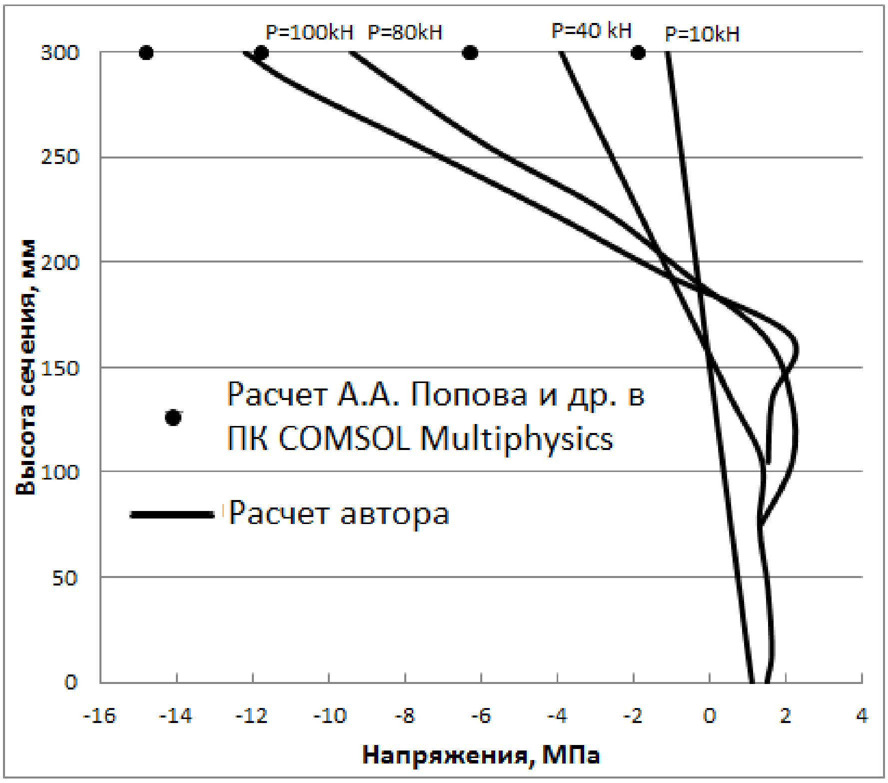


Рисунок 5.15 - Сравнение некоторых эпюр в поперечном сечении (расчета автора с наибольшими значениями аналогичных эпюр, полученными в ПК COMSOL Multiphysics[70])

При потере несущей способности нормальные напряжения в верхних слоях балки составили -16.3 МПа. На рисунках 5.14 и 5.15 изображены эпюры напряжений в плоскости симметрии балки на различных этапах нагружения, и их сравнение с эпюрами, полученными в [70].

На рисунке 5.15 видно, что с увеличением нагрузки отклонение эпюр нормальных напряжений при расчете автора от COMSOL Multiphysics[70] увеличивается. При нагрузке 100 кН отклонение составило 17.57%.

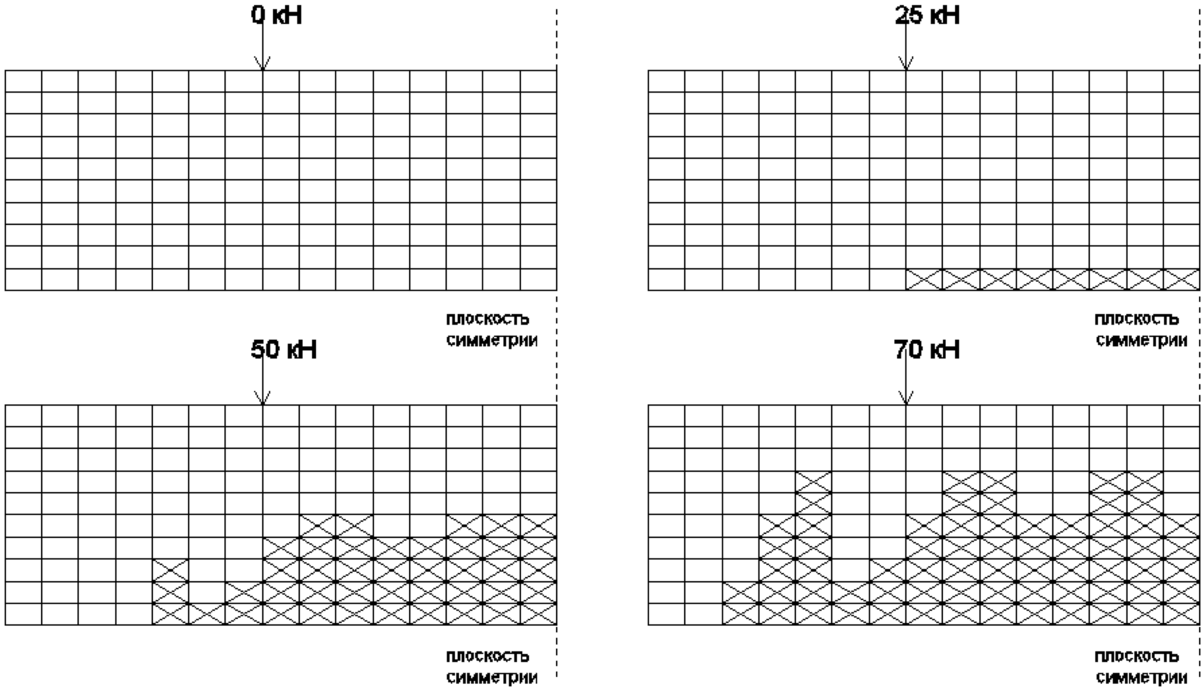


Рисунок 5.16 –Разрушение конечных элементов балки на различных этапах нагружения.

Рисунок 5.16 иллюстрирует процесс разрушения в балке и исключение конечных элементов из модели.

Ниже приведены результаты расчетов и испытаний четырех образцов железобетонных балок, выполненных согласно характеристикам материалов и расчетной схеме конструкции. При этом сопоставляются результаты расчетов автора, в программах COMSOL Multiphysics 4.3 b[70] и ПК ЛИРА, согласно СНиП[86], и результаты разрушения каждого из четырех образцов в результате эксперимента[70].В таблицах 5.4 и 5.5 приводятся сопоставление результатов расчетов: прогибов под нагрузкой в момент разрушения и предельной нагрузки на конструкцию.

Таблица 5.4

№	Максимальный прогиб					Отклонение результатов расчетов от COMSOL Multiphysics 4.3 b [70]			
	COMSOL Multiphysics 4.3 b [70]	Расчет автора	Эксперимент [70]	СНиП	Расчет ПК ЛИРА	Расчет автора	Эксперимент	СНиП	Расчет ПК ЛИРА
	Δ, мм	Δ, мм	Δ, мм	Δ, мм	Δ, мм	%	%	%	%
1	7.28	8.6	4.15	7.01	8.35	18.13	42,93	3.85	14.70
2	7.28	8.6	5.32	7.01	8.35	18.13	26,92	3.85	14.70
3	7.28	8.6	6.1	7.01	8.35	18.13	16,21	3.85	14.70
4	7.28	8.6	6.72	7.01	8.35	18.13	7,69	3.85	14.70

Таблица 5.5

№	Разрушающая нагрузка					Отклонение результатов расчетов от COMSOL Multiphysics 4.3 b [70]			
	COMSOL Multiphysics 4.3 b [70]	Расчет автора	Эксперимент [70]	СНиП	Расчет ПК ЛИРА	Расчет автора	Эксперимент	СНиП	Расчет ПК ЛИРА
	Р, кН	Р, кН	Р, кН	Р, кН	Р, кН	%	%	%	%
1	130	140	106	129.44	150	-7.69	18.4	0.43	15.38
2	130	140	121	129.44	150	-7.69	6,92	0.43	15.38
3	130	140	133	129.44	150	-7.69	-2.31	0.43	15.38
4	130	140	135	129.44	150	-7.69	-3.84	0.43	15.38

Из таблиц видно, что погрешность расчета авторов от расчета в программе COMSOL Multiphysics 4.3 b составляет около 18% и 8% для максимального прогиба и разрушающей нагрузки соответственно. В то же время общая погрешность результатов экспериментов от расчета COMSOL составляет 23.44% и 4.79% для максимального прогиба и разрушающей нагрузки. Наблюдается удовлетворительное совпадение расчетных и опытных данных.

5.2.3 *Сравнение расчета автора с экспериментальным исследованием статически определимой предварительно-напряженной балки из композитного материала.*

За объект моделирования принята железобетонная статически определимая балка прямоугольного сечения с предварительным напряжением, работа которой изучалась экспериментально в НИИЖБ [48]. Предварительное напряжение армирующих элементов (арматуры) в модели балки имитируется равномерной сжимающей нагрузкой соответствующих слоев балки, содержащих арматуру. Нагрузка в виде сосредоточенных сил прикладывалась симметрично. Выбор конструкции обусловлен возможностью расчета на отдельных характерных стадиях работы балки. Расчетная схема, геометрические размеры и схема армирования представлены на рисунке 5.17 а.

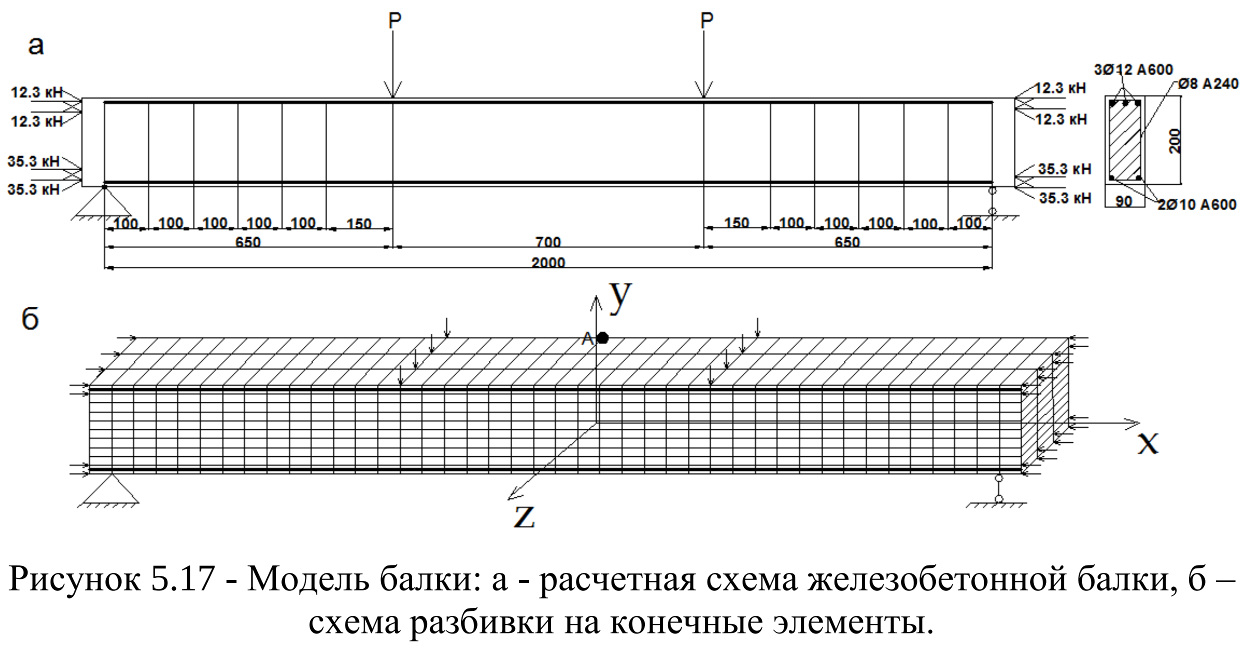


Рисунок 5.17 - Модель балки: а - расчетная схема железобетонной балки, б – схема разбивки на конечные элементы.

Геометрия модели и схема разбивки балки на конечные элементы приведена на рисунке 5.17 б. Конструкция состоит из 1260 конечных элементов. Из них 210 элементов сочетают в себе совместную работу двух сред: бетона и стальной арматуры. Преднапряжение в конструкции моделируется направлением нагрузок на КЭ, содержащих арматуру. Данные значения горизонтальных нагрузок использованы в [48].Данная математическая модель не учитывает наличие поперечной арматуры, ввиду ее малого диаметра и низкого влияния на несущую способность балки при изгибе. Однако, использование ее в эксперименте необходимо для предотвращения разрушений по наклонным сечениям.

Нагрузка на балку прикладывалась симметрично в виде сосредоточенных сил ступенями аналогично опытным. При этом на первой ступени имела место горизонтальная нагрузка, моделирующая предварительное напряжение. Начиная со второй ступени, нагружение осуществлялось вертикальными силами по $\Delta P = 5$ кН. Исходные характеристики материалов соответствуют опытным значениям и принимались равными: связующее (бетон) - $R_b = 43.5$МПа, $R_{bt} = 2.5$ МПа, $E_b = 36000$ МПа, $\mu = 0.2$, $\varepsilon_b = 0.002$, $\varepsilon_{bt} = 0.00014$; армирующие элементы (арматура)$R_s = 400$ МПа, $E_s = 200000$ МПа.

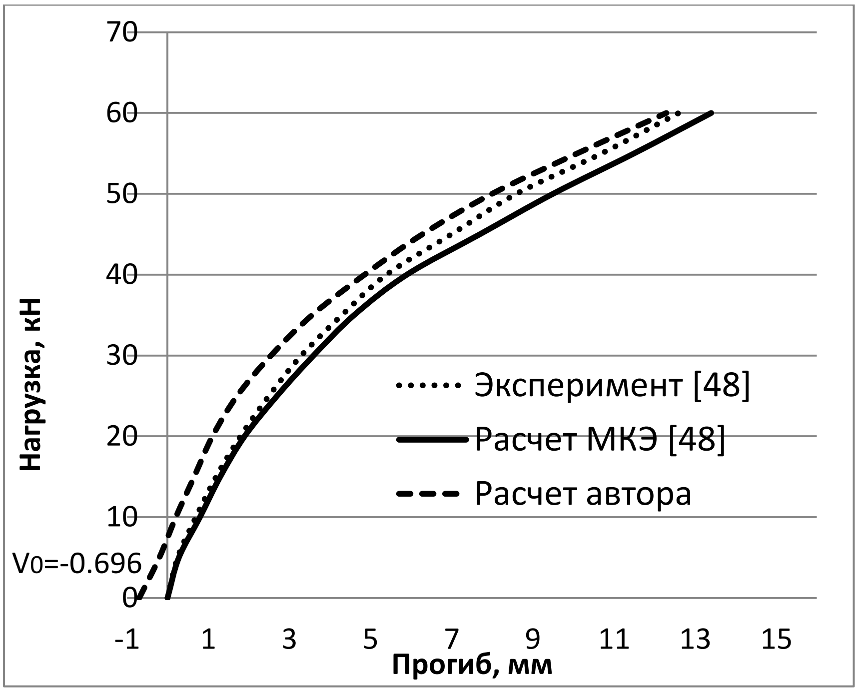


Рисунок 5.18 – Изменение прогибов под нагрузкой

На рисунке 4.18V_0 – начальное перемещение от предварительной продольной нагрузки при нулевой поперечной нагрузке. Максимальный прогиб характеризуется перемещением точки *A* под действием вертикальной нагрузки. На рисунке показано изменение максимальных перемещений в балке на различных этапах нагружения. При этом, как видно на графике, при расчете по модели автора, знаки перемещения до приложения вертикальной нагрузки отрицательны. Это связано с наличием продольной нагрузки на балку, имитирующей предварительное напряжение в арматуре, в результате чего балка выгибается в направлении, противоположном приложению вертикальных сил. Ввиду этого, при отсутствии вертикальной нагрузки, прогиб балки составил -0.696 мм. Только после приложения нагрузки 10 кН прогиб имеет положительные значения.

Разрушение конечно-элементной модели произошло вследствие преобладающего действия изгибающего момента в середине пролета балки. Максимальный прогиб по результатам эксперимента составил 12.6 мм при разрушающей нагрузке 65 кН.

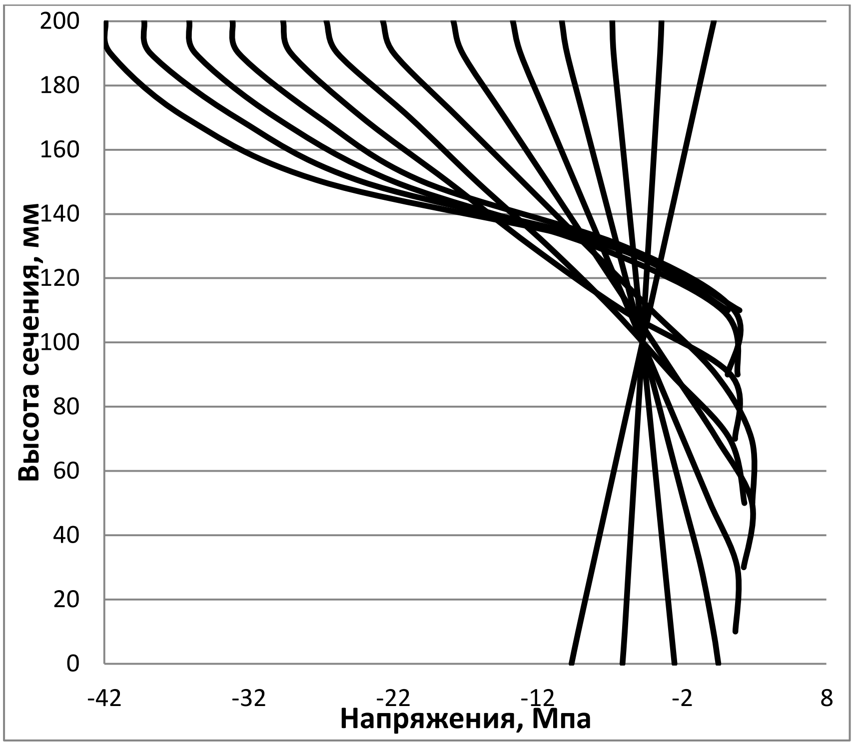


Рисунок 5.19 – Эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении в середине пролета балки от действия внешней нагрузки.

Расчет автора показал потерю несущей способности при 60 кН и прогибе 12.29 мм. На рисунке 5.19 изображены эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении балки в середине пролета. При потере несущей способности нормальные напряжения в верхних слоях балки составили -43 МПа. Рисунок 5.19 иллюстрирует нормальные напряжения на всех стадиях нагружения конструкции. Первой стадии при нагрузке 0 кН соответствует отсутствие вертикальной нагрузки на конструкцию, но наличие горизонтальной, имитирующей предварительное напряжение. Видно, как в результате разрушения смещается нейтральная ось. Значения нормальных напряжений в сжатой зоне балки увеличиваются, однако значения в растянутой зоне сохраняются не более предела прочности бетона при растяжении, так как в случае превышения жесткость таких КЭ становится равной нулю и они исключаются из расчета.

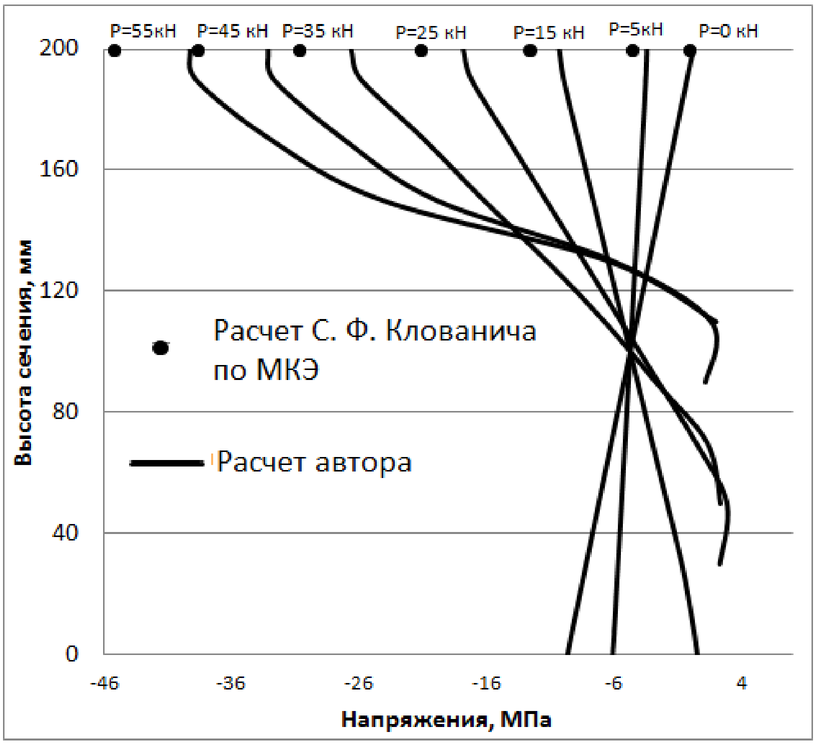


Рисунок 5.20 – Сравнение некоторых эпюр нормальных напряжений в поперечном сечении в расчете автора с верхними точками аналогичных эпюр, полученных в [48]

На рисунке 5.20 показано сравнение полученных автором эпюр нормальных напряжений по высоте сечения балки с верхними точками эпюр, полученных в [48]. Среднее отклонение верхних точек эпюр, полученных автором, от [48], составило 13.69 %. В таблицах 5.6 и 5.7 приводится сопоставление расчетов и данных эксперимента [48].

Таблица 5.6.

№	Максимальный прогиб			Отклонение результатов расчетов от эксперимента	
	Эксперимент[48]	Расчет МКЭ [48]	Расчет автора	Расчет МКЭ	Расчет автора
	Δ, мм	Δ, мм	Δ, мм	%	%
1	12.6	13.4	12.3	-6.35	2.3

Таблица 5.7.

№	Разрушающая нагрузка			Отклонение результатов расчетов от эксперимента	
	Эксперимент[48]	Расчет МКЭ [48]	Расчет автора	Расчет МКЭ	Эксперимент
	Р, кН	Р, кН	Р, кН	%	%
1	65	65	65	0	0

Погрешность результатов расчета автора и расчета МКЭ [48] от эксперимента [48] составили соответственно 2.3% и -6.5% для максимального прогиба. Разрушающая нагрузка при расчете автора, по МКЭ [48] и по результатам эксперимента [48] одинакова, погрешность составляет 0%

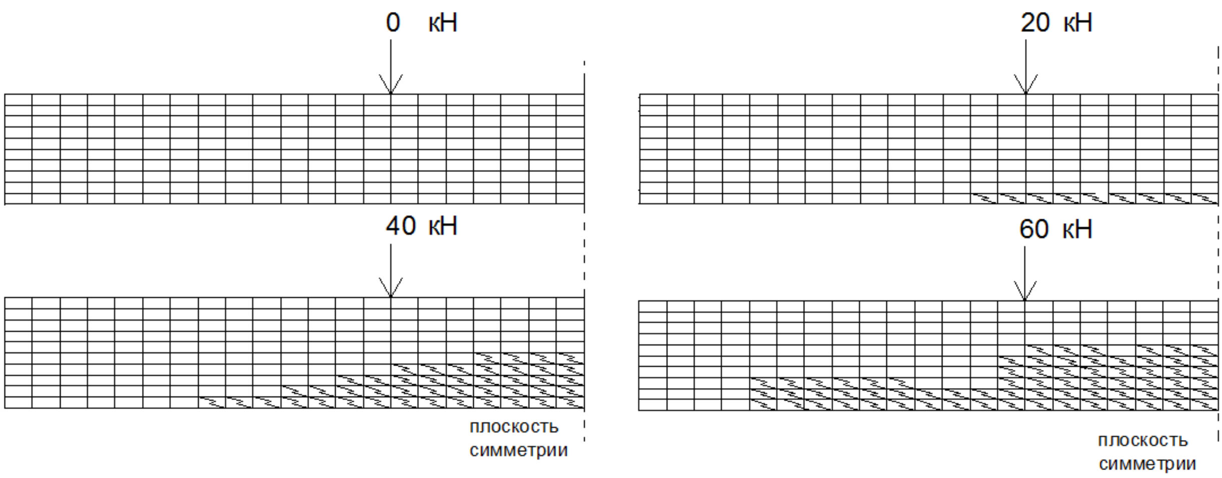


Рисунок 5.21 – Разрушение конечных элементов балки на различных этапах нагружения

Рисунок 5.21 иллюстрирует процесс разрушения в балке и исключение конечных элементов из модели. При этом балка по высоте разбита на десять слоев, каждый слой по два сантиметра. При исключении конечного элемента из характерного слоя, напряжения в этом слое так же отсутствуют, что подтверждается эпюрами нормальных напряжений по высоте сечения балки на каждой стадии нагружения.

5.3 Выводы по пятой главе

Произведено исследование статически определимых конструкций из композитных материалов с применением математической модели, разработанной автором, а так же сравнение полученных результатов с результатами экспериментальных исследований и расчетами в других программах. Исследование статически определимых конструкций показали различные результаты, отображенные в таблицах 5.1 – 5.7, а так же на графиках и рисунках.

1. Отклонение максимального прогиба для стеклопластикового и стеклоуглепластикового швеллеров в результате расчета автора от экспериментального исследования [103] составило соответственно 7.6% и 6.16%.

2. Результаты исследования статически-определимой балки из композитного материала (железобетона) в области предельной прочности при равномерно возрастающей нагрузке показаны в таблицах 5.2 и 5.3. Исследование показало следующие результаты: погрешности расчета автора и по нормативной методике, от программного комплекса Concord [49], составили соответственно 13.31% и 3.32% для максимальных прогибов; 20.83% и 16.67% для разрушающей нагрузки. При сравнении с результатами программного комплекса Concord [49], взятыми за эталон, видно, что погрешность расчета автора больше, чем расчета по нормативным методикам. Это может быть связано с конечноэлементными процедурами при программировании, а так же с недостатками самой математической модели.

3. Наименьшие совпадения результатов наблюдаются в таблицах 5.4 и 5.5 при расчете статически определимой балки и ее сравнении с результатами экспериментов, расчетами в COMSOL, ЛИРА. Наилучшие совпадение результатов расчета автора там наблюдается с расчетом в ПК ЛИРА.

4. Лучшую корреляцию результатов показал расчет статически-определимой балки из композитного материала с предварительным напряжением. Сравнение результатов приведено в таблицах 5.6, 5.7. Погрешность результатов расчета автора и расчета МКЭ [48] от эксперимента [48] составили соответственно 2.3% и -6.5% для максимального прогиба. Разрушающая нагрузка при расчете автора, по МКЭ [48] и по результатам эксперимента [48] одинакова, погрешность составила 0%.

5. В целом, наблюдается удовлетворительное совпадение полученных результатов для разрушающей нагрузки и прогибов. На основании этого можно утверждать, что проверена работоспособность разработанной автором математической модели, численных алгоритмов и программ для исследования конструкций из композитных материалов.

ГЛАВА 6. ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ КОНСТРУКЦИИ ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА В ОБЛАСТИ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

6.1 Основные положения методики, разработанной автором для исследования конструкций из композитных материалов

Данный раздел содержит в краткой форме основные положения предложенной автором методики для расчета конструкций из композитных материалов.

1. Данная методика испытывается на конструкциях из композитных материалов при простых видах напряженных состояний. При этом конструкция подвергается постепенно возрастающей нагрузке, вплоть до достижения ей предельного состояния.

2. В качестве критерия предельной прочности конструкции выбирается критерий по разрушающей нагрузке и предельным деформациям. Достижение предельного состояния конструкции из композитного материала обусловлено разрушением связующего материала композита поперек всего сечения конструкции. Так же предельное состояние достигается при превышении предела прочности (расчетному сопротивлению) армирующего материала, при условии, что он находится в наиболее опасных и подверженных разрушению участках и принимает на себя напряжения от нагрузки на конструкцию. (для железобетонных конструкций – арматура в растянутой зоне).

3. В качестве критерия, по которому оценивается прочность связующего материала в составе композита, приняты диаграммы деформирования при одноосных напряженных состояниях. Данные диаграммы аппроксимированы функциями, согласно предложенной автором математической модели. Упругая часть диаграммы аппроксимирована

прямой. Неупругая, характеризующая нелинейность, представляет собой полиномы (3.36) и (3.41). Коэффициенты полиномов при этом находятся из выражений (3.37 – 3.40) при сжатии и (3.42 – 3.45) при растяжении. Для нахождения коэффициентов необходимо знать прочность материала при одноосном растяжении и одноосном сжатии, модуль упругости. Прочность и деформативность армирующего материала характеризуется диаграммой σ_s – ε_s, изображенной на рисунке 3.13 и выражения (3.46)При этомв рамках данной диссертационной работы используется только линейный упругий участок диаграммы.

4. В качестве метода исследования и расчетов используется метод конечных элементов. Форма нелинейного конечного элемента представляет собой прямоугольный параллелепипед, имеющий 24 степени свободы (8 узлов по 3 перемещения). Данный конечный элемент характеризуется 3-мя компонентами вектора перемещений, 6-ю компонентами вектора напряжений и 6-ю компонентами вектора деформаций.

5. Разработана нелинейная композитная матрица жесткости, учитывающая изменение характеристик материалов в конечном элементе, на основе аппроксимированных автором диаграмм деформирования материалов. Отметим, что механические характеристики матрицы жесткости нелинейного композитного конечного элемента в данной диссертации представлены особыми приведенными характеристиками, представленными выражениями (3.47) и (3.48). Данные выражения реализуют идею комбинирования объемов материалов в составе композита и позволяют использовать любое количество материалов внутри конечного элемента.

6. Коэффициенты матрицы жесткости нелинейного композитного КЭ находятся из выражений (3.66) и (3.67). При этом материалы «смешиваются» в объеме КЭ. С учетом того, что исследуются конструкции при простых напряженных состояниях, для реализации разработанных автором диаграмм деформирования, в конечном элементе из всего вектора деформаций используются продольные деформации, вызванные

продольными напряжениями. Именно эти деформации используются в выражениях для получения коэффициентов матрицы жесткости нелинейного композитного конечного элемента.

7. В качестве метода решения нелинейных задач использован метод последовательных приближений, характеризующийся выражениями (3.69) и (3.70).

8. Стыковка конечных элементов осуществляется при помощи матрицы индексов, содержащей информацию и геометрии модели и граничных условиях. Построение матрицы индексов осуществляется в программе Excel, с последующим импортом полученных данных в систему Matlab.

9. Нагрузки прикладываются в соответствующих узлах с учетом направления координатных осей глобальной системы координат

10. При постоянном увеличении нагрузки на конструкцию происходит постепенное ее разрушение вследствие изменения механических характеристик материала. В результате происходит изменение механических характеристик матриц жесткости каждого КЭ в дискретной модели конструкции. Характеристики меняются согласно зависимостям $\varepsilon - \sigma$, предложенным автором. На рисунке 3.16 приведен механизм разрушения при наличии двух материалов в составе композита: связующего и арматуры.

11. Для численного исследования композитов в области предельной прочности и реализации математической модели автора, разработан комплекс программ:

«Composit» содержит алгоритм, позволяющий рассчитывать коэффициенты матриц жесткости для однородных и композитных конечных элементов, из которых составлять общую матрицу жесткости системы. Схема формирования и расчета системы МКЭ изображена на рисунке 4.2.

«Strength» решает систему уравнений равновесия с последующим определением перемещений каждого узла элемента по трем направлениям, совпадающим с направлениями координатных осей, вычислять компоненты тензоров напряжений и деформаций для каждого конечного элемента.

«Ultimate State» использует диаграммы деформирования материалов и необходимо для учета нелинейности во время расчета. Алгоритмы данной подпрограммы изменяют механические характеристики материалов конструкции во время расчета до полного разрушения КЭ.

«Программа для расчета конструкций из композитных материалов» использует вышеперечисленные алгоритмы и осуществляет расчеты конструкций в нелинейной постановке при последовательном увеличении нагрузки. Для уточнения решения нелинейной системы уравнений на каждом этапе нагружения используется метод последовательных приближений.

6.2 Исследование статически неопределимой конструкции из композитного материала

6.2.1 Исследование средствами разработанных автором математических моделей и программ

Рассмотрим статически-неопределимую двухпролетную раму из композитного материала. В качестве композитного материала выступает железобетон. Расчет рамы осуществлялся методом конечных элементов, с использованием разработанных автором программ [80, 81, 82,83], а так же сравнивался с расчетами в ПК ЛИРА [23, 26] и ANSYS[8, 9, 108, 121].

Рассмотрим двух-пролетную железобетонную раму прямоугольного сечения. Характеристики материалов следующие: связующее(бетон) R_b = 20 МПа, R_{bt} = 1.75 МПа, начальный E_b = 30000 МПа, μ = 0.2, ε_b = 0.002, ε_{bt} = 0.0001; армирующие элементы (арматура класса AIII): R_s = 400 МПа, E_s = 200000 МПа.

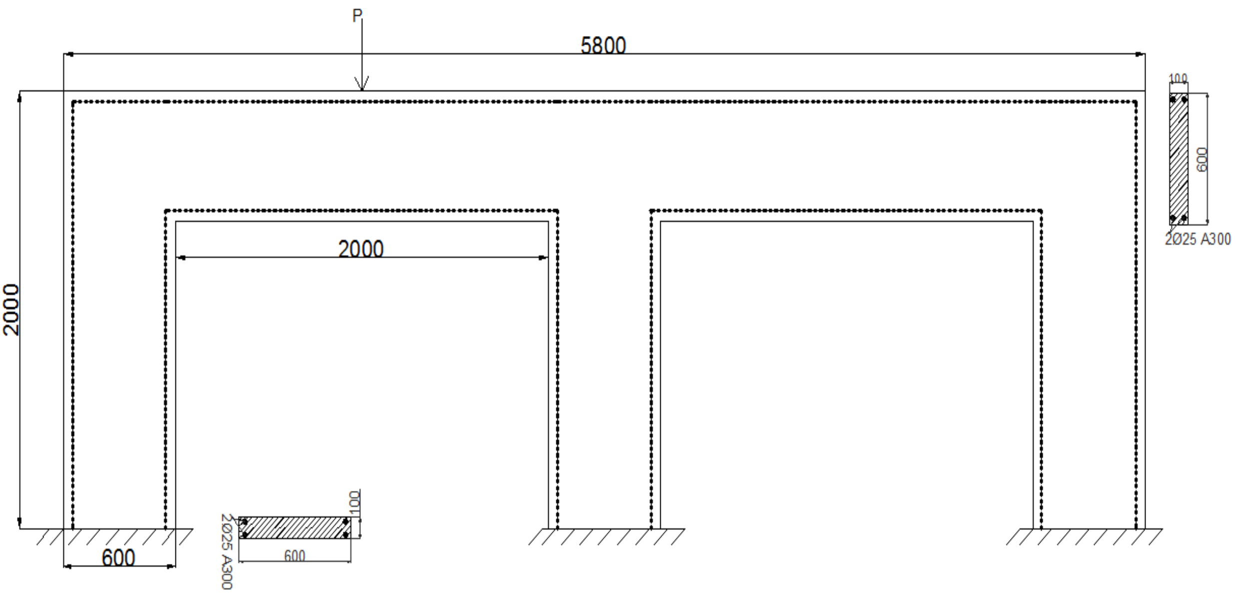


Рисунок 6.1 Расчетная схема двухпролетной рамы

Расчетная схема и схема армирования конструкции приведены на рисунке 6.1. Основания стоек рамы жестко защемлены, перемещения там запрещены. Соответствующая информация об этом содержится в матрице индексов.

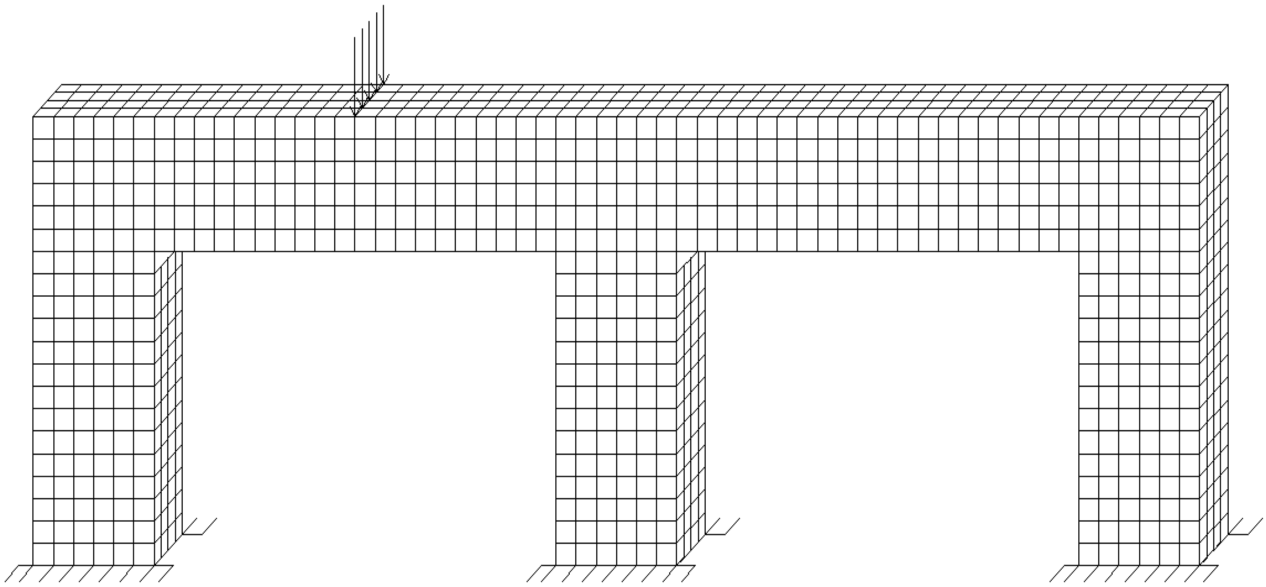


Рисунок 6.2 Конечно-элементная модель двухпролетной рамы

Геометрия модели и схема разбивки рамы на конечные элементы приведены на рисунке 6.2. Конструкция состоит из 1800 КЭ. Из них 400 элементов сочетают в себе совместную работу двух сред: бетона и стальной арматуры. Начиная с первой ступени, нагружение осуществлялось вертикальными нагрузками по ΔP = 50 кН.

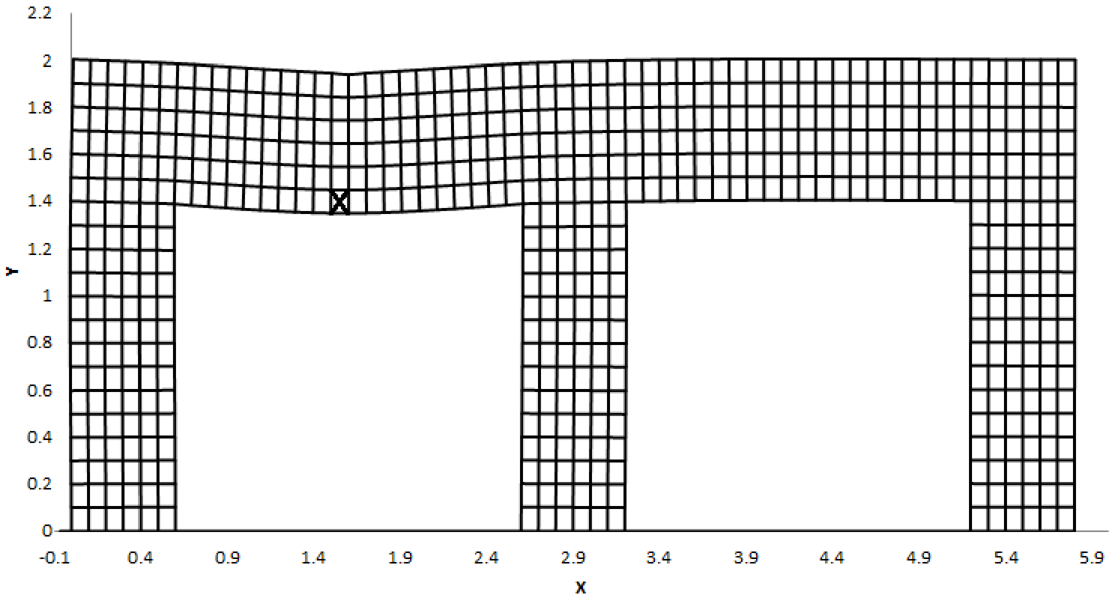


Рисунок 6.3 Форма искривления двухпролетной рамы при P=150 кН

На рисунках 6.3, 6.4, 6.5 приведены формы искривления рамы при нагрузках P=150 кН, 350 кН, 560 кН соответсвенно. Для наглядности перемещения были увеличены в 100 раз.

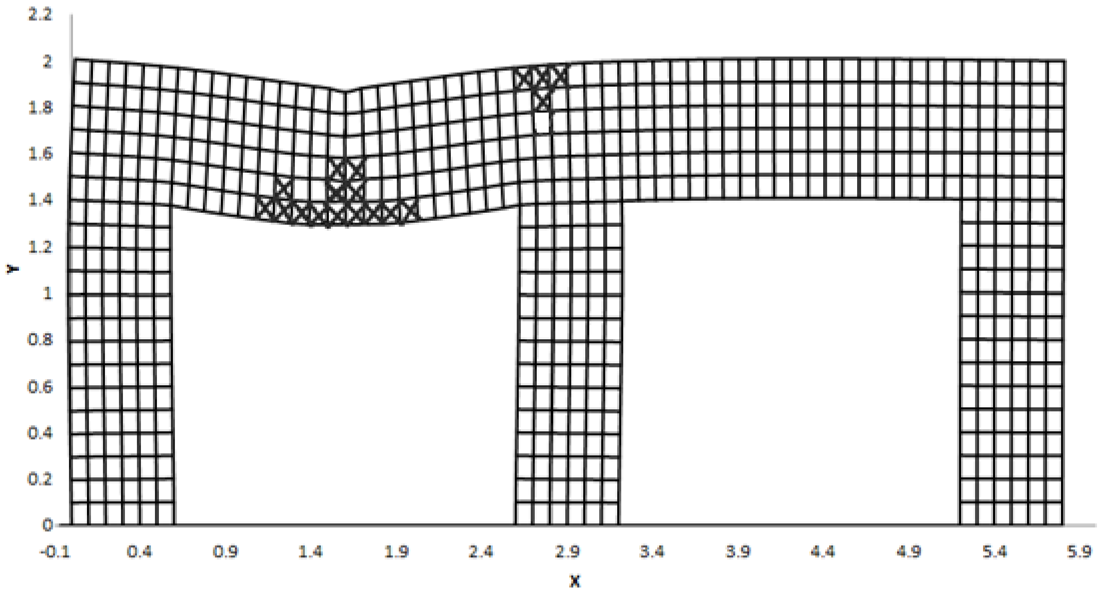


Рисунок 6.4 Форма искривления двухпролетной рамы при Р=350 кН

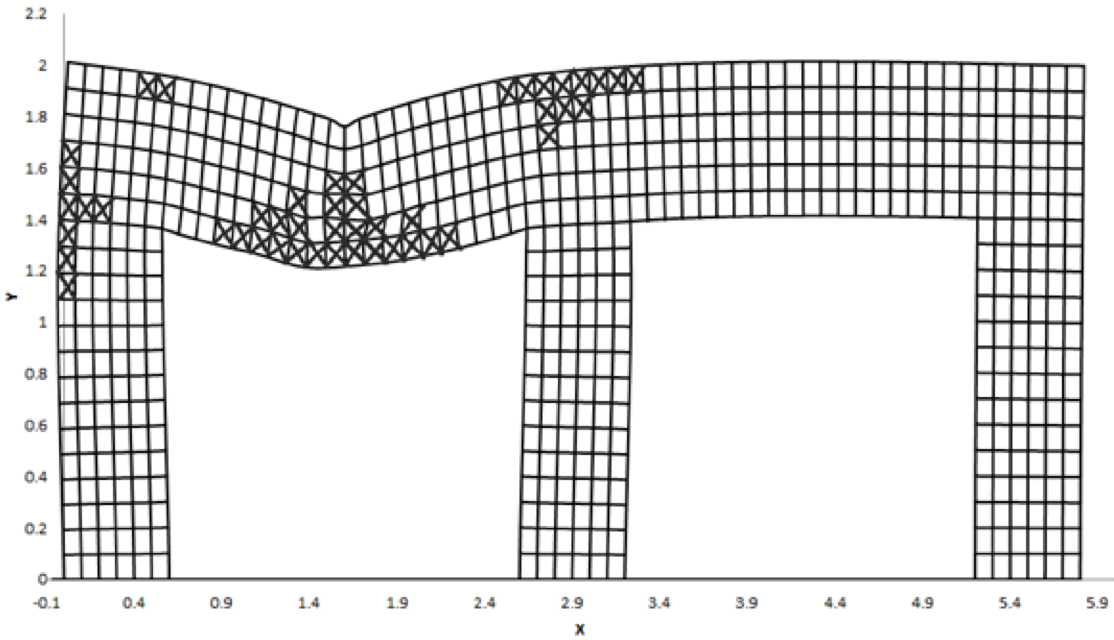


Рисунок 6.5 Форма искривления двухпролетной рамы при Р=560 кН

После нагрузкиР= 560 кН, шаг нагрузки уменьшается, ΔР=10 кН. На рисунке 6.5 изображена форма искривления двухпролетной рамы перед разрушением. Разрушение рамы показано на рисунке 6.6.

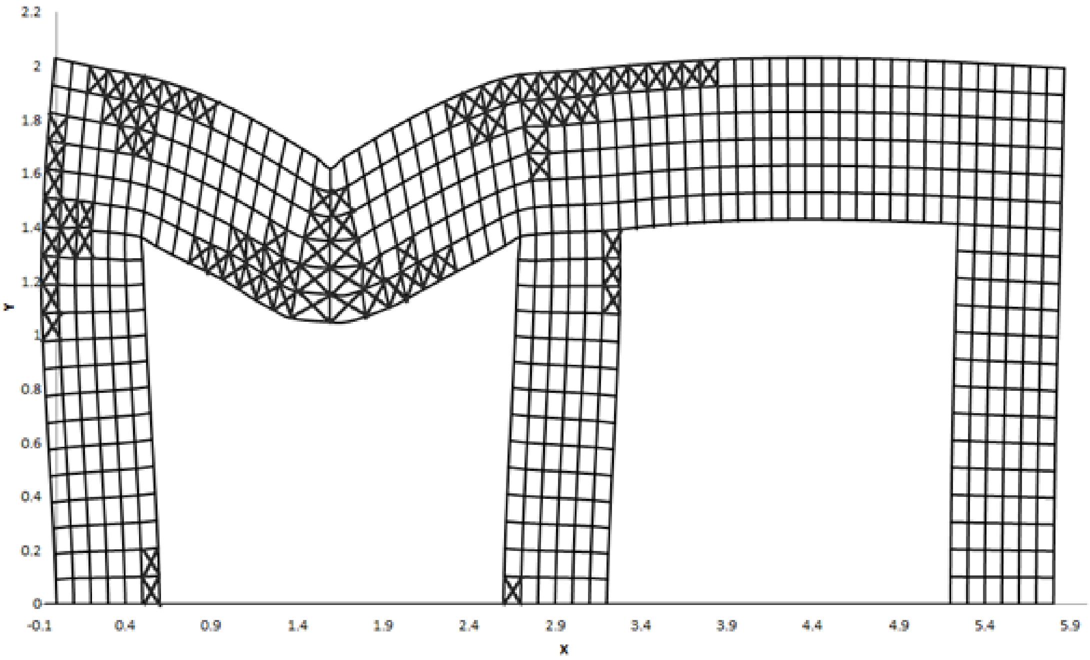


Рисунок 6.6 Форма искривления двухпролетной рамы при разрушающей нагрузке P=570 кН.

На рисунке 6.7показаны упругие линии верхней части нагружаемого пролета при нагрузках 150 кН, 350 кН и 560 кН соответственно.

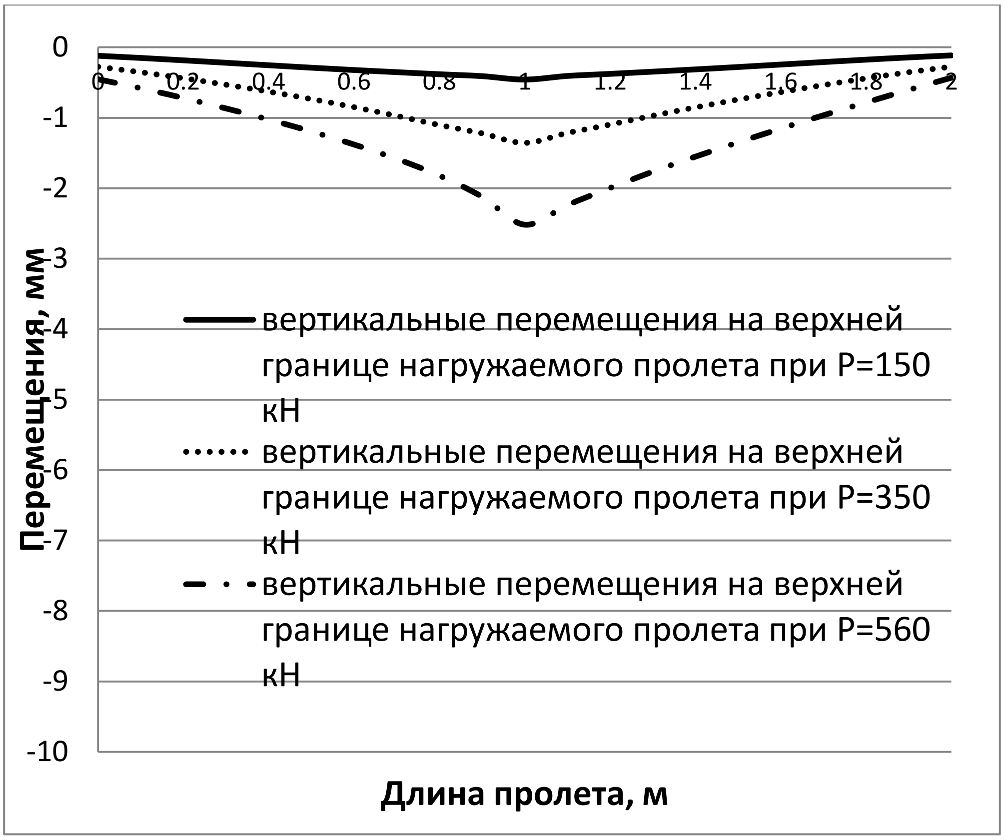


Рисунок 6.7 -Упругие линии вертикальных перемещенийна верхней границе нагружаемого пролета рамы при нагрузках 150 кН, 350 кН, 560 кН

Эпюры нормальных напряжений бетона в верхней части нагружаемого пролета для нагрузок 150 кН, 350 кН и 560 кН изображены на рисунках 6.8 и 6.9.

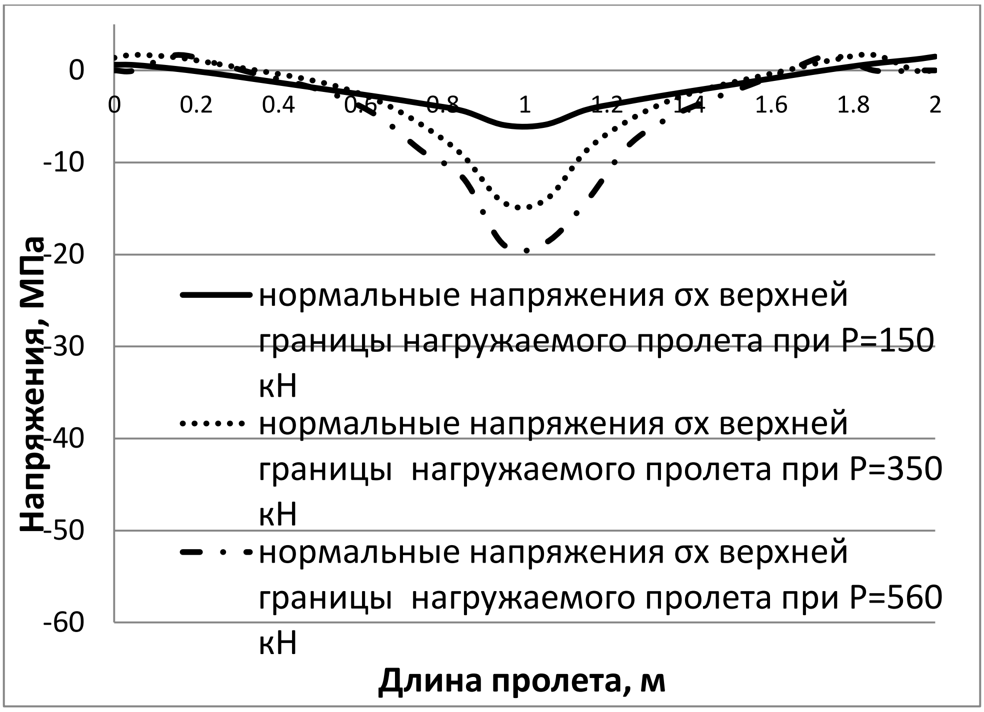


Рисунок 6.8 - Эпюры нормальных напряжений верхней границынагружаемого пролета при нагрузках 150 кН, 350 кН, 560 кН

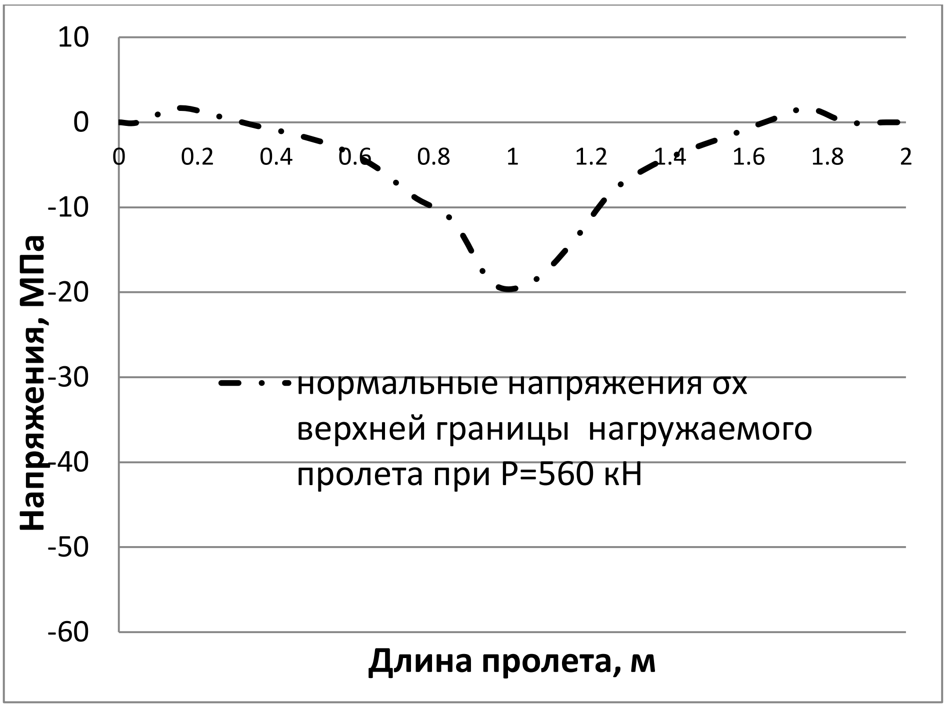


Рисунок 6.9 – Эпюра нормальных напряжений верхней границы нагружаемого пролета при нагрузке 560 кН.

На рисунке 6.10 показаныэпюры напряженийσ_y для бетона в верхней части нагружаемого пролета при нагрузках 150 кН, 350 кН, 560 кН.

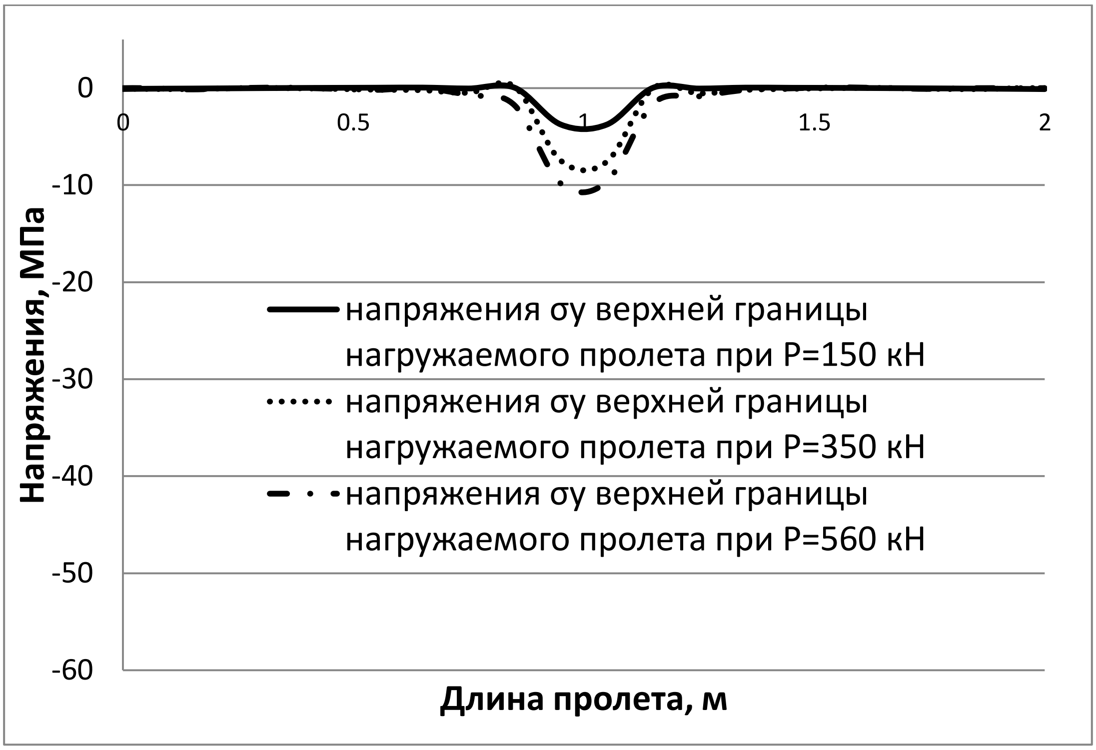


Рисунок 6.10 - Эпюры напряжений σ_y в верхней границы нагружаемого пролета при нагрузках 150 кН, 350 кН, 560 кН

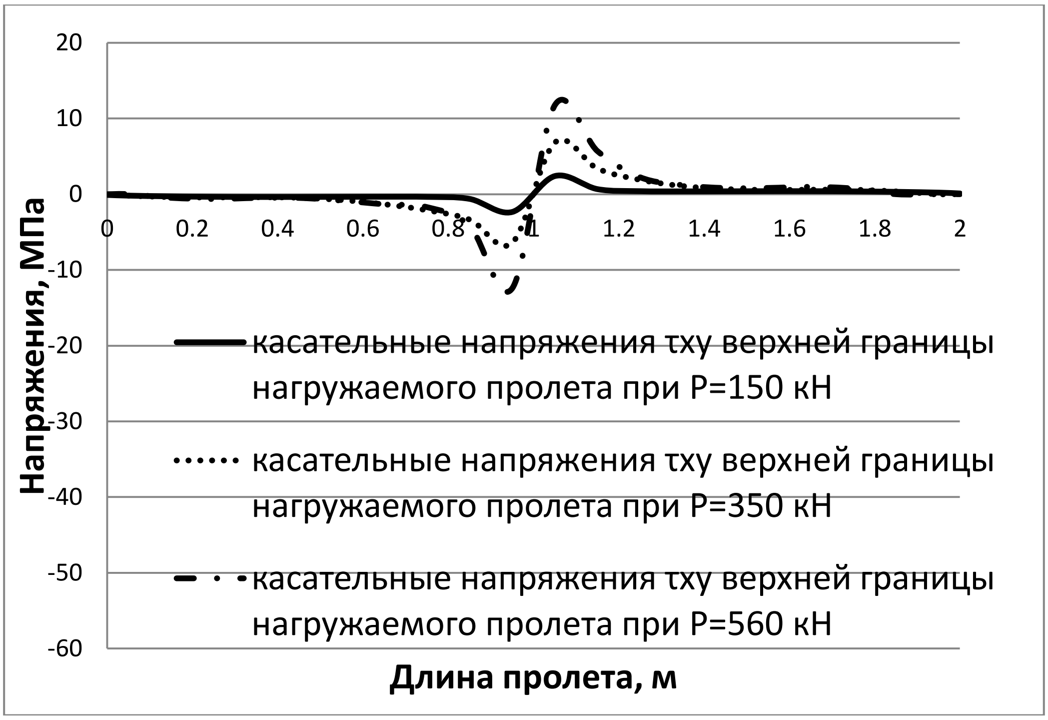


Рисунок 6.11 – Касательные напряжения τ_{xy}бетона верхней границы нагружаемого пролета при нагрузках 150 кН, 350 кН, 560 кН

Касательные напряжения τ_{xy} вверхней части нагружаемого пролета при нагрузках 150 кН, 350 кН, 560 кН, показаны на рисунке 6.11

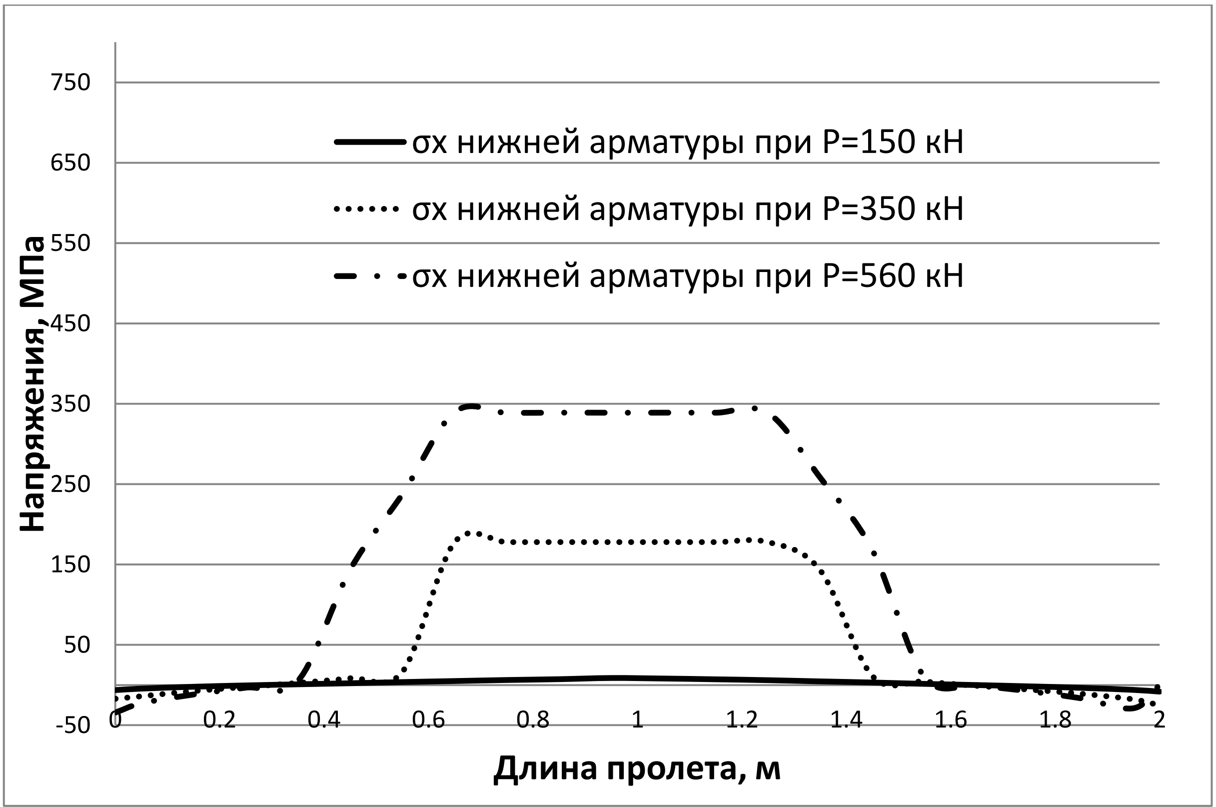


Рисунок 6.12 – Нормальные напряжения в нижней арматуре нагружаемого пролета при нагрузках 150 кН, 350 кН, 560 кН

Рисунок 6.12иллюстрируют нормальные напряжения в нижней арматуре нагружаемого пролета при нагрузках 150 кН, 350 кН и 560 кН соответственно.

6.1.2 Исследование средствами ПК ЛИРА

Для сопоставления результатов исследования автора использовался программный комплекс ЛИРА САПР 2012. Для расчетов применялся признак схемы 2, разрешающий перемещения вдоль горизонтальной и вертикальной осей, а так же поворот вокруг оси Y. В расчетной схеме применялся конечный элемент № 210 – физически нелинейный универсальный пространственный стержневой КЭ. Сила приложена в середину левого пролета, связи у основания каждой стойки запрещают все виды перемещений из признака схемы 2, имитируя жесткую заделку.

Рисунок 6.13 иллюстрирует задание стандартного сечения. При назначении жесткости сечений учитывалась нелинейность материалов.

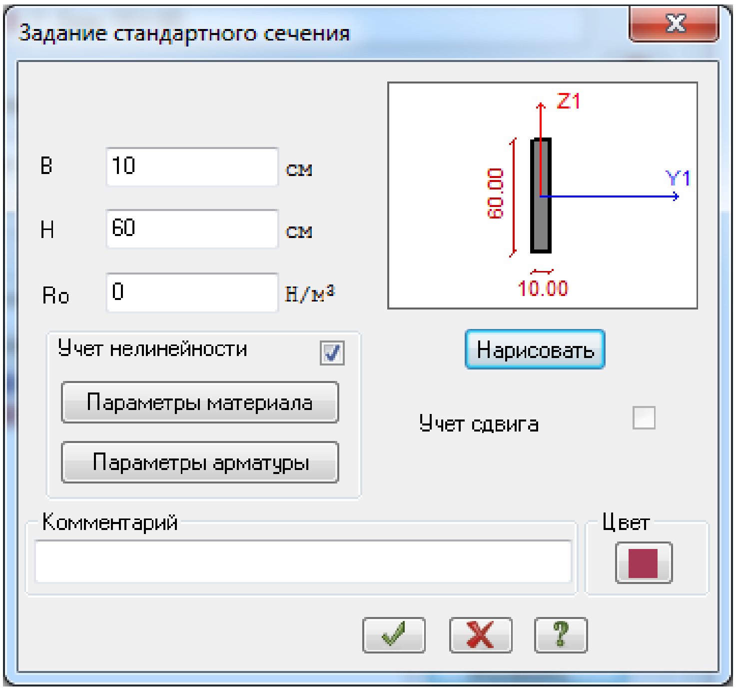


Рисунок 6.13 – Задание сечения в ПК ЛИРА с учетом нелинейности материалов

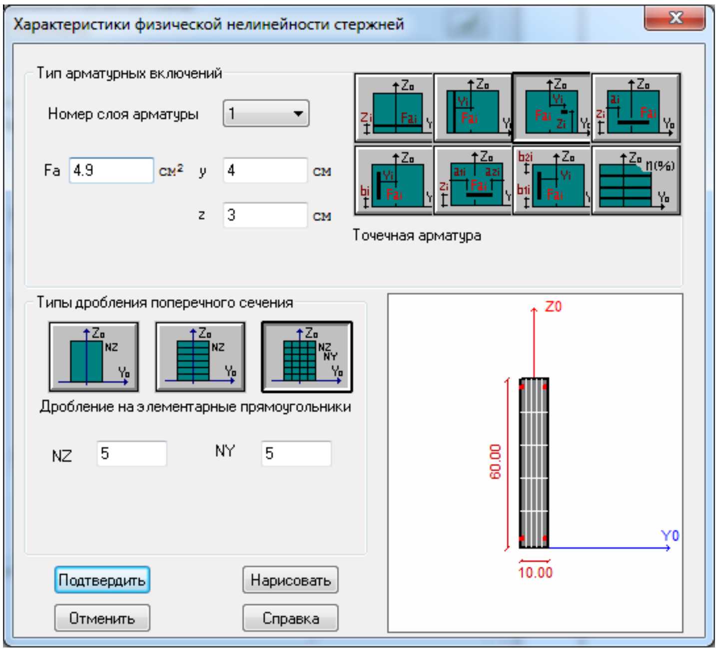


Рисунок 6.14 – Характеристики физической нелинейности стержней

В качестве закона нелинейного деформирования материала выбирался экспоненциальный закон деформирования, как для основного материала, так и для армирующего. Тип дробления поперечного сечения – дробление на элементарные прямоугольники. Тип арматурных включений – точечный, позволяет задавать стержни арматуры в сечении при помощи координат (рисунок 6.14).

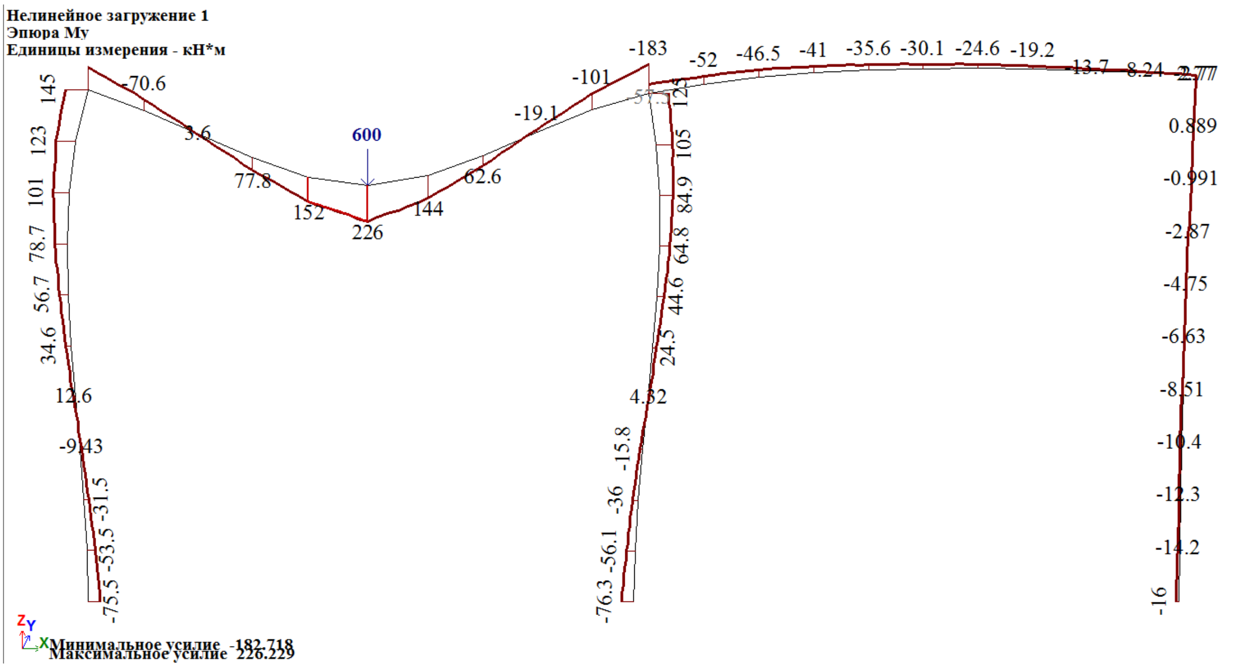


Рисунок 6.15 - Эпюра изгибающих моментов при разрушающей нагрузке 600 кН

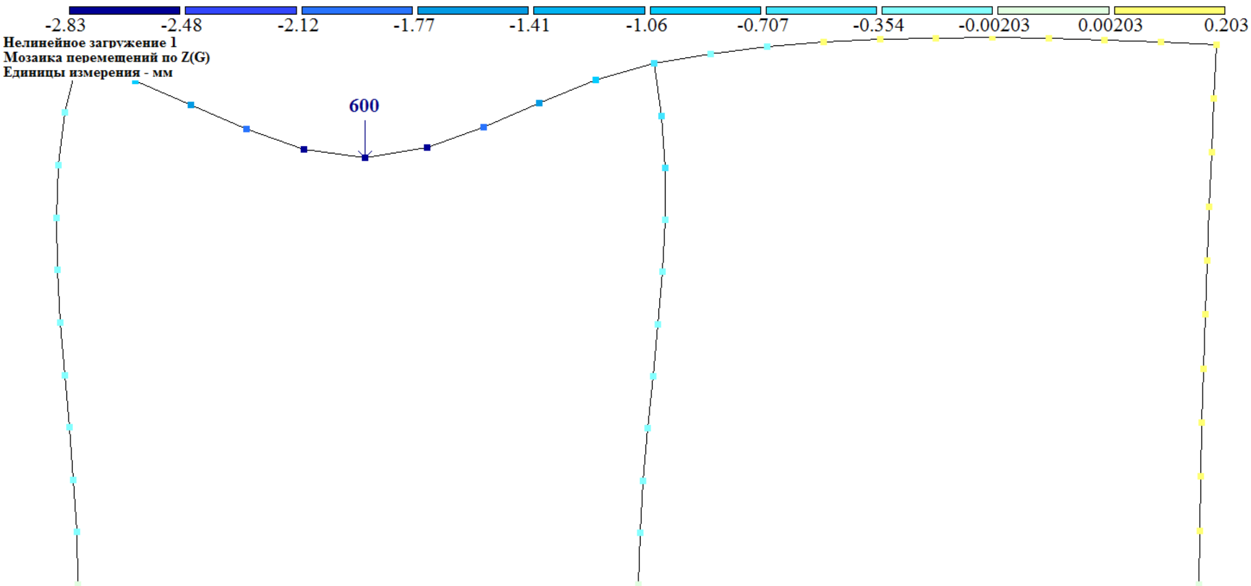


Рисунок 6.16 –Вертикальные перемещения рамы при нагрузке 600 кН

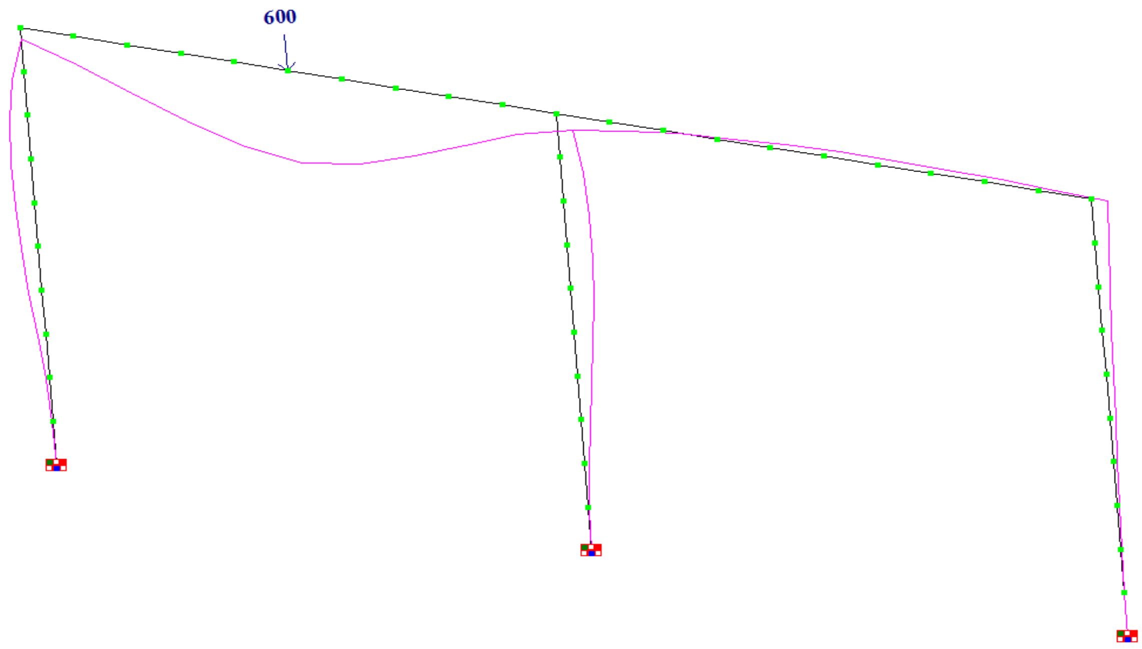


Рисунок 6.17 - Расчетная схема и упругая линия рамы при нагрузке 600 кН

На рисунке 6.15 проиллюстрированы эпюры изгибающих моментов при разрушающей нагрузке. Шкала вертикальных перемещений при разрушающей нагрузке изображена на рисунке6.16.Максимальный изгибающий момент в середине пролета составляет 226 кН*м. Рисунок 6.17 показывает упругую линию рамы по отношению к первоначальной расчетной схеме.

6.1.3 Исследование средствами ПКANSYS.

Расчеты проводились в программном комплексе ANSYS Workbench 14, при использовании командных вставок из ANSYS Mechanical APDL. Численное исследование напряженно-деформированного состояния железобетонной рамы, с учетом трещинообразования в бетоне и пластического деформирования стали, будет производиться в системе анализа Static Structural, с помощью модуля ANSYS Mechanical. Схема проекта показана на рисунке 6.18.

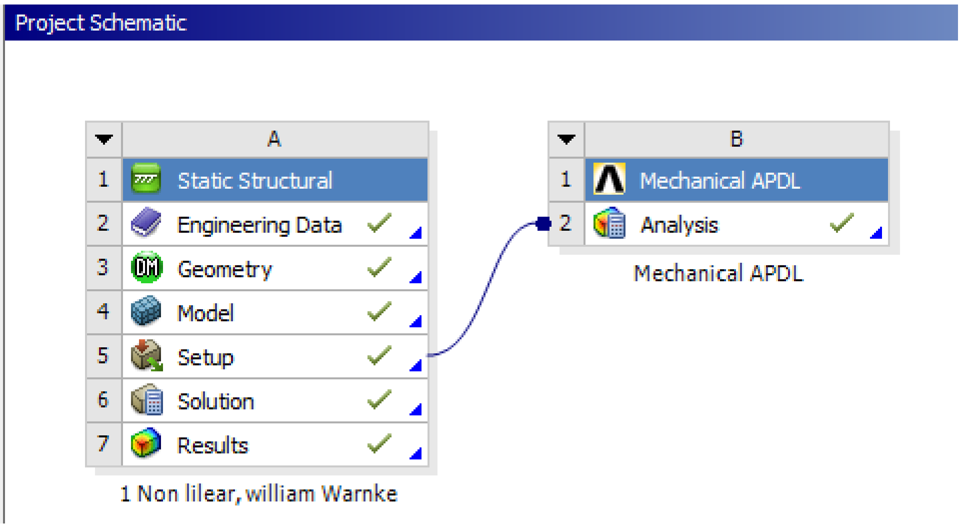


Рисунок 6.18 – Схема проекта

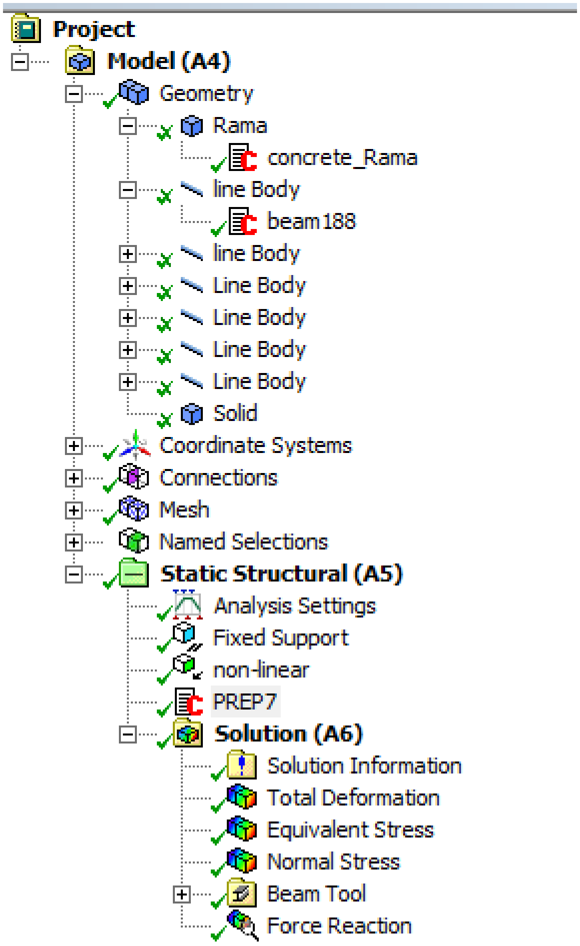


Рисунок 6.19 – Дерево проекта

Модель пластичности стали представлена диаграммой с билинейной зависимостью $\sigma - \varepsilon$ и кинематическим упрочнением . Для описания процесса деформирования конструкций из хрупких материалов в ANSYS имеется модель William-Warnke[129], используемая совместно с конечным элементом Solid 65. Геометрическая модель конструкции представлена одним объемным телом и несколькими балочными телами, отмеченными .в дереве проекта на рисунке 6.19. Стержни арматурного каркаса представлены конечными элементами beam188.

С учетом того, что геометрия конструкции позволяет построить структурированную сетку, в расчете будут использоваться КЭ в форме прямоугольного параллелепипеда. Сетка строится таким образом, чтобы узлы объемных элементов совпадали с узлами линейных и показана на рисунке 3.

Основные командные вставки с пояснениями представлены в приложении Б.

Разбиение рамы на конечные элементы представлено на рисунке 6.20. Каркас рамы, смоделированной в ANSYS design modeler, изображен на рисунке 6.21. Стойки рамы закреплены у основания, перемещения там невозможны (Fixed support).

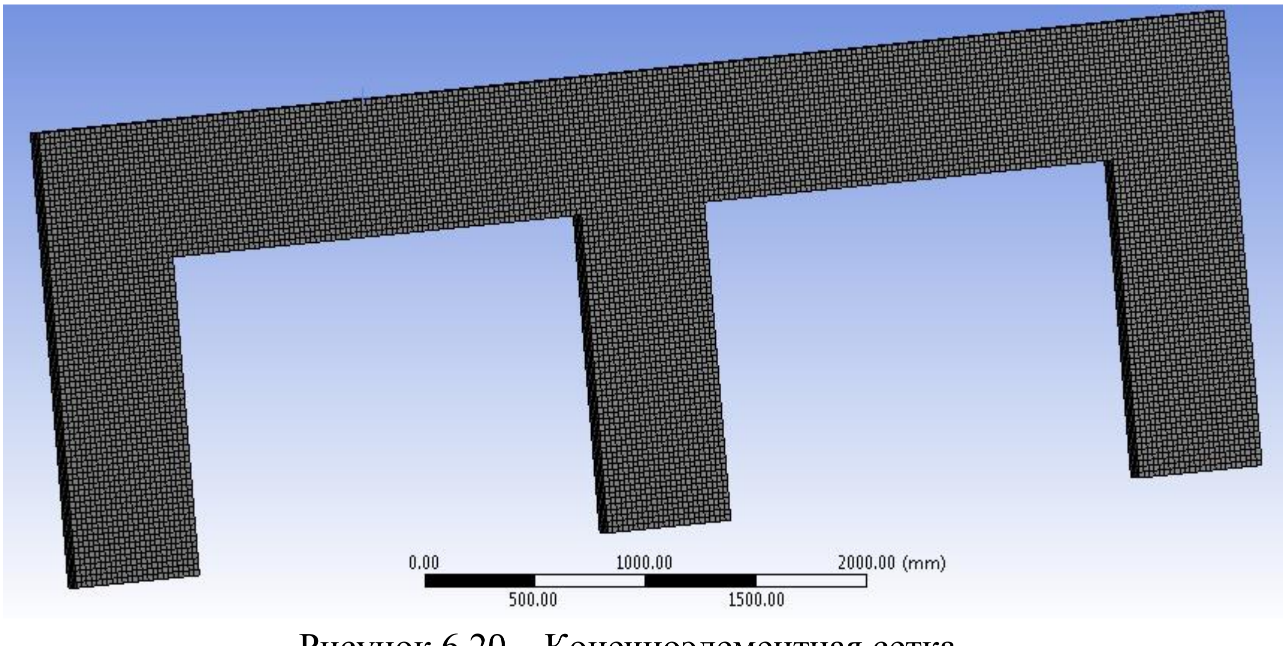


Рисунок 6.20 – Конечноэлементная сетка

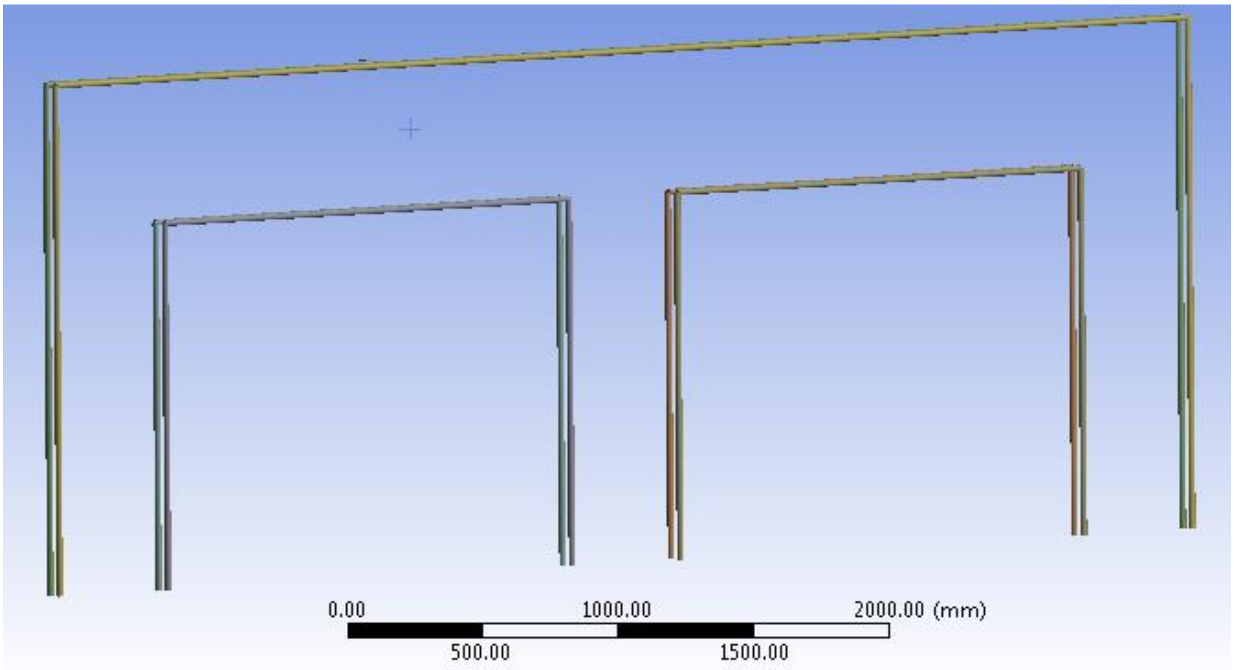


Рисунок 6.21 – Арматурный каркас рамы в ANSYS

Конструкция считается разрушенной при резком увеличении перемещений в середине пролета рамы, что свидетельствует о потере несущей способности и невозможности сопротивляться нагрузке.

На рисунках 6.22 – 6.26 изображены формы искривления рамы при нагрузках 150 кН, 350 кН, 550 кН, 580 кН, 590 кН соответственно. На каждом рисунке приведе цветовой градиент, соответствующий перемещениям рамы. На рисунке 6.26 показаны перемещения при полном разрушении конструкции.

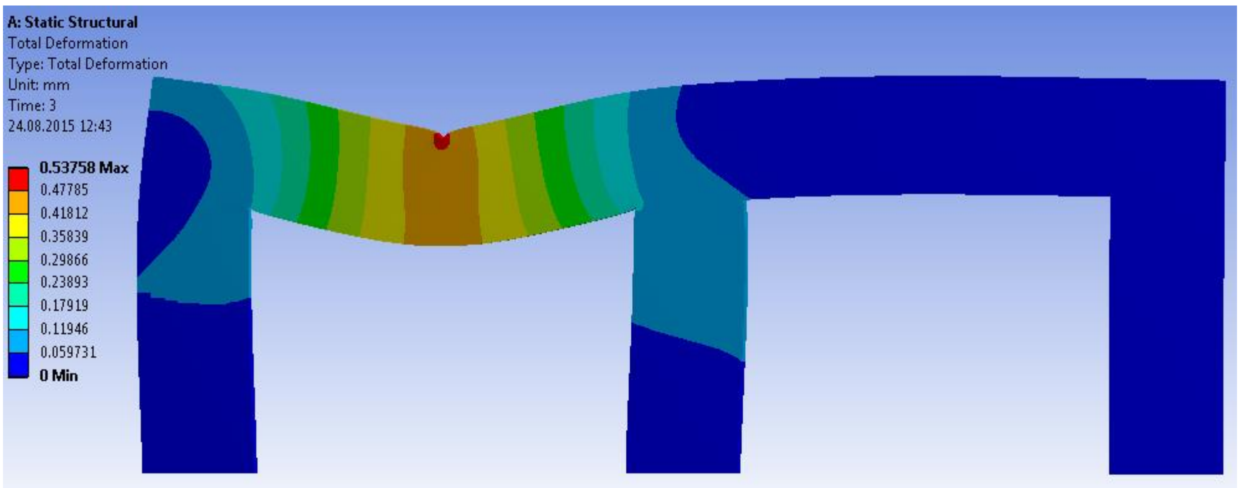


Рисунок 6.22 – Перемещения рамы на 3-ом шаге при нагрузке 150 кН

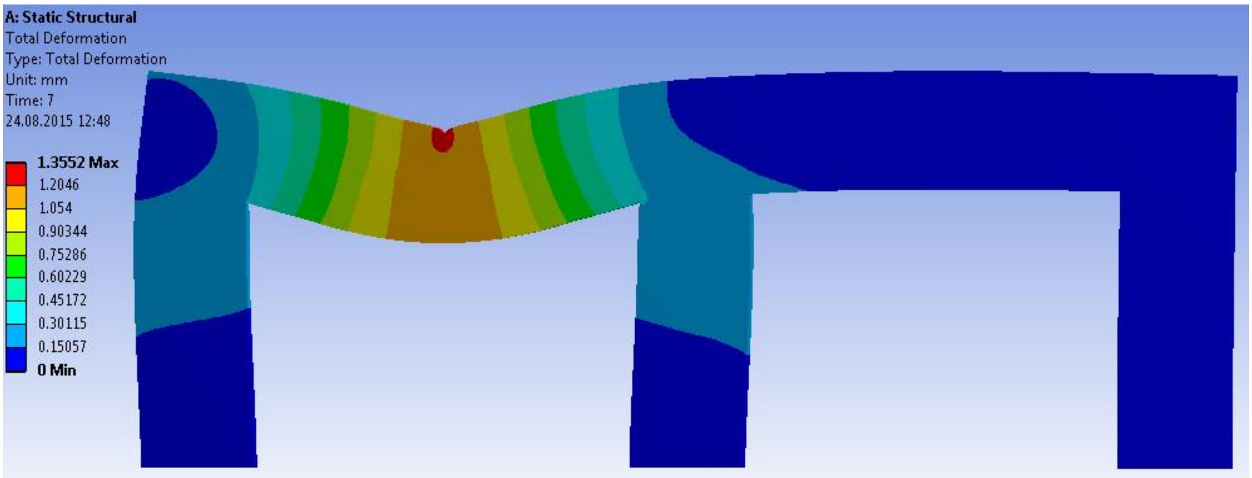


Рисунок 6.23 – Перемещения рамы на 7-ом шаге при нагрузке 350 кН

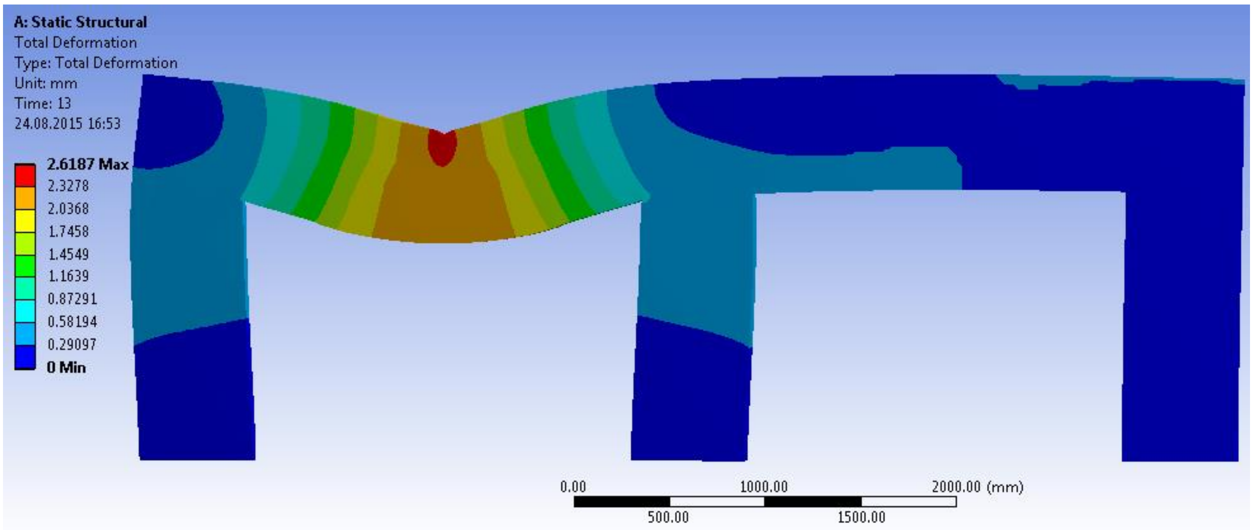


Рисунок 6.24 – Перемещения рамы на 12-ом шаге при нагрузке 560 кН

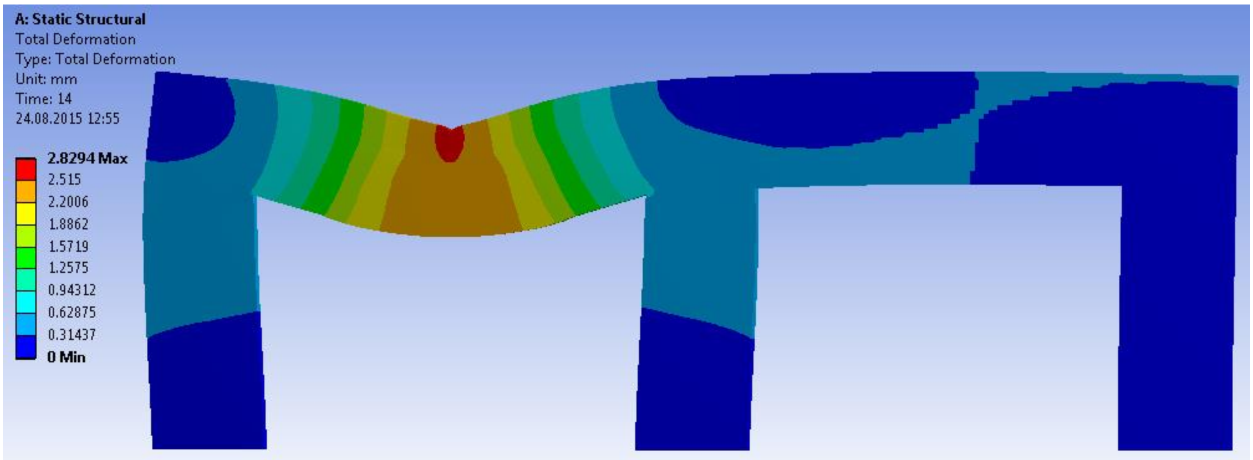


Рисунок 6.25 – Перемещения рамы на 14-ом шаге при нагрузке 580 кН

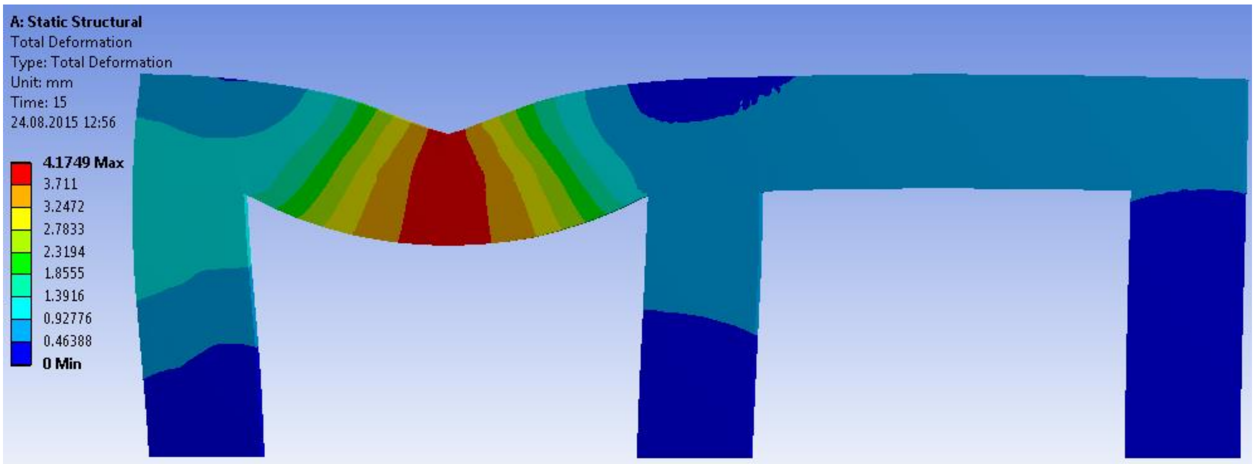


Рисунок 6.26 – Перемещения рамы на 15-ом шаге при нагрузке 590 кН, разрушение.

Напряжения в арматуре изображены на рисунках 6.27 – 6.30.

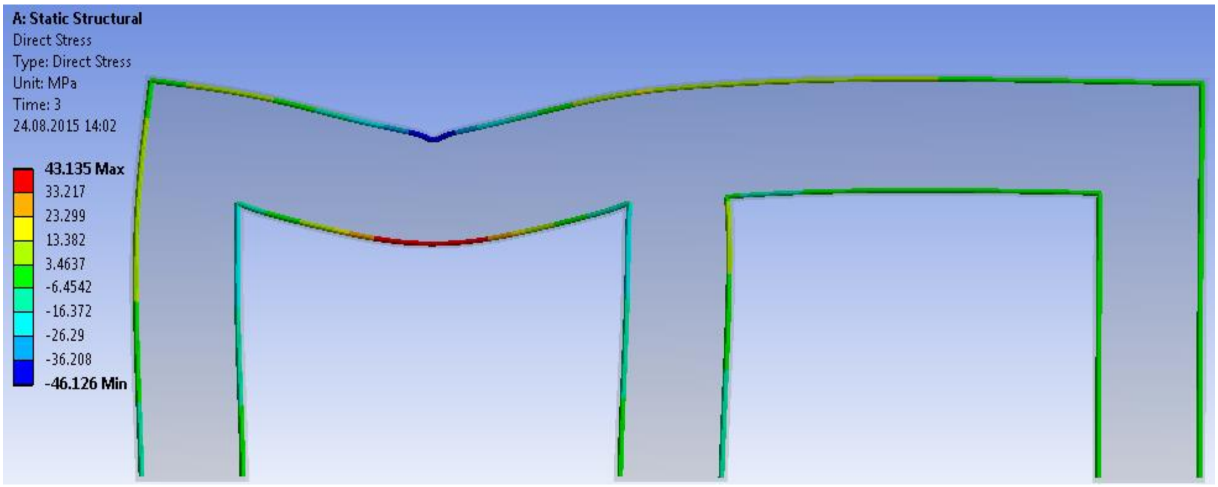


Рисунок 6.27 – Нормальные напряжения в арматуре на 3-ем шаге при нагрузке 150 кН

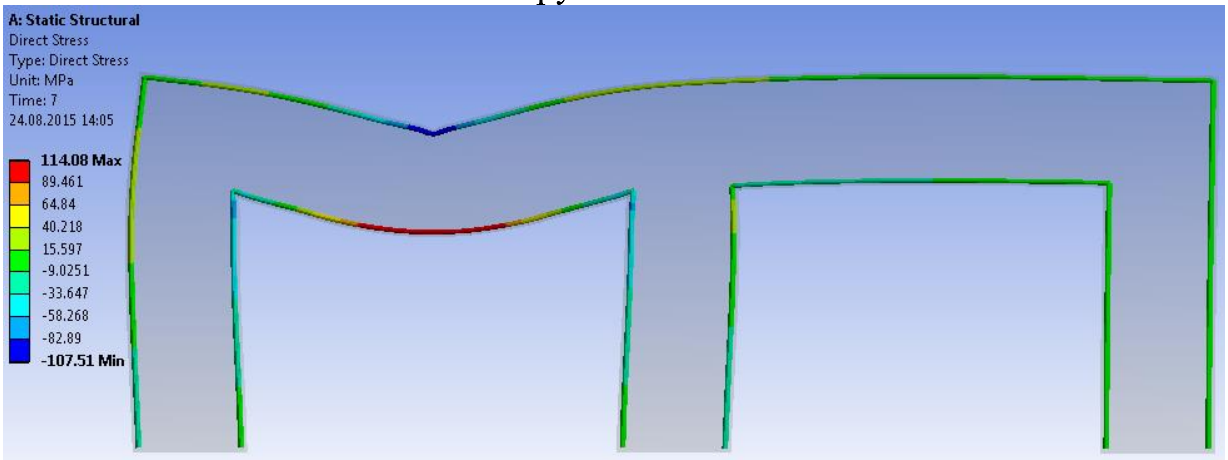


Рисунок 6.28 – Нормальные напряжения в арматуре на 7-ом шаге при нагрузке 350 кН

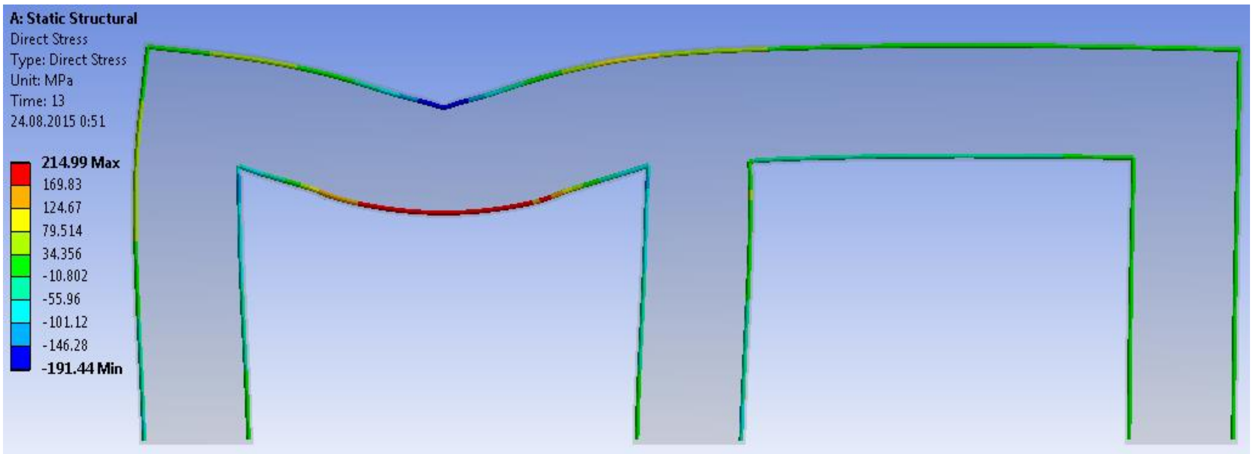


Рисунок 6.29 – Нормальные напряжения в арматуре на 13-ом шаге при нагрузке 570 кН

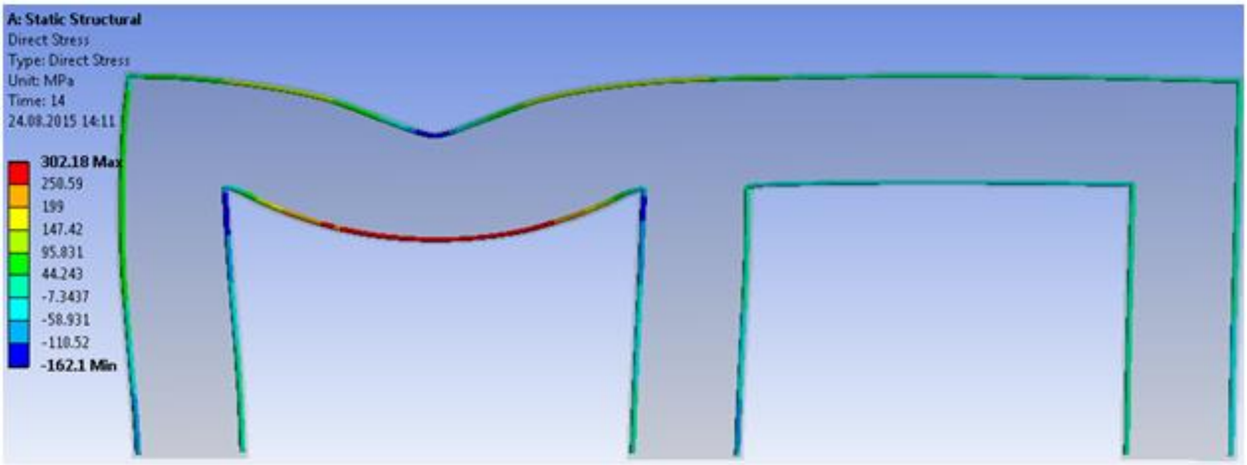


Рисунок 6.30 – Нормальные напряжения в арматуре на 14-ом шаге при нагрузке 580 кН.

Напряжения в арматуре на этапе, предшествующем разрушению при нагрузке 580 МПа, составило около 302 МПа.

6.2 Анализ и сравнение полученных результатов

Формы искривления рамы на различных этапах нагружения показывают, как происходило разрушение в выходили из строя конечные элементы конструкции. Из рисунков 6.3 – 6.6 видно, что наибольшее разрушение происходит в растянутой зоне нагружаемого пролета. При нагрузке, близкой к предельной, на рисунке 6.5, разрушения происходят в различных частях рамы, где материал работает на растяжение. Это связано, в первую очередь, с малой прочностью материала (бетона) при растяжении, в сравнении с прочностью при сжатии. Формы искривления так же показывают несимметричность разрушения рамы, обусловленную перераспределением усилий, так как часть усилий берет на себя правый пролет рамы.

Упругие линии в верхней части нагружаемого пролета трехопорной рамы, изображенные на рисунке 6.7, так же показывают, что на стадии, близкой к разрушению, вертикальные перемещения по длине пролета распределяются несимметрично. При этом, рисунок 6.7 показывает, что перемещения на разных стадиях работы конструкции изменяются нелинейно, с течением нагружения скорость изменения перемещений увеличивается на каждом шаге.

Эпюры напряжений на рисунке 6.8 показывают, что во время нагружения наблюдается уменьшение роста напряжений в сжатой зоне нагружаемого пролета рамы. Данный процесс обусловлен уменьшением модуля упругости, согласно построенным диаграммам деформирования материала на основе математической модели, предложенной автором. Максимальные нормальные напряжения в бетоне, верхней части нагружаемого пролета рамы, составило 18,98 МПа. Данные напряжения зафиксированы при нагрузке 560 кН. Эпюра напряжений верхней части нагружаемого пролета рамы, изображенная на рисунке 6.9, показывает несимметричность распределения напряжений по длине пролета. Несимметричность вдоль пролета рамы также видна на эпюрах изгибающих моментов на рисунке при расчете в ПК ЛИРА на рисунке 6.15.

Эпюра напряжений σ_y, соответствующих в тензоре напряжений направлению вдоль оси OY, изображены на рисунке 6.10 для нагрузок 150 кН, 350 кН и 560 кН. Максимальные напряжения σ_yпри нагрузке 560 кН составили -9.83 МПа. Согласно принципу Сен – Венана, как для нормальных напряжений σ_x, так и для напряжений σ_y, в месте приложения нагрузки происходит их концентрация, которая хорошо видна на эпюрах, на рисунках 6.9 и 6.10.

В эпюрах касательных напряжений τ_{xy}на рисунке 6.11, наблюдается обратная симметрия вдоль пролета, относительно места приложения нагрузки. Максимальные и минимальные значения касательных напряжений перед разрушением составляют соответственно 11.86 и -12.43 МПа.

Эпюры напряжений в нижней арматуре нагружаемого пролета, показаны на рисунке 6.12 Как можно заметить, эти эпюры так же несимметричны по длине пролета рамы. При нагрузке 150 кН арматура и бетон работают совместно, напряжения в конечном элементе распределяются между арматурой и бетоном равномерно. При нагрузке 350 кН видно горизонтальный выброс напряжений, параллельный оси OX. Это связано с тем, что в нижней части нагружаемого пролета рамы бетон уже не работает, а всю нагрузку принимает на себя арматура. При нагрузке 560 кН, на стадии, близкой к разрушению, арматура в растянутой зоне постепенно приближается к своему пределу текучести. Напряжения в ней в этот момент составили 338.90 кН. На следующем этапе, при нагрузке 570 кН, арматура достигла предела текучести.

Критерием прочности конструкции в данном случае послужило превышение предела текучести арматурной стали в нижней части нагружаемого пролета. В результате появился резкий скачок деформаций и перемещений (от 2.52 мм при нагрузке 560 кН до 3.79 при нагрузке 570 кН). Аналогичное изменение наблюдается при расчете в программе ANSYS. На рисунках 6.25 и 6.26 наблюдается резкий скачок максимальных вертикальных перемещений рамы. Максимальными будем считать перемещения на этапе, предшествующем потере несущей способности и разрушению пролета рамы.

На рисунке 6.31 показаны график сравнения максимальных перемещений в раме при расчете автора, в ПК ЛИРА и ANSYS.

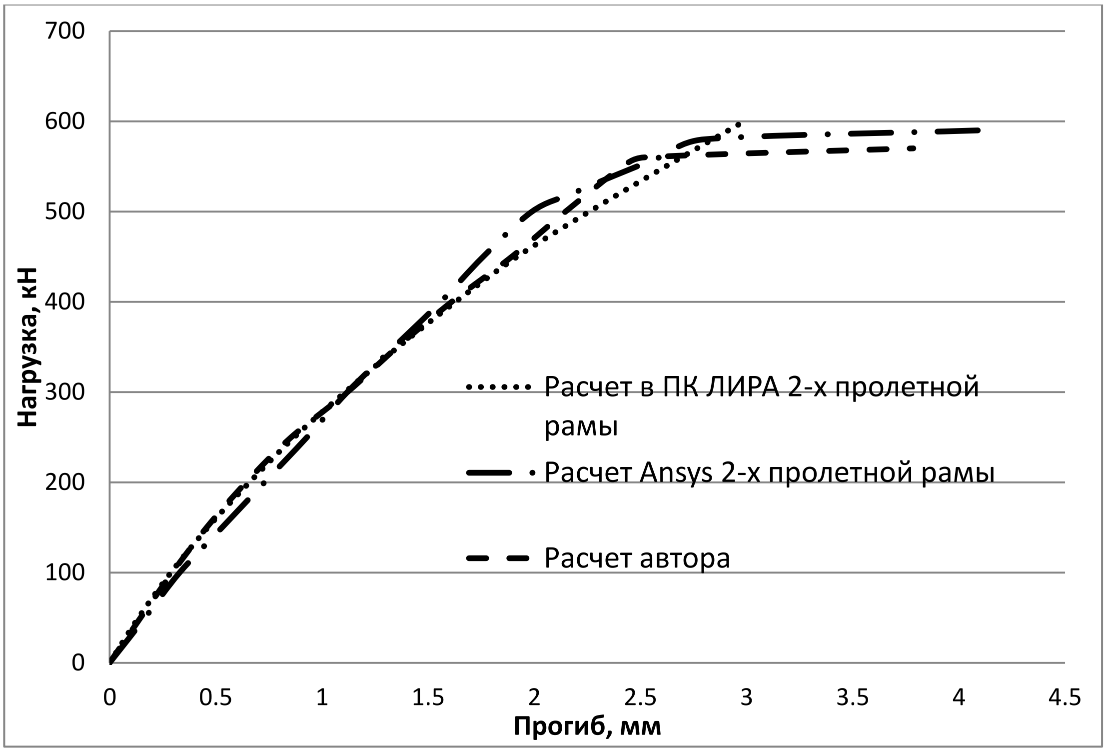


Рисунок 6.31 – Максимальные прогибы нагружаемого пролета рамы на разных этапах нагружения при расчете автора, расчете в ПК ЛИРА, ANSYS.

Таблица 6.1

<table>
<tr><td>№</td><td colspan="3">Максимальный прогиб, мм</td><td colspan="2">Отклонение от результатов расчета ANSYS, %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>Расчет автора</td><td>ПК ЛИРА</td><td>ANSYS</td><td>автора</td><td>ПК ЛИРА</td></tr>
<tr><td>2.52</td><td>2.98</td><td>2.83</td><td>10.95</td><td>-5.30</td></tr>
<tr><td>№</td><td colspan="3">Разрушающая нагрузка, кН</td><td colspan="2">Отклонение от результатов расчета ANSYS, %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Расчет автора</td><td>ПК ЛИРА</td><td>ANSYS</td><td>автора</td><td>ПК ЛИРА</td></tr>
<tr><td>570</td><td>600</td><td>590</td><td>5</td><td>1.69</td></tr>
<tr><td>№</td><td colspan="3">Напряжения в арматуре перед разрушением, МПа</td><td colspan="2" rowspan="2">Отклонение от результатов расчета ANSYS, %</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Расчет автора (P=560 кН)</td><td colspan="2">ANSYS (P=580 kH)</td></tr>
<tr><td></td><td>338,9</td><td colspan="2">302</td><td colspan="2">-12.23%</td></tr>
</table>

Из графиков на рисунке 6.31 видно, что полученные результаты хорошо коррелируют между собой. В таблице 6.1 приводится сравнение результатов расчетов рамы автором, ПК ЛИРА, ANSYS.

6.3 Выводы по шестой главе

1. Разработанная методика численного исследования композитных конструкций применена для расчета статически – неопределимой рамы. При сравнении с ANSYS, погрешность расчета автора составляет 10.95% для прогибов и 5% для разрушающей нагрузки; погрешность расчета в ПК ЛИРА составила -5.3% для максимальных прогибов и 1.69% для разрушающей нагрузки. Напряжения в арматуре при расчете автора в сравнении с ANSYS дают погрешность 12%

2. На основе анализа результатов исследования можно сделать вывод, что разработанная автором методика, основанная на разработанных программах и математической модели, дают удовлетворительные результаты при исследованиях и расчетах конструкций из композитных материалов.

Заключение

Результаты выполненных исследований:

1. Проведены анализ и систематизация математических моделей критериев прочности материалов. Большое внимание уделено математическим моделям, наиболее подходящим для исследования композитных материалов и конструкций.

2. Разработана математическая модель, основанная на аппроксимации диаграмм деформирования материалов и матрице жесткости нелинейного композитного конечного элемента. Проведено сравнение диаграмм, построенных по данной математической модели, с диаграммами других авторов. При этом сравнение производилось для нескольких типов материалов с различными механическими характеристиками.

3. Разработанная матрица жесткости композитного нелинейного конечного элемента учитывает изменение механических характеристик входящих в нее материалов, в зависимости от напряженно – деформированного состояния на предыдущих этапах нагружения конструкции

4. Разработана методика определения напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных материалов на различных этапах нагружения, включая предельные. Данная методика позволяет вычислять разрушающую нагрузку и максимальные перемещения конструкции, а также проследить за разрушением различных участков конструкции при нагружении.

5. Для реализации полученной методики разработаны следующие программы:

– «Composit» содержит алгоритм, позволяющий рассчитывать коэффициенты матриц жесткости для однородных и композитных конечных элементов, из которых составляется общая матрица жесткости системы.

– «Strength» решает систему уравнений равновесия с последующим определением перемещений каждого узла элемента по трем направлениям, совпадающим с направлениями координатных осей, вычислять компоненты тензоров напряжений и деформаций для каждого конечного элемента.

– «UltimateState» использует диаграммы деформирования материалов и необходимо для учета нелинейности во время расчета. Алгоритмы данной подпрограммы изменяют механические характеристики материалов конструкции во время расчета до полного разрушения КЭ.

– «Программа для расчета конструкций из композитных материалов» использует вышеперечисленные алгоритмы и осуществляет расчеты конструкций в нелинейной постановке. Для уточнения решения нелинейной системы уравнений на каждом этапе нагружения используется метод последовательных приближений.

Программы зарегистрированы, получены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

6. Выполнена апробация предложенной в диссертации математической модели, методики и программного комплекса при расчете балок и рамы в физически нелинейной постановке. Оценка разработанной математической модели выполнена путем сравнения расчетных результатов с экспериментальными данными и расчетами в других программных продуктах.

7. Выполнен анализ полученных результатов. Сформулированы выводы и рекомендации по применению данной методики и математической модели. Исходя из особенностей разработанной методики и результатов исследований конструкций из композитных материалов, данную методику рекомендуется применять:

- Для установления разрушающей нагрузки и максимальных перемещений и деформаций при разрушении конструкций из композитных материалов при простых напряженных состояниях. Данные предельные состояния рассматриваемых в работе конструкций (балок и рам), возникают в результате превышения предела текучести армирующих элементов в растянутой зоне.

- Для исследования напряженно-деформированного состояния, установления перемещений, напряжений и деформаций на каждом этапе нагружения конструкции. Для определенных видов конструкций, в зависимости от их назначения, при ограничении деформаций эстетико – психологическими, технологическими и конструктивными требованиям.
- Для установления опасных зон и зон разрушения конструкции на различных этапах нагружения, включая предельные. Предельное состояние конструкции может наступать при разрушении связующего в поперечном сечении конструкции.
- Для расчетов композитов, имеющих в своем составе инородные включения, газовые пузыри, технологические отверстия. При этом можно учитывать любое количество составляющих внутри композита в пределах конечного элемента.

Аппроксимированные функциональные зависимости диаграмм деформирования материалов, используемые в методике, могут быть применены как для расчетов конструкций, так и для построения более общих математических моделей и поверхностей прочности, относящихся к сложным напряженным состояниям.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Абрамчук, С.С.** Комплексирование методов неразрушающих, полуразрушающих, разрушающих исследований и технологического контроля для диагностики несущей способности изделий / С.С. Абрамчук, А.В. Сандалов //Тр. института механики полимеров «Методы и средства диагностики несущей способности изделий из композитов». – Рига: Зинатне, 1983. – С. 33 – 46
2. **Агапов, В.П.** Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций / В.П. Агапов. – Москва: Издательство ассоциации строительных вузов, 2000. – 152 с.
3. **Александров, А.В.** Сопротивление материалов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – Москва: Высшая школа, 2003. – 561 с.
4. **Алфутов, Н.Я.** Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / А.Я. Алфутов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов. – М: Машиностроение, 1984. – 446 с.
5. **Ануфриев, И.Е.** MATLAB 7 / И.Е. Ануфриев, А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнова. – Санкт-Петербург: Издательство БХВ Петербург, 2005. – 1104 с.
6. **Ахвердов, И.Н.** Основы физики бетона / И.Н. Ахвердов. – М.: Стройиздат, 1981. – 464 с.
7. **Бажант, З.** Эндохронная теория неупругости и инкрементальная теория пластичности / З. Бажант // Механика деформируемых твердых тел. Направление развития. – М.: Мир, 1983. – С. 189 – 229
8. **Басов, К.А.** ANSYS в примерах и задачах / Под общ. Ред. Д.Г. Краковского. – М.: Компьютер Пресс, 2002. – 224 с.
9. **Басов, К.А.** ANSYS: справочник пользователя / К.А. Басов. – Москва: Издательство ДМК Пресс, 2005. – 640 с.

10. **Бессонов, В.Г.** Неразрушающий контроль прочности стеклопластиковых резервуаров, подвергаемых внутреннему давлению / В.Г. Бессонов, А.Д. Ярошек. – Киев, 1971. – 118 с.
11. **Бич, П.М.** Деформативность бетонов при плоском напряженном состоянии / П.М. Бич // Вопросы строительства и архитектуры, Минск, 1977. - вып. №7. - С. 87-92.
12. **Болотин, В.В.** Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М: Машиностроение, 1980. – 375 с.
13. **Болотин, В.В.** Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений / В.В. Болотин. - М.:Стройиздат,1982. - 351с.
14. **Браутман, Л.** Композиционные материалы. Т. 7. Применение композиционных материалов в технике / Л. Браутман, Р. Крок. – М: Машиностроение, 1978. – 342 с.
15. **Булманис, В.Н.** Оценка влияния трансверсальных свойств на несущую способность колец из однонаправленных композитов, работающих под давлением / В.Н. Булманис, Н.А. Панфилов, Г.Г. Портнов // Механика полимеров, 1976. - №4.- С.740 - 743.
16. **Бэйт, К.** Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бэйт, Е. Вилсон; пер. с англ. А.С. Алексеева, О.О. Андреева, В.П. Петрова, В. Н. Сидорова; под ред. А.Ф. Смирнова. – Москва: Стройиздат, 1982. – 450 с.
17. **Ван Фо Фы Г.А.** Теория армированных материалов / Г.А. Ван Фо Фы. – Киев: Наукова думка, 1971. – 232с.
18. **Васильев, А.С.** Обзор исследований моделей железобетона в условиях сложнонапряженного состояния методом конечных элементов / А.С. Васильев, Н.А. Тарануха // Современное общество, образование и наука: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции, Тамбов, 30 июня 2014 г.– Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. – С. 22-25.

19. **Васильев, А.С.**Численное моделирование поведения сложных композитных конструкций в области их предельных состояний / Н.А. Тарануха, А.С. Васильев // Наука. Инновации. Техника и технологии: проблемы, достижения и перспективы: материалы междунар. научн.-практ. конф., Комсомольск – на – Амуре, 12-16 мая 2015 г. - Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2015. – С. 96-99

20. **Васильев, А.С.** Разработка алгоритмов численного моделирования балочных конструкций из композитных материалов для портовых и берегозащитных сооружений. / А.С. Васильев // Ученые записки КнАГТУ: Науки о природе и технике. - 2015. - № III – 1(23). – С 88-93

21. **Васильев, В.В.** Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. – М: Машиностроение, 1988. – 272 с.

22. **Васильев, В.В.** Плоская задача теории упругости для ортотропной консольной полосы / В.В. Васильев, С.А. Лурье // Механика полимеров. - 1972. - №4. – С. 674 – 681

23. **Водопьянов, Р.Ю.** Программный комплекс ЛИРА – САПР 2012. Учебное пособие / Р.Ю. Водопьянов, Ю.В. Гензерский, В.П. Титок, А.Е. Артамонова. – К. – М.: Электронное издание, 2012. – 208 с.

24. **Галлагер, Р.** Метод конечных элементов. Основы. / Р. Галлагер; пер. с англ.В. М. Картвелишвили; под ред. Н. В. Баничука. – Москва: Мир, 1984. – 428 с.

25. **Гвоздев, А.А.** Работа железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии / А.А. Гвоздев, М.И. Карпенко //Строительная механика и расчет сооружений. - 1965. - №2. - С. 20 - 23.

26. **Гензерский Ю.В.** ЛИРА – САПР 2011. Учебное пособие / Ю. В. Гензерский, Д.В. Медведеко, О.И. Палиенко, В.П. Титок. – К.: Электронное издание, 2011. – 396 с.

27. **Гениев, Г.А.** Теория пластичности бетона и железобетона / Г.А. Гениев, В.Н. Киссюк, Г.А. Тюпин. – М: Стройиздат, 1974. – 316 с.

28. **Гольденблат, И.И.** Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов / И.И. Гольденблат, В.А. Копнов. – М: Машиностроение, 1968. – 191 с.

29. **ГОСТ 27751-2014.** Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. – Введ. 2015-01-07. – М.: Стандартинформ, 2015. –13 с.

30. **Грезин, В.М.** Исследование прочности и деформативности стеклопластика АГ - 4С при кратковременных и длительных нагрузках / В.М. Грезин // Труды Воронежского инженерно – строительного института. - 1967. - №13. – Вып. 2. – С. 3-8

31. **Даутов, Р.З.** Программирование МКЭ в MATLAB / Р.З. Даутов. – Казань: Казанский государственный университет, Факультет вычислительной математики и кибернетики, 2010. – 71 с.

32. **Дащенко, А.Ф.** MATLAB в инженерных и научных расчетах / А.Ф. Дащенко, В.Х. Кириллов, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей. – Одесса: Издательство Астропринт, 2003. – 214 с.

33. **Думанский, А.М.** Модели деформирования композиционных материалов / А.М. Думанский // Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций: материалы первой междунар. научн. - практ. конф., Москва, 10-13 нояб., 2014 г. – М: ИМАШ РАН, 2014. – С. 8

34. **Дзюба, В.А.** Применение составной функции диаграммы сжатого бетона для деформационной оценки конструкций / В.А. Дзюба, Ю.С. Глушакова // Ученые записки КнАГТУ: Науки о природе и технике. - 2014. - № II – 1(18). – С. 109-114

35. **Жигун, И.Г.** Свойства пространственно-армированных пластиков / И. Г. Жигун, В. А. Поляков. – Рига: Зинатне, 1978. – 215 с.

36. **Захаров, К.В.** Критерий прочности для слоистых пластиков / К.В. Захаров. – Пластические массы, 1961.

37. **Захаров, В.Н.** О выборе размеров и формы образцов для испытания стеклопластиков на изгиб / В.Н. Захаров // Заводская лаборатория, 1976. - Т.42. - №6. - С.736-737.

38. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М: Мир, 1975. – 541 с.
39. **Зинченко, В.Ф.** Экспериментальные данные о взаимосвязях между физико-механическими свойствами конструкционных композитов / В.Ф. Зинченко //Методы и средства диагностики несущей способности изделий из композитов:труды института механики полимеров. – Рига: Зинатне, 1983. – С. 7 – 17
40. **Ильюшин, А.А.** Пластичность / А.А. Ильюшин. – М:ГИТТЛ, 1948. – 376 с.
41. **Карпенко, Н.И.** Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры / Н.И. Карпенко, Т.А. Мухамедиев, А.Н. Петров // Напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций. – М.: НИИЖБ, 1986. – С. 7 – 25.
42. **Карпенко, Н.И.** Общие модели механики железобетона / М.И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
43. **Кетков, Ю.Л.** MATLAB 7: программирование, численные методы / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц. – СПб.: БХВ – Петербург, 2005. – 752 с.
44. **Клованич, С.Ф.** Механика железобетона в расчетах конструкций / С.Ф. Клованич // Строительные конструкции. – Киев: НИИСК. - 2000. – вып. 58. - С. 107-115.
45. **Клованич, С.Ф**. О расчете пространственных железобетонных конструкций методом конечных элементов /С.Ф. Клованич, С.Н. Карпенко // Бетон и железобетон в третьем тысячелетии: сб. тр. Международной научно-практической конференции - Ростов –на-Дону, 2000. – С.179 – 184.
46. **Клованич, С.Ф.** Вариант модели пластичности бетона / С.Ф. Клованич, И.Н. Мироненко / Міжвід. н. – т. зб. – Київ: НДІБК, 2005. - вип. 62. – т. 2. – С. 18-24
47. **Клованич, С.Ф.** Семейство изопараметрических неоднородных конечных элементов / С.Ф. Клованич, И.Н. Мироненко // Структурообразование, прочность и разрушение композиционных материалов и конструкций: Материалы международной научно – практической конференции. –

Одесса: Вестник ОГАСА – 2005. – вып. 20. – С. 155 – 164.

48. **Клованич, С.Ф.** Метод конечных элементов в механике железобетона / С. Ф. Клованич, И. Н. Мироненко. – Одесса, 2007. – 111 с.
49. **Клованич, С.Ф.** Метод конечных элементов в расчетах пространственных железобетонных конструкций. / С. Ф. Клованич, Д. И. Безушко. – Одесса: Издательство ОНМУ, 2009. – 89 с.
50. **Козачевский, А.И**. Модификация деформационной теории пластичности бетона и плоское напряженное состояние железобетона с трещинами /А. И. Козачевский // Строительная механика и расчет сооружений. -№4. – 1983.– С. 12-16.
51. **Кристенсен, Р.** Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М: Мир, 1982. – 334 с.
52. **Кричевский,А.П.** Расчет железобетонных инженерных сооружений на температурные воздействия / А.П. Кричевский – М.: Стройиздат,1984. – 148 с.
53. **Круглов, В.М.** Об одном варианте деформационной теории пластичности бетона в шаговом расчете конструкций методом конечных элементов / В.М. Круглов, А.И. Козачевский // Исследованиеработы искусственныхсооружений. - 1980. – С. 15-19.
54. **Круглов, В.М.** Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трехосном напряженном состоянии / В.М. Круглов // Строительная механика и расчет сооружений. - 1987. - №1. – С. 40-44.
55. **Крылов, Н.А.** Радиотехнические методы контроля качества железобетона / Н.А. Крылов, В.А. Калашников, И.А. Полищук. – Л. – М, 1966. – 290 с.
56. **Крылов, В.Д.** Закономерности деформирования полимерных композиционных материалов при испытании на сдвиг в плоскости листа / В.Д. Крылов, В.С. Ерасов, Н.О. Яковлев // Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций:материалы первой международной конференции, Москва, 10-13 нояб. 2014 г. – М: ИМАШ РАН, 2014. – С. 28

57. **Лебедев, А.А.** Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / А.А. Лебедев, Б.И. Ковальчук, Ф.Ф. Гигиняк, В.П. Ламашевский. – Киев: Издательский дом «Ин Юре», 2003. – 540 с.

58. **Ланкина, Е.А.** Вычисление разброса прочности в трехмерном композите /Е.А. Ланкина, А.М. Михайлов // Динамика сплошной среды: тр. ин-та - Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1991 . - Вып. 103. - С.83-87.

59. **Латишенко, В.А.** Определение нарастания прочности бетонов при твердении без разрушения образцов / В.А. Латишенко. // В кн. «Исследования по бетону и железобетону», 1957. – вып. 2. – С. 97 – 104.

60. **Латишенко, В.А.** Диагностика жесткости и прочности материалов // В.А. Латишенко. - Рига, 1968. – 320 с.

61. **Максименко, В.П.** Применение нелинейного шагового процессора «Лира – Степ» для оценки реального состояния сооружений / В.П. Максименко // Будівельні конструкціі. – 2001. – вып. 54. – С. 439 – 446

62. **Мартыненко, О.П.** Методы построения математико-диагностических моделей оценки качества конструкций из армированных пластиков в условиях ограниченной информации / О.П. Мартыненко, В.Ф. Сосновцев, В.А. Кощеев. – В кн.: Неразрушающие методы контроля изделий из полимерных материалов. – М, 1980. – ч. 2. – С. 37 – 38

63. **Мурашов, В.И.** Трещиностойкость, жесткости и прочность железобетона / В.И. Мурашов. – М: Машстройиздат, 1958. – 268 с.

64. **Нильсен, Л.** Механические свойства полимеров и полимерных композитов / Л. Нильсен. – М: Химия, 1978. – 310 с.

65. **Немировский, Ю.В**. Прочность элементов конструкций из композитных материалов /Ю.В. Немировский, Б.С. Резников. - Новосибирск :Наука, 1986. – 166 с.

66. **Овчинский А.С.** Процессы разрушения композиционных материалов: Имитация микро - и макромеханизмов на ЭВМ.-М / А.С. Овчинский. - М.:Наука,1988. - 277с.

67. **Олдырев, П.П.** Анализ усталостных изломов полиметилметакрилата при

изгибе с вращением / П.П. Олдырев, В.М. Парфеев. – Механика композитных материалов, 1974. - №1. - С. 173 – 175.

68. **Писаренко, Г.С.** Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев. – Киев: Наук.думка, 1976. – 416 с.
69. **Победря, Б.Е.** Механика композиционных материалов / Б.Е. Победря. – М: МГУ, 1984. – 336 с.
70. **Попов, А.А.** Пространственный деформационный нелинейный расчет железобетонных изгибаемых конструкций методом конечных элементов /А.А. Попов, А.А. Хатунцев, И.Г. Шашков, А.В. Кочетков. – интернет журнал «Науковедение», 2013. - №5. – Режим доступа:http://cyberleninka.ru/article/n/prostranstvennyy-deformatsionnyy-nelineynyy-raschet-zhelezobetonnyh-izgibaemyh-konstruktsiy-metodom-konechnyh-elementov (дата обращения 19. 09. 2014)
71. **Постнов, В.А.** Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В.А. Постнов, И.Я. Хархурим. – Астрахань: Издательство «Судостроение», 1974. – 340 с.
72. **Потапов, А.И.** Контроль качества и прогнозирование надежности конструкций из композитных материалов / А.И. Потапов. - Л., 1980. - 261 с.
73. **Разрушение конструкций из композитных материалов** / И.В. Грушецкий, И.П. Димитриенко, А.Ф. Ермоленко и др.; Под ред. В.П. Тамужа, В.Д. Протасова." - Рига: Зинатне,1986. - 264 с.
74. **Ромалис, Н.Б.** Разрушение структурно-неоднородных тел / Н.Б. Ромалис, В.П. Тамуж. - Рига: Зинатне,1989.-224с.
75. **Роуландс, Р.** Течение и потери несущей способности композитов в условиях двухосного напряженного состояния: сопоставление расчета и экспериментальных данных / Р. Роуландс //Неупругие свойства композиционных материалов. – М: Мир, 1978. – С. 140-179.
76. **Самуль, В.И.** Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М: Высшая школа, 1982. – 265 с.

77. **Сандалов, А.В.** Исследование стеклотекстолитовых оболочек неразрушающими методами / А.В. Сандалов // Механика полимеров. - 1976. - №5. – с. 909 – 911
78. **Сандалов, А.В.** Комплексная диагностика физико-механических свойств стеклотекстолитовых оболочек / А.В. Сандалов // Дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. – Рига, 1979. – 167 с.
79. **Сборовский, А.К.** О выборе параметров неразрушающего контроля конструкций из композитных материалов / А.К. Сборовский, М.В. Гершберг, В.Н. Ривкинд, В.Ф. Ланчин // Методы и средства диагностики несущей способности изделий из композитов: тр. института механики полимеров. – Рига: Зинатне, 1983. – С. 33 – 46
80. **Свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ №** 2015610761. Composit /А.С. Васильев, Н.А. Тарануха (RU) // Комсомольский – на – Амуре гос. техн. ун–т. Зарегистрировано в Реест-ре программ для ЭВМ 16 января 2015 – М.: 2015.
81. **Свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ №** 2015610762. Strength /А.С. Васильев, Н.А. Тарануха (RU) // Комсомольский – на – Амуре гос. техн. ун–т. Зарегистрировано в Реест-ре программ для ЭВМ 16 января 2015 – М.: 2015.
82. **Свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ №** 2015618399. Ultimate State /А.С. Васильев, Н.А. Тарануха (RU) // Комсомольский – на – Амуре гос. техн. ун–т. Зарегистрировано в Реест-ре программ для ЭВМ 07 августа 2015 – М.: 2015.
83. **Свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ №** 2015618400. Программа для расчета конструкций из композитных материалов /А.С. Васильев, Н.А. Тарануха (RU) // Комсомольский – на – Амуре гос. техн. ун–т. Зарегистрировано в Реест-ре программ для ЭВМ 07 августа 2015 – М.: 2015.
84. **Скудра, А. М.** Структурная теория армированных пластиков / А.М. Скудра, Ф.Я. Булавс. – Рига: Зинатне, 1978. – 192 с.
85. **Скудра, А.М.** Прочность армированных пластиков / А.М. Скудра, Ф.Я. Булавс. – М: Химия, 1982. – 214 с.
86. **СНиП 52-01-2003: СП 63.13330.2012.** Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция. - Введ.

2013-01-01 . – М.: институт ОАО "НИЦ "Строительство", 2013. – 22 с.

87. **Соколкин, Ю.В.** О структурном подходе к оценке работоспособности конструкций из композитных материалов / Ю.В. Соколкин, В.А. Скачков. – Механика композитных материалов. - 1981. - № 4. – С. 608 – 614.
88. **Соколкин, Ю.В.** Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел / Ю.В. Соколкин, А.А, Ташкинов. – М: Наука, 1984. – 220 с.
89. **Соколкин, Ю.В.** Усталость композитов: особенности процесса разрушения и математическое моделирование / Ю.В. Соколкин, Ю.П. Сирин // Деформирование и разрушение композитов. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – С. 97 – 103.
90. **Степин, П.А.** Сопротивление материалов: учеб. для немашиностроит. спец. вузов / П.А. Степин. – Москва: Высшая школа, 1988. – 367 с.
91. **Тамуж, В.П.** Поведение жестких полимерных материалов при циклическом нагружении. Обзор / В.П. Тамуж. – Механика полимеров. - 1969. - №1. – с. 97 – 107
92. **Тамуж, В.П.** Микромеханика разрушения полимерных материалов / В.П. Тамуж, В.А. Куксенко. – Рига: Зинатне, 1978. 284 с.
93. **Тарануха, Н.А.** Теория упругости: учебное пособие / Н.А. Тарануха. – Хабаровск: Хабаровский политехнический институт, 1992. – 87 с.
94. **Тарануха, Н.А.** Математическая модель шарнирной стержневой системы с большими перемещениями узлов. /Н.А.Тарануха, К.В.Жеребко, А.Н.Петрова, М.Р.Петров //Известия вузов. Строительство, 2003, № 3 – С. 12 – 18.
95. **Тарануха, Н.А.** Математическое моделирование колебательных процессов в стержне с большими деформациями /Н.А.Тарануха, А.Н.Петрова, Н.Н.Любушкина; ГОУВПО «КнАГТУ». – Комсомольск – на – Амуре, – 2007. – 19 с. – Деп. в ВИНИТИ 26.09.2007. 903 – В2007.
96. **Тарануха, Н.А.** Программно – аппаратный комплекс по обработке результатов эксперимента колеблющейся системы /Н.А.Тарануха, А.Н.Петрова, Н.Н.Любушкина; ГОУВПО «КнАГТУ». – Комсомольск – на

– Амуре,– 2007. – 12 с. – Деп. в ВИНИТИ 26.09.2007. 902 – В2007.

97. **Тарануха, Н.А.** Математическое колебание сложных оболочек. Гидроупругая постановка с учетом сопротивления / Н.А. Тарануха, О.В. Журбин. – Владивосток: Дальнаука, 2008. – 253 с.
98. **Тарануха, Н.А.** Анализ критериев предельного состояния конструкций из композитных материалов. / Н.А. Тарануха, А.С. Васильев // Ученые записки КнАГТУ: Науки о природе и технике. – 2015. - № III – 1(23). – С. 81-87
99. **Тарануха, Н.А.** Численное исследование предельной несущей способности конструкций из композитных материалов./ Н.А. Тарануха., А.С. Васильев // Морские интеллектуальные технологии: Кораблестроение, информатика, вычислительная техника и управление . – 2015. - № 3 (29) Т. 2.– С. 27-32.

100 **Тарануха, Н.А.** Алгоритмы и модели при численном проектировании композитных сред на заданные характеристики для морских сооружений. / Н.А. Тарануха, А.С. Васильев // Ученые записки КнАГТУ: Науки о природе и технике. – 2015. - № I - 1(21). – С. 81-86

101 **Туркин, В.Т.** Расчет напряженно-деформированного состояния двухслойного цилиндра из полимерного материала с нелинейными вязко-упругими свойствами / В.Т. Туркин, В.П. Голованов // Методы расчета изделий из высокоэластичных материалов: тезисы докладов. Всесоюзн. конф. - Рига: РПИ, 1983. – с. 63 – 64

102 **Тарнопольский, Ю.М.** Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков / Ю.М. Тарнопольский, А.М. Скудра. – Рига: Изд-во «ЗИНАТНЕ», 1966. – 266 с.

103 **Ушаков, А.Е.** Мостовые конструкции из композитов / Е.А. Ушаков, Ю.Г. Кленин, Т.Г. Сорина, А.Х. Хайретдинов, А.А. Сафонов // Композиты и наноструктуры. – 2009. - №3. – С. 25-37.

104 **Фудзии, Т.** Механика разрушения композиционных материалов / Т. Фудзии, М. Дзако. – М: Мир, 1982. – 232 с.

105 **Филоненко-Бородич, М.М.** Об условиях прочности материалов,

обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию / М.М. Филоненко-Бородич // Инж. Сборник. – 1954. – Вып. 19. – С. 36-48.

106 **Хайт, Г.И.** Исследование прочностных свойств композитов с сильно выраженной неоднородностью / Г.И. Хайт // Деформирование и разрушение композитов. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – С. 25 – 28.

107 **Черепанов, Г.П.** Механика разрушения композиционных материалов / Г.П. Черепанов. – М: Наука, 1983. – 296 с.

108 **Чигарев, А.В**. ANSYS для инженеров: Справ. пособие. / А.В. Чигарев, А.С. Кравчук, А.Ф. Смалюк. – М.: Машиностроение – 1, 2004. – 512 с.

109 **Шебанов, С.М.** Деформации нанокомпозита многослойные углеродные нанотрубки-эпоксидная смола в нелинейной области / С.М. Шебанов // Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций: материалы первой международной конференции, Москва, 10-13 нояб., 2014 г. – М: ИМАШ РАН, 2014. – С. 26

110 **Яшин, А.В.** Критерий прочности и деформирования бетона при простом нагружении для различных видов напряженных состояний / А.В. Яшин // Расчет и конструирование железобетонных конструкций. – М: Стройиздат, 1977. – С. 48 – 57.

111 **Яшин, А.В.** Рекомендации по определению прочностных и деформационных характеристик бетона при неодноосных напряженных состояниях / А.В. Яшин. – М: НИИЖБ, 1985. – 72 с.

112 **Argiris, J.H.** Resent development in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels / J.H. Argiris, G. Faust, J. Szimmat, P. Warnke, K. Willam //Nucl. Eng. Dec., 28. – 1974. – P.42 – 75.

113 **Balan, T.A.** 3D hypoplastic model for cyclic analysis of concrete structures / T.A. Balan, E. Spacone, M. Kwon // Engineering Structures. – Elsevier, 2001. – № 23. - P. 333-342.

114 **Bazant, Z.P.** Fracture mechanics of reinforced concrete / Z.P. Bazant, L. Cedolin //Journal of the engineering mechanics, ASCE, 1980. – Vol. 106. – P 1287 – 1306.

115 **Bazant, Z.P.** Crack band theory for fracture of concrete / Z.P. Bazant, B.H. Oh

// Materials and structures. – Pans: RILEM, 1983. – Vol. 16. – P.155 – 176.

116 **Cervenka, V.** Inelastic Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels / V. Cervenka // University of Colorado: Boulder, 1970. – 210 p.

117 **Drucker, D.C.** Soil mechanics and plastic analysis for limit design / D.C. Drucker, W. Prager. – Quart. Appl. Math, 1952. – No2. – P.157 – 165.

118 **Franklin, H.A.** Non-Linear Analysis of Reinforced Concrete Frames and Panels / H.A. Franklin// Division of Structural Engineering and Structural Mechanics: University of California. – Berkley, 1970. – 140 p.

119 **Hartl, H.** 3D finite element modeling of reinforced concrete structures / H. Hartl, C. Handel // Graz Univ. of Technol., Inst. Of Structural Concrete, Austria, 2000. – P. 1-10

120 **Kelly, A.** The strengthening of metals by dispersed particles / A. Kelly. – Proc. Roy. Soc., 1964. - ser. A. - vol. 282. - P. 63.

121 **Lee, H.H.** Finite Element Simulations with ANSYS Workbench 14. Theory, Applications, Case Studies / H. H. Lee. – SDC PUBLICATIONS Schroff Development Corporation. Better Textbooks. Lower Prices/ www.SDCpublications.com – 619 p.

122 **Lin, C.S.** Nonlinear analysis of RC shells of general form / C.S. Lin, A.C. Scordelis // Journal of structural division. – ASCE, 1975. – Vol. 101. - № ST3. – P. 523 – 538.

123 **Nilson, A.** Internal Measurement of Bond Slip / A. Nilson // Journal of ACI, 1972 – vol. 69. - Title № 7. – P. 439-441

124 **Norris, C.B.** Strength of orthotropic materials subjected to combined stresses. / C. B. Norris. – Forest Products Laboratory Report, 1950

125 **Ottozen, N.S.** A Failure Criterion for Concrete / N.S. Ottozen // J. Eng. Mech. Div. ASCE, 1977. – v. 103. – NEM4. – P. 527 – 535.

126 **Prandt, L.** Spannungsverteilung in Plastichen Korpern / L. Prandt **//** Proc. of 1 st Int. Congr. Of Appl. Mech. ,1924. – P.43-54.

127 **Suidan, M.T.** Finite element analysis of reinforced concrete / M.T. Suidan, W.C. Schnobrich// Journal of the structural division. – ASCE., 1973. – vol 99. – P. 2109 – 2122

128 **Werren, F.** Mechanical properties of glass – cloth plastic laminates as related to direction of stress and construction of laminate / F. Werren. – Trans. Asme,1959.

129 **Willam, K.J.** Constitutive model for the triaxial behavior of concrete /K.J. Warnke, E.P. Warnke // Seminar of concrete structures subjected to triaxial stresses: Dergamo: Italy. – 1974. – v. 19. – May.17 – 19. – P. 3-11

130 **Vasilyev, A.S.** Algorithms and numerical model for the research of limit state of structures of composite materials / A.S. Vasilyev, N.A. Taranukha // the 29th Asia-Pacific Technikal Exchange and Advisory Meeting on Marine Structures (TEAM-2015). – Vladivostok, Russua – 2015. – P. 29-34.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по науке и инновационной работе
ФГБОУ ВПО «КнАГТУ»,
к.т.н., доцент

С.В. Белых

«27» января 2016 г.

АКТ
о внедрении (использовании) результатов
кандидатской диссертации «Математическое моделирование и численное исследование композитных материалов в области предельной прочности»
Васильева Алексея Сергеевича
в научно-исследовательской работе ФГБОУ ВПО «КнАГТУ»

Настоящим актом подтверждается, что результаты диссертационной работы «Математическое моделирование и численное исследование композитных материалов в области предельной прочности», выполненной на кафедре «Кораблестроения» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета под руководством д.т.н., проф. Н.А. Таранухи использованы при выполнении научно-исследовательской работы:

Задание № 9.356.2014/К на выполнение научных проектов Минобрнауки России в рамках выполнения проектной части государственного задания в сфере научной деятельности образовательными организациями ВПО Минобрнауки России на 2014-2016 годы. Тема НИР «Проведение теоретических и экспериментальных исследований эксплуатационных качеств судов на базе Дальневосточного опытового бассейна для регионов Арктики и Дальнего Востока РФ». 2014-2016 гг.

Вид внедренных результатов: математическая модель, программный комплекс, методика определения несущей способности конструкций из композитных материалов и выполнение практических расчетов.

Декан факультета энергетики,
транспорта и морских технологий,
д.т.н., проф. А.В. Космынин

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор
ФГБОУ ВПО «КнАГТУ»,
к.э.н., доцент

~~И.В. Макурин~~

«27» января 2016 г.

АКТ
о внедрении (использовании) результатов
кандидатской диссертации «Математическое моделирование и численное исследование композитных материалов в области предельной прочности»
Васильева Алексея Сергеевича
в учебном процессе ФГБОУ ВПО «КнАГТУ»

Настоящим актом подтверждается, что результаты диссертационной работы «Математическое моделирование и численное исследование композитных материалов в области предельной прочности», достигнутые в период с 2012 по 2015 г. на кафедре «Кораблестроения» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета под руководством д.т.н., проф. Н.А. Таранухи, используются в учебном процессе при чтении лекций по следующим дисциплинам:

– «Механика твердого деформируемого тела» и «Строительная механика и прочность корабля» основной образовательной программы подготовки бакалавров по направлению 180100 – Кораблестроение, океанотехника и системотехника объектов морской инфраструктуры по профилю «Кораблестроение»;

– «Численные методы оценки прочности судовых конструкций» основной образовательной программы подготовки магистров по направлению 180100 – Кораблестроение

Декан факультета энергетики,
транспорта и морских технологий,
д.т.н., проф. А.В. Космынин

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015610761

Composit

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «КнАГТУ») (RU)***

Авторы: ***Васильев Алексей Сергеевич (RU), Тарануха Николай Алексеевич (RU)***

Заявка № **2014661694**

Дата поступления **19 ноября 2014 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***16 января 2015 г.***

Врио руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015610762

Strength

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «КнАГТУ») (RU)***

Авторы: ***Васильев Алексей Сергеевич (RU), Тарануха Николай Алексеевич (RU)***

Заявка № **2014661692**

Дата поступления **19 ноября 2014 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***16 января 2015 г.***

Врио руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015618399

Ultimate State

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «КнАГТУ») (RU)***

Авторы: ***Васильев Алексей Сергеевич (RU), Тарануха Николай Алексеевич (RU)***

Заявка № **2015615160**

Дата поступления **16 июня 2015 г.**

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***07 августа 2015 г.***

Врио руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015618400

Программа для расчета конструкций из композитных материалов

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «КнАГТУ») (RU)***

Авторы: ***Васильев Алексей Сергеевич (RU), Тарануха Николай Алексеевич (RU)***

Заявка № **2015615161**

Дата поступления **16 июня 2015 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***07 августа 2015 г.***

Врио руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Команды, используемые для расчета в ANSYSDesignModeler 14.

```
ET,matid,BEAM188

! Основные свойства
DENS_=7850.0 ! плотность, кг*(м^-3)
EX_=2.1E5  ! модуль Юнга, МПа
NUXY_=0.3    ! коэффициент Пуассона

MP,DENS,matid,DENS_,
MP,EX,matid,EX_,
MP,NUXY,matid,NUXY_,

! Добавочные свойства

Yield_strength=3.5E2           ! предел текучести, МПа
Tangent_modulus=1.4E3 ! тангенциальный модуль, МПа

TB,BKIN,matid,1,,0 ! модель пластичности с билинейным кинематическим упрочнением

TBDATA,1,Yield_strength
TBDATA,2,Tangent_modulus

R,matid,200, ,0

KEYOPT,matid,1,0
KEYOPT,matid,2,0
KEYOPT,matid,3,0
KEYOPT,matid,4,0
KEYOPT,matid,6,0
KEYOPT,matid,7,0
KEYOPT,matid,9,0
KEYOPT,matid,11,0
KEYOPT,matid,12,0
KEYOPT,matid,13,0
KEYOPT,matid,15,0

ET,matid,SOLID65  ! объявление модели КЭ Solid 65

Основные свойства

DENS_=2400.0          ! плотность, кг*(м^-3)
EX_=3. E4      ! модуль Юнга, МПа
NUXY_=0.20 ! коэффициент Пуассона

MP,DENS,matid,DENS_,
MP,EX,matid,EX_,
MP,NUXY,matid,NUXY_,

! Добавочные свойства
```

Rb_c=22 ! предел прочности на сжатие, МПа
Rb_t=1.95 ! предел прочности на растяжение, МПа

! Параметры математической модели Вилама-Варнке

C1=0.4 ! коэффициент передачи сдвиговых усилий при открытой трещине
C2=0.8 ! коэффициент передачи сдвиговых усилий при закрытой трещине
C3=Rb_t ! Предел прочности при одноосном растяжении (cracking, трещинообразование)
C4=-1 ! Предел прочности при одноосном сжатии (crushing, дробление) задается -1 для автоматического расчета
!C5=0.0 ! Предел прочности при двуосном напряженном состоянии (crushing, знак +)
!C6=0.0 ! Гидростатическое напряжение (используется с константами 7 и 8
!C7=0.0 ! Предел прочности при двуосном напряженном состоянии (crushing, знак +) с учетом гидростатических напряжений
!C8=0.0 ! Предел прочности при одноосном напряженном состоянии (crushing, знак +) с учетом гидростатических напряжений
C9=0.7 ! Коэффициент понижения жесткости при образовании трещины в результате растяжения; используется, если KEYOPT(7) = 1

TB,concr,matid,1,,1

TBTEMP,22.0

tbdata,1,C1
tbdata,2,C2
tbdata,3,C3
tbdata,4,C4
!tbdata,5,C5
!tbdata,6,C6
!tbdata,7,C7
!tbdata,8,C8
tbdata,9,C9

KEYOPT,matid,1,0

KEYOPT,matid,3,2

KEYOPT(8))

KEYOPT,matid,5,0

KEYOPT,matid,6,0

KEYOPT,matid,7,1

/PREP7

CMSEL,S,NM_RAMA,ELEM
CMSEL,A,NM_BARS,ELEM
CMSEL,A,NM_BARS1,ELEM

```
CMSEL,A,NM_BARS2,ELEM

NSLE,S,ALL
!NSLE,S,LOC,Z,10,1990

CPINTF,ALL,0.00001,
ALLSEL,ALL
/SOLU
```