

На правах рукописи

Панченко

Панченко Галина Леонидовна

**ПРОЦЕССЫ ИНТЕНСИВНОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ
СО СЛОЖНЫМИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**

1.1.8 – Механика деформируемого твёрдого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Комсомольск-на-Амуре – 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук

Научный консультант: доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН, главный научный сотрудник, заведующая лабораторией механики деформируемого твердого тела ФГБУН Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН
Ковтаниук Лариса Валентиновна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и вычислительной математики факультета прикладной математики и кибернетики ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», г. Тверь
Зингерман Константин Моисеевич

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, главный научный сотрудник ФГБУН Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск
Коробейников Сергей Николаевич

доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической механики института математики и механики им. Н.И. Лобачевского отделения механики ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», г. Казань
Султанов Ленар Усманович

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», г. Москва

Защита диссертации состоится «4» июня 2026 г. в 14 - 30 на заседании диссертационного со-вета 24.2.316.03 при ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет» по адресу 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет», https://sovet.knastu.ru/diss_defense

Автореферат разослан « » апреля 2026 г.

Учёный секретарь диссертационного совета 24.2.316.03 при КНАГУ
кандидат физико-математических наук



Григорьева А.Л.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В технологической практике в процессах обработки давлением материалы подвергаются значительным нагрузкам и под их действием приобретают большие обратимые и необратимые деформации. При прогнозировании таких процессов обычно обратимыми деформациями пренебрегают, так как они значительно меньше необратимых. Однако такой подход не устраивает технологическую практику, так как не учитываются важные эффекты пружинения и формирования остаточных напряжений, существенно снижающие эксплуатационные характеристики металлоконструкций и влияющие на геометрические характеристики готовых изделий. В технологическом процессе обрабатываемый материал заметно разогревается как за счет необратимого деформирования, так и вследствие трения об ограничивающие его поверхности. Также тепловые деформации, которые могут существенно изменять свойства материала и, как следствие, характер деформирования, возникают во многих элементах конструкций, работающих под действием циклически изменяющихся нагрузок. Учет связанности полей деформаций и температуры позволяет качественно и количественно точнее описать поведение таких элементов конструкций и выявить при этом новые эффекты. Поэтому разработка методов решения связанных задач термопластичности является актуальной задачей механики деформируемого твердого тела. При этом в процессе термомеханической обработки материалов значительное влияние может оказывать ползучесть. Хотя время деформирования является небольшим, из-за больших напряжений деформации ползучести могут достичь значительных размеров и превзойти не только упругие, но и пластические деформации. Поэтому учет ползучести при расчете подобных процессов также является важным. Таким образом, создание средств математического моделирования необходимо как для расчетов оптимальных параметров процессов интенсивного деформирования материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами, включая неизотермическое деформирование, так и для понимания их качественных особенностей.

Степень разработанности темы исследования. Исследование поведения конструкционных материалов со сложными реологическими и теплофизическими свойствами в условиях термомеханической нагрузки было и остается актуальной научной задачей, интерес к которой в наши дни только возрастает. Развитие теории, учитывающей большие деформации материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами, продиктовано как внутренней логикой развития фундаментальной теории, так и актуальными задачами технологий обработки материалов и изготовления изделий. Технологии холодной формовки и обтяжки, которые по ряду параметров являются наиболее перспективными технологиями изготовления крупногабаритных элементов конструкций, используют свойство ползучести материалов (Н.Х. Арутюнян, В.И. Горелов, Ю.Н. Работнов, А.П. Самарин, О.В. Соснин, С.А. Шестериков, J.N. Distefano, H Kraus, F.K.G. Odqvist, L.C.E. Struik, В.И. Астафьев, А.М. Локощенко, Ю.Н. Радаев, В.П. Радченко и др.), а точность в геометрии и в уровне остаточных напряжений определяющим образом зависит от упругого отклика материала изделия в процессе снятия оснастки (в процессах разгрузки).

Математических моделей больших деформаций, основанных на их непротиворечивой

кинематике, геометрически и термодинамически корректных предложено немало (Е.Н. Lee, P.M. Naghdi, S. Nemat-Nasser, O.T. Bruhns, В.И. Левитас, А.А. Роговой, А.Д. Чернышов, С.Н. Коробейников, Г.И. Быковцев, А.В. Шитиков, В.П. Мясников, А.А. Буренин, Л.В. Ковтанюк, В.А. Левин, К.М. Зингерман, А.И. Голованов, Л.У. Султанов, А.В. Шутов и др.). Отметим, что большинство созданных моделей больших упругопластических деформаций исключают возможность получения численно-аналитических решений, допуская только приближенные численные. В настоящей работе используется математическая модель (Г.И. Быковцев, А.В. Шитиков, А.А. Буренин, Л.В. Ковтанюк) в рамках которой такие решения были получены для материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами, включая случай, когда необратимые деформации в материале могут накапливаться и за счет ползучести, и при пластическом течении (Л.В. Ковтанюк, А.С. Бегун, Е.В. Мурашкин, К.Н. Галимзянова, А.О. Лемза, Е.О. Попова). Новые решения задач развиваемой теории больших деформаций с учетом сложных реологических и теплофизических свойств материалов получены в диссертации.

Цель работы: разработка модели неизотермического деформирования материалов в условиях накопления ими больших деформаций ползучести и пластичности с учетом зависимости параметров ползучести, предела текучести и коэффициента вязкости от изменяющейся температуры, постановка и решение в ее рамках краевых задач упругопластического деформирования с учетом сложных реологических и теплофизических свойств материалов, моделирующих технологические процессы, связанные с интенсивным формоизменением в условиях переменных термомеханических воздействий.

Задачи исследования:

1. Построение модели больших неизотермических деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами.
2. Постановка и решение краевых изотермических задач теории больших деформаций о прямолинейных течениях упруговязкопластических материалов в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями с возможностью проскальзывания в их окрестностях.
3. Постановка и решение связанных задач теории больших деформаций упруговязкопластических материалов с учетом зависимости предела текучести и вязкости от температуры.
4. Постановка и решение краевых задач теории больших деформаций материалов при последовательном накоплении ими необратимых деформаций ползучести и вязкопластического течения в изотермическом и неизотермическом случаях.
5. Разработка алгоритмов численного решения систем дифференциальных уравнений в частных производных в изменяющихся со временем областях обратимого и необратимого деформирования.
6. Исследование деформирования материалов в рамках модели малых деформаций с учетом их пластической сжимаемости и реологических свойств.

Научная новизна результатов, полученных в диссертации, заключается в следующем:

1. Построена замкнутая система дифференциальных уравнений, составляющих неизотермическую математическую модель больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами.

2. С использованием теории больших упругопластических деформаций поставлены и решены новые краевые задачи о прямолинейных вязкопластических течениях материалов в случаях возможного проскальзывания в окрестностях ограничивающих их контактных поверхностей.
3. В рамках развиваемой теории больших упругопластических деформаций впервые получены решения связанных задач о неизотермическом вязкопластическом течении материалов в плоских слоях, в круглой трубе (также при наличии слоя смазки) и в цилиндрическом слое, заключенном между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями.
4. Указано согласование в законах ползучести и пластичности на продвигающихся по деформируемому материалу упругопластических границах в случаях, когда накапливаемые материалом необратимые деформации могут быть и деформациями ползучести, и пластического течения.
5. Впервые получено решение связанной краевой задачи о деформировании в условиях ползучести и пластического течения тяжелого слоя, расположенного на наклонной плоскости, при нагреве, а затем охлаждении его свободной поверхности.
6. Получено новое решение связанной краевой задачи о ползучести и вязкопластическом течении в плоском тяжелом слое на наклонной плоскости под действием термомеханических нагрузок.
7. Получено новое решение неизотермической краевой задачи о деформировании в условиях ползучести и вязкопластического течения материала пробки конечной длины в круглой трубе в случае жесткого сцепления со стенкой трубы и в случае проскальзывания в окрестности стенки трубы.
8. Получено решение краевой задачи о деформировании в условиях ползучести и пластического течения полого шара, подверженного всестороннему гидростатическому сжатию.
9. Впервые изучено деформирование плоского горизонтального слоя упругопластической и упруговязкопластической среды с учетом необратимой сжимаемости материала.
10. Впервые исследовано формирование полей остаточных напряжений и их релаксация после полной разгрузки в задачах с цилиндрической и сферической симметрией в условиях, когда накапливаемые материалом необратимые деформации могут быть и деформациями ползучести и пластического течения.
11. Исследовано повторное нагружение внутренним равномерным давлением толстостенной трубы из упруговязкопластического материала.
12. Разработаны численные алгоритмы, позволяющие получать непрерывные на упругопластических границах распределения параметров деформирования и температуры в меняющихся со временем областях деформирования, а также дают возможность отслеживать положение самих упругопластических границ, разделяющих области деформирования.

Теоретическая значимость результатов заключается в получении фундаментальных результатов механики деформирования, связанных с исследованием процессов неизотермического деформирования конструкционных материалов от их нагружения и разогрева до полной разгрузки и остывания с предложенными методами решения таких новых задач теории боль-

ших деформаций.

Практическая значимость результатов работы связана с тем, что развиваемая теория больших упругопластических деформаций предоставляет возможность прогнозирования результатов технологических операций обработки материалов давлением (прокатка, волочение, высокоскоростная штамповка, высокотемпературное прессование в порошковой металлургии, прессование моделей в высокоточном литье) с помощью предварительных расчетов. Полученные численно-аналитические решения краевых задач теории могут использоваться в качестве необходимых критериев верификации программ численных расчетов упруговязкопластического деформирования.

Методология и методы исследования. При построении модели больших упругопластических деформаций использовался формализм неравновесной термодинамики. Решения краевых задач получены в рамках теории вязкопластического течения с использованием нового подхода о последовательном накоплении необратимых деформаций ползучести и пластического течения. Численные расчеты проводились в системе для технических вычислений Wolfram Mathematica с помощью специально разработанных на основе конечно-разностного метода алгоритмов на встроенном языке программирования Wolfram.

Положения, выносимые на защиту:

1. Формулирование уравнений изменения (переноса) для обратимой и необратимой составляющих полных деформаций, являющихся их определениями в неизотермическом случае;
2. Получение на такой основе замкнутой системы дифференциальных уравнений, составляющих неизотермическую математическую модель больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами;
3. Численно-аналитические решения краевых задач развиваемой теории больших деформаций об упруговязкопластическом деформировании материалов в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями при движении одной из них с возможным проскальзыванием материалов в их окрестностях;
4. Численно-аналитические решения краевых задач развиваемой теории больших деформаций о продавливании упруговязкопластического слоя материала, заключенного между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, с возможным проскальзыванием материала в их окрестностях под действием изменяющегося со временем перепада давления;
5. Ряд решений связанных краевых задач теории больших упруговязкопластических деформаций, когда деформирование, тепловыделение и теплопередача не разделяются, и обрабатываемый материал разогревается как за счет деформирования, так и вследствие трения о жесткие стенки;
6. Исследование деформирования материалов в случаях, когда накапливаемые ими необратимые деформации могут быть и деформациями ползучести, и пластического течения;
7. Согласование в рассмотренных случаях законов ползучести и пластичности на продвигающихся по деформируемому материалу упругопластических границах с указанием их положения в любой момент времени; закономерности формирования полей остаточных напряжений и их релаксации после полной разгрузки;

8. Исследование закономерностей формирования полей остаточных напряжений в горизонтальном плоском слое упругопластического или упруговязкопластического сжимаемого материала под действием сдвиговых и сжимающих нагрузок;
9. Исследование закономерностей формирования полей остаточных напряжений и их релаксации после полной разгрузки в толстостенной цилиндрической трубе под действием внутреннего давления; согласование законов ползучести и пластичности на продвигающихся по деформируемому материалу упругопластических границ в случае использования кусочно-линейного потенциала ползучести;
10. Полное замкнутое исследование особенностей формирования полей остаточных напряжений у одиночных сферических дефектов сплошности упругопластических и упруговязкопластических материалов в условиях ползучести и пластического течения;
11. Разработанные численные алгоритмы и программы расчетов напряженно-деформированного состояния материалов и неизвестных движущихся упругопластических границ.

Достоверность результатов выполненной работы обеспечивается использованием классических подходов неравновесной термодинамики и механики сплошных сред. Развиваемая математическая модель больших упругопластических деформаций, в рамках которой получены результаты, может считаться достаточно апробированной, так как в случае малых деформаций из нее вытекают соотношения классической модели типа Прандтля – Рейса. При получении решений краевых задач не вводилось никаких гипотез. Большое количество полученных зависимостей являются точными в рамках применяемой теории, а используемые численно-аналитические методы являются общепризнанными.

Апробация результатов работы. Основные положения и результаты диссертации докладывались на следующих научных мероприятиях:

- XVI Зимняя школа по механике сплошных сред «Механика сплошных сред как основа современных технологий» (2009 г., Пермь);
- XXXV Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова (2010 г., Владивосток);
- Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (2010, 2017, 2019, 2023, 2024, 2025 гг. Воронеж);
- Конференция-семинар «Актуальные направления в механике сплошных сред» (2012 г., Санкт-Петербург);
- XI Международной Форум студентов, аспирантов и молодых ученых стран Азиатско-Тихоокеанского региона (2012 г., Владивосток);
- XVIII-XXI Международная конференция по вычислительной механике и современным программным прикладным системам (2013, 2015, 2017, 2019, 2023, 2025 гг., Алушта);
- XI, XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (2015 г., Казань, 2019 г., Уфа);
- IX Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (2016 г., Воронеж);
- X Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (2016 г., Екатеринбург);

- XI Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях (2016 г., Алушта);
- II, III Дальневосточная школа-семинар «Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций» (2017, 2018 гг., Комсомольск-на-Амуре);
- XII, XIII Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (2018, 2020 гг., Алушта);
- Конференция «Актуальные проблемы механики» (2019 г., Санкт-Петербург);
- IV Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (2019 г., Москва);
- XX, XXI Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (2020 г. (пленарный доклад), 2023 г., Ростов-на-Дону);
- Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2020» (2020 г., Казань);
- VI Дальневосточная конференция с международным участием «Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении» (2022 г., Комсомольск-на-Амуре);
- XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (2023 г., Санкт-Петербург);
- Конференция «Механика деформируемого твердого тела в проектировании материалов и конструкций» (2024 г., Пермь);
- III Научная конференция с международным участием «Вычислительные технологии и прикладная математика» (2024 г., Комсомольск-на-Амуре).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 75 печатных работ, 29 из которых изданы в ведущих рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК, базы данных WEB of Science и Scopus.

Личный вклад автора. Все результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. Соискатель является одним из соавторов развиваемой математической модели, ей поставлены новые краевые связанные задачи, разработаны алгоритмы решения и выполнены все необходимые вычисления. В работах [11, 13, 17, 26-29] Е.О. Попова и К.Н. Галимзянова принимали участие в постановке задач и выполнении необходимых вычислений под руководством автора.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы (282 наименования). Общий объем работы – 338 страниц, в том числе 142 рисунка, включенных в текст.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы, приводится степень ее разработанности, формулируется цель и задачи работы, описывается научная новизна результатов и их теоретическая и практическая значимость, определяются положения, выносимые на защиту.

В *первой главе* приводятся соотношения модели больших неизотермических деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами. В § 1.1 приводится краткий обзор литературы, посвященной моделированию термоупругопластических процессов.

В § 1.2 выводятся кинематические зависимости для больших обратимых и необратимых деформаций. В пространственных координатах Эйлера обратимая \mathbf{m} и необратимая \mathbf{p} составляющие тензора полных деформаций определяются дифференциальными уравнениями изменения (переноса)

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{m}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{z})), \\ \frac{D\mathbf{p}}{Dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}, \\ \mathbf{m} &= \mathbf{e} + \beta \theta \mathbf{I}, \quad \beta = \alpha T_0, \quad \theta = (T - T_0)T_0^{-1}, \\ \mathbf{r} &= \boldsymbol{\omega} + A_1^{-1} \left[A_2^2 (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + A_2 (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m} \right], \\ A_1 &= 8 - 8L_1 + 3L_1^2 - L_2 - \frac{1}{3}L_1^3 + \frac{1}{3}L_3, \quad A_2 = 2 - L_1, \\ L_1 &= \text{tr } \mathbf{m}, \quad L_2 = \text{tr } \mathbf{m}^2, \quad L_3 = \text{tr } \mathbf{m}^3. \end{aligned} \quad (1)$$

В соотношениях (1) \mathbf{u} и \mathbf{v} – векторы перемещений и скоростей точек среды; \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга; T, T_0 – текущая температура и температура недеформированного состояния; $\boldsymbol{\gamma}$ – тензор скоростей необратимых деформаций; \mathbf{r} – кососимметричный тензор вращений. Согласно (1) тепловое расширение считается обратимым, \mathbf{e} – линейная часть тензора упругих деформаций; α – коэффициент линейного расширения. Вторым уравнением (1) вводится объективная производная по времени t , с помощью которой задается взаимодействие между обратимыми и необратимыми деформациями в процессе деформирования, обеспечивающее геометрическую корректность в построениях кинематики среды. Когда источник необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ тензор \mathbf{p} неизменен и, согласно второму уравнению (1), изменяются только компоненты этого тензора, что характерно для процесса разгрузки.

Для тензора полных деформаций Альманси \mathbf{d} из (1) следует

$$\mathbf{d} = \mathbf{m} + \mathbf{p} - \mathbf{m}^2/2 - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что тензор \mathbf{m} является только главной линейной частью тензора обратимых деформаций $\mathbf{c} = \mathbf{m} - \mathbf{m}^2/2$. Его использование в качестве меры обратимых деформаций оправдано удобствами в записи уравнения его изменения (1) и не только.

В § 1.3 в соответствии с законами термодинамики и построенной кинематики выводятся основные законы модели. Из закона сохранения энергии следуют формула Мурнагана и уравнение баланса энтропии

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}), \quad \frac{\partial \rho s}{\partial t} = -\text{div}(T^{-1} \mathbf{q} + \rho s \mathbf{v}) - T^{-2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + T^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \quad (3)$$

В (3) $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений; ρ – плотность среды; ψ – плотность распределения свободной энергии; s – массовая плотность распределения энтропии; \mathbf{q} – вектор теплового потока. Для упрощения модели принимается гипотеза о независимости термодинамического потенциала

ψ от необратимых деформаций \mathbf{p} , что позволяет разделить процесс деформирования на его консервативную и диссипативную составляющие.

Считается, что необратимые деформации могут накапливаться в материале с начального момента деформирования и за счет вязких свойств материала (ползучесть), и за счет его пластических свойств (течение). Для конкретизации диссипативного механизма, связанного с накоплением необратимых деформаций, необходимо задать скорость роста необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma}$ в зависимости от напряжений. В случае, пока напряженное состояние не достигло поверхности нагружения, считаем $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^v$, т.е. что на данной стадии процесса деформирования необратимые деформации производятся в форме деформаций ползучести. В области пластического течения $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^p$, то есть источник совпадает с тензором скоростей пластических деформаций. Следовательно, в уравнениях изменения необратимые деформации не разделяются на свои составляющие. Их различие состоит в разных механизмах накопления. В условиях накопления деформаций ползучести выбирается классический степенной закон Нортона

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{\partial V(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad V(\boldsymbol{\Sigma}) = B \boldsymbol{\Sigma}^n, \quad (4)$$

в котором V – потенциал ползучести, B, n – параметры ползучести материала, $\boldsymbol{\Sigma}$ – инвариант тензора напряжений, который можно принять, например, в виде

$$\boldsymbol{\Sigma} = \max|\sigma_i - \sigma_j|, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr} \boldsymbol{\tau}^2}. \quad (5)$$

В (5) σ_i – главные значения тензора напряжений, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}$, $\sigma = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} / 3$.

Выход напряженного состояния на поверхность нагружения приводит к появлению области пластического течения, на границе которой определяющий закон ползучести должен быть заменен на определяющий закон, основанный на законе пластического течения. На такой граничной поверхности напряжения и деформации непрерывны, при таком подходе непрерывны и скорости необратимых деформаций. Тогда скорости пластических деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{pp} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^{v_0} = \zeta \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad F(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0, \quad \zeta > 0. \quad (6)$$

В (6) $\boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}$ – тензор скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения, k – предел текучести материала. Накопленные к началу пластического течения деформации ползучести и их скорости $\boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}$ являются начальными значениями для накапливающихся далее пластических деформаций.

В качестве поверхности нагружения можно использовать следующие обобщенные на случай учета вязких свойств условия пластичности Треска и Мизеса

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\varepsilon_k^{pp}|, \quad \text{tr}(\boldsymbol{\tau} - \eta \boldsymbol{\varepsilon}'^{pp})^2 = 8k^2/3. \quad (7)$$

В условиях (7) η – коэффициент вязкости пластического течения, ε_k^{pp} – главные значения тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^{pp}$, $\boldsymbol{\varepsilon}'^{pp} = \boldsymbol{\varepsilon}^{pp} - \varepsilon^{pp} \mathbf{I}$, $\varepsilon^{pp} = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^{pp} / 3$.

В § 1.4 проводится конкретизация основных законов модели. Для механически несжи-

маемого материала выполняется условие, допускающее изменение объема за счет линейного расширения,

$$1 - 2J_1 + 2J_1^2 - 2J_2 - \frac{4}{3}J_1^3 + 4J_1J_2 - \frac{8}{3}J_3 = (1 + 3\beta\theta)^{-2}, \quad (8)$$

$$J_1 = \text{tr } \mathbf{d}, \quad J_2 = \text{tr } \mathbf{d}^2, \quad J_3 = \text{tr } \mathbf{d}^3.$$

В этом случае из первой зависимости (3) с учетом условия несжимаемости (8) следуют соотношения

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} -P\mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0\theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{d}), & \mathbf{p} \equiv \mathbf{0}, \\ -P_1\mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0\theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}), & \mathbf{p} \neq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (9)$$

В (9) P и P_1 – неизвестные функции добавочного давления; $W = \rho_0\psi$ – упругий потенциал; ρ_0 – плотность материала в свободном состоянии. Упругий потенциал W для изотропной среды принимается в форме разложения в ряд Тейлора относительно свободного состояния

$$W = -2\mu F_1 - \mu F_2 + a_2 F_1^2 + (a_2 - \mu) F_1 F_2 - \zeta_1 F_1^3 + \nu \theta F_1 + \nu_1 \theta^2 - \kappa_1 F_1 \theta^2 - \kappa_2 F_1^2 \theta - \kappa_3 F_2 \theta - \nu_2 \theta^3, \quad (10)$$

$$F_k = \begin{cases} J_k, & \mathbf{p} = \mathbf{0}, \\ I_k, & \mathbf{p} \neq \mathbf{0}, \end{cases} \quad I_1 = \text{tr } \mathbf{c}, \quad I_2 = \text{tr } \mathbf{c}^2.$$

В (10) μ – модуль сдвига, a_2 , ζ_1 – упругие модули более высокого порядка, ν , ν_1 , κ_1 , κ_2 , κ_3 , ν_2 – термомеханические постоянные.

Если принять закон теплопроводности Фурье для вектора теплового потока

$$\mathbf{q} = -\delta \nabla T,$$

где δ – коэффициент теплопроводности, то из второго уравнения (3) следуют уравнения теплопроводности:

в областях обратимого деформирования

$$(1 + \beta_1\theta + \beta_2 J_1) \frac{d\theta}{dt} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d} = a\Delta\theta, \quad (11)$$

$$\beta_1 = \frac{\nu_1(1 - 3\beta) - 3\nu_2}{\nu_1}, \quad \beta_2 = -\frac{\kappa_1}{\nu_1}, \quad \beta_3 = -\frac{\nu + \kappa_3}{\nu_1},$$

разгрузки

$$(1 + \beta_1\theta + \beta_2 I_1) \frac{d\theta}{dt} + \beta_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{c} = a\Delta\theta, \quad (12)$$

необратимого деформирования

$$(1 + \beta_1\theta + \beta_2 I_1) \frac{d\theta}{dt} + \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{c} = a\Delta\theta - \frac{1}{2\nu_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \quad (13)$$

В уравнениях (11)-(13) a – коэффициент температуропроводности.

В случае неизотермического деформирования параметры материала зависят от температуры. Зависимость предела текучести k от температуры можно принять, например, в виде

$$k = k_0(1 - \theta^2\theta_{pl}^{-2}) \quad \text{или} \quad k = k_0(1 - \theta\theta_{pl}^{-1})^2. \quad (14)$$

В (14) k_0 – предел текучести при комнатной температуре, θ_{pl} – температура плавления мате-

риала. Для коэффициента вязкости пластического течения η выбирается следующая зависимость от температуры

$$\eta = \eta_0 \text{Exp}(-\nu T_0 \theta), \quad (15)$$

в которой η_0 – вязкость при температуре T_0 , ν – экспоненциальная скорость. Для параметров ползучести материала B и n используются соотношения

$$B = \frac{c_1}{s_0^{n-1}} \exp\left(-\frac{Q}{R_u T_0 (1 + \theta)}\right), \quad n = b_1 + \frac{b_2}{T_0 (1 + \theta)}, \quad (16)$$

в которых c_1 , s_0 , b_1 и b_2 – параметры материала, Q – энергия активации, R_u – универсальная газовая постоянная.

Если добавить к выписанным соотношениям уравнения равновесия

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = 0, \quad (17)$$

где \mathbf{F} – объемные силы, то получается замкнутая система уравнений квазистационарного неизотермического деформирования.

Во *второй главе* диссертации получены решения изотермических краевых задач о прямолинейных течениях упруговязкопластических материалов в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями с учетом проскальзывания у контактных поверхностей (рис. 1). Постановка и решение задач осуществляются в цилиндрической системе координат r , φ , z .

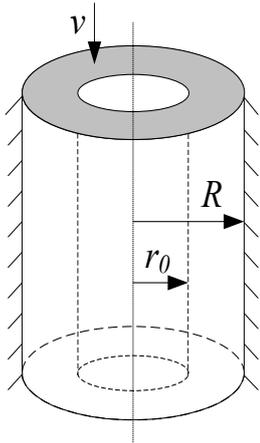


Рис. 1

В § 2.1 – 2.2 рассматривается деформирование материала в случаях, когда один из цилиндров жестко закреплен, а другой движется, и на одном из цилиндров выполнено условие прилипания, на другом – проскальзывания. В § 2.1 рассматривается упругопластическое деформирование цилиндрического слоя, когда проскальзывание материала возможно у внутренней контактной поверхности. Рассмотрены случаи равноускоренного движения сначала внутреннего цилиндра радиуса $r = r_0$, затем внешнего радиуса $r = R$. Считается, что пока на границе $r = r_0$ верно неравенство

$$|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}| < 0 \quad (18)$$

материал удерживается на ней в состоянии прилипания за счет сухого трения с коэффициентом трения покоя f . После обращения неравенства (18) в равенство при $r = r_0$ выполняются условия вязкого трения

$$|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}| - \xi[v] = 0, \quad |\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}| - \xi v = 0. \quad (19)$$

В (19) ξ – коэффициент вязкого трения, $v = v_z(r, t)$ – единственная отличная от нуля компонента вектора скорости, $[v]$ – разность скоростей граничного цилиндра и материала. Первое условие (19) здесь и далее выполняется, когда проскальзывание происходит в окрестности движущегося цилиндра, второе – у неподвижного. Следует отметить, что от выбранного значения радиального напряжения σ_{rr} , задающего начальное поджатие, зависит, что начнется раньше на границе $r = r_0$ – проскальзывание материала или вязкопластическое течение. Здесь значение σ_{rr} выбрано так, чтобы проскальзывание материала начиналось раньше.

Получены аналитические решения задач об упругом деформировании материала сначала при его прилипании, затем проскальзывании. Вязкопластическое течение начинается у внутренней поверхности, и при равноускоренном движении ($v = b_1 t$) пластическая область $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ развивается и от упругой области $r_1(t) \leq r \leq R$ отделяется движущейся границей $r = r_1(t)$, которая определяется из обыкновенного дифференциального уравнения, следующего из непрерывности напряжений, деформаций и скоростей. При движении граничного цилиндра с постоянной скоростью ($v = b_1 t_1$) уравнение движения упругопластической границы (теперь $r = r_2(t)$) изменяется: граница $r = r_2(t)$ асимптотически приближается к своему предельному значению и далее область течения не увеличивается.

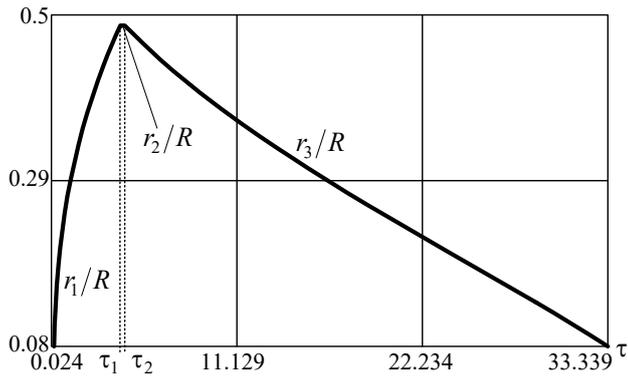


Рис. 2. Графики упругопластических границ

При равнозамедленном движении граничной поверхности ($v = b_1 t_1 - b_2(t - t_2)$) с момента времени $t_2 > t_1$ уменьшающаяся область течения $r_0 \leq r \leq r_3(t)$ от области $r_3(t) \leq r \leq r_2(t_2)$, в которой пластические деформации присутствуют, но не накапливаются (p_{rz} не изменяется, p_{rr} , p_{zz} изменяются в соответствии с уравнением переноса (1)), отделяется границей $r = r_3(t)$, которая движется к внутренней поверхности и с момента совпадения с ней $t_3 > t_2$ в материале происходит разгрузка с уменьшением по модулю напряжения σ_{rz} , пока скорость движущегося цилиндра отлична от нуля. Затем последовательно жесткий цилиндр останавливается, на внутренней границе выполняется равенство $(|\sigma_{rz}| - f|\sigma_{rr}|)_{r=r_0} = 0$ и с этого момента напряжения, деформации и перемещения перестают изменяться. На рис. 2 показаны графики изменения границ r_1/R , r_2/R и r_3/R от безразмерного времени $\tau = b_1 t^2 / r_0$. Рис. 3 а и б иллюстрируют распределения компоненты тензора пластических деформаций p_{rz} в моменты времени $\tau = \tau'_3$ ($\tau_2 < \tau'_3 < \tau_3$), $\tau = \tau''_3$ ($\tau'_3 < \tau''_3 < \tau_3$) и $\tau = \tau_3$ для случаев движения внутреннего и внешнего цилиндров соответственно.

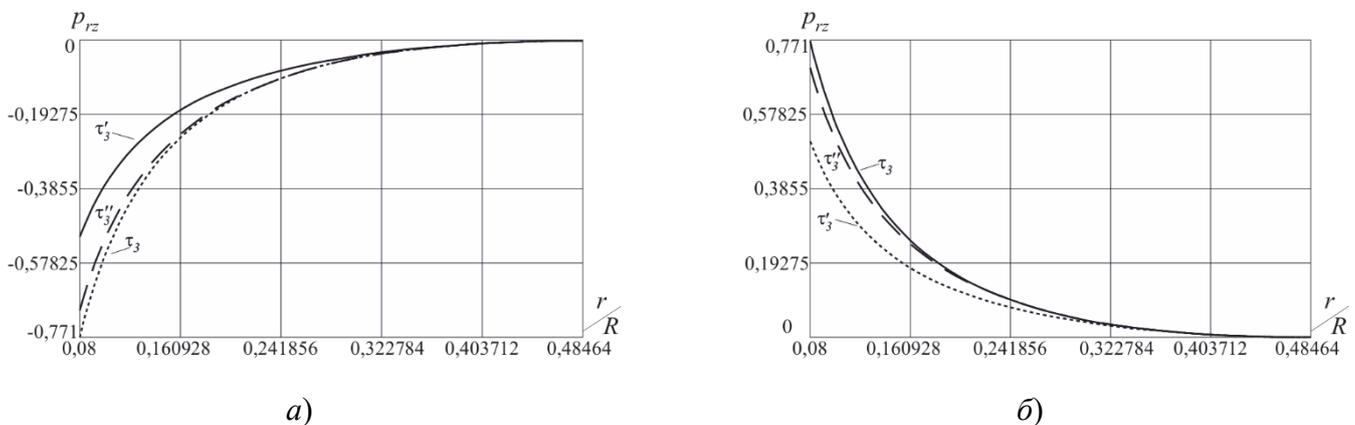


Рис. 3. Распределение пластической деформации p_{rz} в разные моменты времени

В § 2.2 рассматриваются две подобные задачи с проскальзыванием материала в окрестности внешней граничной поверхности $r = R$. Здесь полагаем, что проскальзывание при $r = R$ начинается одновременно с пластическим течением при $r = r_0$. В § 2.3 получены решения задач, когда проскальзывание материала происходит на обеих граничных поверхностях.

Во всех случаях получены аналитические зависимости для скоростей, перемещений, недиагональных компонент напряжений и деформаций в каждой из областей. Несмотря на различия в перемещениях и скоростях, области вязкопластического течения развиваются одинаково как при движении внутреннего цилиндра, так и при движении внешнего. Рассчитаны все параметры напряженно-деформированного состояния.

В § 2.4 получено решение краевой задачи о конечном перемещении упруговязкопластического материала в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами радиусов $r = r_0$ и $r = R$ ($R > r_0$) под действием изменяющегося градиента давления:

$$\partial p / \partial z = -G(t), \quad G(0) = 0, \quad (20)$$

где функция $G = G(t)$ – монотонно возрастающая (в расчетах полагалась квадратичной). Также предполагается, что на границах $r = r_0$ и $r = R$ первоначально материал удерживается в состоянии прилипания за счет сухого трения с постоянной трения покоя σ_0 ($\sigma_0 < k$)

$$|\sigma_{rz}| - \sigma_0 < 0. \quad (21)$$

После обращения неравенства (21) в равенство сначала при $r = r_0$, затем через некоторое время при $r = R$ материал начинает проскальзывать сначала в окрестности внутренней стенки, затем внешней, граничное условие на них принимает форму

$$|\sigma_{rz}| - \sigma_0 - \xi v = 0. \quad (22)$$

Области вязкопластического течения у жестких стенок появляются не одновременно. Впервые условие пластичности выполнится в окрестности внутренней поверхности $r = r_0$ и только после некоторого развития данной области течение начинается в окрестности внешней поверхности. Уравнение равновесия интегрируется в трех областях: в областях течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ и $r_2(t) \leq r \leq R$ и в области упругого ядра $r_1(t) \leq r \leq r_2(t)$. На упругопластических границах выполняются условия равенства напряжений, перемещений и скоростей. Ограничивающие области течения упругопластические границы $r = r_1(t)$ и $r = r_2(t)$ движутся навстречу друг другу (рис. 4).

Также не одновременно появляются области разгрузки, когда градиент давления сначала становится постоянным, а затем уменьшается. При постоянном давлении такая область развивается внутрь от границы $r = r_1(t)$, при этом внешняя вязкопластическая область продолжает увеличиваться, т.е. направление движения границы $r = r_2(t)$ сохраняется, но скорость ее движения изменяется. Решение в этом случае строится в четырех областях.

Вторая область разгрузки появляется с момента уменьшения давления и развивается от границы $r = r_2(t)$ в сторону внешней поверхности, приводя к необходимости решения задачи в шести областях (поскольку параметры напряженно-деформированного состояния в двух внутренних областях разгрузки считаются по-разному) пока внутренняя граница пластической

области не достигнет жесткой поверхности $r = r_0$, а затем внешняя – поверхности $r = R$, и вязкопластическое течение в материале прекратится. При дальнейшем уменьшении давления сначала на внутренней жесткой поверхности, затем на внешней выполнится условие (21) и материал перестанет проскальзывать сначала при $r = r_0$, затем при $r = R$. В конечный момент разгрузки функция $G = G(t)$ и скорость во всем слое равны нулю. На рис. 4 показаны графики упругопластических границ $\tilde{r}_1 = r_1/R$ и $\tilde{r}_2 = r_2/R$ от безразмерного времени \tilde{t} . Распределения компоненты пластических деформаций p_{rz} в зависимости от безразмерного радиуса $\tilde{r} = r/R$ в моменты времени \tilde{t}_5 , когда давление становится постоянным (сплошной линией), \tilde{t}_6 , когда давление начинает уменьшаться (пунктирной линией) и в момент прекращения течения \tilde{t}_8 (штриховой линией) представлены на рис. 5.

Решение упругой задачи получено аналитическое, на остальных этапах деформирования требуется решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

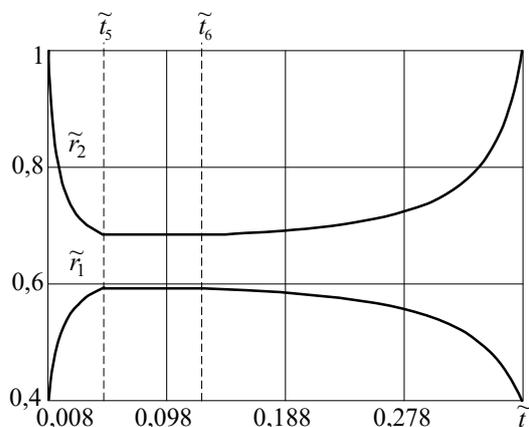


Рис. 4. Изменение упругопластических границ с течением времени

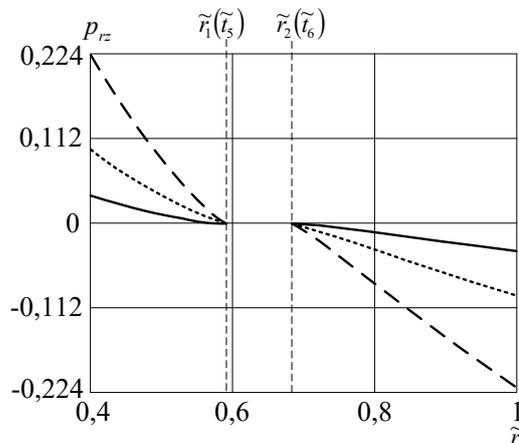


Рис. 5. Распределения компоненты p_{rz} в разные моменты времени

В главе 3 получен ряд решений неизоотермических краевых задач об упруговязкопластическом деформировании материалов в условиях связанности процессов деформирования, тепловыделения и теплопередачи.

В § 3.1 решается краевая задача о сползании тяжелого слоя высоты h с наклонной плоскости при его нагреве (рис. 6). Эффект сползания обусловлен развитием вязкопластического течения за счет зависимости предела текучести материала от температуры (14).

В промежуток времени $0 < t < t_1$, пока пластическое течение отсутствует, краевые условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned}
 u|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = 0, \quad \sigma_{12}|_{x_2=h} = 0, \\
 \theta|_{x_2=h} = G(t), \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

В условиях (23) $u = u_1(x_2)$ – единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений, $G(t)$ – задаваемая функция (в расчетах полагалась линейной). Для решения задачи необходимо проинтегрировать уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho g_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho g_2 = 0, \quad g_1 = g \sin \varphi, \quad g_2 = -g \cos \varphi, \quad (24)$$

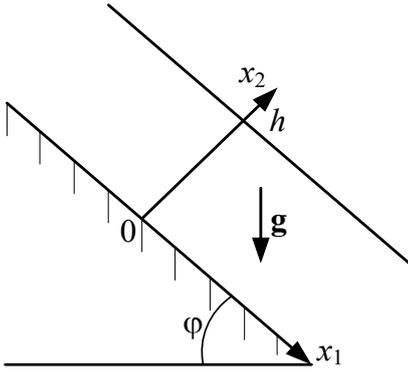


Рис. 6

где g – ускорение свободного падения, φ – угол наклона плоскости и решить уравнение теплопроводности (11) в форме

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 \rho^2 g_1^2 b (h - x_2)^2}{2 (\mu - b\theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2}, \quad (25)$$

используя условия (23) и начальное условие $\theta|_{t=0} = 0$.

Область вязкопластического течения развивается от нижней границы слоя $x_2 = 0$ с момента времени t_1 , когда выполнится условие пластичности в форме $\sigma_{12}|_{x_2=0} = k(\theta(0, t_1))$.

С течением времени пластическая область занимает слой $0 \leq x_2 \leq r(t)$, в области $r(t) \leq x_2 \leq h$ материал деформируется обратимо. Уравнение теплопроводности (13) в области течения принимает вид

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 \rho^2 g_1^2 b (h - x_2)^2}{2 (\mu - b\theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} - \frac{\rho g_1 (h - x_2)}{\nu_1 \eta} (\rho g_1 (h - x_2) - k(\theta)). \quad (26)$$

Полагается непрерывность температуры θ и ее производной $\partial \theta / \partial x_2$ на упругопластической границе $x_2 = r(t)$, положение которой заранее неизвестно. Из условия непрерывности напряжений следует уравнение для определения этой границы, в которое входит неизвестная функция θ . Для решения системы уравнений, состоящей из уравнений теплопроводности (25), (26) и уравнения для границы $x_2 = r(t)$ разработана неявная конечно-разностная схема с неравномерным шагом по пространству, реализованная в пакете Mathematica. По найденным полям температуры рассчитаны все параметры напряженно-деформированного состояния. Решение найдено в интервале $t_1 \leq t \leq t_{pl}$, где t_{pl} – момент времени, в который температура на верхней границе слоя достигает температуры плавления. Расчеты проводились с использованием обеих формул (14) для предела текучести. Распределения температуры θ по слою в моменты времени $\tau_1, \tau_2 > \tau_1$ и $\tau = \tau_{pl}$ представлены на рис. 7. Изменение границы области вязкопластического течения $r(t)/h$ со временем τ показано на рис. 8.

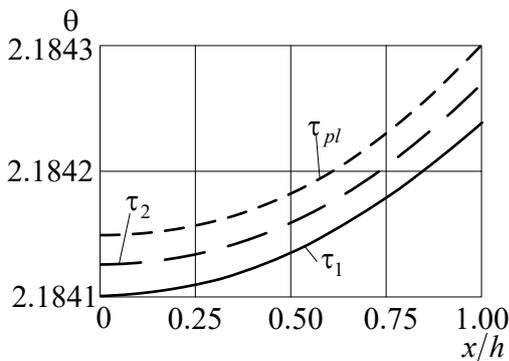


Рис. 7. Распределение температуры в разные моменты времени

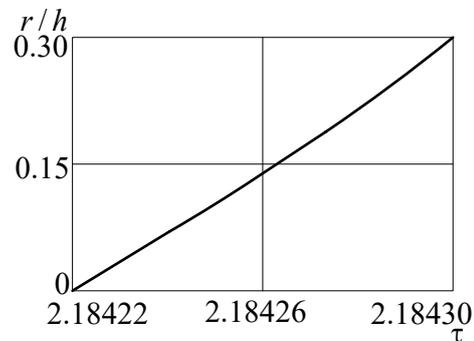


Рис. 8. Изменение границы области течения $r(t)/h$ со временем τ

В § 3.2 рассматривается связанная задача о развитии течения в плоском слое несжимаемого материала высоты h , расположенного на горизонтальной шероховатой поверхности и находящегося в условиях нарастающего чистого сдвига:

$$\sigma_{12}|_{x_2=h} = \gamma t, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = a_0, \quad (27)$$

где γ и a_0 – задаваемые постоянные. При обратимом деформировании пока выполняется неравенство $\sigma_{12} < f\sigma_{22}$, на нижней границе слоя выполняется условие отсутствия перемещений. При увеличении со временем напряжения σ_{12} согласно первому соотношению (27) в момент времени t^* при принятых значениях параметров $a_0 < k/f$ на жесткой границе $x_2 = 0$ начинается проскальзывание материала и выполняется условие вязкого трения

$$(\sigma_{12} - f\sigma_{22} - \xi v)|_{x_2=0} = 0. \quad (28)$$

С момента времени t^* в материале слоя начинается разогрев за счет трения о шероховатую поверхность. Принимаются условия для температуры

$$\theta = \gamma_1 u, \quad \partial\theta/\partial x_2|_{x_2=h} = 0, \quad \theta|_{t=t^*} = 0. \quad (29)$$

где γ_1 – постоянная теплопроизводства за счет трения. Первое условие выполнено на границе $x_2 = 0$. Упругие задачи в изотермическом и неизотермическом случаях решаются до момента t_1 начала вязкопластического течения. С момента времени t_1 движущаяся граница $x_2 = r(t)$ отделяет область вязкопластического течения $0 \leq x_2 \leq r(t)$ от области $r(t) < x_2 \leq h$, в которой материал деформируется обратимо. Первое краевое условие (29) справедливо до момента времени t_{pl} , в который температура на границе слоя $x_2 = 0$ станет равной температуре плавления. Начиная с момента времени t_{pl} , первое условие (29) при $x_2 = 0$ заменяется условием

$$\theta = \theta_{pl}. \quad (30)$$

При постоянном напряжении ($\sigma_{12}|_{x_2=h} = \gamma t_2$) с момента времени t_2 появляется новая упругопластическая граница $x_2 = r_1(t)$, которая с момента времени t_2 и до некоторого момента t_3 движется вниз от стационарной поверхности $x_2 = r(t_2)$, т.е. происходит разгрузка среды, а с момента времени t_3 меняет направление и движется вверх. В момент времени t' граница $x_2 = r_1(t)$ выходит на стационарную границу $x_2 = r(t_2)$ и продолжает двигаться дальше.

С уменьшением напряжения $\sigma_{12}|_{x_2=h} = \gamma t_2 - \gamma_2(t - t_4)$ возникает новая граница $x_2 = r_2(t)$, которая сначала движется вниз от стационарной границы $x_2 = r_1(t_4)$ к нижней границе слоя $x_2 = 0$, а затем в момент времени t_5 меняет направление и движется вверх. В момент времени t'' граница $x_2 = r_2(t)$ достигает стационарную границу $x_2 = r_1(t_4)$, и область течения $0 \leq x_2 \leq r_2(t)$ продолжает расширяться. Затем в момент времени t_6 рост области течения прекращается и появляется новая граница $x_2 = r_3(t)$, движущаяся вниз от стационарной границы $x_2 = r_2(t_6)$. В момент времени t_{pr} напряжение σ_{12} становится равным $f\sigma_{22}$ и на нижней границе слоя вновь выполняется условие прилипания. При дальнейшем уменьшении напряжения

материал начинает остывать. Краевое условие (30) изменяется на следующее

$$\theta = \theta_{pl} (1 - \gamma_3 (t - t_{pr})) \quad (31)$$

где γ_3 – задаваемая постоянная. В момент времени t_7 граница $x_2 = r_3(t)$ достигает нижней границы слоя, а в момент времени t_k компонента тензора напряжений σ_{12} становится равной

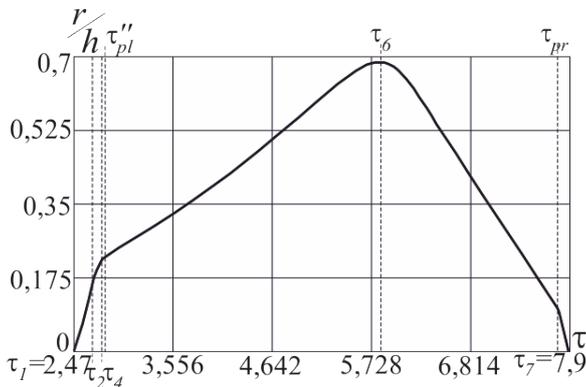


Рис. 9. Изменение упругопластической границы в промежутке от $\tau = \tau_1$ до $\tau = \tau_7$

нулю. На рис. 9 представлено изменение упругопластической границы от времени от τ_1 до τ_7 . В момент времени t_{ohl} на нижней границе слоя температура становится равной нулю, но в материале остается еще некоторое ее распределение. Дальнейшее понижение температуры связано с заданием потока тепла

$$\partial\theta/\partial x_2|_{x_2=h} = \gamma_4 t,$$

где γ_4 – известная постоянная величина. В конечный момент времени t_8 , который определяется

из численных расчетов, слой полностью остынет. Изменение температуры и перемещений точек слоя в процессе деформирования показано на рис. 10 и 11.

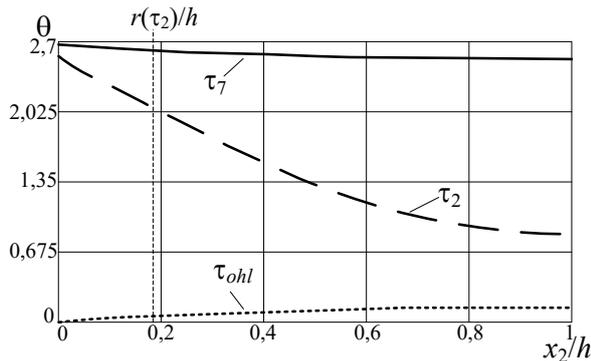


Рис. 10. Распределение температуры по слою

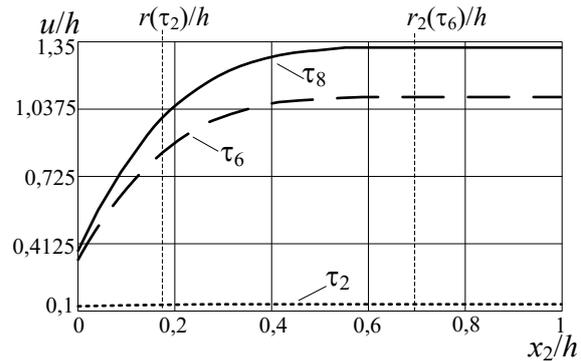


Рис. 11. Распределение перемещений по слою

На всех этапах деформирования для нахождения распределения температуры, а также положения неизвестных упругопластических границ использовались конечно-разностные схемы. По найденным полям температуры рассчитаны все параметры напряженно-деформированного состояния.

В § 3.3 исследуется движение упруговязкопластической среды в круглой жесткой трубе радиуса R под действием изменяющегося со временем градиента давления. Неоднородность в распределении температуры связывается с теплотворной способностью деформирования и тепловыделения за счет трения о стенку трубы. Деформирование и продвижение материала по трубе связывается с воздействием градиента давления (20). Считается, что материал обратимо деформируется в условиях отсутствия перемещений на границе с трубой $r = R$ до тех пор, пока на этой границе выполняется неравенство (21), в котором принимается $\sigma_0 < k_0$. Дальнейшее увеличение функции $G(t)$ приводит к тому, что в момент времени $t = t^*$ неравенство (21) при $r = R$ обращается в равенство и начинается проскальзывание материала в окрестности

стенки трубы $r = R$. Тогда неравенство (21) изменяется на условие (22) при $r = R$. При выполнении данного условия инициируется процесс нагревания среды за счет трения материала о жесткую стенку трубы. Для формирующегося поля температур принимаются первое при $r = R$ и третье условия (29).

При возрастающем давлении получены решения изотермической и неизотермической задач об упругом деформировании материала до момента времени $t = t_0$, в который у стенки трубы $r = R$ начинается вязкопластическое течение. С момента времени t_0 движущаяся по среде упругопластическая граница $r = r_1(t)$ отделяет область вязкопластического течения $r_1(t) \leq r \leq R$ от упругого ядра $0 \leq r < r_1(t)$, в котором материал продолжает деформироваться обратимо. С момента времени t_1 функция $G(t)$ перестает изменяться, что не вносит существенных изменений в процесс деформирования.

При уменьшении давления с момента времени t_2 область течения продолжает развиваться. В момент времени t_{pl}'' температура на границе $r = R$ достигает температуры плавления. С этого момента времени граничное условие (29) при $r = R$ меняется на условие (30).

Согласно расчетам область вязкопластического течения $r_1(t) \leq r \leq R$ увеличивается до момента времени t_3 , затем от стационарной границы $r = r_1(t_3)$ к границе $r = R$ движется новая упругопластическая граница $r = r_2(t)$, отделяющая область течения $r_2(t) \leq r \leq R$ от области $r_1(t_3) \leq r \leq r_2(t)$, где необратимые деформации присутствуют, но не накапливаются. При дальнейшем убывании функции $G(t)$ в момент времени t_{pr} напряжение σ_{rz} становится равным σ_0 и на границе $r = R$ вновь выполняется условие прилипания. При дальнейшем уменьшении градиента давления материал начинает остывать и граничное условие для температуры заменяется условием (31) при $r = R$.

В момент времени t_4 упругопластическая граница $r = r_2(t)$ достигает стенки трубы $r = R$ и вязкопластическое течение в материале прекращается. В момент времени t_5 функция $G(t)$ и компонента тензора напряжений σ_{rz} становятся равными нулю. В момент времени t_6 температура материала на границе с трубой $r = R$ становится равной нулю, но в материале еще остается ее некоторое распределение. С течением времени материал во всем слое полностью остывает. В расчетах использовалась квадратичная функция $G(t)$.

На рис. 12 представлено изменение упругопластической границы $r_* = r_1/R$ в зависимости от безразмерного времени. Распределения температуры θ в зависимости от безразмерного радиуса $r' = r/R$ по слою в моменты времени τ_{pl}'' , τ_{pr} и τ_4 показаны на рис. 13. Рис. 14 иллюстрирует распределения безразмерной скорости ω от радиуса r' в разные моменты времени τ . График перемещений u/R в зависимости от радиуса в момент τ_6 показан на рисунке 15.

В § 3.4 приводится обобщение краевой задачи § 2.4 на неизотермический случай. Этапы решения задачи те же (обратимое деформирование, вязкопластическое течение материала в условиях возрастающего и постоянного градиента давления, течение при убывающем давлении, а также разгрузка среды). Дополнительно учитывается разогрев материала за счет его

проскальзывания сначала у внутренней жесткой поверхности $r = r_0$ согласно первому условию (29), условию равенства нулю температуры в момент начала течения и при $r = R$. После начала проскальзывания у внешней поверхности $r = R$ на ней также выполняется первое условие (29).

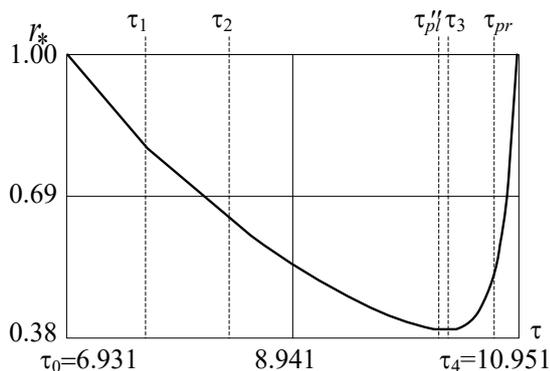


Рис. 12. Изменение границы области пластического течения со временем

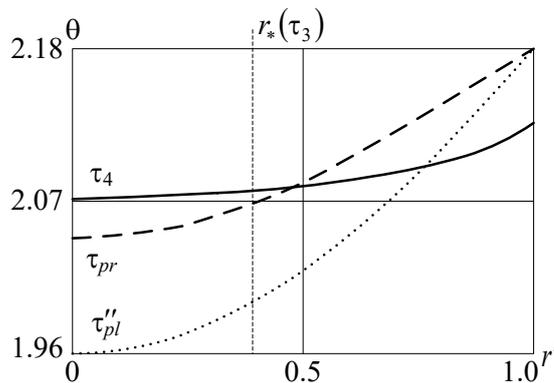


Рис. 13. Распределения температуры в материале в разные моменты времени

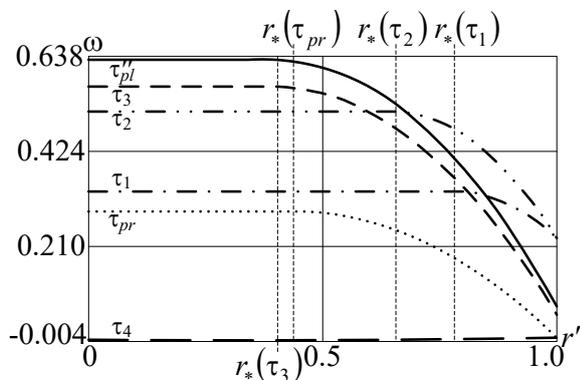


Рис. 14. Распределения безразмерной скорости в разные моменты времени

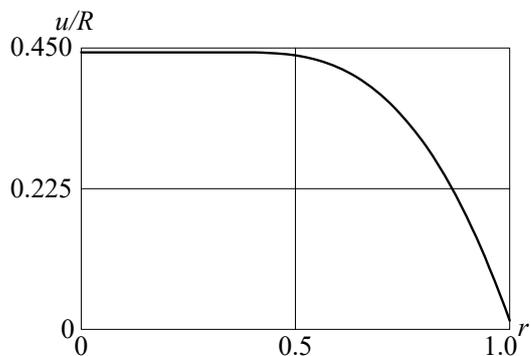


Рис. 15. Распределение перемещений в момент времени τ_6

Учет разогрева материала требует на каждом этапе включения в систему уравнений уравнения теплопроводности во всех рассматриваемых областях и приводит к качественным отличиям в развитии пластических областей. Так, при увеличивающемся давлении, как и ранее, области течения развиваются сначала от внутренней (с момента t_3), затем от внешней жесткой поверхности ($t \geq t_4$). Как только давление становится постоянным ($t \geq t_5$), появляется область разгрузки, которая развивается внутрь от границы $r = r_1(t)$, при этом внешняя вязкопластическая область также продолжает развиваться, т.е. направление движения границы $r = r_2(t)$ сохраняется, но скорость ее движения при этом значительно меньше. Однако в некоторый последующий момент времени внутренняя граница области разгрузки останавливается и начинает двигаться в обратную сторону, тем самым приводя к увеличению области течения сначала до ее первоначальных размеров, достигнутых при увеличивающемся давлении, а затем и до большего значения. Развитие пластических областей продолжается еще и после того, как давление начинает уменьшаться ($t \geq t_8$). И только спустя некоторое время область разгрузки снова начинает развиваться от внутренней границы области течения, затем еще через какое-то время – от внешней ($t \geq t_{10}$). При этом внешняя граница области разгрузки быстрее достигает

поверхности $r = R$, чем внутренняя поверхности $r = r_0$ ($t \geq t_{12}$). При дальнейшем уменьшении давления, после того, как напряжение σ_{rz} на границе $r = r_0$ становится равным σ_0 (в момент времени t_{13}) и на ней выполняется условие прилипания, материал начинает остывать в окрестности внутренней стенки (условие (31)).

В следующий момент времени t_{14} напряжение σ_{rz} на внешней границе $r = R$ становится равным $-\sigma_0$, что приводит к прилипанию материала к внешней стенке и его остыванию также согласно закону (31).

При дальнейшем уменьшении градиента давления материал остывает во всем слое. После того, как функция $G(t)$ становится равной нулю, постепенно становится равной нулю сначала температура материала на границе $r = r_0$, затем – на границе $r = R$, но в слое еще остается ее некоторое распределение. С течением времени материал полностью остывает. При проведении вычислений функция $G(t)$ полагалась квадратичной. На рис. 16 показаны графики изменения границ $\tilde{r}_1 = r_1/R$ и $\tilde{r}_2 = r_2/R$. На рис. 17 представлены распределения температуры θ по слою в разные моменты времени. Рис. 18 иллюстрирует распределение перемещений $\tilde{u} = uR^{-1}$ в конечный момент времени.

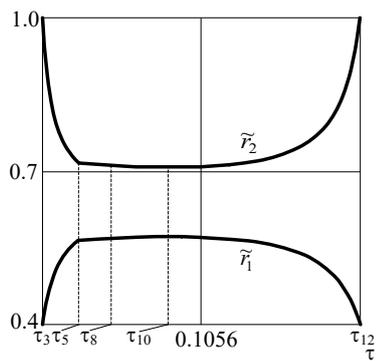


Рис. 16. Графики упругопластических границ

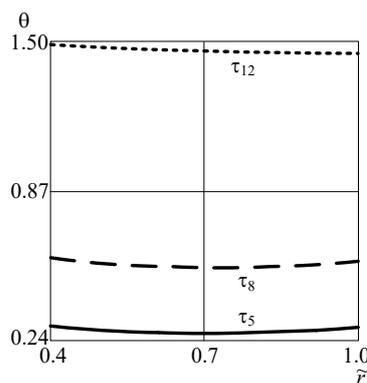


Рис. 17. Распределения температуры по слою

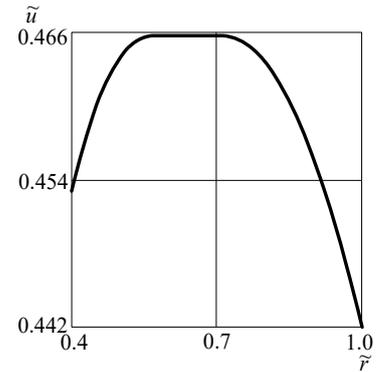


Рис. 18. График перемещений

В § 3.5 на неизотермический случай обобщается решение, полученное в § 2.3, когда материал в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями с радиусами r_0 и R ($r_0 < R$) деформируется за счет движения внешней поверхности, а внутренний цилиндр жестко закреплен. При этом за счет проскальзывания материала в окрестности сначала внутренней, затем внешней поверхности происходит его разогрев. Первоначально внешний цилиндр движется равноускоренно. С момента проскальзывания на границе $r = r_0$ температура изменяется в соответствии с первым условием (29) и не достигает температуры плавления в процессе деформирования. При выполнении условия проскальзывания при $r = R$ разогрев происходит согласно условию

$$\theta(R, t) = \gamma_1 [u]_{r=R}, \quad [u] = u^+ - u. \quad (32)$$

Упругая неизотермическая задача решается до выполнения условия пластичности на поверхности $r = r_0$.

При возрастающей и постоянной скорости внешнего цилиндра рассмотрено неизотермическое вязкопластическое течение материала, когда от внутренней поверхности развивается область течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$, в области $r_1(t) \leq r \leq R$ материал деформируется обратимо. Это справедливо и при возрастающей, и при постоянной скорости.

Уменьшение скорости цилиндра сначала не приводит к прекращению развития пластической области. Только спустя некоторое время граница $r = r_1(t)$ начинает двигаться в обратную сторону к внутреннему цилиндру $r = r_0$ и появляется область разгрузки. Через некоторое время на внешней граничной поверхности $r = R$ напряжение уменьшается до значения, с которого происходило проскальзывание и далее материал снова движется вместе с внешней граничной поверхностью и, следовательно, не нагревается без трения. Поэтому первое граничное условие для температуры (29) меняется на следующее:

$$(\delta \partial \theta / \partial r + h \theta) \Big|_{r=R} = 0, \tag{33}$$

в котором h – коэффициент теплоотдачи материала. При дальнейшем равнозамедленном движении внешнего цилиндра упругопластическая граница $r = r_1(t)$ доходит до внутренней поверхности $r = r_0$. Затем внешний цилиндр останавливается. Далее проскальзывание материала прекращается и на внутренней границе $r = r_0$. Скорость во всем деформируемом слое становится равной нулю. Первое условие для температуры (29) меняется на условие $\partial \theta / \partial r \Big|_{r=r_0} = 0$. А на границе $r = R$ по-прежнему выполняется граничное условие (33). С течением времени материал полностью остывает.

На рис. 19 представлено изменение упругопластической границы $x_1 = r_1/R$ в зависимости от безразмерного времени τ . Распределения температуры θ в момент начала пластического течения τ_3 , в момент времени τ_4 , когда скорость внешнего цилиндра становится постоянной, и в момент времени $\tau_{10} = 0.8$, когда на внутренней границе снова выполняется условие прилипания, показаны на рис. 20. Компоненты остаточных напряжений σ_{rz}/μ , σ_{rr}/μ , $\sigma_{\phi\phi}/\mu$ и σ_{zz}/μ представлены на рис. 21 и 22.

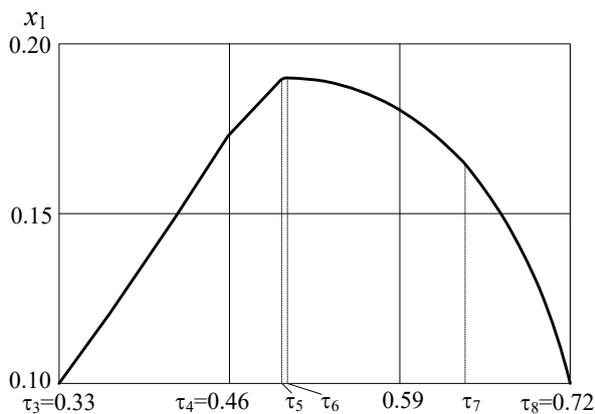


Рис. 19. График упругопластической границы

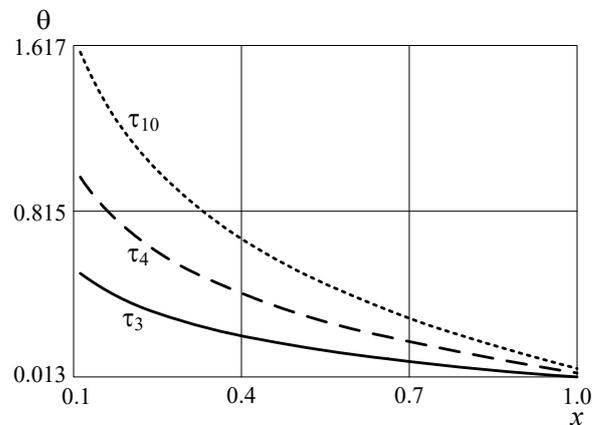


Рис. 20. Распределение температуры по слою в разные моменты времени

В § 3.6 изучается неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе

при наличии слоя смазки в условиях переменного градиента давления (20). Материал и смазка расположены в круглой жесткой трубе радиуса $r = R$ и имеют разные значения термомеханических параметров. Основной материал занимает область $0 \leq r \leq r_1$, а смазка – область $r_1 \leq r \leq R$. Предполагается непрерывность перемещений на границе соприкосновения основного материала и смазки $r = r_1$. Первоначально материал и смазка деформируются обратимо. Затем напряжение σ_{rz} достигает значения, достаточного для срыва смазки и начала продвижения вдоль стенки трубы. При продвижении смазка трется о шероховатую поверхность трубы, что вызывает ее разогрев, а затем разогрев и основного материала. Для температуры принимаются следующие условия:

$$\theta(r, t_1) = 0, \quad \theta(r, t)|_{r=R} = \gamma_1 u(r, t)|_{r=R}, \quad \partial\theta/\partial r|_{r=0} = 0 \quad [\theta]_{r=r_1} = 0, \quad [q]_{r=r_1} = 0. \quad (34)$$

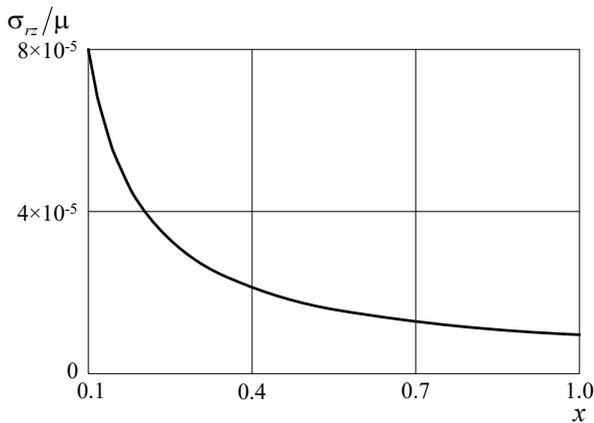


Рис. 21. Распределение по слою остаточных напряжений σ_{rz}/μ

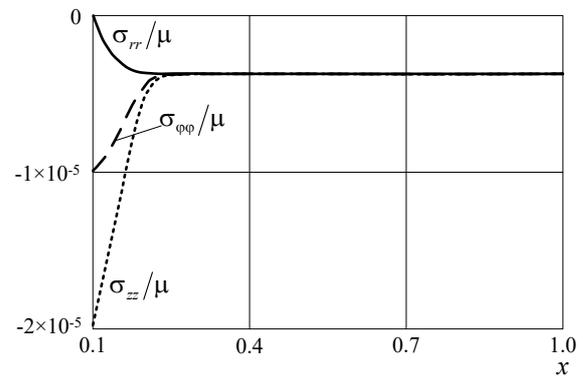


Рис. 22. Распределение по слою остаточных напряжений σ_{rr}/μ , $\sigma_{\phi\phi}/\mu$ и σ_{zz}/μ

В (34) $q = q_z(r, t) = -\delta_i T_0 \partial\theta/\partial r$ – отличная от нуля компонента вектора теплового потока. Квадратными скобками обозначен скачок функции. Последними двумя условиями (34) принимается непрерывность температуры и теплового потока между основным материалом и смазкой. После выполнения условия пластичности на границе $r = R$ рассматривается течение сначала в смазке, затем в основном материале при возрастающем и постоянном градиенте давления. Область течения развивается сначала в смазке от границы $r = R$ и с течением времени охватывает всю область смазки $r_1 \leq r \leq R$. При последующем увеличении давления напряженное состояние в основном материале на границе $r = r_1$ в момент времени t_4 также выходит на поверхность нагружения и область течения далее развивается и в основном материале, ограниченная поверхностью $r = m_1(t)$. Изменение механической нагрузки с возрастающей на постоянную в момент времени t_5 приводит лишь к снижению скорости движения границы $r = m_1(t)$ по основному материалу.

Уменьшение давления с момента времени t_6 вызывает изменение направления движения упругопластической границы $r = m_1(t)$, что приводит к появлению области разгрузки в основном материале, граница которой с течением времени доходит до границы раздела основного материала и смазки $r = r_1$ (в момент t_7). С этого момента времени течение продолжается только в смазке. С течением времени область разгрузки появляется в слое смазки, и ее граница

$r = m(t)$ движется от границы $r = r_1$ к внешней границе $r = R$. В момент совпадения поверхности $r = m(t)$ с границей трубы $r = R$ пластическое течение прекращается и в смазке.

При последующем снижении нагрузки на границе смазки с трубой $r = R$ выполняется равенство $|\sigma_{rz}|_{r=R} = \sigma_0$, которое означает, что материал смазки вновь удерживается в состоянии прилипания к жесткой стенке трубы $r = R$ за счет сухого трения. С этого момента времени разогрев смазки за счет трения на границе $r = R$ прекращается, и для температуры далее выполняется условие (33). С течением времени сначала давление становится равным нулю, затем материал полностью остывает. На рис. 23 изображен график упругопластической границы $m_1(t)/R$. Распределение остаточных необратимых деформаций p_{rz} в материале и смазке изображено на рис. 24. При расчетах функция $G(t)$ полагалась линейной.

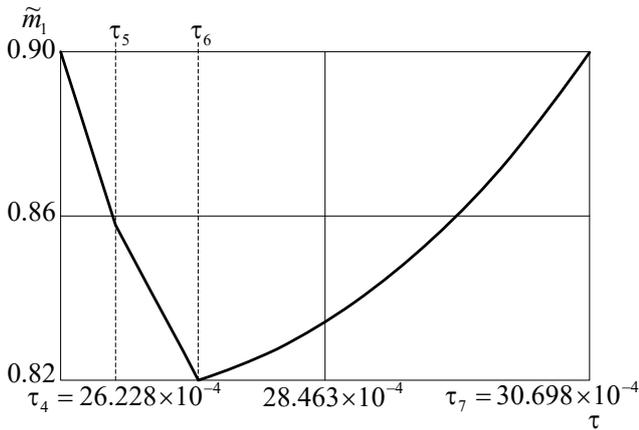


Рис. 23. График упругопластической границы $r = m_1(t)$ в зависимости от времени

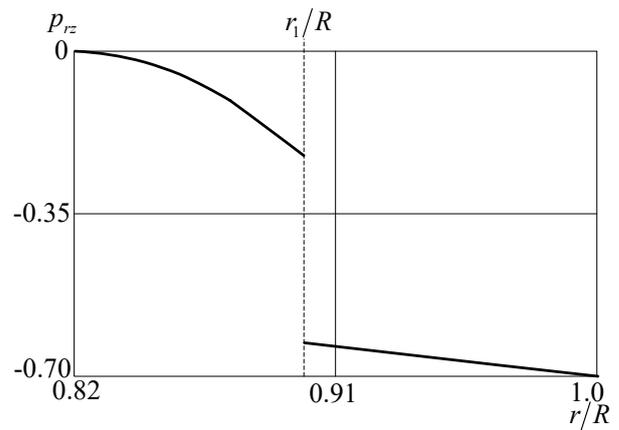


Рис. 24. Компонента p_{rz} в конечный момент времени

В *главе 4* изучаются процессы интенсивного деформирования материалов, когда накапливаемые ими необратимые деформации могут быть как деформациями ползучести, так и пластичности.

В § 4.1 рассматриваются изотермические процессы ползучести и вязкопластического течения материала в зазоре между двумя жесткими цилиндрическими поверхностями радиусов r_0 и R ($r_0 < R$) при прямолинейном движении внутренней граничной поверхности и закрепленной внешней. Считается, что на цилиндрических стенках выполняются условия прилипания. Накопление необратимых деформаций первоначально происходит за счет ползучести материала. Для нахождения параметров напряжено-деформированного состояния используется формула Мурнагана (3), уравнения равновесия и закон ползучести Нортон (4). При возрастающей скорости движения внутреннего цилиндра полученное решение задачи остается справедливым до выполнения условия пластичности в окрестности границы $r = r_0$ в момент времени t_0 .

С момента времени t_0 движущаяся граница $r = r_1(t)$ отделяет развивающуюся область течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ от области $r_1(t) \leq r \leq R$, в которой продолжается медленный процесс ползучести. Уравнение для границы $r = r_1(t)$, разделяющей области с разными механизмами накопления необратимых деформаций, следует из условия непрерывности на ней скоростей

точек материала. При движении внутреннего цилиндра с постоянной скоростью с момента времени $t_1 > t_0$ область вязкопластического течения продолжает развиваться дальше. Развитие области течения прекращается через некоторое время после уменьшения скорости с момента времени $t_2 > t_1$ и связано с появлением поверхности $r = r_1(t)$, движущейся от первоначальной границы пластической области к внутренней поверхности $r = r_0$ и отделяющей уменьшающуюся область течения $r_0 \leq r \leq r_1(t)$ от области $r_1(t) \leq r \leq r_1(t_3)$, в которой, теперь вновь накапливаются необратимые деформации ползучести, как и в области $r_1(t_3) \leq r \leq R$. График упругопластической границы $\tilde{r}_1 = r_1/R$ в интервале от $\tau_0 = 0.0097$ до $\tau_3 = 0.1121$ представлен на рис. 25, а.

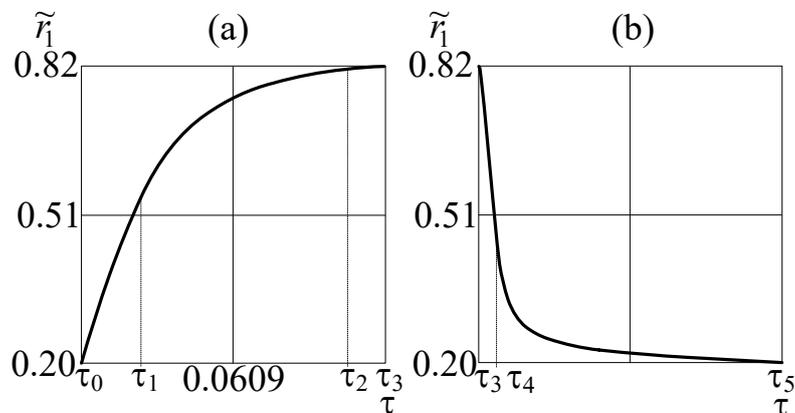


Рис. 25. Графики упругопластической границы

В момент времени $t_4 > t_3$ внутренний цилиндр останавливается. В момент времени $t_5 > t_4$ упругопластическая граница $r = r_1(t)$ доходит до внутренней поверхности $r = r_0$ и вязкопластическое течение в цилиндрическом слое прекращается. График упругопластической границы $\tilde{r}_1 = r_1/R$ в интервале от τ_3 до $\tau_5 = 5.756$ изображен на рис. 25, б. Расчеты проводились при линейной зависимости скорости граничной поверхности от времени. Релаксация компонент напряжений σ_{rz} и наибольшего из диагональных σ_{zz} показана на рис. 26, а и 26, б соответственно ($\tau_6 = 1000$, $\tau_7 = 10000$).

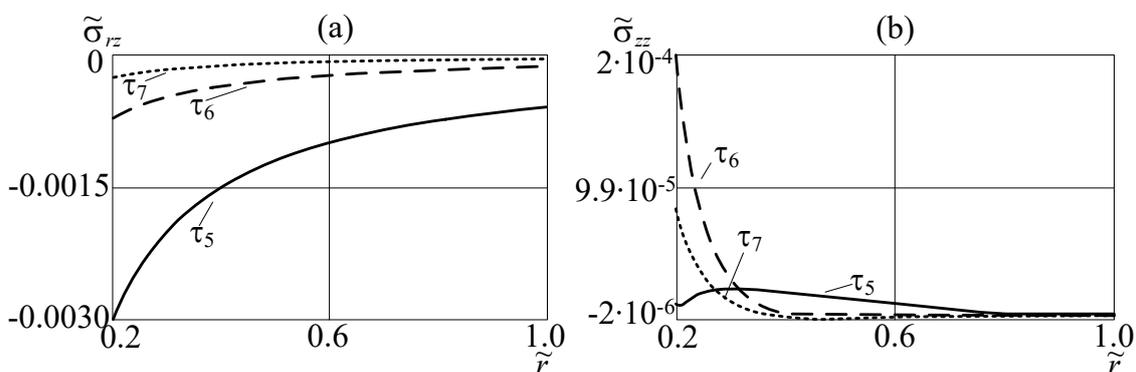


Рис. 26. Релаксация напряжений

В § 4.2 получено решение связанной краевой задачи о деформировании тяжелого слоя, расположенного на наклонной плоскости, при нагреве, а затем и охлаждении его свободной поверхности. В отличие от рассмотренной в § 3.1 подобной задачи здесь материал перед вязкопластическим течением накапливает необратимые деформации ползучести. Краевые условия задачи имеют вид (23). Параметры ползучести материала зависят от температуры (16).

Область вязкопластического течения развивается с момента времени t_1 от границы $x_2 = 0$ и с течением времени занимает слой $0 \leq x_2 \leq r(t)$, в слое $r(t) \leq x_2 \leq h$ материал дефор-

мируется вязкоупруго. С момента времени $t_2 > t_1$ температура на свободной поверхности становится постоянной. По-прежнему в материале присутствует область вязкоупругого деформирования $r(t) \leq x_2 \leq h$ и область вязкопластического течения $0 \leq x_2 \leq r(t)$, которая при этом продолжает развиваться дальше. Скорость продвижения по слою упругопластической границы начинает падать и со временем становится равной нулю.

Снижение температуры на свободной поверхности тяжелого слоя с момента времени $t_3 > t_2$ приводит к появлению новой упругопластической границы $x_2 = r_1(t)$, движущейся от стационарной границы $x_2 = r(t_3)$ к нижней границе слоя $x_2 = 0$ и отделяющей сужающуюся область течения $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ от области $r_1(t) \leq x_2 \leq r(t_3)$, в которой снова происходит процесс ползучести. В расчетный момент времени $t_4 > t_3$ упругопластическая граница $x_2 = r_1(t)$ доходит до нижней границы слоя $x_2 = 0$ и течение в материале прекращается. В момент времени $t_5 > t_4$ температура верхней границы слоя становится равной нулю, но в материале слоя остается еще некоторое ее распределение. С течением времени слой остывает. На рис. 27 изображено изменение упругопластической границы $\tilde{r} = r/h$ от безразмерного времени τ в интервале от τ_1 до τ_3 и изменение упругопластической границы $\tilde{r} = r_1/h$ в интервале от τ_3 до τ_4 . Распределение температуры по слою в моменты времени τ_1 , τ_2 , τ_3 и τ_4 показано на рис. 28.

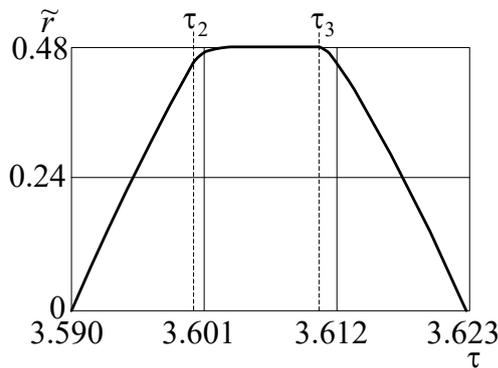


Рис. 27. Изменение упругопластических границ с течением времени

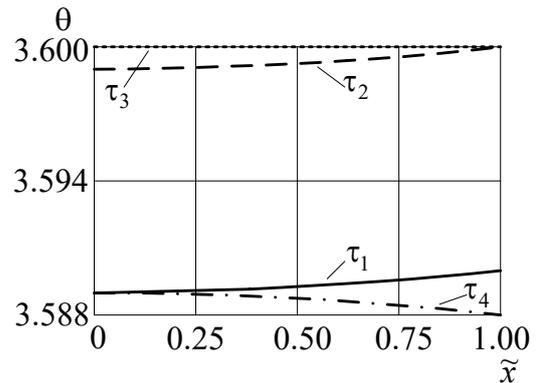


Рис. 28. Распределение температуры по слою в разные моменты времени

В § 4.3 приводится обобщение решения задачи § 4.2 на случай приложения не только тепловой нагрузки, но также и механической. Материал сначала накапливает необратимые деформации ползучести. Краевые условия задачи записываются в виде

$$u|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = -f_1(t), \quad \sigma_{12}|_{x_2=h} = f_2(t), \quad \theta|_{x_2=h} = G(t), \quad \partial\theta/\partial x_2|_{x_2=0} = 0.$$

Здесь $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – заданные возрастающие функции. В отличие от задачи § 4.2 течение в рассматриваемом случае начинается на верхней границе слоя $x_2 = h$. С момента времени t_0 от верхней границы слоя $x_2 = h$ развивается область вязкопластического течения $r(t) \leq x_2 \leq h$, в области $0 \leq x_2 \leq r(t)$ материал продолжает накапливать необратимые деформации ползучести.

Уменьшение механической нагрузки и постоянное значение температуры на верхней

границе слоя с момента времени $t_1 > t_0$ приводит к постепенному снижению до нуля скорости движения границы области вязкопластического течения $x_2 = r(t)$. В момент времени $t_2 > t_1$ область течения перестает расширяться, и появляется новая граница $x_2 = r_1(t)$, движущаяся от стационарной границы к верхней границе слоя $x_2 = h$. Граница $x_2 = r_1(t)$ отделяет сужающуюся область течения $r_1(t) \leq x_2 \leq h$ от области $r(t_2) \leq x_2 \leq r_1(t)$, в которой необратимые деформации теперь накапливаются в результате процесса ползучести, как и в области $0 \leq x_2 \leq r(t_2)$. В расчетный момент времени $t_3 > t_2$ граница области течения $x_2 = r_1(t)$ достигает верхней границы $x_2 = h$, и течение в слое прекращается. Теперь необратимое деформирование материала слоя происходит только за счет ползучести. В момент времени $t_4 > t_3$ функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, задающие механическое воздействие на тяжелый слой, становятся равными нулю, и температура верхней границы слоя начинает снижаться, что вызывает постепенное остывание всего слоя. На рис. 29 представлено изменение границы $\tilde{r} = r/h$, отделяющей область вязкопластического течения, с течением времени в интервале от τ_0 до τ_2 , а также изменение границы области течения $\tilde{r} = r_1/h$ в интервале от τ_2 до τ_3 . Распределения температуры по слою в разные моменты времени показаны на рис. 30.

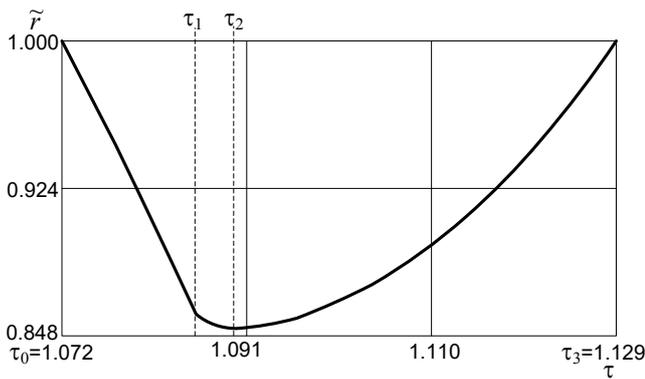


Рис. 29. Зависимость границы области вязкопластического течения от времени

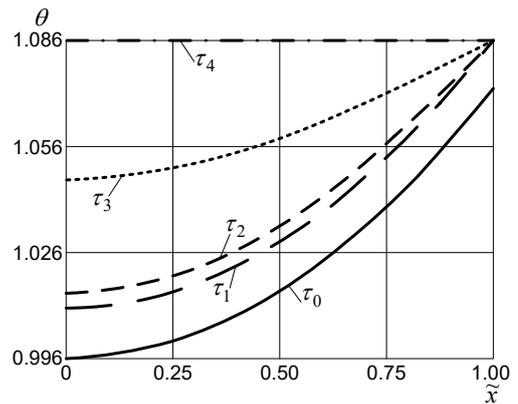


Рис. 30. Распределение температуры по слою в разные моменты времени

В § 4.4 приведено решение неизо термической краевой задачи о ползучести и вязкопластическом течении материала пробки в круглой трубе под действием переменного перепада давления, заданного на торцевых поверхностях пробки. Пробка длины l из несжимаемого материала находится в круглой трубе радиуса R с недеформируемыми стенками. Боковая поверхность пробки находится в условиях жесткого сцепления со стенками трубы, а верхняя поперечная граничная поверхность пробки нагружается давлением

$$\sigma_{zz}(0, u(0, t), t) = -p(t), \quad \sigma_{zz}(0, l + u(0, t), t) = 0, \quad (35)$$

где $u = u_z(r, t)$ – отличная от нуля компонента вектора перемещений, $r = 0$ – координата максимального перемещения граничных точек пробки, $p(t)$ – задаваемое давление. Рассматривается случай, когда тепло создается внутри только за счет необратимого деформирования (ползучесть и пластичность), то есть приток тепла в среду через границу трубы отсутствует. Изучается ползучесть материала и его последующее вязкопластическое течение при возрастаю-

щем и постоянном давлении. Для изменяющейся температуры материала принимаются условия

$$\theta(r,0) = 0, \quad \partial\theta(r,t)/\partial r|_{r=0} = 0, \quad \partial\theta(r,t)/\partial r|_{r=R} = 0.$$

Область вязкопластического течения развивается от границы трубы и при постоянном давлении не изменяется. При убывающем давлении область течения уменьшается, с течением времени течение во всем слое прекращается, и необратимые деформации накапливаются только за счет ползучести. Когда давление становится равным нулю, остывание материала задается условием (33).

Рассмотрена аналогичная постановка задачи, но в случае учета проскальзывания материала вдоль стенки трубы. То есть разогрев материала происходит и за счет необратимого деформирования, и за счет трения о стенку трубы. Разогрев материала за счет трения задается первым условием (29) при $r = R$. В отличие от задачи с жестким сцеплением при постоянном давлении область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ продолжает увеличиваться.

На рис. 31, а (условие прилипания) и 31, б (условие проскальзывания) изображено изменение границ области вязкопластического течения в зависимости от безразмерного времени при линейно возрастающем, постоянном (с момента времени τ_2) и убывающем давлении (с момента времени τ_3 ; τ_1 – момент начала течения, τ_4 – момент окончания течения).

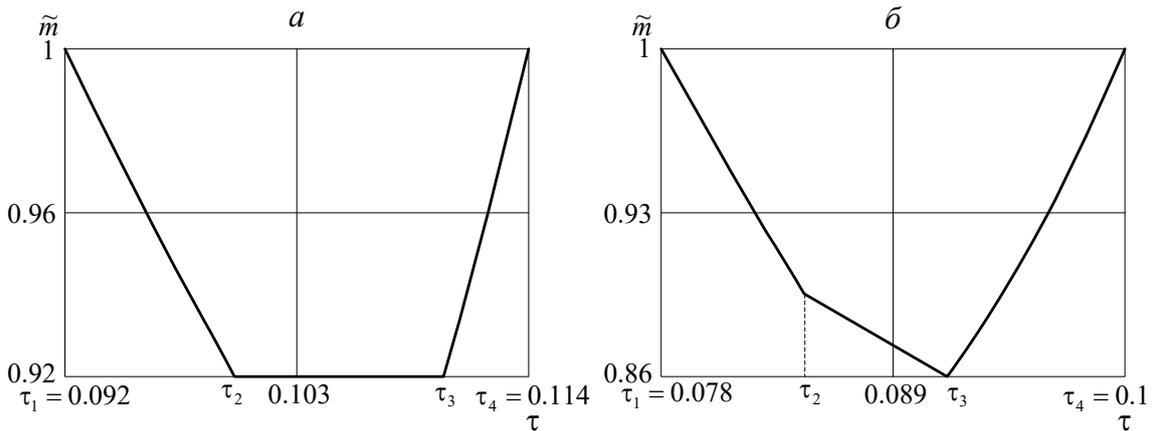


Рис. 31. Графики границ областей течения в зависимости от времени

В § 4.5 получено решение изотермической краевой задачи об изменении границы микропоры в условиях ползучести и пластического течения. Граничное воздействие задается на поверхности $r = R(t)$, значительно удаленной от микропоры. Тогда границу микропоры полагаем сферической поверхностью начального радиуса s_0 . Процесс деформирования задается краевыми условиями

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -P(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=s(t)} = 0,$$

где $r = s(t)$ - текущий радиус микропоры. Здесь $P(t)$ – возрастающая функция, используется сферическая система координат.

Рассмотрено деформирование материала в условиях ползучести, затем его вязкопластическое течение, которое начинается в момент времени t_1 на внутренней границе $r = s(t_1)$ и со временем продолжается в области $s(t) \leq r \leq m(t)$, а в области $m(t) \leq r \leq R(t)$ по-прежнему

происходит вязкоупругое деформирование. С момента времени $t_2 > t_1$ область течения $s(t) \leq r \leq m(t)$ продолжает развиваться при постоянной функции $P(t)$.

При уменьшении давления $P(t)$ с момента времени $t_3 > t_2$ появляется новая граница $r = m_1(t)$, отделяющая сужающуюся область течения $s(t) \leq r \leq m_1(t)$ от области $m_1(t) \leq r \leq m(t_3)$, в которой необратимое деформирование вновь происходит в процессе ползучести. В расчетный момент времени $t_4 > t_3$ упругопластическая граница $r = m_1(t)$ достигает внутренней границы $r = s(t_4)$ сферического слоя. Расчеты проводились при линейной функции давления. Рис. 32 изображает график изменения внутренней граничной поверхности s/R_0 от безразмерного времени в промежутке от 0 до момента τ_k , в который давление становится равным нулю. Изменение границы s/R_0 полости в процессе релаксации представлено на рис. 33. На рис. 34 и 35 показаны распределения остаточных напряжений σ_{rr}/μ и $\sigma_{\theta\theta}/\mu$ в процессе их релаксации после снятия нагружающих усилий с момента времени τ_k (сплошной линией) до $\tau_5 = 200$ (пунктирной линией).

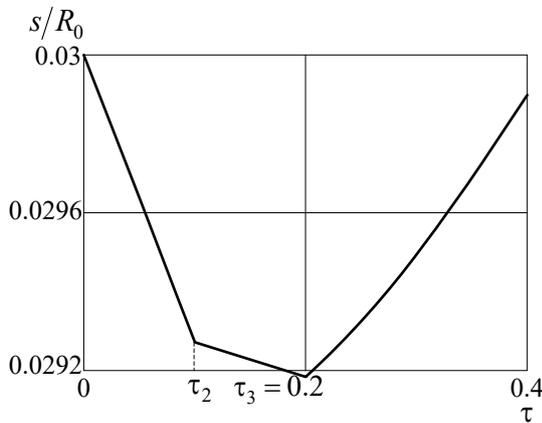


Рис. 32. График изменения внутренней граничной поверхности s/R_0

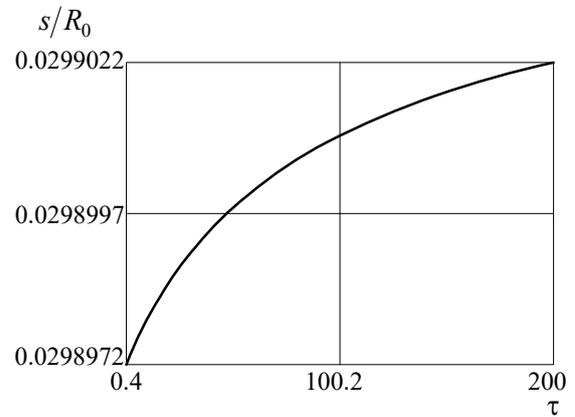


Рис. 33. Изменение внутренней границы слоя в процессе релаксации

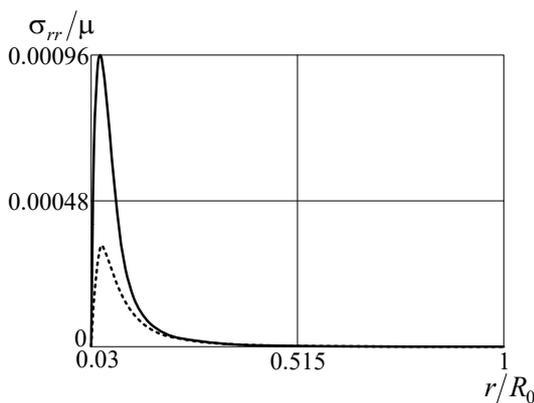


Рис. 34. Релаксация компоненты напряжений σ_{rr}/μ

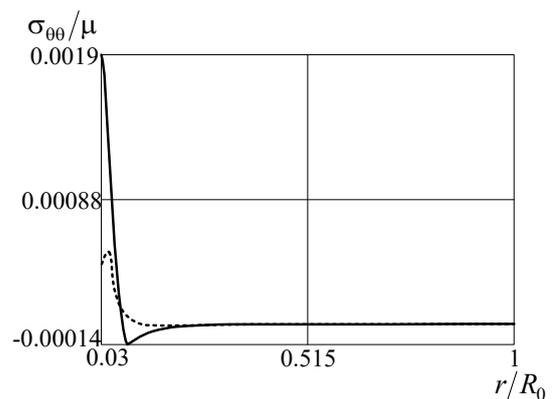


Рис. 35. Релаксация компоненты напряжений $\sigma_{\theta\theta}/\mu$

В главе 5 получен ряд решений краевых задач теории малых деформаций материалов с учетом их пластической сжимаемости и реологических свойств. В § 5.1 изучается сдавливание тяжелого сжимаемого слоя упругопластической или упруговязкопластической среды. Слой высоты h сжимаемого упругопластического материала находится под действием нагрузок при

следующих краевых условиях

$$\sigma_{12}|_{x_2=h} = \beta t^2, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = -\gamma t^2.$$

Здесь $\beta > 0$, $\gamma > 0$ – заданные постоянные величины. Считается, что слой расположен на абсолютно шероховатой плоскости, т.е. проскальзывание на линии контакта $x_2 = 0$ отсутствует. До достижения предельного состояния по напряжениям материал слоя остается упругим, а при выходе напряженного состояния на поверхность нагружения в момент времени t_0 начинается его пластическое течение. В качестве поверхности нагружения, учитывающей сжимаемость упругопластического и упруговязкопластического материалов, используются условия пластичности Кулона–Мора

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2(k - q\sigma), \quad \max|\sigma_i - \sigma_j| = 2(k - q\sigma) + \eta \max|\varepsilon_k^p - \varepsilon_s^p|, \quad (36)$$

и Мизеса–Шлейхера

$$\tau_{ij}\tau_{ji} = 2(k - q\sigma)^2, \quad (\tau_{ij} - \eta\varepsilon'_{ij}) (\tau_{ji} - \eta\varepsilon'_{ji}) = 2(k - q\sigma)^2. \quad (37)$$

В соотношениях (36), (37) q – константа материала. Здесь $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{kk}^p \delta_{ij} / 3$ – девиатор тензора скоростей пластических деформаций. Показано, что качественных отличий в развитии пластического течения для упругопластической среды при обоих условиях пластичности не наблюдается. Область течения с момента времени t_0 развивается от границы $x_2 = h$ и занимает слой $m(t) \leq x_2 \leq h$, а в слое $0 \leq x_2 \leq m(t)$ материал деформируется обратимо. С момента времени $t_1 > t_0$ напряжения σ_{12} и σ_{22} перестают изменяться. По-прежнему в материале присутствует область упругого деформирования и область пластического течения, которая при этом перестает развиваться дальше. В области $m(t_1) \leq x_2 \leq h$ происходит нейтральное нагружение ($\zeta = 0$), т.е. пластические деформации не изменяются. Напряженное состояние при этом находится на пределе упругости: условие пластичности выполняется во всех точках области $m(t_1) \leq x_2 \leq h$.

С момента времени $t_2 > t_1$ при уменьшении компонент напряжений σ_{12} и σ_{22}

$$\sigma_{12}|_{x_2=h} = \beta t_1^2 - \beta_1(t - t_2)^2, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = -\gamma t_1^2 + \gamma_1(t - t_2)^2$$

появляется новая граница $x_2 = m_1(t)$, отделяющая область нейтрального нагружения $m_1(t) \leq x_2 \leq h$ от области разгрузки $m(t_1) \leq x_2 \leq m_1(t)$. Область $0 \leq x_2 \leq m(t_1)$ остается областью упругого деформирования. В момент времени $t_3 > t_2$ упругопластическая граница $x_2 = m_1(t)$ доходит до верхней границы $x_2 = h$. При расчетах полагалось, что $\beta/\beta_1 = \gamma/\gamma_1 = c^2$. Тогда в момент времени $t_k = ct_1 + t_2$ напряжения σ_{12} и σ_{22} на верхней границе слоя одновременно становятся равными нулю.

В случае учета вязких свойств материала, когда в момент времени t_1 напряжения σ_{12} и σ_{22} становятся постоянными, хотя граница области вязкопластического течения не изменяется, в области $m(t_1) \leq x_2 \leq h$ течение продолжается. Только после того, как напряжения в момент времени t_2 начинают уменьшаться, пластические деформации в области $m_1(t) \leq x_2 \leq h$

перестают изменяться, то есть в этой области происходит нейтральное нагружение, в то время как области $0 \leq x_2 \leq m(t_1)$ и $m(t_1) \leq x_2 \leq m_1(t)$, как и в предыдущих случаях, являются упругой областью и областью разгрузки соответственно. Проведенные расчеты иллюстрируются для условия пластичности Кулона–Мора с учетом вязкости. В остальных случаях для приведенных параметров напряженно-деформированного состояния качественных отличий не наблюдается. На рис. 36 показано изменение упругопластической границы $\tilde{m} = m/h$ в зависимости от безразмерного времени \tilde{t} . Изменение границы $\tilde{m}_1 = m_1/h$ от времени \tilde{t} представлено на рис. 37 штриховой линией без учета вязкости и сплошной линией с учетом вязкости.

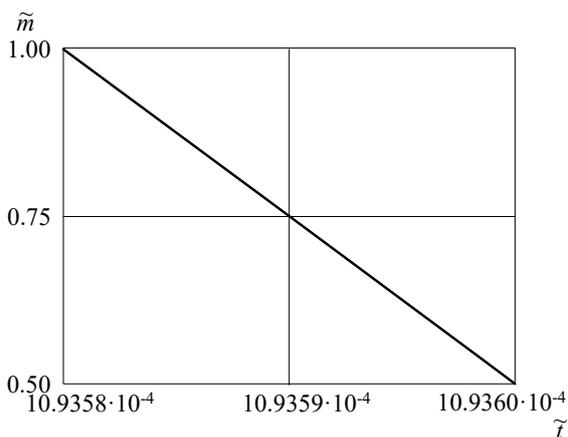


Рис. 36. Зависимость упругопластической границы от времени

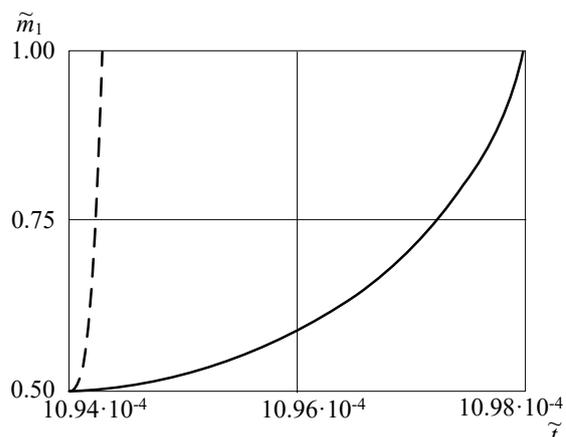


Рис. 37. Зависимость упругопластической границы от времени

В § 5.2 изучаются ползучесть и пластическое течение материала толстостенной цилиндрической трубы с радиусами $r = r_0$ и $r = R$ ($R > r_0$) под действием равномерного внутреннего давления

$$\sigma_{rr}|_{r=r_0} = -p(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad (38)$$

где $p(t)$ – известная функция. Исследовано деформирование материала в условиях ползучести до возникновения пластического течения на границе $r = r_0$, затем пластическое течение в области $r_0 \leq r \leq m(t)$ с момента времени t_0 , когда напряженное состояние соответствует грани призмы Треска. В момент времени t_1 на поверхности $r = r_0$ выполняется условие полной пластичности и от данной границы развивается область пластического течения $r_0 \leq r \leq m_1(t)$, в которой напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска. В области $m_1(t) \leq r \leq m(t)$ продолжается пластическое течение, соответствующее грани условия пластичности.

Полагая с момента времени t_2 функцию $p(t)$ постоянной, получаем, что появляется новая упругопластическая граница $r = m_2(t)$, отделяющая уменьшающуюся область пластического течения $m_1(t) \leq r \leq m_2(t)$ от области $m_2(t) \leq r \leq m(t_2)$, в которой необратимые деформации теперь накапливаются за счет медленного процесса ползучести, как и в области $m(t_2) \leq r \leq R$. С момента времени $t_3 > t_2$ давление на внутренней поверхности $p(t)$ уменьшается. Данное изменение граничного воздействия приводит к разгрузке в областях $r_0 \leq r \leq m_1(t)$

и $m_1(t) \leq r \leq m_2(t)$ цилиндрического слоя. То есть, начиная с момента времени t_3 , пластическое течение в материале трубы полностью прекращается и изменение необратимых деформаций теперь связано только с процессом ползучести. В области $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ в качестве Σ используется ребро призмы Треска, а в области $m_1(t) \leq r \leq R$ – грань этой призмы. Граница $r = m_1(t)$ является теперь не упругопластической границей, а границей, разделяющей две вязкоупругие области. В момент времени $t_4 > t_3$ разность напряжений $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$ на внутренней границе слоя $r = r_0$ обращается в нуль и далее становится отрицательной, однако, возрастающей по абсолютной величине. Таким образом, в области $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ разность напряжений $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$ имеет разные знаки.

В процессе разгрузки напряженное состояние снова достигает поверхности нагружения на внутренней границе слоя $r = r_0$ в момент времени $t_5 > t_4$. С этого момента времени при уменьшении давления $p(t)$ от внутренней границы слоя $r = r_0$ развивается область повторного пластического течения $r_0 \leq r \leq m_3(t)$, соответствующая ребру призмы Треска. В областях $m_3(t) \leq r \leq m_1(t)$ и $m_1(t) \leq r \leq R$ продолжается вязкоупругое деформирование. Положение упругопластической границы $r = m_3(t)$ однозначно связано с уменьшающимся давлением $p(t)$. При полной разгрузке в момент времени $t_6 > t_5$ давление $p(t)$ обращается в нуль. С этого момента времени пластическое течение в цилиндрическом слое прекращается и дальнейшее изменение необратимых деформаций в любой точке слоя связано с процессом ползучести. Расчеты проводились при линейной функции $p(t)$. Изменение упругопластической границы $\tilde{m} = m/R$ от безразмерного времени \tilde{t} в интервале от $\tilde{t}_0 = 0.01$ до $\tilde{t}_2 = 0.045$ и изменение упругопластической границы $\tilde{m} = m_2/R$ в интервале от \tilde{t}_2 до $\tilde{t}_3 = 0.06$ показаны на рис. 38 сплошной линией. Упругопластическая граница $\tilde{m} = m_1/R$ в интервале от $\tilde{t}_1 = 0.038$ до \tilde{t}_3 , граница $\tilde{m} = m_1/R$, разделяющая две вязкоупругие области, в интервалах от \tilde{t}_3 до $\tilde{t}_6 = 0.15$ и от \tilde{t}_6 до $\tilde{t}_7 = 100$ показаны на рис. 38 штриховой линией. Граница повторного пластического течения $\tilde{m} = m_3/R$ в интервале от $\tilde{t}_5 = 0.11$ до \tilde{t}_6 изображена на рис. 38 пунктирной линией. Графики на рис. 39 иллюстрируют процесс релаксации напряжений $\tilde{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr}/\mu$, $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ и $\tilde{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz}/\mu$ после снятия нагружающих усилий от \tilde{t}_6 до \tilde{t}_7 .

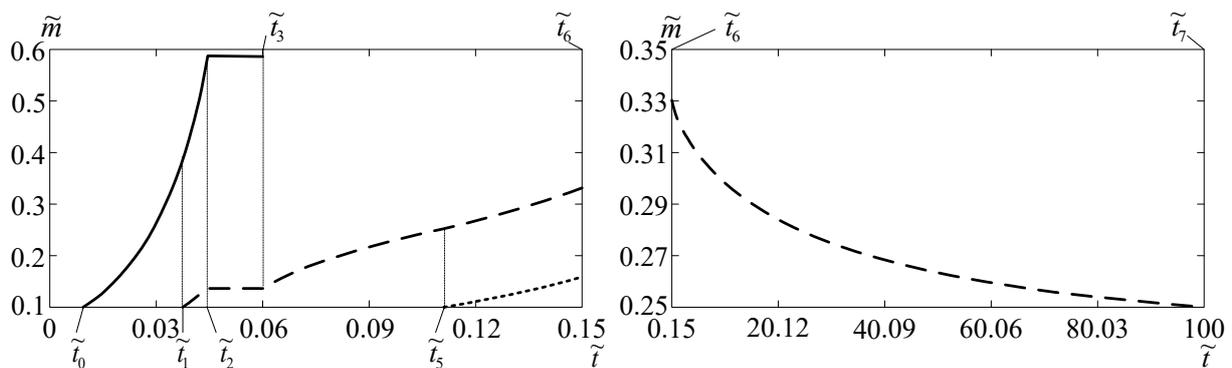


Рис. 38. Графики упругопластических границ, и границ, разделяющих вязкоупругие области

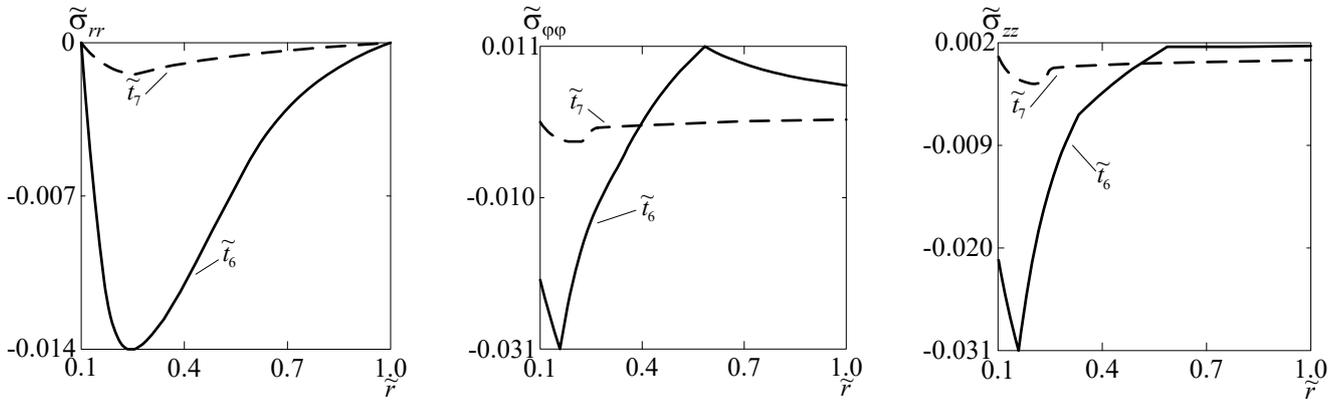


Рис. 39. Релаксации напряжений

В § 5.3 исследуются процессы ползучести и пластического течения в сферическом слое, ограниченном поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ ($r_0 < R$), при действии всестороннего изменяющегося со временем давления, заданного на внешней поверхности

$$\sigma_{rr} |_{r=R} = -p(t), \quad \sigma_{rr} |_{r=r_0} = 0.$$

Рассмотрены случаи вязкоупругопластического материала и с учетом его вязких свойств при пластическом течении. При возрастающем давлении изучено деформирование в условиях ползучести, возникновение и развитие течения в окрестности внутренней сферической поверхности, уменьшение области течения при постоянном давлении. В качестве поверхности нагружения используется цилиндр Мизеса.

Уменьшение давления вызывает мгновенную разгрузку материала сферического слоя, т.е. пластическое течение полностью прекращается, а приращение необратимых деформаций во всем слое связано только с процессом ползучести. В таком процессе разность напряжений $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}$ уменьшается, пока не обратится в ноль на внутренней поверхности. Таким образом знак разности $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}$ меняется, она становится отрицательной сначала при $r = r_0$, а с течением времени и в области к ней примыкающей, что приводит к наличию в слое двух областей с разными знаками разности напряжений. Рост напряжений приводит к выполнению условия пластичности с обратным знаком: $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -2k$ сначала на поверхности $r = r_0$, затем к развитию повторного пластического течения от этой поверхности. В момент времени t_k ($p(t_k) = 0$) пластическое течение прекращается и дальнейшее изменение необратимых деформаций в любой точке сферического слоя связано с процессом ползучести.

В случае учета вязких свойств материала на стадии пластического течения в отличие от предыдущей задачи, уменьшение давления вызывает и уменьшение области течения, приводя к возникновению области, в которой пластическое течение было, но прекратилось, и необратимые деформации снова накапливаются в материале за счет его ползучести. С течением времени пластическое течение прекращается, ползучесть материала продолжается и при обращении в ноль давления $p(t)$.

Изменение от безразмерного времени упругопластических границ $\tilde{m} = m/R$ и $\tilde{m} = m_2/R$ в задаче без учета вязкости (от $\tau_0 = 0.016$ до $\tau_k = 0.16$) представлено на рис. 40 (τ_0 – момент

начала течения, τ_1, τ_2 – моменты времени, в которые давление становится постоянным и начинает уменьшаться, τ_4 – момент начала повторного течения, $\tau_k = 0.16$ – конечный момент разгрузки) с учетом вязкости на рисунке 41 ($\tau_3 = 0.124$ – момент окончания течения).

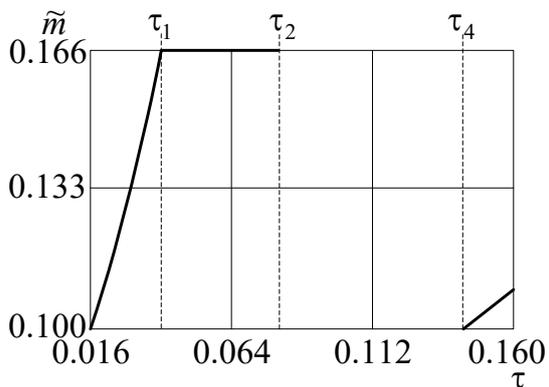


Рис. 40. Графики упругопластических границ без учета вязкости

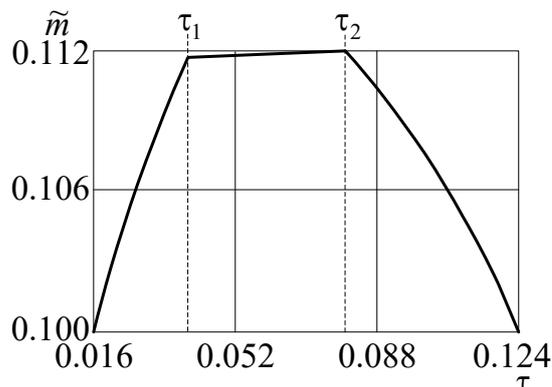


Рис. 41. Графики упругопластических границ с учетом вязкости

В § 5.4 изучается деформирование цилиндрического упруговязкопластического слоя, включая его повторное нагружение. Граничные условия задачи имеют вид (38). При возрастающем давлении рассмотрено обратимое деформирование слоя, возникновение и развитие течения от внутренней поверхности, которое продолжается и при постоянном давлении. При уменьшении давления течение прекращается во всем слое. Состояние полной разгрузки, когда давление на внутренней поверхности равно нулю, служит начальным состоянием для повторного нагружения. При достижении нагружающим давлением значения, значительно превышающего значение давления при первом нагружении, условие пластичности выполняется сразу во всей области, которая была областью вязкопластического течения при первом нагружении. Если нагружающее давление увеличивать и дальше, область течения будет развиваться. Как и при первом нагружении, при постоянном давлении область течения не развивается. Затем давление уменьшается до нуля. На рис. 42, *а* и *б* сплошными линиями показаны распределения напряжений $\tilde{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr}/(\lambda + 2\mu)$ и $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}/(\lambda + 2\mu)$ соответственно в конечный момент первой разгрузки. Компоненты напряжений $\tilde{\sigma}_{rr}$ и $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}$ в конечный момент повторной разгрузки показаны на рис. 42 штриховыми линиями.

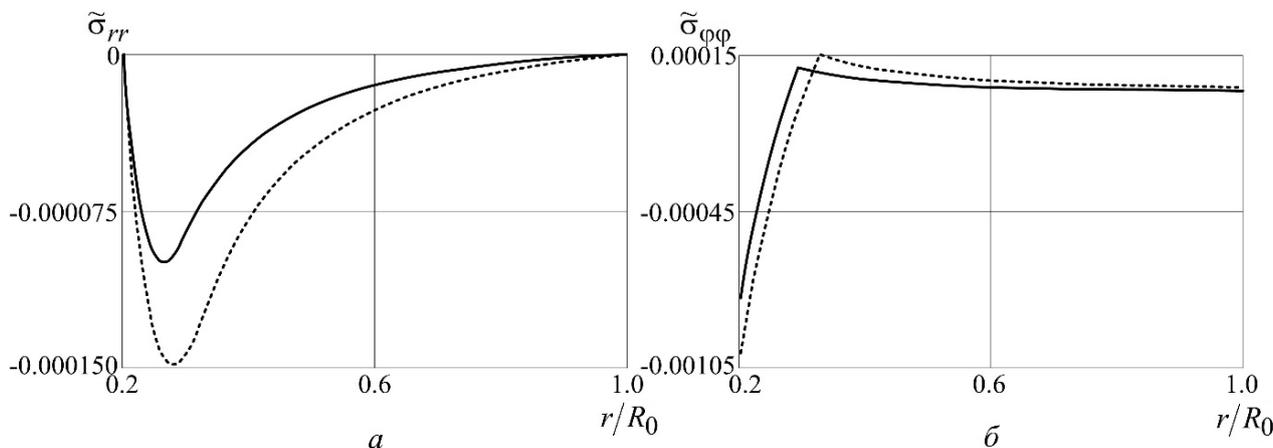


Рис. 42. Распределения напряжений: при полной первой разгрузке (сплошная линия) и при полной второй разгрузке (штриховая линия)

В *заключении* приведены основные результаты работы, состоящие в следующем:

В *первой главе* строится неизотермическая модель больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами, в которой обратимые и необратимые деформации определяются дифференциальными уравнениями изменения (переноса).

Вязкие свойства материалов учитываются как на стадии пластического течения, так и на стадии, ему предшествующей и при разгрузке. В случае, когда накапливаемые материалом необратимые деформации могут быть как деформациями ползучести, так и пластического течения, в уравнениях переноса они не разделяются на составляющие, по-разному задается источник в уравнении их изменения. В случае неизотермического деформирования зависимыми от температуры считаются предел текучести, вязкость и параметры ползучести материала, для которых выбраны соответствующие экспериментальные законы.

Во *второй главе* с целью математического моделирования технологического способа обработки материалов и изготовления профилей, называемого волочением, поставлены и решены краевые задачи теории больших упруговязкопластических деформаций о прямолинейных течениях в слое, расположенном между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями. Получены численно-аналитические решения краевых задач в случаях, когда движется один из жестких цилиндров (внутренний или внешний), а другой жестко закреплен. Проскальзывание материала рассмотрено в обоих случаях в окрестности внутренней, внешней или обеих контактных поверхностей.

Получено решение краевой задачи теории больших упруговязкопластических деформаций о прямолинейном движении материала в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями под действием изменяющегося со временем градиента давления. При этом на граничных поверхностях происходит проскальзывание материала.

В *третьей главе* с целью модельной оценки процессов, происходящих в материалах при высокоскоростной штамповке, высокотемпературном прессовании в порошковой металлургии, прессовании моделей в высокоточном литье, когда обрабатываемый материал заметно разогревается как за счет деформирования, так и вследствие трения о жесткие стенки, получен ряд решений связанных краевых задач теории больших упруговязкопластических деформаций, когда деформирование, тепловыделение и теплопередача не разделяются.

Получено решение краевой задачи о деформировании тяжелого слоя упруговязкопластического материала, расположенного на наклонной плоскости и нагреваемого на его свободной поверхности.

Изучено деформирование материала упруговязкопластического плоского горизонтального слоя за счет сжимающих и сдвиговых нагрузок, когда его разогрев вызван деформированием и трением о шероховатую плоскость; материала в круглой трубе, а также при наличии слоя смазки, в условиях изменяющегося градиента давления; слоя материала, заключенного между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, под действием изменяющегося градиента давления и при движении внешней поверхности. Деформирование первоначально происходит в условиях прилипания материала согласно закону сухого трения, затем проскальзывания, которое вызывает разогрев вследствие трения материала о контактные поверхности.

Изучено пластическое течение в условиях зависимости предела текучести от температуры, деформирование в условиях постоянных и уменьшающихся нагрузок, разгрузка и охлаждение до комнатной температуры с вычислением остаточных напряжений. В случае деформирования цилиндрического слоя исследовано пластическое течение, начинающееся не одновременно у двух жестких поверхностей.

В *четвертой главе* деформирование цилиндрического слоя, находящегося в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, рассмотрено в случае, когда накапливаемые материалом слоя большие необратимые деформации могут быть как деформациями ползучести, так и деформациями пластического течения. Решение задачи получено в случае прилипания материала в окрестности контактных поверхностей. Прямолинейно движется внутренняя жесткая поверхность, внешняя остается неподвижной.

Получено решение неизотермической краевой задачи о деформировании в условиях ползучести и пластического течения тяжелого слоя, расположенного на наклонной плоскости, при нагреве, а затем охлаждении его свободной поверхности. Также данная задача обобщена на случай приложения не только тепловой нагрузки, но и механической.

Получено решение неизотермической краевой задачи о необратимом деформировании пробки конечной длины в круглой жесткой трубе под действием переменного перепада давления в условиях жесткого сцепления материала пробки с трубой, а также при проскальзывании пробки вдоль стенки трубы. В первом случае исследовано влияние необратимых деформаций на изменение температуры материала без дополнительных внешних источников притока тепла. Во втором случае разогрев материала происходит как за счет трения материала о жесткую граничную поверхность, так и за счет необратимого деформирования.

Получено решение изотермической краевой задачи о ползучести и вязкопластическом течении материала полого шара в условиях всестороннего гидростатического сжатия.

В неизотермических задачах главы 4 зависимыми от температуры полагаются не только предел текучести, но и параметры ползучести материала, и вязкость пластического течения.

В *пятой главе* в рамках модели малых деформаций получено решение краевой задачи о деформировании горизонтального плоского слоя сжимаемого материала под действием сдвиговых и сжимающих нагрузок. Рассмотрены случаи упругопластического и упруговязкопластического деформирования. В качестве пластического потенциала использовались условия пластичности Кулона – Мора и Мизеса – Шлейхера и соответствующие условия, учитывающие вязкость пластического течения среды. Показано, что при постоянной нагрузке в случае упругопластической среды пластическая область становится областью нейтрального нагружения, в случае учета вязкости пластическое течение в данном случае продолжается.

В случае, когда накапливаемые материалом необратимые деформации могут быть как деформациями ползучести, так и пластического течения, рассмотрено деформирование толстостенной цилиндрической трубы под действием внутреннего давления с использованием кусочно-линейного потенциала ползучести. Показано, что напряженное состояние при развивающемся от внутренней стенки трубы пластическом течении соответствует сначала грани, затем ребру призмы Треска. При разгрузке, когда необратимые деформации накапливаются только за счет процесса ползучести, деформируемая область также разбивается на части, в ко-

торых напряженное состояние соответствует грани и ребру условия ползучести. Исследовано возникновение и развитие области повторного пластического течения, напряженное состояние в которой соответствует ребру призмы Треска.

Получено решение краевой задачи упругопластического деформирования о сжатии сферического слоя внешним всесторонним давлением, когда вязкие свойства материала задаются с помощью степенного закона ползучести Нортона, а идеальные пластические – пластическим потенциалом в форме условия пластичности Мизеса.

Решена краевая задача о деформирования сферического слоя при его всестороннем гидростатическом сжатии в случае, когда вязкие свойства материала учитываются и на стадии, предваряющей пластическое течение, и при пластическом течении. Указанный механизм деформирования задается соответствующим пластическим потенциалом. Показано, что в отличие от рассмотренного случая упругопластической среды, разгрузка при снятии внешней нагрузки происходит постепенно, а повторное пластическое течение отсутствует.

Получено решение краевой задачи о вязкопластическом течении материала толстостенной трубы под действием двух циклов нагрузок, состоящих в приложении внутреннего равномерного давления, сначала возрастающего со временем, затем постоянного и далее уменьшающегося до нуля. Показано, что при повторном нагружении вязкопластическое течение наступает при значительно большем давлении, чем при первом нагружении.

Во всех рассмотренных случаях деформирование рассматривалось в условиях сначала возрастающей, затем постоянной и наконец, уменьшающейся нагрузки. Условия нагружения задавались как силовые, так и кинематические.

Изучено обратимое деформирование материала (или деформирование в условиях ползучести) в условиях прилипания и проскальзывания, возникновение, развитие и замедление вязкопластического течения, а в случае неизотермического деформирования и разогрев материала, разгрузка и охлаждение.

Установлены закономерности продвижения упругопластических границы и границ областей повторного пластического течения (при их наличии).

Рассчитаны обратимые, необратимые и полные деформации, напряжения и перемещения во всех рассматриваемых областях на всех стадиях процесса деформирования. В случае накопления деформаций ползучести исследована релаксация напряжений после полной разгрузки среды.

Для решения полученных уравнений, систем уравнений в частных производных и систем интегро-дифференциальных уравнений на основе классического конечно-разностного метода с применением составной формулы трапеций были разработаны неявные численные схемы для неравномерных сеток с неизвестными движущимися упругопластическими границами. Данные схемы позволяют получить распределения необратимых деформаций в областях вязкоупругого деформирования, в областях течения и разгрузки, а также положение неизвестных упругопластических границ на каждом шаге по времени.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Моделирование больших упруговязкопластических деформаций с учетом теплофизических эффектов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. № 4. С. 107-120.
2. Панченко Г.Л. О прямолинейном течении в упруговязкопластическом цилиндрическом слое в условиях одностороннего прилипания // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4. № 4. С. 86-96.
3. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Неизотермическое деформирование упруговязкопластического плоского тяжелого слоя // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. 16. № 1 (53). С. 56-65.
4. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Вязкопластическое течение в плоском слое при учете разогрева за счет деформирования и трения на границе // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 137-143.
5. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Развитие и торможение вязкопластического течения в слое при его нагреве за счет трения о шероховатую плоскость // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 4 (332). С. 101-111.
6. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления // Доклады Академии наук. 2015. Т. 464. № 3. С. 284-287.
7. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Прямолинейное течение в упруговязкопластическом цилиндрическом слое в условиях возможного двустороннего проскальзывания // Известия РАН. Механика твердого тела. 2016. № 2. С. 76-86.
8. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Движение упруговязкопластической среды в круглой трубе при ее нагреве за счет пристеночного трения // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. № 2. С. 265-275.
9. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Ползучесть и релаксация напряжений в материале цилиндрического слоя при его прямолинейном движении // Сибирский журнал индустриальной математики. 2016. Т. 19. № 4 (68). С. 44-50.
10. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. О сдавливании тяжелого сжимаемого слоя упругопластической или упруговязкопластической среды // Известия РАН. Механика твердого тела. 2017. № 6. С. 71-82.
11. Галимзянова К.Н., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Ползучесть и пластическое течение материала упругопластического сферического слоя в условиях всестороннего гидростатического сжатия // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 2 (32). С. 37-44.
12. Begun A.S., Kovtanyuk L.V., Burenin A.A., Panchenko G.L., Prokudin A.N. On the irreversible deformations growth in the material with elastic, viscous, and plastic properties and additional requirements to yield criteria // Advanced Structured Materials. 2017. Т. 46. С. 133-151.
13. Буренин А.А., Галимзянова К.Н., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. О согласовании механизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжатии // Доклады

- Академии наук. 2018. Т. 482. № 4. С. 403-406.
14. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Деформирование и разогрев упруговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счет изменяющегося перепада давления // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 6-18.
 15. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. О конечном перемещении упруговязкопластического материала в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями // Сибирский журнал индустриальной математики. 2018. Т. 21. № 1 (73). С. 21-34.
 16. Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L. Mathematical modeling of creep and viscoplastic flow of a cylindrical layer material // Journal of Physics: Conference Series. 4th International Conference on Supercomputer Technologies of Mathematical Modelling, SCTeMM 2019. 2019. С. 012018.
 17. Галимзянова К.Н., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Ползучесть и пластическое течение материала сферического вязкоупругопластического слоя при его нагрузке и разгрузке // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. 2019. Т. 23. № 2. С. 270-283.
 18. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Всестороннее гидростатическое сжатие цилиндрического слоя в условиях ползучести и пластического течения // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3 (41). С. 76-84.
 19. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Об изменяющихся механизмах производства больших необратимых деформаций в условиях прямолинейного движения в цилиндрическом слое // Известия РАН. Механика твердого тела. 2020. № 2. С. 10-21.
 20. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Ползучесть и пластическое течение материала толстостенной цилиндрической трубы вследствие действия равномерного внутреннего давления // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 72-79.
 21. Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L. Modelling of a production process of irreversible strains in a material of a thick-walled cylindrical tube under the influence of inner pressure // Meccanica. 2021. V. 56. P. 2307–2321.
 22. Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L. Mathematical modelling of the production process of irreversible strains under the heating and cooling of a flat heavy layer on an inclined surface // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. № 8. P. 1998-2005.
 23. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. О теплотворной способности прямолинейного упруговязкопластического течения при учете производства тепла за счет трения материала о его граничную шероховатую поверхность // Известия РАН. Механика твердого тела. 2022. № 5. С. 32-46.
 24. Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L. Thermomechanical loading of an elastoviscoplastic heavy layer held by an inclined plane // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2023. V. 35. № 4. P. 1325-1341.
 25. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. Об изменениях в остаточных напряжениях в окрестности дефекта сплошности упруговязкопластического материала при повторном нагружении // Известия РАН. Механика твердого тела. 2023. № 6. С. 113-124.
 26. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О., Терлецкий И.А. Об изменениях остаточных напряжений при повторном нагружении цилиндрического упруговязкопластического слоя

// Известия ТулГУ. Технические науки. 2023. № 7. С. 32-38.

27. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. Производство тепла за счет деформаций ползучести и пристеночного вязкопластического течения в материале пробки в круглой трубе под действием переменного перепада давления // Известия РАН. Механика твердого тела. 2024. № 5. С. 60-77.
28. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. О теплотворной способности необратимого деформирования материала пробки в круглой трубе // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. № 1 (59). С. 88-100.
29. Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О. Необратимое деформирование и разогрев упруговязкопластического материала в круглой трубе при наличии слоя смазки // Вестник ПНИПУ. Механика. 2025. № 3. С. 81-91.