

На правах рукописи

**Канашин Илья Валерьевич**

**ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЛЕЙ  
ДЕФОРМАЦИЙ С УЧЕТОМ НАЛИЧИЯ  
ПОВЕРХНОСТЕЙ И ЛИНИЙ РАЗРЫВА СКОРОСТЕЙ**

Специальность: 1.1.8 – «Механика деформируемого твердого тела»

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук



Комсомольск-на-Амуре – 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Комсомольский-на-Амуре государственный университет» (ФГБОУ ВО «КНАГУ»)

**Научный руководитель:** Григорьева Анна Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВО «КНАГУ», г. Комсомольск-на-Амуре

**Официальные оппоненты:** Сенашов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, профессор базовой кафедры математического моделирования и процессов управления СФУ, г. Красноярск.  
Севастьянов Георгий Мамиевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории механики материалов и конструкций, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН ФГБУН Хабаровский Федеральный исследовательский центр ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

**Ведущая организация:** ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва

Защита диссертации состоится «18» декабря 2025 г. в 11.00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.316.03 при Комсомольском-на-Амуре государственном университете (ФГБОУ ВО «КНАГУ») по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27, корп. , ауд. .

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Комсомольского-на-Амуре государственного университета: <https://sovet.knastu.ru>

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, подписанные и заверенные печатью организации, просим направлять по указанному адресу на имя учёного секретаря диссертационного совета Григорьевой Анне Леонидовне и по электронной почте [paj198282@mail.ru](mailto:paj198282@mail.ru).

Автореферат разослан «\_» \_\_\_\_\_ 2025 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета  
к ф.-м. н., доцент



А. Л. Григорьева

**Общая характеристика работы**

**Актуальность темы.** Работа посвящена жесткопластическому анализу полей деформаций в ряде контактных и бесконтактных задач. Задачи об одноосном деформировании плоского образца связаны с малоцикловой усталостью, в связи с чем при их решении используется условие сжимаемости материала. Основной задачей исследований малоцикловой усталости является изучение поведения материалов при возникновении в них под действием экстремальных переменных механических и тепловых нагрузок местных циклических пластических деформаций, приводящих к накоплению повреждений, при малоцикловом нагружении с числом циклов, варьирующимся в диапазоне от 1 до  $5 \cdot 10^4$ . Нагрузки такого рода испытывают материалы в энергоустановках, летательных аппаратах (в частности в авиационных двигателях), турбомашинах, сосудах давления, сварных конструкциях, узлах разъёмных соединений. Определение поведения материалов в реальных условиях эксплуатации под воздействием переменных нагрузок значительной интенсивности при напряжениях, которые могут превышать предел текучести, является одной из основных задач в обеспечении прочности и долговечности современных машин, механизмов и конструкций.

Задачи о внедрении жестких штампов, решённые с учётом коэффициента трения, связаны с процессами обработки материалов давлением. Это – комплекс технологических процессов, применяемых для формоизменения металлических заготовок в результате их пластической деформации без нарушения сплошности. Современные технологические процессы обработки металлов давлением применяются на металлургических и машиностроительных предприятиях в качестве окончательной операции при изготовлении различных деталей, а также для изготовления поковок, штамповок, профилей, труб, прутков, проволоки.

Одна из основных задач механики деформируемого твёрдого тела заключается в построении моделей и алгоритмов расчёта конструкций и технологических процессов при больших пластических деформациях с учётом разрушения. Для этого применяются различные подходы, один из которых включает использование теории пластического течения.

Теория пластического течения является одним из фундаментальных направлений механики деформируемого твёрдого тела. Основные положения теории позволяют описывать поведение материалов при различных напряжённых состояниях в условиях пластического деформирования с учётом изменения геометрии деформируемого тела. В

качестве меры деформаций при этом возможно использование тензоров конечных деформаций. Среди моделей пластических тел, используемых для описания поведения реальных материалов, могут быть выделены модели: упругопластического тела (упругие и пластические деформации полагаются одного порядка); упрочняющегося жёсткопластического тела (учитывается повышение предела текучести при повторном нагружении); идеального жёсткопластического тела (не учитывает упругие деформации в виду их малости по сравнению с пластическими). Модель идеального жёсткопластического тела является предельной по отношению по отношению к другим более сложным моделям деформируемых сред.

**Степень разработки темы.** Фундаментальные соотношения теории пластического течения и пластические аспекты механики разрушения разрабатывались и развивались А. Надаи, Ю. Работновым, Р. Хиллом, Л. М. Качановым, А. Ю. Ишлинским, Д. Д. Ивлевым, В. В. Соколовским, Г. И. Быковцевым, А. И. Хромовым, Ю. Н. Радаевым, Р. И. Непершиным, Ю. В. Немировским, Б. Д. Анниным, Г. П. Черепановым, С. И. Сенашовым, Дж. Райсом, Ф. Мак-Клинтоком, Дж. Ф. Ноттом, Д. Броеком, Е. М. Морозовым, Ю. Г. Матвиенко, Н. Ф. Морозовым, Р. В. Гольдштейном, В. Г. Зубчаниновым, Б. Полем, К. Хелланом.

Основное направление исследований в механике разрушения – процессы распространения трещин. Данное направление включает линейную и квазилинейную механику разрушения (теория Гриффитса и теория, учитывающая поправку Ирвина на пластические деформации), а также нелинейные процессы распространения трещин (критерий раскрытия трещины, инвариантный интеграл Черепанова – Райса). При достаточно больших размерах пластической области в случае нарушения соотношений линейной механики разрушения может использоваться нелинейная модель Леонова – Панасюка – Дагдейла для плоского напряжённого состояния или инвариантный  $J$  – интеграл.

В соответствие с гипотезой С. В. Серенсена зарождение трещины связано с исчерпанием пластичности и достижением материалом предельного состояния, при котором пластическое течение невозможно без нарушения сплошности. Возможность описания предельных состояний угловыми точками поверхности нагружения рассматривается в работах Д. Д. Ивлева и его коллег. В работах Г. С. Писаренко, И. И. Гольденבלата, Г. А. Гениева предельное состояние описывается замкнутым криволинейным треугольником с тремя осями симметрии в девиаторной плоскости пространства главных напряжений.

Экспериментальные подходы определения предельных состояний связаны с испытаниями на малоцикловую усталость при одноосном

растяжении-сжатии плоских и цилиндрических образцов. При этом соответствующие соотношения малоциклового усталости определяются пластическими свойствами материала и мало зависят от его упругих свойств.

Существуют аналитические решения задач об одноосном растяжении-сжатии плоских и цилиндрических образцов, полученные в рамках модели идеального жёсткопластического тела, одним из основных положений которой является условие несжимаемости материала

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

Однако для возможности описания предельных состояний, упрочняющихся жёсткопластических тел необходимо введение поверхности деформационных состояний, для которой для которой необходим учёт изменения плотности материала с течением времени. Этим обуславливается то, что в работе при решении задач об одноосном растяжении-сжатии плоских образцов использовалось условие сжимаемости материала.

**Цель и задачи диссертационного исследования.** Целью диссертационной работы является математическое моделирование полей тензоров деформаций в пластических течениях в контактных и бесконтактных задачах в условиях однократного и многократного нагружения в рамках модели жесткопластического тела.

Для достижения указанной цели поставлены следующие **задачи**:

- изучение теоретического материала в области теории пластического течения и малоциклового усталости;

- аналитическое решение задач о растяжении и разрушении полосы при условии сжимаемости материала в условиях плоской деформации: задачи о растяжении-сжатии полосы с непрерывным полем скоростей перемещений, задачи о растяжении и разрушении полосы с разрывным полем скоростей перемещений;

- аналитическое решение задачи о растяжении-сжатии полосы с непрерывным полем скоростей перемещений при условии сжимаемости материала в условиях плоского напряжённого состояния;

- решение задач о внедрении жёстких штампов с учётом коэффициента трения: задачи о вдавливании клина в выпуклое тело, задачи о сжатии выпуклого тела плоским штампом, задачи о вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта в выпуклое тело, задачи о сжатии двух симметричных выпуклых жёсткопластических тел;

- создание программного продукта для определения количества полуциклов нагружения до зарождения в материале трещины и

определения основных параметров процесса малоциклового нагружения образца в условиях плоской деформации;

- создание программного продукта для вычисления констант разрушения и параметров образца при его растяжении в условиях плоской деформации.

Для решения поставленных задач использовались следующие методы исследования: эмпирические (изучение литературы), аналитические (решение задач о: растяжении, сжатии и последовательном растяжении-сжатии полосы, о вдавливании клина в выпуклое тело, о сжатии выпуклого тела плоским штампом, о вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта, о сжатии двух симметричных выпуклых жёсткопластических тел), численные (определение размеров полосы в момент образования макротрещины, вычисление длительности полуцикла при малоцикловом нагружении с одинаковым размахом деформаций, решение систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в задачах о внедрении жёстких штампов).

**Научная новизна работы** заключается в следующем:

- исследованы поля тензоров деформаций в задачах о растяжении, сжатии и последовательном растяжении-сжатии полосы с непрерывным полем скоростей перемещений с учётом сжимаемости материала в условиях плоской деформации и плоского напряжённого состояния;

- исследованы поля тензоров деформаций в задаче о растяжении полосы с разрывным полем скоростей перемещений с учётом сжимаемости материала в условиях плоской деформации;

- создан программный продукт для определения количества полуциклов нагружения до зарождения в материале трещины и вычисления основных параметров процесса малоциклового деформирования полосы с использованием средств C# 10.0;

- создан программный продукт для нахождения констант разрушения и параметров образца при его растяжении в условиях плоской деформации с использованием средств C# 10.0;

- получены решения задач о внедрении жёстких штампов с учётом коэффициента трения: задачи о вдавливании клина в выпуклое тело, задачи о сжатии выпуклого тела плоским штампом, задачи о вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта в выпуклое тело, задачи о сжатии двух симметричных выпуклых жёсткопластических тел.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

- соотношения для определения пластических деформаций в задачах об одноосном деформировании плоского образца с непрерывным

полем скоростей перемещений с учётом сжимаемости материала в условиях плоской деформации и плоского напряжённого состояния;

- соотношения для определения пластических деформаций в задаче о растяжении полосы с разрывным полем скоростей перемещений с учётом сжимаемости материала в условиях плоской деформации;

- результаты решения задач об одноосном деформировании плоского образца с непрерывным полем скоростей перемещений и определения констант разрушения и параметров полосы при её растяжении в условиях плоской деформации с использованием созданных программных продуктов;

- соотношения для построения пластической области, формы деформированной поверхности, определения необходимой нагрузки и деформаций в окрестностях особенностей поля линий скольжения в задачах о внедрении жёстких штампов с учётом коэффициента трения: о вдавливании клина в выпуклое тело, о сжатии выпуклого тела плоским штампом, о вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта, о сжатии двух симметричных выпуклых жёсткопластических тел.

**Теоретическая значимость результатов диссертационной работы.** Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для дальнейших исследований полей деформаций в задачах об одноосном деформировании образцов с учётом условия сжимаемости материала.

**Практическая значимость работы** заключается в возможности использования полученных в ходе исследования результатов при построении математических моделей поведения реальных элементов конструкций в задачах современного машиностроения и строительства; при расчетах, связанных с определением несущих способностей конструкций различного назначения; при проектировании оборудования используемого в процессах обработки материалов давлением.

**Достоверность полученных результатов** основана на классических подходах механики сплошных сред и строгих математических выкладках. Достоверность решения задач подтверждается согласованностью с решениями аналогичных задач при условии несжимаемости материала для задач о полосе, без учёта коэффициента трения для задач о внедрении жёстких штампов, полученных А. И. Хромовым, А. А. Буханько, О. В. Козловой.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на:

- II Всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований», Комсомольск-на-Амуре, 2019 г;

– XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 2019 г;

– III Всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований», Комсомольск-на-Амуре, 2020 г;

– I Международной научно-практической конференции молодых учёных «Актуальные проблемы информационно-телекоммуникационных технологий и математического моделирования в современной науке и промышленности», Комсомольск-на-Амуре, 2021 г;

– Международной научно-практической конференции «Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению», 2022 г;

– V Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных «Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований», 2022 г;

– II Международной научно-практической конференции молодых учёных «Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению», 2022 г;

– VI Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных «Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований», 2023 г;

– Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных «Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению», 2023 г;

– VII Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных «Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований», 2024 г;

– III Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных «Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению», 2024 г;

– VIII Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных «Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований», 2025 г.

Получены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:

– «Определение основных параметров малоциклового нагружения металлических материалов» №RU2022662149, 2022;

– «Определение параметров малоциклового нагружения плоских образцов из металлических материалов» №RU2024661090, 2024;

– «Определение констант разрушения на основе испытаний плоских образцов» №RU2024661413, 2024.

**Публикации.** Основные результаты исследования и содержание диссертационной работы опубликованы в 6 печатных работах, из них 6



рекомендованы ВАК РФ для публикации основных научных результатов диссертаций, 1 – в изданиях, индексируемых в Web of Science и Scopus.

**Личный вклад автора.** Все аналитические выкладки и численные результаты, составившие предмет диссертации, получены автором лично. Научным руководителем (А. Л. Григорьева) была определена тема диссертации. Соавторы публикаций (А. И. Хромов, А. Л. Григорьева, Я. Ю. Григорьев) участвовали в постановке решаемых задач и обсуждении полученных автором результатов. Автор выражает благодарность соавторам своих публикаций за внимание к работе, ценные советы и замечания.

**Структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, содержащего 104 источника. Объём работы составляет 184 страницы. В работе содержится 78 рисунков.

### Основное содержание работы

Во введении раскрывается актуальность темы, обосновывается необходимость проведения работы, определяются цели, задачи, объект и предмет исследования, указываются научная новизна, практическая значимость, достоверность и обоснованность результатов исследования.

В первой главе рассматриваются основные положения теории пластического течения и малоциклового нагружения, применяемые для решения поставленных задач.

В § 1.1 описывается деформационно-энергетический подход к описанию малоциклового усталости материалов.

В § 1.2 описываются основные соотношения плоской деформации. Приводится основная система уравнений теории плоской деформации идеального жесткопластического тела, впервые установленная Сен-Венаном:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 &= 4k^2, \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} &= \frac{\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2}}, \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На её основе строится система уравнений, содержащая условие сжимаемости материала.

Для элементов тензора дисторсии имеет место соотношение:

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + V_k \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} A_{kj} = 0. \quad (2)$$

Тензор конечных деформаций Альманси определяется через тензор дисторсии в виде

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial x_k^0}{\partial x_i} \frac{\partial x_k^0}{\partial x_j} \right). \quad (3)$$

С течением времени поле тензора конечных деформаций Альманси изменяется по закону

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} V_k + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  – тензор скорости деформации.

В § 1.3 описываются основные соотношения плоского напряжённого состояния при условии Мизеса

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\tau_{12}^2 = \sigma_s^2 = 3k^2. \quad (5)$$

В § 1.4 описывается введение поверхности деформационных состояний сжимаемых жесткопластических тел, связанной с законом сохранения массы, заданным в виде уравнения неразрывности

$$V_{k,k} = -\frac{d}{dt} [\ln \rho], \quad (6)$$

где  $\rho$  – плотность материала;  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_k \frac{\partial}{\partial x_k}$  – материальная производная;  $V_k$  – скорость перемещения частиц материала. За меру деформаций принимается тензор конечных деформаций Альманси.

Уравнение

$$(1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2. \quad (7)$$

определяет в пространстве главных деформаций  $(E_1, E_2, E_3)$  поверхность деформационных состояний сжимаемого жёсткопластического тела (для несжимаемого тела –  $\rho = \rho_0$ , где  $\rho_0$  – начальная плотность материала). Уравнение (7) также может быть записано через основные инварианты тензора Альманси

$$1 - 2I_E + 4II_E - 8III_E = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2. \quad (8)$$

Результатом введения поверхностей деформационных состояний является возможность интерпретировать предельные состояния, которые, как правило, связаны с качественным изменением процесса деформирования пластического тела, в виде линий на этих поверхностях.

Во второй главе приводится решение задач о растяжении и разрушении полосы в условиях плоской деформации.

В § 2.1 рассматривается решение задач о растяжении и сжатии полосы с учётом сжимаемости материала в условиях плоской деформации.

Поле скоростей имеет вид:

для растяжения

$$V_1 = -\frac{V}{l}x_1 - \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, V_2 = \frac{V}{l}x_2, \quad (9)$$

для сжатия

$$V_1 = \frac{V}{h}x_1 - \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, V_2 = -\frac{V}{h}x_2, \quad (10)$$

где функция плотности  $\rho$ , полагается зависящей только от времени.

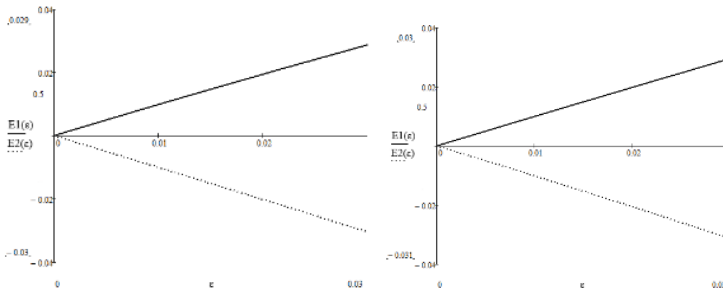


Рисунок 1 – Графики зависимости главных значений тензора Альманси от относительного удлинения (сжатия) образца при плоской деформации

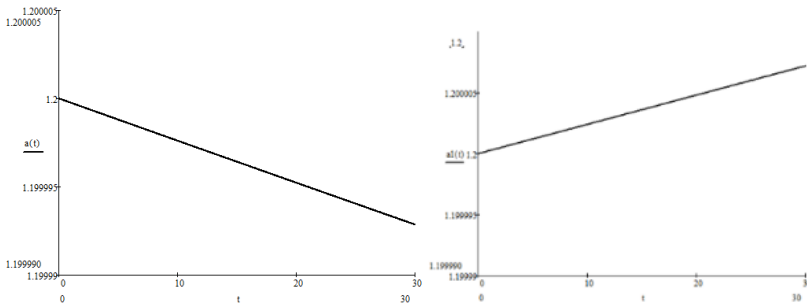


Рисунок 2 – Изменение ширины полосы с течением времени

В § 2.2 рассматривается накопление деформаций в полосе при её последовательном растяжении-сжатии. На первом этапе реализуется решение задачи о растяжении плоского образца с непрерывным полем скоростей и условием сжимаемости материала. На втором этапе образец сжимается, при этом направления главных осей меняются, а в качестве

начальных значений  $e_0$  и  $g_0$  используются значения  $e$  и  $g$ , полученные на этапе растяжения образца.

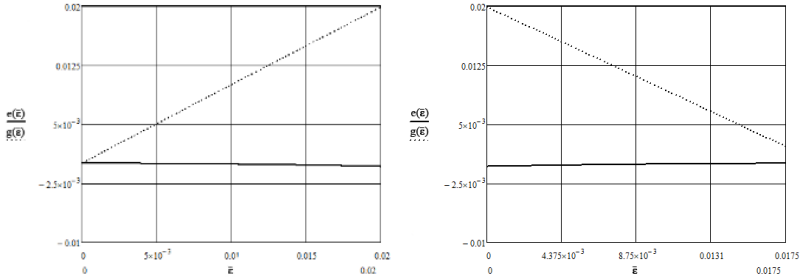


Рисунок 3 – Зависимость инвариантов тензора деформаций от относительного удлинения/сжатия образца при плоской деформации

Траектории движения частиц материала как для при растяжении, так и при сжатии определяются зависимостью

$$x_2 = \frac{\rho_0 x_1^0 x_2^0}{\rho x_1}, \quad (11)$$

где  $x_1^0, x_2^0$  – значения  $x_1, x_2$  в момент времени  $t = 0$ .

Так как частицы материала как в случае растяжения, так и при сжатии движутся по одним и тем же траекториям, изменение структуры материала при циклическом нагружении следует связывать не с деформациями, а с энергетическими параметрами. В качестве такого оценочного критерия предлагается использовать объёмную плотность диссипации энергии

$$\bar{W} = \int_0^t \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dt. \quad (12)$$

В § 2.3 приводится решение задачи о растяжении плоского образца с разрывным полем скоростей перемещений

В п. 2.3.1 рассматривается основанное на решении Оната-Прагера решение задачи о растяжении полосы, ослабленной двумя симметричными вырезами с разрывным полем скоростей перемещений при условии сжимаемости материала.

Поле скоростей, с учётом сделанного ранее предположения о виде функции плотности, имеет вид

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 - V, \\ V_2 &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2. \end{aligned} \quad (13)$$

В п. 2.3.2 определяется поле деформаций в окрестности поверхности разрыва скоростей. Для описания движения среды используется форма Эйлера.

Компоненты тензора конечных деформаций Альманси могут быть представлены в виде

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\rho}{\rho_0} & -\frac{\rho}{\rho_0} \bar{W} \\ -\frac{\rho}{\rho_0} \bar{W} & 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \bar{W}^2 - \frac{\rho}{\rho_0} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Угол  $\theta$  между первым главным направлением тензора Альманси и касательной к линии разрыва скоростей  $L$ , а также основные инварианты тензора Альманси вычисляются через величину  $\bar{W}$  – объёмной плотности диссипации энергии отнесённой к пределу:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= -\frac{2}{\bar{W}}, \\ I_E &= \frac{1}{4} \left( 2 - \frac{\rho}{\rho_0} \bar{W}^2 - 2 \frac{\rho}{\rho_0} \right), \\ II_E &= \frac{1}{4} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \bar{W}^4 + \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \bar{W}^2; \end{aligned} \quad (15)$$

главные значения тензора Альманси равны

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{4} \frac{\rho}{\rho_0} \bar{W}^2 \left( \sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right), \\ E_2 &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{1}{4} \frac{\rho}{\rho_0} \bar{W}^2 \left( \sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} + 1 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

В п. 2.3.3 описывается неединственность симметричного течения в рассматриваемой задаче. Всевозможные несимметричные течения могут быть получены путём задания на плоскости  $x, y$  движения точки, в которой пересекаются линии скольжения. Траектория движения этой точки может быть направлена произвольно, а скорость её движения ограничена условиями:

$$-V \leq \frac{dx_o}{dt} \leq V, \frac{dy_o}{dt} = 0. \quad (17)$$

Критерий выбора предпочтительного решения задач о пластическом течении с учётом изменений геометрии тела, когда существует несколько (бесконечное множество) полных решений:

$$\inf_c \sup_{L_i} W. \quad (18)$$

Инварианты и главные значения тензора Альманси для несимметричного течения найдутся по формулам:

$$I_E = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - A^2 \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (19)$$

$$II_E = 4A^2 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 (1 + A^2),$$

$$E_{1,2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) - A^2 \frac{\rho}{\rho_0} \pm A \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{1 + A^2}, \quad (20)$$

где  $A = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2V} \sqrt{\left( \frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V \right)^2}}{2(\sqrt{2}\bar{G} + 1)}$ ,  $\bar{G} = \frac{G}{V}$ ,  $G$  – нормальная скорость распространения линии скольжения.

В п. 2.3.4 рассматривается растяжение полосы с разрушением при условии

$$W = W_*. \quad (21)$$

Наименьшее падение усилия достигается при угле между линией скольжения и вектором направления скорости вершины трещины  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . В этом случае работа, затраченная на деформацию полосы до разрушения, будет наибольшей, а скорость распространения трещины наименьшей.

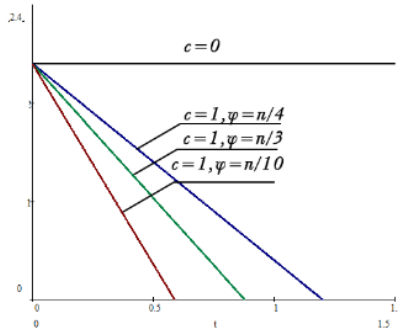


Рисунок 4 – Графики зависимости усилия, необходимого для деформирования полосы от времени при различных значениях угла  $\varphi$

В п. 2.3.5 рассматриваются две схемы определения констант разрушения на основе испытаний плоских образцов. Первая – упрощённая – предполагает, что деформации материала до образования макротрещины малы и, поэтому, не учитываются.

В качестве критерия разрушения принимается критерий:

$$\bar{W} \geq \bar{W}_*. \quad (22)$$

Тогда критическое значение диссипации энергии равно

$$\bar{W}_* = \frac{\frac{B}{\sqrt{2}}}{\frac{V(1-\psi)}{\sqrt{2}\psi} + \frac{V}{\sqrt{2}}} = \frac{B\psi}{V(1-\psi) + V\psi} = \frac{B\psi}{V}, \quad (23)$$

$B = V + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_1 + V\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} [\ln \rho] x_2 + V\right)^2}$ ,  $\psi$  – коэффициент сужения образца.

Вторая схема предполагает следующее описание процесса разрушения образца. Перед началом нагружения образец имеет исходные длину и ширину  $l_0, a_0$ . На первом этапе реализуется решение с непрерывным полем скоростей перемещений до зарождения в материале образца макротрещины. К концу первого этапа образец имеет промежуточные параметры  $l_n, a_n$ . На втором этапе реализуется решение с разрывным полем скоростей перемещений, при котором происходит развитие трещины. Второй этап заканчивается разрывом образца. К этому моменту он имеет конечные параметры  $l_k, a_k$ .

Вводятся две константы материала:  $E_{**}$  – значение  $E_1$ , тензора Альманси, соответствующее концу первого этапа деформирования, определяющее момент зарождения макротрещины и начала образования «шейки»,  $E_*$  – значение  $E_1$  в вершине макротрещины, определяющее скорость распространения макротрещины.

$$E_{**} = E_1 = \frac{1}{2} - \frac{\rho_0}{2\rho(1 + \delta_n)^2}, \quad (24)$$

$$\bar{W}_* = \bar{W}_{*I} + \bar{W}_{*II} = 2 \ln(1 + \delta_n) + \frac{B}{V} \left( 1 - \frac{a_0}{a_n} (1 - \psi) \right). \quad (25)$$

Константа  $E_*$  находится путём подстановки (28) в соотношение

$$E_1 = \frac{1}{4} \left( 2 - \bar{W}_{II}^2 D^2 - \frac{\rho}{\rho_0} (A^2 + D^2) \right) + \frac{1}{4} \sqrt{\left( \frac{\rho}{\rho_0} (D^2 - A^2) - \bar{W}_{II}^2 D^2 \right)^2 + 4 \bar{W}_{II}^2 D^4 \frac{\rho}{\rho_0}}. \quad (26)$$

В третьей главе приводится решение задач о растяжении/сжатии полосы с учётом сжимаемости материала в условиях плоского напряженного состояния.

В § 3.1 рассматривается решение задачи о растяжении полосы в условиях плоского напряжённого состояния.

Поле скоростей имеет вид:

$$V_1 = -2 \frac{V}{l} x_1 - 3 \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, V_2 = \frac{V}{l} x_2. \quad (27)$$

где функция плотности  $\rho$ , как и в случае плоской деформации, полагается зависящей только от времени.

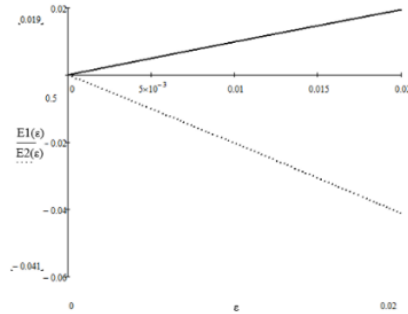


Рисунок 5 – Графики зависимости главных значений тензора Альманси от относительного удлинения образца при плоском напряжённом состоянии

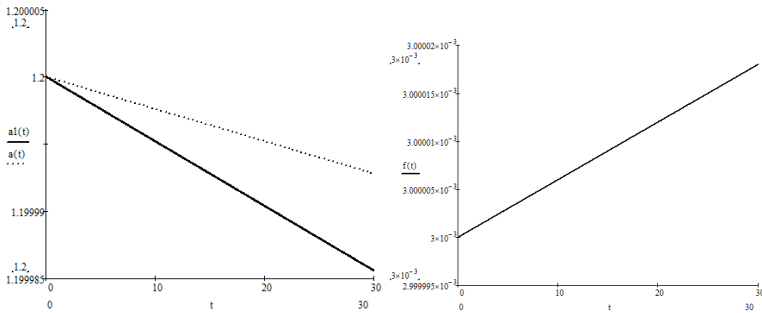


Рисунок 6 – Сравнение графиков изменения ширины полосы с течением времени при плоской деформации и плоском напряжённом состоянии

В § 3.2 рассматривается решение задачи о сжатии полосы в условиях плоского напряжённого состояния.

Поле скоростей:

$$V_1 = \frac{V}{h} x_1 - \int \frac{d}{dt} [\ln \rho] dx_1, \quad V_2 = -\frac{V}{h} x_2, \quad (28)$$



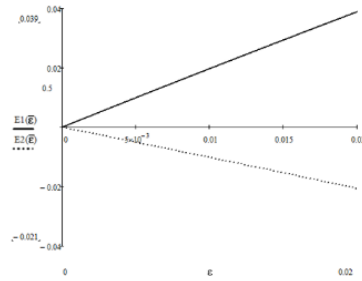


Рисунок 7 – Графики зависимости главных значений тензора Альманси от относительного удлинения образца при плоском напряжённом состоянии

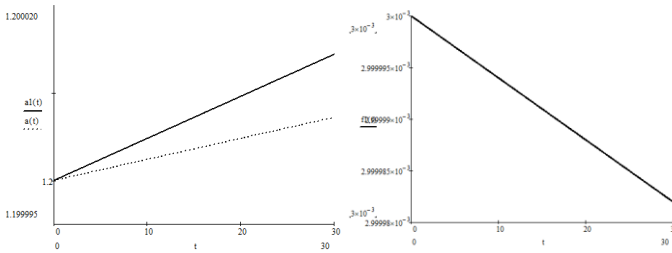


Рисунок 8 – Сравнение графиков изменения ширины полосы с течением времени при плоской деформации и плоском напряжённом состоянии

В § 3.3 рассматривается накопление деформаций в полосе при её последовательном растяжении-сжатии. Постановка задачи аналогична задаче в условиях плоской деформации.

Траектории движения частиц материала как для при растяжении, так и при сжатии определяются зависимостью

$$x_2 = \sqrt{\frac{x_1^0 (x_2^0)^2 \rho_0^3}{x_1 \rho^3}}, \quad (29)$$

где  $x_1^0, x_2^0$  – значения  $x_1, x_2$  в момент времени  $t = 0$ .

Как и при плоской деформации, в качестве критерия оценки изменения структуры материала при циклическом нагружении предлагается использовать объёмную плотность диссипации энергии

$$\bar{W} = \int_0^t \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dt. \quad (30)$$

В четвёртой главе рассматриваются задачи о внедрении жёстких штампов.

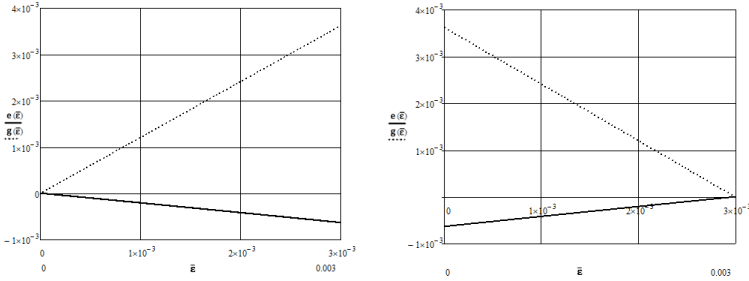


Рисунок 9 – Зависимость инвариантов тензора деформаций от относительного удлинения/сжатия образца при плоской деформации

В § 4.1 рассматривается решение задачи о вдавливании клина с углом раствора  $2\theta$  в выпуклую заготовку с учётом трения.

Система уравнений для определения неизвестных  $x_C(t)$ ,  $y_C(t)$ ,  $\delta(t)$ ,  $\tau_A(t)$ , где  $x_C(t)$ ,  $y_C(t)$  – координаты точки  $C$ ,  $\delta(t)$  – угол между линией  $AC$  и осью  $x$ ,  $\tau_A(t)$  – время начала движения материальной точки, имеющей в момент времени  $t$  координаты  $x_A(t)$ ,  $y_A(t)$ , имеет вид

$$\begin{aligned}
 y'_C(t) - f'(x_C)x'_C &= 0, \\
 x'_C z_1 - y'_C z_2 - \omega \psi' [x_C \sin \delta z_1^2 - (y_C + t) \cos \delta z_2^2] &= z_2, \\
 x'_C z_1 - \psi' x_C z_1^2 \omega \sin \delta + \tau'_A [v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - x'_C(\tau_A)] &= \\
 &= v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi), \\
 y'_C \frac{z_2}{tg\theta} - \omega \cos \delta \frac{z_2}{tg\theta} \psi' [tg\theta + z_2(y_C + t \omega tg\theta \sin \delta)] &+ \\
 + \tau'_A [v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - y'_C(\tau_A)] &= v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi) - \omega \sin \delta z_2.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь  $z_1 = \frac{1}{1 + \omega \cos \delta}$ ,  $z_2 = \frac{tg\theta}{1 - \omega tg\theta \sin \delta}$ .

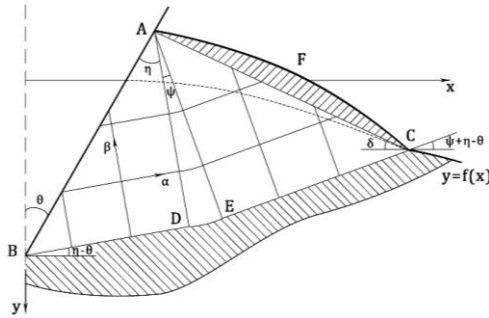


Рисунок 10 – Поле линий скольжения при вдавливании клина с углом раствора  $2\theta$  в выпуклую заготовку

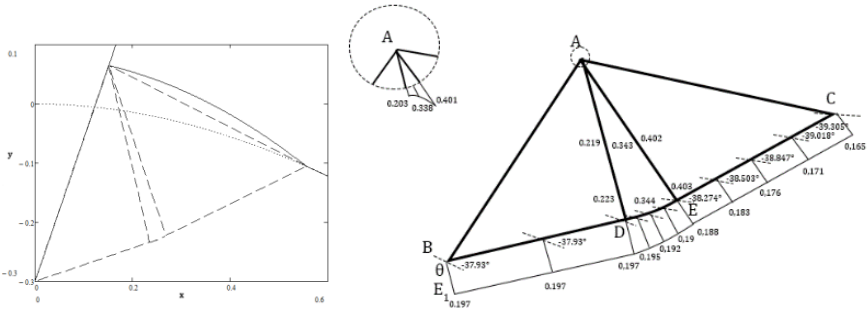


Рисунок 11 – Деформированная поверхность и распределение деформаций в задаче о вдавливании клина  $y = |x|ctg(\theta)$  с углом раствора  $22^{\circ}31'2''$  в гиперболический цилиндр  $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$

В § 4.2 рассматривается пластическое течение в задаче о сжатии выпуклого тела плоским штампом с учётом трения по схемам Хилла и Прандтля.

Система уравнений для решения задачи по схеме Хилла имеет вид:

$$y_c(t) = f(x_c(t)),$$

$$x_c \sqrt{2} \cos \eta \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right) + (y_c + t) \left( 1 + \sqrt{2} \cos \eta \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right) \right) = 0,$$

$$\frac{x_c}{1 + \sqrt{2} \cos \eta \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \eta - \psi \right)} = \left( \frac{1}{\cos \eta} \int_{\tau_A}^t \cos \left( \eta + \psi - \frac{\pi}{2} \right) dt + x_c(\tau_A) \right), \quad (32)$$

$$\frac{1}{\cos \eta} \int_{\tau_A}^t \sin \left( \eta + \psi - \frac{\pi}{2} \right) dt + y_c(\tau_A) + t = 0.$$

Система уравнений для решения задачи по схеме Прандтля:

$$y_c(t) = f(x_c(t)),$$

$$(y_c + t) \left( \cos \eta + \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} + \eta - \psi \right) \right) + x_c \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \eta - \psi \right) = 0,$$

$$\frac{x_c \cos \eta}{\cos \eta + \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} + \eta - \psi \right)} = \left( \cos \eta \int_{\tau_A}^t \cos(\psi - \eta) dt + x_c(\tau_A) \right), \quad (33)$$

$$\cos \eta \int_{\tau_A}^t \sin(\psi - \eta) dt + y_c(\tau_A) + t = 0.$$

В § 4.3 рассматривается пластическое течение в задаче о вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта.

Поверхности  $AF$  и  $GC$  (рисунок 14) могут быть представлены в параметрическом виде

$$\begin{aligned}
 x_1(\tau, t) &= h + \int_{\tau}^t v_x dt, y_1(\tau, t) = y_A(\tau) + \int_{\tau}^t v_y dt \\
 x_2(\tau, t) &= x_C(\tau) + \int_{\tau}^t v_x dt, y_2(\tau, t) = y_C(\tau) + \int_{\tau}^t v_y dt.
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

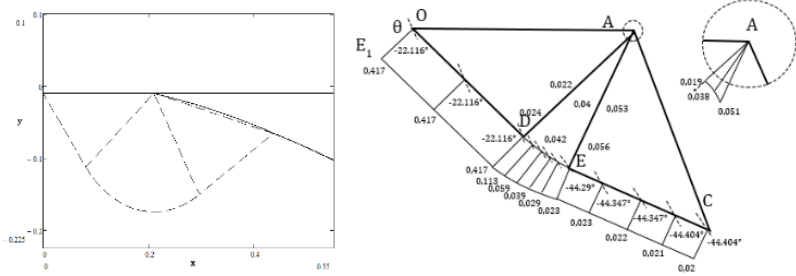


Рисунок 12 – Деформированная поверхность и распределение деформаций в задаче о сжатии гиперболического цилиндра  $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$  по схеме Хилла

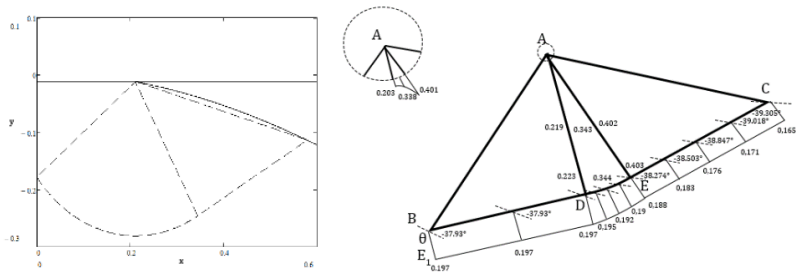


Рисунок 13 – Деформированная поверхность и распределение деформаций в задаче о сжатии гиперболического цилиндра  $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$  по схеме Прандтля

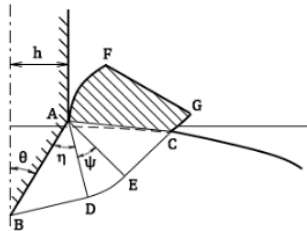


Рисунок 14 – Поле линий скольжения при вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта шириной  $2h$  в выпуклую заготовку

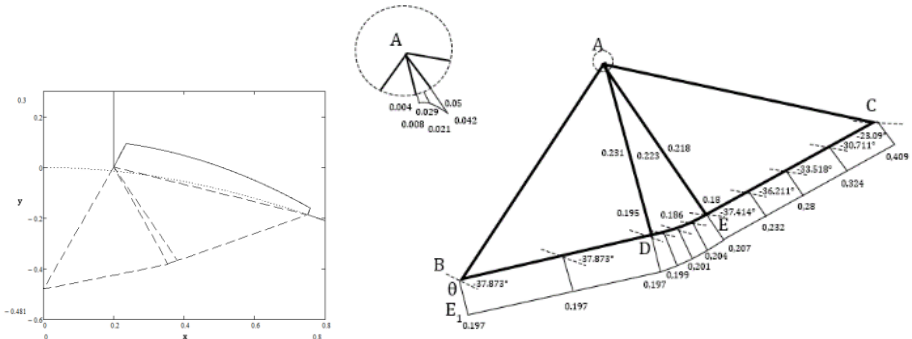


Рисунок 15 – Деформированная поверхность и распределение деформаций в задаче о вдавливании клина с углом раствора  $22^{\circ}31'2''$  и шириной 0.2 в заготовку  $y = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + 2}$

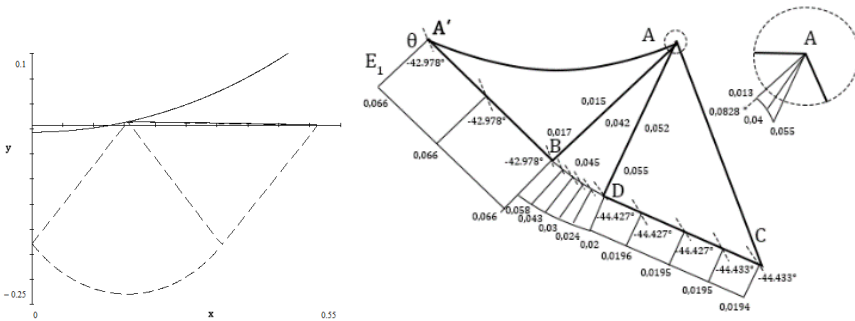


Рисунок 16 – Деформированная поверхность и распределение деформаций при внедрении абсолютно шероховатого цилиндра радиуса  $r = 1$  в жесткопластическое полупространство

В § 4.4 рассматривается первоначальный этап деформирования в задаче о сжатии двух симметричных выпуклых жёсткопластических тел. Предполагается, что предел текучести материала нижнего тела меньше верхнего, то есть на данном этапе в пластическое состояние переходит только нижнее тело. Также полагается, что проскальзывание на поверхности контакта отсутствует. Формы тел в начальный момент времени задаются функциями  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$ , симметричными относительно оси  $y$ . При  $t > 0$  свободную поверхность можно разбить на недеформированную  $y = f_2(x)$  и деформированную  $y = F(x, t)$ .

Системой четырёх уравнений

$$\begin{aligned}
x_c(t) &= x_A(t)(1 + 2 \sin(\psi(t))), \\
f_1(x_A(t)) - t - f_2(x_c(t)) &= 2x_A(t) \cos(\psi(t)), \\
F(x_A(t) - T_1(t)) &= f_1(x_A(t)) - t - T_2(t), \\
F(x_c(t) - T_1(t)) &= f_2(x_c(t)) - T_2(t).
\end{aligned} \tag{35}$$

определяются четыре неизвестных функции  $x_A(t)$ ,  $x_c(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $F(x)$ . Здесь  $F(x, t) = F(x - T_1(t)) + T_2(t)$ , где  $T_1(t) = v_\alpha \int_0^t \cos(\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4}) d\lambda$ ,  $T_2(t) = v_\alpha \int_0^t \sin(\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4}) d\lambda$ ,  $y = F(x) -$  поверхность, смещение которой вдоль  $DC$  образует деформированную поверхность  $y = F(x, t)$ .

## Заключение

Основные результаты работы:

1. Получено аналитическое решение задач о растяжении, сжатии, последовательном растяжении/сжатии полосы с непрерывным полем скоростей перемещений при условии сжимаемости в условиях плоской деформации. Найдены поля скоростей, инварианты и главные значения тензора конечных деформаций Альманси, изменение ширины полосы с течением времени, а также необходимое для её деформирования усилие. В задаче о последовательном растяжении-сжатии полосы найдены траектории движения частиц материала.

2. Получено аналитическое решение задачи о растяжении полосы с разрывным полем скоростей перемещений при условии сжимаемости материала в условиях плоской деформации. Определены поля скоростей и деформаций в окрестности разрыва скоростей, найдено изменение градиентов деформаций при пересечении линии разрыва скоростей, инварианты и главные значения тензора деформаций Альманси, угол между первым главным направлением тензора Альманси и касательной к линии разрыва. Рассмотрены возможные несимметричные течения, растяжение полосы с разрушением, определена скорость движения вершины трещины и усилие, необходимое для деформирования полосы. Описаны упрощённая и полная схемы определения констант разрушения при растяжении полосы, найдено изменение градиентов деформаций при пересечении линии разрыва скоростей если материал до этого деформировался.

3. Получено аналитическое решение задач о растяжении, сжатии, последовательном растяжении/сжатии полосы с непрерывным полем скоростей перемещений при условии сжимаемости в условиях плоского напряжённого состояния. Найдены поля скоростей, инварианты и главные

значения тензора конечных деформаций Альманси, изменение ширины полосы с течением времени, а также необходимое для её деформирования усилие. В задаче о последовательном растяжении-сжатии полосы найдены траектории движения частиц материала.

4. Создан программный продукт для определения количества полуциклов нагружения до зарождения в материале трещины и определения основных параметров процесса малоциклового нагружения плоского образца в условиях плоской деформации и плоского напряжённого состояния (изменение размеров полосы, накопленные пластические деформации, граничные напряжения, необходимое для деформирования образца усилие, объёмная плотность диссипации энергии).

5. Создан программный продукт для вычисления констант разрушения по упрощённой и полной схеме, а также параметров плоского образца при его растяжении в условиях плоской деформации.

6. Получены аналитические решения задач о: вдавливании клина в выпуклое тело, сжатии выпуклого тела плоским штампом, вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта, сжатии двух симметричных выпуклых жёсткопластических тел с учётом трения.

7. Получены численные решения задач о: внедрении клина  $y = |x| \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{6})$  в клин  $y = -|x| \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8})$  с коэффициентом трения 0.20; вдавливании клина  $y = |x| \operatorname{ctg}(\theta)$  с углом раствора  $22^\circ 31' 2''$  в гиперболический цилиндр  $y = \sqrt{2 - \sqrt{x^2 + 2}}$  с коэффициентом трения 0.12; сжатии гиперболического цилиндра  $y = \sqrt{2 - \sqrt{x^2 + 2}}$  по схемам Хилла и Прандтля; деформации полупространства при внедрении клина шириной  $h = 1$ , с углом раствора  $\theta = \frac{\pi}{6}$  и коэффициентом трения 0.20; вдавливании клина с углом раствора  $22^\circ 31' 2''$  и шириной  $h = 0.2$  в гиперболический цилиндр  $y = \sqrt{2 - \sqrt{x^2 + 2}}$ ; деформации жёсткопластического полупространства при внедрении в него абсолютно шероховатого цилиндра радиуса  $r = 1$ .

### **Основные публикации по теме диссертации**

#### **Публикации в изданиях, индексируемых в Web of Science и Scopus:**

1. Григорьева, А. Л. Моделирование деформационных процессов элементов сложных конструкций в условиях малоциклового деформации / А. Л.

Григорьева, Я. Ю. Григорьев, А. И. Хромов, И. В. Канашин // Морские интеллектуальные технологии. – 2021. – Т. 2 № 2(52). – С. 123-128.

### **Публикации в рецензируемых научных изданиях, рекомендуемых ВАК:**

2. Канашин, И. В. Растяжение сжимаемой полосы с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации / И. В. Канашин, А. Л. Григорьева, А. И. Хромов, Я. Ю. Григорьев, В. А. Машевский // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2021. – № III-1(51). – С. 39-41.
3. Григорьев, Я. Ю. Математическая модель процесса деформирования элементов, изготовленных из конструкционных материалов с использованием машинного обучения / Я. Ю. Григорьев, А. Л. Григорьева, И. В. Канашин, А. Н. Петрова, А. И. Хромов // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2022. – № I-1(57). – С. 15-23.
4. Канашин, И. В. Растяжение полосы сжимаемого материала с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации / И. В. Канашин, А. Л. Григорьева, А. И. Хромов, Я. Ю. Григорьев // Труды МАИ. – 2022. – № 124.
5. Канашин, И. В. Моделирование процесса деформирования экспериментального образца при условии малоциклового нагружения / И. В. Канашин, А. И. Хромов, Я. Ю. Григорьев, А. Л. Григорьева // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2022. – № V-1(61). – С. 26-31.
6. Канашин, И. В. Малоцикловое нагружение плоского образца с непрерывным полем скоростей перемещений при учёте условия сжимаемости материала / И. В. Канашин, А. Л. Григорьева, А. И. Хромов, Я. Ю. Григорьев // Труды МАИ. – 2023. – № 130.
7. Григорьев, Я. Ю. Математическая модель задачи о вдавливании клина в выпуклую заготовку / Я. Ю. Григорьев, А. Л. Григорьева, И. В. Канашин // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2025. – № III(83). – С. 117-126.

### **Тезисы конференций:**



8. Григорьева, А. Л. Моделирование сравнительных деформационных процессов при растяжении плоских образцов в условиях различных деформационных состояний / А. Л. Григорьева, Я. Ю. Григорьев, А. И. Хромов, И. В. Канагин // Материалы XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 19-24 августа 2019 года. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – Т 3. Механика деформируемого твёрдого тела. С. 423 – 425.
9. Григорьева, А. Л. Математическое моделирование процессов деформационного изменения полей тензоров деформаций / А. Л. Григорьева, А. И. Хромов, И. В. Канагин // Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: материалы II Всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 08-12 апреля 2019 г. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КНАГУ», 2019. – Ч. 2. С. 300 – 302.
10. Канагин, И. В. Растяжение полосы из сжимаемого материала с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации / И. В. Канагин, А. Л. Григорьева, А. И. Хромов // Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: материалы III Всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 06-10 апреля 2020 г. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КНАГУ», 2020. – Ч. 2. С. 278 – 281.
11. Григорьева, А. Л. Математическая модель деформации оболочечных конструкций при воздействии окружающих воздействий / А. Л. Григорьева, А. И. Хромов, И. В. Канагин, В. А. Машевский // Актуальные проблемы информационно-телекоммуникационных технологий и математического моделирования в современной науке и промышленности, материалы I международной научно-практической конференции молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 20-25 марта 2021 г. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КНАГУ», 2021. – С. 87-89.
12. Канагин, И. В. Растяжение полосы из сжимаемого материала с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации / И. В. Канагин, А. И. Хромов // Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению, Комсомольск-на-Амуре, 07-11 февраля 2022 г. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КНАГУ», 2022. – С. 216-2217.
13. Канагин, И. В. Малоцикловое нагружение материалов и задача о растяжении сжимаемой полосы / И. В. Канагин, А. Л. Григорьева, А. И. Хромов // Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и

- прикладных исследований: материалы V Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 11-15 апреля 2022 г. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2022. – Ч. 2. С. 378 – 380.
14. Канашин, И. В. Одноосное деформирование плоского образца с учетом сжимаемости материала / И. В. Канашин, А. И. Хромов // Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению: материалы II Международной научно-практической конференции молодых учёных Комсомольск-на-Амуре, 14-18 ноября 2022 г. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2022. – Ч. 1. – С. 370 – 375.
  15. Канашин, И. В. Растяжение полосы с разрывным полем скоростей перемещений при условии сжимаемости материала / И. В. Канашин, А. И. Хромов // Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: материалы VI Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 10-14 апреля 2023 г. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2023. – Ч. 2. С. 474 – 477.
  16. Шершнев, А. И. Программный продукт для определения констант разрушения на основе растяжение плоского образца с условием сжимаемости материала / А. И. Шершнев, И. В. Канашин, А. И. Хромов // Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению: материалы Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных Комсомольск-на-Амуре, 16-17 ноября 2023 г. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2023. – С. 617 – 620.
  17. Канашин, И. В. Задача о внедрении плоского клина в гиперболический цилиндр / И. В. Канашин, А. И. Хромов // Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: материалы VII Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 08-12 апреля 2024 г. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2024. – Ч. 2. С. 477 – 480.
  18. Шершнев, А. И. Задача о вдавливании клина в выпуклое тело / А. И. Шершнев, И. В. Канашин, А. И. Хромов // Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: материалы VII Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 08-12 апреля 2024 г. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2024. – Ч. 2. С. 477 – 480.
  19. Канашин, И. В. Задача о сжатии выпуклого тела плоским штампом / И. В. Канашин, А. Л. Григорьева, А. И. Хромов // Вычислительные технологии и прикладная математика: материалы III научной конференции с

- международным участием, Комсомольск-на-Амуре, 07-11 октября 2024 г. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2024. – С. 189 – 193.
20. Канашин, И. В. Математическое моделирование пластического течения в задаче о вдавливании клина в выпуклое тело / И. В. Канашин, А. И. Хромов // Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению: материалы III Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 11-12 декабря 2024 г. / редкол.: А. В. Космынин (отв. ред.) [и др.]. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2025. – Ч. 2 – 412 с., с. 192-195.
  21. Канашин, И. В. Численное решение задачи о вдавливании клина в выпуклое тело / И. В. Канашин, А. И. Хромов // Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению: материалы III Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 11-12 декабря 2024 г. / редкол.: А. В. Космынин (отв. ред.) [и др.]. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2025. – Ч. 2 – 412 с., с. 184-187.
  22. Канашин, И. В. Задача о вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта в выпуклое тело / И. В. Канашин, А. И. Хромов // Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению: материалы III Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 11-12 декабря 2024 г. / редкол.: А. В. Космынин (отв. ред.) [и др.]. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2025. – Ч. 2 – 412 с., с. 240-244.
  23. Хряпенко, К. Д. Численное решение задачи о вдавливании клина с ограниченной поверхностью контакта в выпуклое тело / К. Д. Хряпенко, И. В. Канашин, А. И. Хромов // Наука, инновации и технологии: от идей к внедрению: материалы III Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 11-12 декабря 2024 г. / редкол.: А. В. Космынин (отв. ред.) [и др.]. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2025. – Ч. 2 – 412 с., с. 188-191.
  24. Канашин, И. В. Численное решение задачи о сжатии гиперболического цилиндра плоским штампом по схеме Прандтля / И. В. Канашин // Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: материалы VIII Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 07-11 апреля 2025 г.: в 3 ч. / редкол.: А. В. Космынин (отв. ред.), Т. Н. Шелковникова, Н. А. Жалдак. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2025. – Ч. 2. С. 501 – 505.
  25. Канашин, И. В. Численное решение задачи о сжатии гиперболического цилиндра плоским штампом по схеме Хилла / И. В. Канашин // Молодёжь

и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: материалы VIII Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 07-11 апреля 2025 г.: в 3 ч. / редкол.: А. В. Космынин (отв. ред.), Т. Н. Шелковникова, Н. А. Жалдак. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КНАГУ», 2025. – Ч. 2. С. 505 – 509.

26. Хряпенко, К. Д. Численное решение задачи о внедрении абсолютно шероховатого цилиндра в жесткопластическое полупространство / К. Д. Хряпенко, И. В. Канашин // Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: материалы VIII Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных, Комсомольск-на-Амуре, 07-11 апреля 2025 г.: в 3 ч. / редкол.: А. В. Космынин (отв. ред.), Т. Н. Шелковникова, Н. А. Жалдак. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КНАГУ», 2025. – Ч. 2. С. 596 – 600.

### **Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ:**

27. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № RU 2022662149 Россия. Определение основных параметров малоциклового нагружения металлических материалов: № 2022661561: заявл. 22.06.2022: опубл. 29.06.2022 / Канашин И. В.; заявитель Канашин И. В. – 1 с.
28. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № RU 2024661090 Россия. Определение параметров малоциклового нагружения плоских образцов из металлических материалов: № 2024660244: заявл. 07.05.2024: опубл. 15.05.2024 / Канашин И. В., Григорьев Я. Ю., Григорьева А. Л; заявитель КНАГУ – 1 с.
29. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № RU 2024661413 Россия. Определение констант разрушения на основе испытаний плоских образцов: № 2024660243: заявл. 07.05.2024: опубл. 17.05.2024 / Канашин И. В., Григорьев Я. Ю., Григорьева А. Л; заявитель КНАГУ – 1 с.