

На правах рукописи



Снигур Ксения Сергеевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
РУСЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В КАНАЛАХ С  
ПЕСЧАНО-ГРАВИЙНЫМ ОСНОВАНИЕМ**

Специальность 05.13.18 –  
«Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ»

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Комсомольск-на-Амуре – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Вычислительном центре Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, зав. лабораторией вычислительной механики Вычислительного центра ДВО РАН <b>Потапов Игорь Иванович</b> (г. Хабаровск)
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории прикладной и вычислительной гидродинамики Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН <b>Воеводин Анатолий Федорович</b> (г. Новосибирск)
	кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной аэрогидродинамики Института прикладной математики ДВО РАН <b>Терешко Дмитрий Анатольевич</b> (г. Владивосток)
Ведущая организация	Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (г. Москва)

Защита состоится «22» апреля 2016 г. в 10:00 ч. на заседании диссертационного совета Д 999.055.04 в Комсомольском-на-Амуре государственном техническом университете по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, просп.Ленина, д.27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке КнАГТУ и на сайте [www.knastu.ru](http://www.knastu.ru)

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный гербовой печатью, просим направлять в адрес диссертационного совета Д 999.055.04, e-mail: [diss@knastu.ru](mailto:diss@knastu.ru)

Автореферат разослан "...." февраля 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
канд. физ.-мат. наук, доцент



Лошманов А.Ю.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность проблемы.** Исследование русловых и гидродинамических процессов равнинных рек является актуальной проблемой на сегодняшний день. Прогноз изменения донной поверхности необходим для решения конкретных инженерных и проектно-исследовательских задач, проектирования гидротехнических сооружений, мостов, дамб, водозаборных станций, сезонных судоходных трасс, а так же для предупреждения чрезвычайных ситуаций.

Важными особенностями такого класса задач являются:

- наличие двух изменяющихся во времени свободных границ (донная поверхность и свободная поверхность);
- нестационарность, нелинейность и многомасштабность процесса размыва дна в каналах с песчано-гравийным основанием.

Экспериментальное исследование руслового процесса предоставляет наиболее надежную информацию о физическом процессе, но уступает исследованию с помощью математического моделирования по стоимости, временным затратам и полноте полученной информации.

Математическое моделирование русловых и гидродинамических процессов является сложнейшей задачей механики сплошных сред. Трудности моделирования русловых процессов обусловлены:

- сложностью построения математической модели, учитывающей влияние физических и гранулометрических свойств донного материала, двух изменяющиеся во времени границ (свободной поверхности потока и донной поверхности русла), нелинейности гидравлического сопротивления естественного русла сложной природной многомасштабной топологии и турбулентного характера потока;
- необходимостью в мощных вычислительных ресурсах;
- необходимостью в большом объеме экспериментальных данных о рельефе донной поверхности реки и физико-механических характеристиках слагающих ее грунтов;
- стохастичностью гидрологических данных.

Не претендуя на полноту, укажем основных ученых, которые внесли вклад в развитие математического моделирования русловых процессов равнинных рек с песчаным и песчано-гравийным основанием. В 50-х годах начала формироваться теория взвешенных наносов, вклад в ее развитие внесли Kennedy, Жуковский Великанов Маккавеев, Россинский Караушев, Гончаров.

Одной из первых моделей влекомых наносов является модель Peter-Meyer и Muller, она основана на концепции мгновенных касательных напряжений в тонком придонном слое. Эйнштейном была предложена стохастическая модель транспорта наносов. Bagnold предполагал, наносы перемещаются потоком за счет турбулентной диффузии, а расход наносов связан с мощностью потока в придонной области. Bagnold и, позднее, Bailard определили зависимость между уклоном дна и расходом влекомых наносов. Многими другими учеными также были предложены модели транспорта влекомых наносов, выделим среди них Гришанина, Барышникова, Дебольского, Шамова, Караушева, Parker, Coleman, van Rijn.

Следует отметить, что модели, содержащие в уравнениях феноменологические параметры и полуаналитические зависимости, позволяют получить только качественную оценку изменения донной поверхности.

На основе идей Bagnold и Bailard российским ученым П.Г. Петровым была предложена аналитическая модель транспорта влекомых наносов. Модель была получена аналитически из уравнения движения тонкого придонного слоя, включающего закон Кулона для сыпучей среды и закон Прандтля для жидкой среды. Модель не содержит в себе но-

вых феноменологических параметров, кроме исходных параметров реологической модели, и учитывает влияние морфологических особенностей дна, реальных физико-механических и гранулометрических параметров донного материала на транспорт влекомых наносов.

В данной работе на основе аналитической модели предложена математическая модель для неустановившегося руслового процесса, которая учитывает влияние физико-механических и гранулометрических характеристик донного материала, морфологических особенностей дна, турбулентного характера движения речного потока, имеющего свободные границы, а так же нелинейность гидравлического сопротивления русла. Предложенная модель упрощена до двумерно-профильного приближения и одномерного приближения.

**Цель настоящей работы** заключается в разработке математических моделей, алгоритмов расчета, их верификации и получении численных закономерностей для исследования русловых процессов песчано-гравийных равнинных рек и каналов.

**Основными задачами** работы являются:

- 1) разработка математических моделей, описывающих эволюцию донной поверхности равнинных рек с песчаным или песчано-гравийным основанием;
- 2) построение численных алгоритмов решения русловых задач в одномерной и двумерной постановках и их верификация;
- 3) получение численных закономерностей формирования донной поверхности канала с песчаным и песчано-гравийным основанием различной исходной топологии, учитывающих влияние характера гидродинамического потока, физико-механических и гранулометрических характеристик грунта.

**Научная новизна** работы заключается в следующем:

- предложена одномерная и двумерная математические постановки задачи об эволюции песчаной или песчано-гравийной донной поверхности, описывающие движение водного потока над изменяющейся во времени донной поверхностью сложной топологии с учетом турбулентной вязкости потока, транспорта взвешенных и влекомых наносов, физико-механических и гранулометрических параметров донного материала;

- разработаны численные алгоритмы решения русловых задач в одномерной и двумерной постановках, проведены численные эксперименты для оценки параметров вычислительных схем;

- получены численные закономерности формирования речного дна под воздействием гидродинамического потока при различной исходной топологии русла с учетом влияния характера гидродинамического потока, физико-механических и гранулометрических характеристик грунта. Выполнен сравнительный анализ решений, полученных в работе с помощью вычислительного эксперимента, с экспериментальными данными и решениями, полученными другими авторами.

**Положения, выносимые на защиту:**

- одномерная математическая модель, описывающая эволюцию донной поверхности с учетом сложной и изменяющейся во времени топологии дна, транспорта наносов во взвешенном и влекомом состоянии, физико-механических и гранулометрических характеристик донного материала;

- двумерная математическая модель, описывающая эволюцию донной поверхности с учетом турбулентного характера гидродинамического потока, изменяющейся во времени топологии дна, транспорта наносов во взвешенном и влекомом состоянии, физико-механических и гранулометрических характеристик донного материала;

- алгоритмы расчета полей скорости, давления, свободной и донной поверхностей потока для одномерной и двумерной русловой задачи;

- сравнительный анализ решений, полученных в работе с помощью вычислительного эксперимента, с экспериментальными данными и решениями, полученными другими авторами.

**Практическая значимость.** Разработанные программные комплексы могут быть использованы для проектирования и обслуживания гидротехнических сооружений, проведения дноуглубительных мероприятий, прокладки трубопровода под речным дном, для проведения проектно-изыскательских работ и прогнозирования изменения донного рельефа реки с песчаным и песчано-гравийным основанием сложной топологии в краткосрочной и долгосрочной перспективе и могут быть рекомендованы к использованию в Институте водных и экологических проблем, Государственном гидрологическом институте, Институте проблем механики.

**Достоверность полученных данных** обеспечивается использованием современной теории математического моделирования гидродинамических и русловых процессов, использованием методов, созданных на основе современной теории дифференциальных и интегральных уравнений. Согласование расчетных данных с известными экспериментальными данными и численными решениями по другим моделям подтверждает способность предложенной модели описывать изменения донной поверхности рек с песчаным и песчано-гравийным основанием сложной топологии.

**Вклад автора.** Решение задач, сформулированных в диссертационной работе, получено автором лично, либо при его участии. Постановка задач, выбор методов исследования, а также анализ результатов осуществлялись совместно с научным руководителем. Исследование свойств разработанных алгоритмов, проведение вычислительных экспериментов, обработка полученных результатов выполнены автором самостоятельно.

**Публикации и апробация работы** По результатам диссертационной работы автором опубликовано 22 научные работы, из них 3 статьи в журналах, входящих в список ведущих периодических журналов ВАК.

Предложенная математическая модель, алгоритмы решения задач и разработанные программные комплексы проходили апробацию в лаборатории "Вычислительная механика" в Вычислительном центре ДВО РАН при работе над тематикой лаборатории и в процессе реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (госконтракт № 02.740.11.0626), проектов ДВО РАН (14-III-B-03-037, X9 12-III-A-03-034) и проектов РФФИ (12-01-98518р, 15-05-07594). Автором получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Основные результаты работы были представлены на XXXV и XXXVII Дальневосточной Математической Школе-Семинаре имени академика Е.В. Золотова (2010 г. и 2014 г., г. Владивосток), XVII и XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (2011 г. и 2013 г., г. Алушта), X всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (2011 г., г. Нижний Новгород), IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (2012 г., г. Алушта), II Международной научно-практической конференции "Инновационные информационные технологии" (2013 г., г. Прага, Чешская Республика), V Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых "Задачи со свободными границами: теория эксперимент и приложения" (2014 г., г. Бийск), XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (2015 г., г. Алушта), XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (2015 г., г. Казань), VIII Международной конференции, посвященной 115-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" (2015 г., г. Новосибирск).

**Структура и объем диссертационной работы.** Диссертационная работа изложена на 121 странице и состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы (150 источников). Диссертация содержит 39 рисунков.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** изложена актуальность темы диссертационной работы, определены цели и задачи исследования, отражена научная новизна и практическая значимость работы, кратко описано ее содержание.

**Первая глава** посвящена формулировке общей трехмерной математической постановке для неустановившегося руслового процесса.

В первом параграфе рассматривается физическая постановка русловой задачи, определена расчетная область, которая показана на Рисунке 1. Выбран критерий условного разделения русловой задачи на подзадачу гидродинамики, в рамках которой рассматривается развитый турбулентный поток спокойной реки (число Рейнольдса  $Re > 10^4$ , число Фруда  $Fr = \ll 1$ ), и подзадачу донных деформаций, в рамках которой рассматривается транспорт взвешенных и влекомых наносов и определяется изменение донной поверхности.

Во втором параграфе формулируется общая трехмерная математическая постановка русловой задачи. Для описания нестационарного течения жидкости используются уравнения Рейнольдса

$$\rho_w \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_w F_i, \quad i, j = \overline{1, 3} \quad (1)$$

совместно с условием несжимаемости

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2)$$

где  $u_i$  – компоненты вектора скорости потока,  $x_i$  – компоненты вектора пространственных координат,  $\rho_w$  – плотность воды,  $t$  – временная координата,  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,  $F_i$  – компоненты вектора объемных сил.

Для замыкания уравнений (1)-(2) используется уравнение состояния

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}, \quad (3)$$

и тензор скоростей деформации

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (4)$$

где  $p$  – давление жидкости,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\mu = \mu_m + \mu_T$  – приведенная вязкость жидкости,  $\mu_m$  – молекулярная вязкость,  $\mu_T$  – турбулентная вязкость.

В естественных речных потоках, где концентрация донных наносов мала  $s \ll \rho_w$  и их влиянием на плотность воды  $\rho_w$  можно пренебречь, Баренблатт предложил рассматривать движение наносов как процесс переноса пассивной примеси

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial s W}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (5)$$

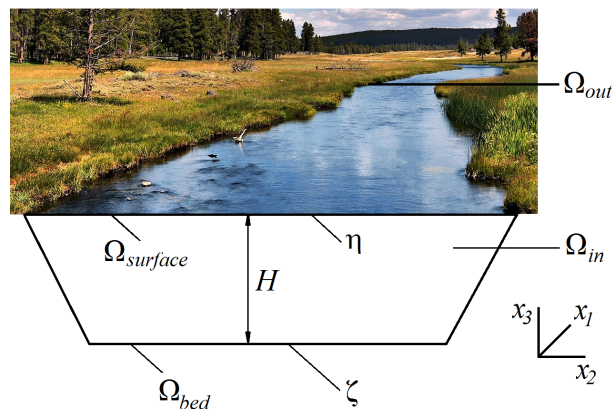


Рисунок 1 – Расчетная область

где  $s$  – объемная массовая концентрация частиц в потоке,  $\lambda_{ij}$  – тензор коэффициента перемешивания субстанции,  $W$  – гидравлическая крупность.

Для описания движения верхней подвижной границы расчетной области используется уравнение движения свободной поверхности

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = u_3, \quad x_i \in \Omega_{surface}, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (6)$$

для описания движения нижней подвижной границы расчетной области используется уравнение Экснера

$$\rho_s(1 - \epsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial q_i^b}{\partial x_i} = D - E, \quad x_i \in \Omega_{bed}, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (7)$$

где  $\rho_s$  – плотность донного материала,  $\epsilon$  – пористость донного материала,  $\zeta$  – уровень донной поверхности,  $q_i^b$  – вектор массового расхода влекомых наносов,  $D$  – источниковый член, описывающий осаждение наносов,  $E$  – источниковый член, описывающий взмыв наносов.

Уравнения (1)-(7) замыкаются начальными условиями

$$u_i = u_{0,i}(x_i), \quad s = s_0(x_i), \quad x_i \in V; \quad (8)$$

$$\zeta = \zeta_0(x_i), \quad x_i \in \Omega_{bed}; \quad (9)$$

$$\eta = \eta_0(x_i), \quad x_i \in \Omega_{surface}, \quad (10)$$

и граничными условиями

$$u_i = 0, \quad s = s_{bed}, \quad x_i \in \Omega_{bed}; \quad (11)$$

$$\eta = \eta_{out}(x_i), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = J, \quad su_1 m_1 - \lambda_{11} \frac{\partial s}{\partial x_1} m_1 = q_{out}^s(x_i), \quad x_i \in \Omega_{out}; \quad (12)$$

$$u_i = u_{in}(x_i), \quad s = s_{in}(x_i), \quad q_i^b = q_{in,i}^b(x_i), \quad x_i \in \Omega_{in}; \quad (13)$$

$$\sigma_{ij} n_i = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial x_i} n_i = 0, \quad x_i \in \Omega_{surface}; \quad (14)$$

где  $u_{0,i}$  – распределение  $i$ -ой скорости в начальный момент времени,  $s_0$  – начальное распределение концентрации в области,  $\zeta_0$  – начальный уровень донной поверхности,  $\eta_0$  – начальный уровень свободной поверхности потока,  $s_{bed}$  – массовая концентрация взвешенных наносов у дна,  $\eta_{out}$  – уровень свободной поверхности потока на выходе из расчетной области,  $J$  – основной горизонтальный уклон донной поверхности относительно оси  $x_1$ ,  $\vec{m} = \{m_1; m_2\}$  – вектор нормали к поверхности  $\Omega_{out}$ ,  $\lambda_{11}$  – коэффициент диффузионного перемешивания вдоль оси  $x_1$ ,  $q_{out}^s$  – поток массовой концентрации взвешенных наносов на выходе из расчетной области,  $u_{in}$  – распределение вектора скорости на входе в расчетную область,  $s_{in}$  – концентрация донных наносов, поступающих в расчетную область,  $q_{in,i}^b$  – расход влекомых наносов, поступающих в расчетную область,  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,  $\vec{n} = \{n_1; n_2\}$  – вектор нормали к поверхности  $\Omega_{surface}$ .

В третьем параграфе выполнен обзор моделей турбулентности, используемых при моделировании течения равнинных рек. В настоящей работе полагается, что турбулентный поток не имеет сложной структуры, дно ровное и высота возникаемых донных волн намного меньше их длины, поэтому было решено использовать алгебраическую модель турбулентности по И.Л. Розовскому, где

$$\mu = \frac{\rho_w g U^2 H^2}{4C^2 u_{max}(H - 2x_3)}, \quad (15)$$

где  $U$  – осредненная по глубине скорость потока,  $u_{max}$  – максимальное значение скорости потока,  $C$  – параметр Шези.

В четвертом параграфе рассматривается механизм получения членов  $D$  и  $E$  из уравнения переноса донных наносов

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial s W}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (16)$$

$$\lambda_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{pmatrix},$$

где  $W$  – гидравлическая крупность,  $\lambda_{ij}$  – коэффициент диффузионного перемешивания потока.

Для получения  $D$  и  $E$  осуществляется переход к двумерному уравнению транспорта донных наносов

$$S = \frac{1}{H} \int_{\zeta}^{\eta} s \, dx_3, \quad U_i = \frac{1}{H} \int_{\zeta}^{\eta} u_i \, dx_3, \quad q_i = \frac{1}{H} \int_{\zeta}^{\eta} u_i s \, dx_3 \quad (17)$$

где  $S$  – осредненная по глубине массовая концентрация наносов,  $q_i = q_i^b + q_i^s$  – компоненты вектора полного расхода донных наносов,  $q_i^b$  – компоненты вектора массового расхода влекомых наносов,  $q_i^s$  – компоненты вектора массового расхода взвешенных наносов,  $U_i$  – компоненты вектора осредненной по глубине скорости потока. Так как вертикальная скорость намного меньше горизонтальной поперечной и продольной скорости, при осреднении ею можно пренебречь

$$u_3 \approx 0, \quad (18)$$

тогда уравнение (16) примет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial S}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda_{11} \frac{\partial S}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda_{22} \frac{\partial S}{\partial x_2} \right) + E + D, \quad (19)$$

$$D = \lim_{x_3 \rightarrow \zeta} W s, \quad E = \lim_{x_3 \rightarrow \zeta} \lambda_{33} \frac{\partial s}{\partial x_3}, \quad (20)$$

где  $E$  – член уравнения, описывающий взмыв частиц,  $D$  – член уравнения, описывающий осаждение частиц.

Для определения  $\lambda_{33}$  в настоящей работе решено использовать формулы А.В. Караушева

$$\lambda_{33} = \frac{g \rho_w H u_3}{M C}, \quad M = (0.7C + 6)C, \quad W = const, \quad (21)$$

которые являются относительно простыми, верифицированы на достаточно широком наборе экспериментальных данных и часто используются в практике.

В обзоре моделей транспорта взвешенных наносов приведены экспериментальные зависимости определения параметров  $E$  и  $D$ . В настоящей работе используется модель транспорта взвешенных наносов Караушева, в которой коэффициент осаждения вычисляется из следствия (20), а для определения коэффициента взмучивания  $E$  выдвигается гипотеза, что в равновесном потоке осуществляется транзитное движение наносов

$$D = W S, \quad E = W S_*. \quad (22)$$



Для определения компонент вектора расхода влекомых наносов в работе используется аналитическая модель транспорта влекомых наносов, предложенная российским ученым П.Г. Петровым в 1991 г. на основе идей Бэйларда и Бэгнольда. Модель получена аналитически из уравнения движения тонкого придонного слоя, включающего закон Кулона для сыпучей среды и закон Прандтля для жидкой среды. В отличие от статистических и полуаналитических моделей, аналитическая модель П.Г. Петрова не содержит в себе новых феноменологических параметров, кроме исходных параметров реологической модели, и учитывает влияние морфологических особенностей дна, реальных физико-механических и гранулометрических параметров донного материала на транспорт влекомых наносов.

Модель П.Г. Петрова для криволинейной системы координат  $x'_i$ , одно из направлений которой совпадает с направлением вектора скорости, имеет вид

$$q_i^b = G_0 T_1 \sqrt{|T_1|} \left[ \left( 1 - \chi - \frac{2 - 5\chi}{10} \Gamma_1 \right) \frac{T_i}{|T_k|} - \frac{4}{5} \Gamma_i \right], \quad (23)$$

$$G_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s m}{\kappa \sqrt{\rho_w F_a}}, \quad m = \begin{cases} 1, & \chi < 1 \\ 0, & \chi \geq 1 \end{cases}, \quad \chi = \sqrt{\frac{\tau_c}{|T_1|}}, \quad T_i = \{\tau; 0\}, \quad (24)$$

$$\tau = (\sigma_{ij} k_j) l_i, \quad \tau_c = \frac{3}{8} \frac{\kappa^2 d F_a}{c_x}, \quad F_a = (\rho_s - \rho_w) g \tan \varphi \cos \beta, \quad \Gamma_i = \frac{1}{\tan \varphi \cos \beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x'_i}, \quad (25)$$

где  $\tau$  – придонное касательное напряжение,  $\vec{k} = \{k_1; k_2\}$  – нормальный вектор к поверхности дна  $\Omega_{bed}$ ,  $\vec{l} = \{l_1; l_2\}$  – касательный вектор к поверхности дна  $\Omega_{bed}$ ,  $\chi$  – коэффициент, определяющий начало транспорта влекомых наносов,  $\rho_s$  – плотность донного материала,  $\kappa$  – постоянная Кармана,  $\rho_w$  – плотность жидкости,  $\tau_c$  – критическое придонное касательное напряжение,  $d$  – диаметр частиц,  $c_x$  – лобовое сопротивление частиц,  $d$  – средний диаметр частиц,  $g$  – гравитационная постоянная,  $\varphi$  – угол внутреннего трения частиц,  $\beta$  – острый угол между нормалью к поверхности дна и вертикальной линией,  $x'_i = \{x'_1, x'_2\}$  – криволинейная система координат, где ось  $x'_1$  направлена вдоль линии тока горизонтальной скорости, ось  $x'_2$  направлена перпендикулярно линии тока горизонтальной скорости.

**Во второй главе** выполнено преобразование трехмерной математической постановки (1)-(14) до следующего одномерного приближения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{U^2}{2g} + \eta \right) + \frac{\tau}{\rho_w g H} = 0, \quad Q = HU = const, \quad (26)$$

$$(1 - \epsilon) \rho_s \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial G^b}{\partial x_1} = -\alpha W (S_* - S), \quad (27)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x_1} = \alpha W (S_* - S), \quad (28)$$

$$G^b = G_0 \tau \sqrt{\tau} \left[ (1 - \chi) - \left( 1 - \frac{\chi}{2} \right) \Gamma_1 \right], \quad (29)$$

$$G_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s m}{\kappa \sqrt{\rho_w F_a}}, \quad m = \begin{cases} 1, & \chi < 1 \\ 0, & \chi \geq 1 \end{cases}, \quad \chi = \sqrt{\frac{\tau_c}{\tau}},$$

$$\tau_c = \frac{3}{8} \frac{\kappa^2 d F_a}{c_x}, \quad F_a = (\rho_s - \rho_w) g \tan \varphi, \quad \Gamma_1 = \frac{1}{\tan \varphi} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \quad (30)$$

$$\tau = \rho_w g \frac{U^2}{C^2}, \quad C = \frac{1}{n_s} H^{1/6}, \quad n_s = \frac{H^{2/3} \sqrt{J}}{U}, \quad (31)$$

$$S_* = \begin{cases} \psi \frac{U^3}{WH}, & W < u_* \\ 0, & W \geq u_* \end{cases}, \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_w}}, \quad \psi = 0.2 \quad (32)$$

с начальными условиями

$$\zeta(x_1, 0) = \zeta_0(x_1), \quad S(x_1, 0) = S_0(x_1) \quad (33)$$

и граничными условиями

$$S(0, t) = S_{in}, \quad G^b(0, t) = G_{in}^b, \quad \frac{\partial \zeta(L, t)}{\partial x_1} = J, \quad H(L, t) = H_{out}, \quad U(L, t) = U_{out}. \quad (34)$$

В задаче (26)-(34) приняты следующие обозначения:  $x_1$  – пространственная координата,  $U$  – осредненная по глубине скорость потока,  $g$  – гравитационная постоянная,  $\eta$  – уровень свободной поверхности потока,  $\tau$  – касательные сдвиговые напряжения,  $\rho_w$  – плотность воды,  $H$  – глубина потока,  $Q$  – удельный гидродинамический расход,  $\epsilon$  – пористость донного материала,  $\rho_s$  – плотность донного материала,  $\zeta$  – уровень донной поверхности,  $t$  – временная координата,  $G^b$  – удельный массовый расход влекомых наносов,  $\alpha$  – параметр регулировки транспорта взвешенных наносов,  $W$  – гидравлическая крупность,  $S_*$  – транспортирующая способность потока,  $S$  – осредненная удельная массовая концентрация взвешенных наносов,  $\kappa$  – постоянная Кармана,  $\tau_c$  – критическое придонное касательное напряжение,  $d$  – диаметр частиц,  $c_x$  – лобовое сопротивление частиц,  $\varphi$  – угол внутреннего трения частиц,  $C$  – коэффициент Шези,  $n_s$  – шероховатость донного материала по Маннингу,  $J$  – основной горизонтальный уклон донной поверхности относительно оси  $x_1$ ,  $u_*$  – придонная скорость,  $\zeta_0$  – начальный уровень донной поверхности,  $S_0$  – осредненная по глубине массовая концентрация взвешенных наносов в начальный момент времени,  $S_{in}$  – осредненная по глубине массовая концентрация взвешенных наносов, поступающая в расчетную область,  $G_{in}^b$  – удельный массовый расход донных наносов, поступающих в расчетную область,  $H_{out}$  – глубина потока на выходе из расчетной области,  $U_{out}$  – скорость потока на выходе из расчетной области.

Расчетная область одномерной русловой задачи показана на Рисунке 2. В работе предложен алгоритм решения одномерной русловой задачи (26)-(34) на основе метода превышений и схемы бегущего счета.

Для верификации предложенной одномерной модели было выполнено решение ряда модельных русловых задач: об эрозии дна под воздействием осветленного потока (задача 1), о движении клина донных наносов (задача 2), о замыве поперечной русловой прорези (задача 3). На Рисунках 3, 4 и 5 показаны полученные донные профили (сплошные кривые), экспериментальные данные (точечные множества) и расчетные данные по моделям других авторов (пунктирные кривые).

На Рисунке 3 приведено сравнение полученных донных профилей с экспериментальными данными Newton и результатами расчета по модели Singh, кривой 1 обозначен начальный донный профиль, группой кривых 2, 3 и 4 показаны уровни донной поверхности в моменты времени 1, 2 и 3 часа соответственно. Как видно на Рисунке 3, донный профиль, полученный по модели Singh, максимально отклоняется от экспериментальных данных в начале расчетной области, где относительная погрешность расчетных данных по сравнению с экспериментальными данными достигает 12 %. Решения, полученные по предложенной модели, лучше согласуются с экспериментальными данными, ее максимальная относительная погрешность не превышает 9 %.

На Рисунке 4 приведено сравнение полученных донных профилей с экспериментальными данными Seal et al. и результатами расчета по модели Wu, кривой 1 обозначен

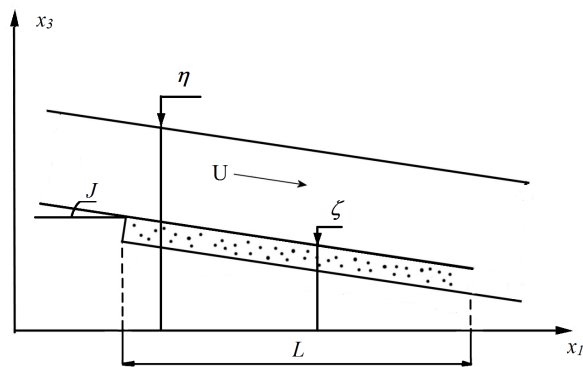


Рисунок 2 – Расчетная область

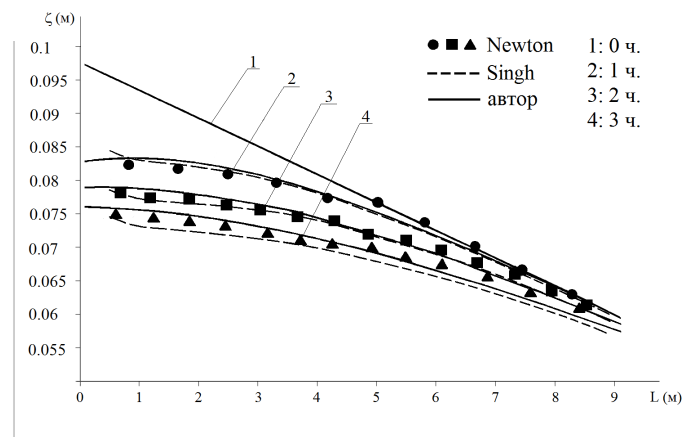


Рисунок 3 – Результаты расчетов.  
Задача 1

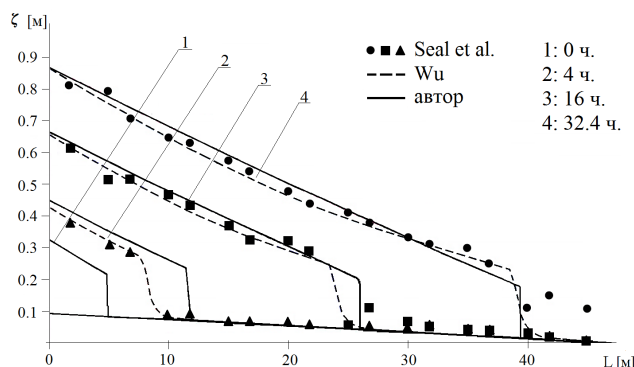


Рисунок 4 – Результаты расчетов.  
Задача 2

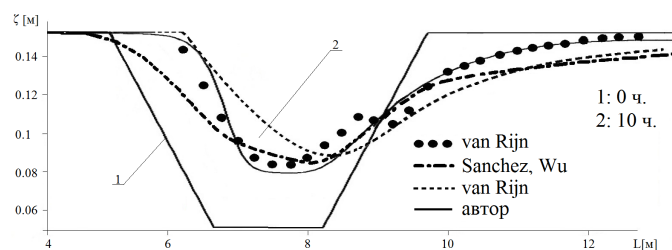


Рисунок 5 – Результаты расчетов.  
Задача 3

начальный донный профиль, группой кривых 2, 3 и 4 показаны уровни донной поверхности в моменты времени 4, 16 и 32.4 часов соответственно. На Рисунке 4 видно, что несмотря на неоднородный фракционный состав намываемого клина, полученные донные профили хорошо согласуются с экспериментальными данными и расчетами по модели Wu, максимальное отклонение расчетных данных от экспериментальных наблюдается на вертикальном фронте клина донных наносов. Данное отклонение связано с резким увеличением глубины, которое способствует осаждению мелких фракций наносов и формированию сглаженного профиля клина. Так как предложенная модель является однофракционной, она не способная учесть данный процесс. Средняя относительная погрешность донных профилей, полученных по предложенной модели, по сравнению с экспериментальными данными не превышает 5 %, средняя относительная погрешность донных профилей, полученных по феноменологической многофракционной модели Wu, составляет около 2 %.

На Рисунке 5 приведено сравнение полученных донных профилей с экспериментальными данными van Rijn и результатами расчета по модели Sanchez и Wu (штрихпунктирная кривая) и van Rijn (пунктирная кривая), кривой 1 обозначен начальный донный профиль, группой кривых 2 показан уровень донной поверхности в момент времени 10 часов. На Рисунке 5 видно, что решения, полученные по моделям van Rijn и Sanchez и Wu, не могут правильно восстанавливать фронтальное движение подветренного склона каверны

и осуществляют избыточный размыв донной поверхности напорного склона каверны.

Решения, полученные van Rijn и Sanchez и Wu имеют относительную погрешность по отношению к экспериментальным данным в среднем 15-20 %. Результаты, полученные по предложенной модели, имеют хорошее согласование с экспериментальными данными, средняя относительная погрешность полученного решения по сравнению с экспериментальными данными не превышает 5 %.

На основе проведенного сравнительного анализа можно сделать вывод, что предложенная одномерная русловая модель может применяться при решении широкого диапазона практических русловых задач.

**Третья глава** посвящена формулировке и решению двумерной профильной русловой задачи.

В первом параграфе формулируется физическая постановка двумерной профильной русловой задачи, расчетная область показана на Рисунке 6. Выдвинуто предположение, что глубина потока достаточно большая и донная поверхность  $\zeta$  не имеет резких искажений, тогда волнение свободной поверхности  $\eta$  пренебрежительно мало влияет на изменение донной поверхности  $\zeta$ . Данное допущение позволяет перейти от моделирования открытого канала к моделированию закрытого напорного канала.

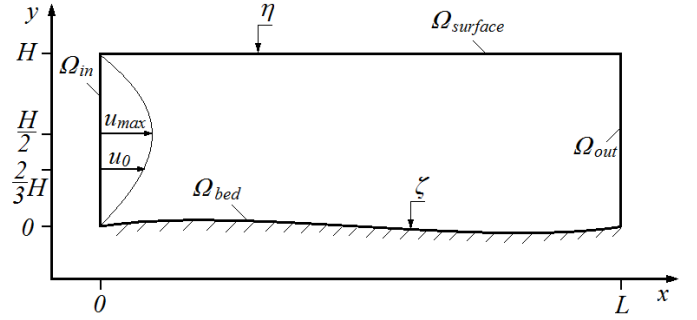


Рисунок 6 – Расчетная область

Во втором параграфе выполнено упрощение трехмерной математической постановки (1)-(14) до двумерного профильного приближения со следующими обозначениями

$$x_1 = x, \quad x_3 = y, \quad u_1 = u, \quad u_3 = v,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (35)$$

$$\rho_w \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho_w F_x, \quad (36)$$

$$\rho_w \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho_w F_y, \quad (37)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(su)}{\partial x} + \frac{\partial(sv)}{\partial y} = \frac{\partial(sW)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad (38)$$

$$\rho_s(1 - \epsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial G^b}{\partial x'} = D - E, \quad (x, y) \in \Omega_{bed}, \quad (39)$$

$$G^b = G_0 \tau \sqrt{|\tau|} \left[ (1 - \chi) - \left( 1 - \frac{\chi}{2} \right) \Gamma \right], \quad (40)$$

$$G_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s m}{\kappa \sqrt{\rho_w F_a}}, \quad m = \begin{cases} 1, & \chi < 1 \\ 0, & \chi \geq 1 \end{cases}, \quad \chi = \sqrt{\frac{\tau_c}{|\tau|}}, \quad (41)$$

$$\tau_c = \frac{3}{8} \frac{\kappa^2 d F_a}{c_x}, \quad F_a = (\rho_s - \rho_w) g \tan \varphi \cos \beta, \quad \Gamma = \frac{1}{\tan \varphi \cos \beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x'}, \quad (42)$$

$$\tau = T_x l_x + T_y l_y, \quad (x, y) \in \Omega_{bed}, \quad (43)$$

$$T_x = \sigma_{xx} k_x + \sigma_{xy} k_y = (-P + 2\mu D_{xx}) k_x + 2\mu D_{xy} k_y, \quad (x, y) \in \Omega_{bed}, \quad (44)$$

$$T_y = \sigma_{yx}k_x + \sigma_{yy}k_y = 2\mu D_{xy}k_x + (-P + 2\mu D_{yy})k_y, \quad (x; y) \in \Omega_{bed}, \quad (45)$$

$$D_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad D_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (x; y) \in \Omega_{bed}, \quad (46)$$

$$D = Ws(x, y), \quad E = \lambda_{33} \frac{\partial s}{\partial x_3} \Big|_{(x,y)}, \quad (x, y) \in \Omega_{bed}, \quad (47)$$

где  $x$  – горизонтальная пространственная координата,  $y$  – вертикальная пространственная координата,  $u$  – горизонтальная скорость потока,  $v$  – вертикальная скорость потока,  $\rho_w$  – плотность воды,  $t$  – временная координата,  $p$  – давление,  $\mu = \mu_m + \mu_T$  – приведенная вязкость жидкости,  $\mu_m$  – молекулярная вязкость,  $\mu_T$  – турбулентная вязкость,  $F_x$  и  $F_y$  – объемные силы, направленные вдоль оси  $x$  и  $y$  соответственно,  $s$  – массовая концентрация взвешенных наносов,  $W$  – гидравлическая крупность,  $\rho_s$  – плотность донного материала,  $\epsilon$  – пористость донного материала,  $\zeta$  – уровень донной поверхности,  $G^b$  – удельный массовый расход донных наносов,  $D$  – член уравнения, описывающий осаждение частиц,  $E$  – член уравнения, описывающий взмыв частиц,  $\tau$  – придонное касательное напряжение,  $\kappa$  – постоянная Кармана,  $\tau_c$  – критическое придонное касательное напряжение,  $d$  – диаметр частиц,  $c_x$  – лобовое сопротивление частиц,  $g$  – гравитационная постоянная,  $\varphi$  – угол внутреннего трения частиц,  $\beta$  – острый угол между нормалью к поверхности дна и вертикальной линией,  $x'$  – ось криволинейной системы координат, направленная вдоль линии тока горизонтальной скорости,  $\sigma_{mn}$  – тензор напряжений,  $\vec{l}\{l_x; l_y\}$  – единичный вектор, касательный к поверхности  $\Omega_{bed}$ ,  $\vec{k}\{k_x; k_y\}$  – единичный вектор, нормальный к поверхности  $\Omega_{bed}$ .

Математическая постановка (35)-(47) замыкается начальными условиями

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad s = s_0, \quad (x, y) \in V; \quad (48)$$

$$\zeta = \zeta_0, \quad (x, y) \in \Omega_{bed}; \quad (49)$$

$$\eta = \eta_0, \quad (x, y) \in \Omega_{surface} \quad (50)$$

и граничными условиями

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}n_x + \frac{\partial p}{\partial y}n_y = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{bed}, \Omega_{surface}; \quad (51)$$

$$u = u_{in}(x, y), \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_{in}}{\partial x}, \quad s = s_{in}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{in}; \quad (52)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad p = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{out}, \quad (53)$$

$$sum m_x - \lambda_x \frac{\partial s}{\partial x} m_x = q_{out}^s(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{out}, \quad (54)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}n_x + \frac{\partial s}{\partial y}n_y = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{surface}, \quad (55)$$

$$s = s_{bed}, \quad (x, y) \in \Omega_{bed} \quad (56)$$

$$G^b = G_{in}^b, \quad (x, y) \in \Omega_{in}, \quad (57)$$

где  $u_0$  – начальное распределение горизонтальной скорости в области,  $v_0$  – начальное распределение вертикальной скорости в области,  $s_0$  – распределение массовой концентрации взвешенных наносов в начальный момент времени,  $\zeta_0$  – начальный уровень донной поверхности,  $\eta_0$  – начальный уровень свободной поверхности потока,  $s_{in}$  – распределение массовой концентрации взвешенных наносов на входе в расчетную область,  $\vec{m} = \{m_x, m_y\}$

– вектор нормали к плоскости  $\Omega_{out}$ ,  $q_{out}^s$  – поток массовой концентрации взвешенных наносов на выходе из расчетной области,  $\vec{n} = \{n_x, n_y\}$  – вектор нормали к плоскости  $\Omega_{surface}$ ,  $s_{bed}$  – массовая концентрация взвешенных наносов у дна,  $G_{in}^b$  – удельный массовый расход влекомых наносов на входе в расчетную область .

В третьем параграфе для решения поставленной двумерной русловой задачи предложен алгоритм, который включает преобразование двумерных уравнений математической постановки (35)-(38) к квазигидродинамическому виду с использованием подхода Т.Г. Елизаровой.

В четвертом параграфе с помощью метода контрольных объемов получен дискретный аналог для нестационарного уравнения теплопроводности, на основе которого осуществлен вывод дискретных аналогов для уравнений (36)-(38).

В пятом параграфе с помощью метода конечных элементов в слабой формулировке Галеркина получен дискретный аналог уравнения (35), из которого выражается давление.

В шестом параграфе для тестирования предложенного алгоритма решения уравнений Рейнольдса (35)-(37) рассмотрена задача о движении жидкости в каверне с движущейся крышкой, результаты расчета автора сравнивались с результатами расчета М.К. Ермакова. Так же была рассмотрена задача о движении жидкости в закрытом канале с внезапным расширением, результаты расчета автора сравнивались с результатами расчета Т.Г. Елизаровой. Качественное и количественное согласование расчетов в задаче о движении жидкости в каверне с подвижной крышкой и задаче о движении жидкости в канале с внезапным расширением подтверждает способность предложенного алгоритма решения подзадачи гидродинамики описывать течение несжимаемой жидкости.

В седьмом параграфе рассматриваются особенности численной реализации двумерной профильной русловой задачи. Расчет уровня донной поверхности для профильной двумерной задачи выполняется в одномерном приближении, для этого выполняется дискретизация нижней границы расчетной области  $\Omega_{bed}$  с помощью одномерной регулярной сетки. Осуществлен вывод дискретного аналога для уравнения (39) с учетом выражений (40)-(47) с помощью метода контрольных объемов для сетки с равномерным шагом по пространству и по времени. Рассмотрена методика определения придонного касательного напряжения в узлах сетки дна. Определена формула приведенной вязкости  $\mu$ , которая имеет следующий вид

$$\mu = \frac{\rho_w g U^2 H^2}{4C^2 u_{max}(H - 2y)}, \quad (58)$$

где  $U$  - осредненная по глубине скорость потока,  $C$  - коэффициент Шези,  $u_{max}$  – максимальная скорость потока.

Градиент давления  $\frac{\partial p_{in}}{\partial x}$  и профиль горизонтальной скорости  $u_{in}$  на входе в расчетную область определяются по следующим формулам

$$\frac{\partial p_{in}}{\partial x} = -\frac{12\mu Q}{H^3}. \quad (59)$$

$$u_{in}(0, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_{in}}{\partial x} y(y - H). \quad (60)$$

В восьмом параграфе изложен пошаговый алгоритм решения двумерной русловой задачи.

В девятом параграфе выполнено численное решение задачи об эрозии дна за водосборной плотиной. На Рисунке 7 представлен фрагмент нерегулярной адаптивной треугольной сетки на которой производился расчет, на Рисунке 8 показан увеличенный фрагмент сетки, выделенный черным прямоугольником на Рисунке 7. На рисунках видно, что

сетка построена со сгущением на нижнюю границу для более точного определения придонных касательных напряжений.

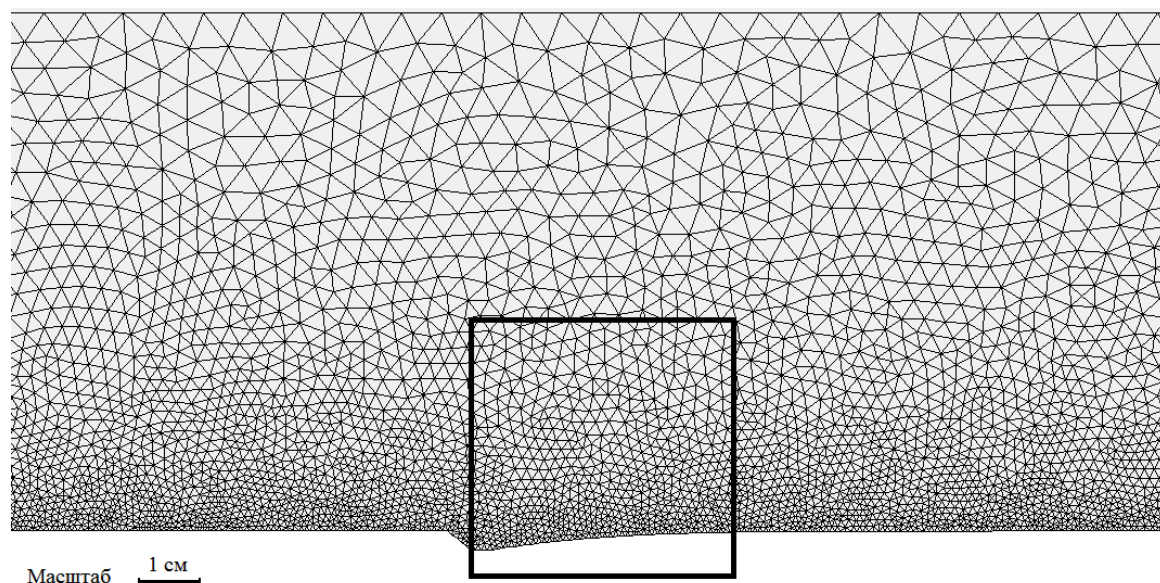


Рисунок 7 – Фрагмент расчетной сетки

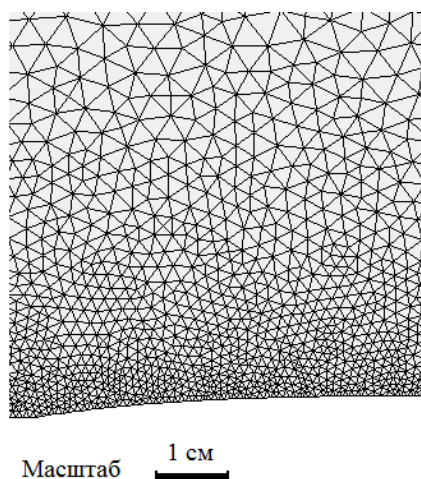


Рисунок 8 – Фрагмент расчетной сетки в области интенсивного размыва дна

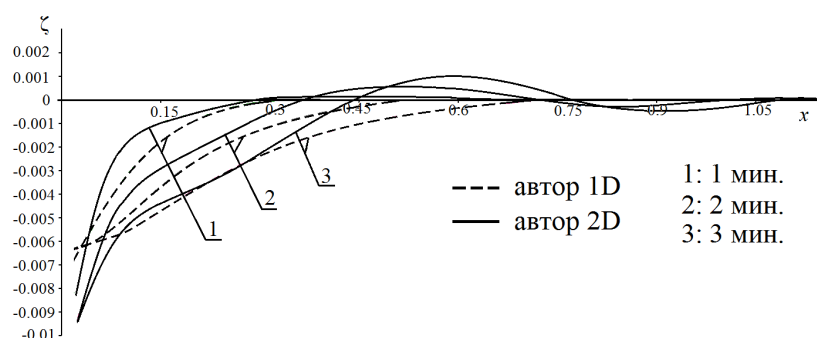


Рисунок 9 – График изменения уровня донной поверхности через 1, 2 и 3 мин

На Рисунке 9 показано сравнение результатов расчетов по предложенной двумерной модели (пунктирные линии) с результатами расчета по предложенной одномерной модели (сплошные линии), профили донной поверхности через 1, 2 и 3 минут размыва обозначены группами линий 1, 2 и 3 соответственно. На Рисунке 9 видно хорошее согласование полученных по двумерной модели расчетов с расчетами, полученными по одномерной модели, выдерживается скорость сдвига профиля донной поверхности, согласуются точки остановки размыва. На входе в расчетную область заметно рассогласование расчетных данных, которое, относительная погрешность расчетных данных здесь составляет 34 %.

Следует отметить, что в рамках одномерной модели нельзя добиться образования и развития донных волн, но данный процесс имеет место в равнинных реках и каналах. Результаты расчетов по двумерной модели отражают процесс развития донных волн.

В целом результаты расчетов по предложенной двумерной модели хорошо согласуются с результатами расчетов по одномерной модели, средняя относительная погрешность по области составляет 16 %. Предложенная модель качественно и количественно описывает процесс эрозии песчаного дна за водосборной плотиной при кратковременном размыве и может применяться для моделирования русловых процессов в глубоких реках.

## Основные результаты и выводы диссертационной работы

Основные результаты и выводы диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Предложена одномерная и двумерная профильная математические модели, описывающие эволюцию донной поверхности песчано-гравийного дна канала с учетом транспорта взвешенных и влекомых наносов, неравновесности процесса размыва дна, нелинейности изменения гидравлического сопротивления русла, физико-механических и гранулометрических параметров донного материала. Модели позволяют прогнозировать изменения песчано-гравийного дна канала в краткосрочной и среднесрочной перспективе.
2. Предложены алгоритмы решения одномерной и двумерной задач об эволюции песчано-гравийного дна канала под действием гидродинамического потока. Для тестирования алгоритма решения двумерной задачи гидродинамики выполнено решение задачи о движении жидкости в каверне с движущейся крышкой и задачи о течении жидкости в канале с внезапным расширением
3. Получены численные закономерности формирования речного дна под действием гидродинамического потока при различной исходной топологии русла и различных режимах гидродинамического потока. Выполнен сравнительный анализ решений, полученных в работе с помощью вычислительного эксперимента, с экспериментальными данными и решениями по другим моделям.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Потапов, И.И. Анализ деформаций несвязного дна канала в нижнем бьефе гидроузла / И.И. Потапов, К.С. Снигур // Вычислительные технологии. – 2011. – Т. 16, № 4. – С. 114-119.

2. Потапов, И.И. Исследование эволюции поперечной русловой прорези под действием транзитного гидродинамического потока / И.И. Потапов, К.С. Снигур // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2014. – № 2. – С. 146-152.

3. Потапов, И.И. Моделирование эволюции песчано-гравийного дна канала в одномерном приближении / И.И. Потапов, К.С. Снигур // Компьютерные исследования и моделирование. – 2015. – Т. 7, № 2. – С. 315-328.

4. Свидетельство № 2014618581 Российская Федерация. Программный комплекс для расчета деформаций несвязного дна канала в нижнем бьефе гидроузла: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ/ И.И. Потапов, К.С. Снигур ; заявитель и правообладатель ВЦ ДВО РАН. заявл. 30.05.2014; зарегистр 26.08.2014. – 1 с.

5. Потапов, И.И. Моделирование эволюции поперечной русловой прорези трапецевидной формы в каналах с песчаным дном / И.И. Потапов, К.С. Снигур // Материалы



XVII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС 2011), Алушта. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011. – С. 617-618.

6. Потапов, И.И. Анализ деформаций несвязного дна канала в нижнем бьефе гидроузла / И.И. Потапов, К.С. Снигур // Современные методы механики. X всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Вторая всероссийская школа молодых ученых-механиков. Тезисы докладов. - Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского, 2011. – С. 159-160.

7. Снигур, К.С. Моделирование эволюции поперечной русловой прорези трапециевидной формы в каналах с песчаным дном / К.С. Снигур // Молодые ученые – Хабаровскому краю: материалы XIV Краевого конкурса молодых ученых и аспирантов, Хабаровск.: в 2 т. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2012. – Т.2. – С. 127-132.

8. Потапов, И.И. Исследование деформаций донной поверхности каверны под действием транзитного гидродинамического потока / И.И. Потапов, К.С. Снигур // Материалы IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2012), Алушта. – М.: Изд-во: МАИ, 2012. – С. 60.

9. Потапов, И.И. Анализ эволюции песчаного дна канала под действием осветленного потока / И.И. Потапов, К.С. Снигур // Экология и безопасность жизнедеятельности в Азиатско-тихоокеанском регионе: материалы 3-й региональной научно-практической конференции / под. Ред. Л. Д. Терехова. - Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2012. – С.127-131.

10. Потапов, И.И. Одномерная математическая модель для неустановившегося руслового процесса / И.И. Потапов, К.С. Снигур // Инновационные информационные технологии: Материалы международной научно-практической конференции. Том 2. / Гл. ред. С. У. Увайсов; Отв. Ред. И. А. Иванов - М.: МИЭМ НИУ ВШЭ, 2013. – С 368-371.

11. Потапов, И.И. Математическое моделирование неустановившегося руслового процесса / И.И. Потапов, К.С. Снигур // XXXVII Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова, Владивосток: сб. докл. [Электронный ресурс]. - Владивосток: Дальнаука, 2013 – 262 с.; объем 5,4 Мб; 1 опт. компакт-диск (CD-ROM). – С.182-186.

12. Потапов, И.И. Решение задачи размыва русловой прорези с помощью одномерной математической модели неустановившегося руслового процесса / И.И. Потапов, К.С. Снигур // Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2013), Алушта. - М.: Изд-во: МАИ, 2013. – С. 655-666.

13. Потапов, И.И. Математическое моделирование неустановившегося руслового процесса / И.И. Потапов, К.С. Снигур // Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления: материалы всероссийской науч.-практ. конф., Хабаровск. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013. – С.283-286.

14. Потапов, И.И. Моделирование эволюции поперечной русловой прорези в каналах с песчаным дном / И.И. Потапов, К.С. Снигур // Инновационные технологии в автоматике, информатике и телекоммуникациях: сб. тр. науч.-практ. конф. ученых трансп. вузов, инженерных работников и представителей академической науки с междунар. участием / под. Ред. О.В. Решетниковой. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2013. – С. 40-43.

15. Потапов, И.И. Математическое моделирование транспорта донных наносов / И.И. Потапов, К.С. Снигур // Задачи со свободными границами: теория эксперимент и приложения: тезисы докладов V Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых / Алт. гос. тех. ун-т, БТИ. – Бийск: Изд-во Алт. гос. тех. ун-та, 2014. – С. 83.

16. Потапов, И.И. Моделирование эволюции песчаного дна канала в одномерном

приближении / И.И. Потапов, К.С. Снигур // Обратные краевые задачи и их приложения (ОКЗ и их приложения): материалы конференции [Электронный ресурс]: (текстово-графические материалы). – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. - 1 электрон.опт.диск (CD-ROM).

17. Снигур, К.С. Решение задачи об эрозии дна за водосборной плотиной в двумерном приближении / К.С. Снигур // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСПС'2015), Алушта. - М.: Изд-во МАИ, 2015. – С. 534-535.

18. Потапов, И.И. Математическое моделирование размыва речного дна за водосборной плотиной / И.И. Потапов, К.С. Снигур // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов. – Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. – С. 3534-3536.

19. Снигур, К.С. Исследование донных деформаций в нижнем бьефе гидроузла / К.С. Снигур // VIII международная конференция, посвященная 115-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева, "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике": тезисы докладов. - Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 2015. – С. 158-159.

20. Потапов, И.И. О технологиях применения метода контрольных объемов для решения задачи переноса на нерегулярных треугольных сетках. Часть I. / И.И. Потапов, К.С. Снигур : препринт № 177. - Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2012. - 38 с.

21. Потапов, И.И. Исследование руслового процесса в каналах со сложной геометрией / И.И. Потапов, К.С. Снигур : препринт № 191. – Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2013. – 11 с.

22. Потапов, И.И. Математическое моделирование эрозии дна в нижнем бьефе гидроузла / И.И. Потапов, К.С. Снигур : препринт № 213. – Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2015. – 28 с.