На правах рукописи

Цой Георгий Ильич

Модифицированные методы двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Хабаровск — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:	**Намм Роберт Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Илларионов Андрей Анатольевич,** доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, ФГБУН Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН (г. Хабаровск)
	Стрекаловский Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией «Невыпуклая оптимизация», ФГБУН Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН (г. Иркутск)
Ведущая организация:	ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет» (ДВФУ), г. Владивосток

Защита диссертации состоится «29» ноября 2019 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета Д 999.055.04 при ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет» по адресу: г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27, корп. 3, ауд. 201/3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет»и на сайте https://sovet.knastu.ru/.

Автореферат разослан «___» ___________ 2019 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 999.055.04,
к.ф.-м.н., доцент Егорова Юлия Георгиевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задачи механики контактного взаимодействия упругих тел часто возникают в инженерной практике и представляют большой интерес как для специалистов, занимающихся теоретическими исследованиями этих задач, так и для прикладников, интересующихся внедрением полученных результатов в практику. Как правило, задачи такого типа допускают три эквивалентные математические постановки: краевая задача для дифференциальных уравнений в частных производных, задача минимизации выпуклого функционала потенциальной энергии на выпуклом замкнутом множестве, вариационное неравенство. При постановке задачи в вариационном виде вводится понятие обобщённого или слабого решения, которое позволяет смягчить ограничение на гладкость искомого решения.

Теория вариационных неравенств сформировалась во второй половине XX века и получила развитие в трудах Фикеры Г., Стампаккьи Г., Лионса Ж.Л. и их учеников. Среди отечественных учёных, внёсших вклад в развитие данного направления, можно отметить следующих исследователей: Морозова Н.Ф., Кравчука А.С., Мосолова П.П., Мясникова В.П., Аннина Б.Д., Садовского В.М., Антипина А.С., Хлуднева А.М., Чеботарева А.Ю., Лапина А.В., Игнатьеву М.А., Васильева Ф.П., Рязанцеву И.П., Уральцеву Н.Н., Ковтуненко В.А., Рудого Е.М., Намма Р.В., Коннова И.В. и многих других.

В настоящее время данная теория находится в стадии активного развития и представляет огромный интерес как для математиков-механиков, так и для экономистов. Например, при исследовании и моделировании равновесных задач экономики и исследовании операций.

Понятие "квазивариационного неравенства" ввели в своих работах Бенсунсан А., Гурса М., Лионс Ж.Л. Квазивариационные неравенства появляются во многих областях механики и экономики, поэтому исследование и разработка методов их решения является актуальной и важной. Характерной особенностью квазивариационных неравенств, вследствие которой для их исследования пришлось создавать особые методы, является то, что их решения принадлежат подмножествам, границы которых зависят от самого решения.

В данной работе проводится исследование и решение вариационных и квазивариационных неравенств механики, соответствующих контактной задаче теории упругости с трением между упругим телом и абсолютно твёрдой опорой, задаче теории упругости с трещиной с условиями непроникания берегов трещины друг в друга и задаче о равновесии упругого тела с отслоившимся жёстким включением. В задаче Синьорини с трением, заданным по закону Кулона, используется метод последовательных приближений для нахождения неподвижной точки оператора отображения.

Причём каждый итерационный шаг определяется как решение задачи Синьорини с заданным трением.

Для исследования поставленных задач в работе был применён двойственный подход. Суть данного подхода заключается в том, что исходная задача условной минимизации заменяется задачей поиска седловой точки функции Лагранжа. Отметим, что функция Лагранжа зависит от переменных исходной и двойственной задач. Причём вектор прямых переменных седловой точки функции Лагранжа совпадает с решением исходной задачи выпуклого программирования. Однако у схемы двойственности, построенной на основе классической функции Лагранжа, есть ряд недостатков, которые осложняют её применение для конструирования вычислительных методов.

В работе используются модифицированные функции Лагранжа, которые не являются линейными относительно двойственной переменной и избавлены от недостатков классического аналога. В работах Гольштейна Е.Г., Третьякова Н.В., Антипина А.С., Бертсекаса Д., Рокафеллара Р.Т., Евтушенко Ю.Г., Голикова А.А., Поляка Б.Т., Попова Л.Д. и других исследовалось применение данных конструкций к конечномерным задачам выпуклого и линейного программирования. В настоящее время развиваются модифицированные схемы двойственности для решения вариационных задач, в которых для исходной задачи условной минимизации строится модифицированная функция Лагранжа.

При решении полукоэрцитивных вариационных неравенств возникает проблема нетривиальности ядра квадратичной формы функционала задачи, что влечёт за собой проблему со сходимостью численных алгоритмов, поэтому в данной работе применяется итеративная prox-регуляризация. Главное преимущество prox-регуляризации, в отличие от регуляризации по Тихонову, заключается в том, что параметр регуляризации не нужно устремлять к нулю, достаточно взять его равным положительной постоянной.

Для численного решения и исследования вариационных задач в работе используется метод конечных элементов. Значительный вклад в исследование вариационных неравенств с применением данного метода внесли работы французских математиков Гловински Р., Лионса Ж.Л., Тремольера Р. В которых подробно исследуется применение метода конечных элементов для решения вариационных неравенств и исследуются методы решения получаемых после аппроксимации конечномерных задач.

В настоящее время в исследованиях, относящихся к методам двойственности для решения вариационных и квазивариационных задач механики, как правило, используется классической подход. Часто классические схемы двойственности используются без строгих математических обоснований сходимости. В работе будет показано, что, вообще говоря, в полукоэрцитивном случае применение схем двойственности с классическим функционалом Лагранжа не представляется возможным, а при решении коэрцитивных задач классический метод уступает по вычислительной эффективности модифицированному подходу.

Целью данной работы является обоснование и применение модифицированных методов двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики, соответствующих контактной задаче теории упругости с трением между упругим телом и абсолютно твердой опорой, задаче теории упругости с трещиной с условиями непроникания берегов трещины друг в друга и задаче о равновесии упругого тела с отслоившимся жестким включением.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Применить метод последовательных приближений для решения квазивариационного неравенства Синьорини, соответствующего контактной задаче теории упругости с трением между упругим телом и абсолютно твердой опорой.
2. Построить и обосновать метод, основанный на комбинировании алгоритма Удзавы и итеративной prox-регуляризации модифицированного функционала Лагранжа для решения вспомогательных полукоэрцитивных задач, возникающих в методе последовательных приближений.
3. Построить и обосновать схему двойственности, основанную на модифицированном функционале Лагранжа, для решения 2D и 3D задач теории упругости с внутренней трещиной и трещиной, выходящей на внешнюю границу. Доказать соотношение двойственности.
4. Исследовать и реализовать метод решения задачи теории упругости с отслоившимся жёстким включением, основанный на модифицированном функционале Лагранжа.
5. Привести результаты численного решения поставленных задач с использованием метода конечных элементов. Проанализировать полученные результаты.

Научная новизна:

1. Для решения полукоэрцитивных вспомогательных задач построен и обоснован метод, основанный на комбинировании алгоритма Удзавы и итеративной prox-регуляризации модифицированного функционала Лагранжа.
2. Разработан алгоритм на основе метода конечных элементов и программное обеспечение для численного решения квазивариационного неравенства Синьорини. Проведены численные эксперименты, подтверждающие эффективность модифицированного метода двойственности.

3. Построена и обоснована модифицированная схема двойственности для решения 2D и 3D задач теории упругости с трещиной. Доказано соотношение двойственности. Получены численные результаты с применением метода конечных элементов.
4. Для решения задачи с отслоившимся жёстким включением исследован и применён метод решения с параметром управления, стремящимся к нулю.

Практическая значимость работы заключается в создании эффективных методов решения вариационных и квазивариационных неравенств механики. Исследования носят фундаментальный характер, но построенные в результате алгоритмы реализуются в виде комплексов программ и могут быть использованы при решении прикладных задач.

Методология и методы исследования. В работе использованы методы функционального анализа, теория пространств С.Л. Соболева, вариационные принципы механики сплошной среды, теория вариационных неравенств и выпуклого анализа, методы вычислительной математики и математического программирования, общая теория нелинейных краевых задач.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построение и исследование новых методов двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики с нелинейными краевыми условиями.
2. Обоснование теоретической и численной сходимости к седловой точке в методах двойственности, основанных на модифицированных функционалах Лагранжа.
3. Модифицированные методы двойственности для решения квазивариационных неравенств механики, многомерных задач теории упругости с трещиной и условиями взаимного непроникания берегов трещины, задач с объёмными жёсткими включениями.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью постановок рассматриваемых задач и математических методов их исследования, а также вычислительными экспериментами и сравнением полученных результатов при решении задач различными методами. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на: международная научная конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»(Владивосток, 2016); международная школа-конференция «Соболевские чтения»(Новосибирск, 2016); научно-практическая конференция «Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления»(Хабаровск, 2017, 2019); II,III Дальневосточная школа-семинар «Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций»(Комсомольск-на-Амуре, 2017, 2018); 5-я Дальневосточная конференция с международным участием «Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твёрдого тела и прогрессивные технологии в машиностроении»(Комсомольск-на-Амуре, 2018); 9-я и 10-я международные научные конференции «Optimization and Applications»(Petrovac, Montenegro, 2018, 2019); международная научная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций»(Екатеринбург, 2019); семинары Вычислительного центра ДВО РАН.

Личный вклад. Автор принимал активное участие в разработке и обосновании модифицированных методов двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики, а также в реализации алгоритмов и компьютерных программ. Все численные расчёты проводились автором лично. Автор принимал активное участие в анализе и интерпретации полученных результатов, оформлении публикаций в виде научных статей и докладов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 6 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 5 — в тезисах докладов. Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Содержание работы

Во введении даётся общее представление о задачах теории вариационных неравенств, их приложении для задач механики и методах решения. Приводится описание методов двойственности, основанных на модифицированном функционале Лагранжа, указываются их преимущества по сравнению с классическими аналогами. Приводится обзор научной литературы по наиболее значимым работам, посвящённым исследованию теории вариационных неравенств и методов двойственности. Обосновывается актуальность выбранной темы исследования, формулируются цели и задачи диссертационной работы. Отмечена новизна полученных результатов и их теоретическая и практическая значимость. Приводятся сведения об апробации работы и публикациях. Кратко описывается структура и объём работы, ее содержание.

В первой главе приводится решение квазивариационного неравенства Синьорини, описывающего задачу о контакте между упругим телом и абсолютно твёрдой опорой с трением, заданным по закону Кулона. В начале главы приводится общее описание данной задачи, её краевая и вариационная постановки.

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с достаточно регулярной границей Γ, $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, где Γ_0, Γ_1, Γ_2 – непустые открытые попарно непересекающиеся подмножества Γ (рисунок 1). Рассмотрим контактную задачу теории упругости с трением между упругим телом Ω и абсолютно твёрдой опорой.

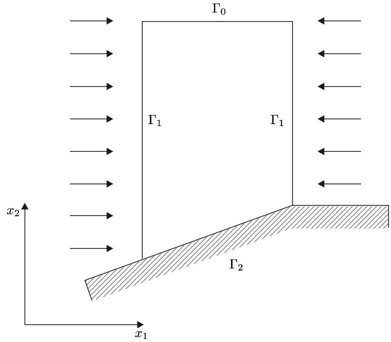


Рис. 1 — Контакт между упругим телом и абсолютно твёрдой опорой

Зададим два множества:

$$V = \left\{ v \in [H^1(\Omega)]^2 : \ v_n \equiv v_2 = 0 \text{ на } \Gamma_0 \right\},$$
$$K = \{ v \in V : \ v_n \leq 0 \text{ на } \Gamma_2 \}.$$

Пусть $f \in [L_2(\Omega)]^2$, $p \in [L_2(\Gamma_1)]^2$, соответственно объёмные и поверхностные силы, действующие на упругое тело, F – коэффициент трения, $F \geq 0$ на Γ_2. В предположении, что решение $u \in K$ краевой задачи существует и принадлежит классу $[H^2(\Omega)]^2$, можно показать, что u удовлетворяет квазивариационному неравенству: для $\forall v \in K$

$$a(u,v-u) + \int\limits_{\Gamma_2} F|\sigma_n(u)|(|v_\tau| - |u_\tau|)\, d\Gamma \geq \int\limits_{\Omega} f \cdot (v-u)\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_1} p \cdot (v-u)\, d\Gamma, \quad (1)$$

где $a(u,v)$ – билинейная форма, определённая на $[H^1(\Omega)]^2 \times [H^1(\Omega)]^2$ следующим образом:

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} c_{ijkm}\varepsilon_{km}(u)\varepsilon_{ij}(v)\, d\Omega. \quad (2)$$

Тензоры деформаций $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ и напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, связанны линейным законом Гука; $C = \{c_{ijkm}\}$ - тензор модулей упругости, обладающий обычными свойствами симметрии и положительной определённости. В (1) сила трения $F|\sigma_n(u)|$ зависит от искомого решения u, что является главной сложностью при построении и исследовании алгоритмов численного решения.

Для нахождения неподвижной точки используется метод последовательных приближений. Он состоит из следующих пунктов:

1. Задаём стартовую силу трения $g^0 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, $g^0 \geq 0$;
2. Находим решение u^k вариационного неравенства

$$\begin{gathered} a(u^k, v - u^k) + \int\limits_{\Gamma_2} g^k(|v_\tau| - |u_\tau^k|)\, d\Gamma \geq \\ \geq \int\limits_{\Omega} f \cdot (v - u^k)\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_1} p \cdot (v - u^k)\, d\Gamma \quad \forall\ v \in K; \end{gathered} \tag{3}$$

3. Вычисляем следующее приближение $g^{k+1} = F|\sigma_n(u^k)|$.

Метод выглядит естественным, но вопрос о сходимости вырабатываемой последовательности u^k к решению полукоэрцитивного квазивариационного неравенства (1) остаётся открытым. В коэрцитивном случае удаётся доказать только существование решения при малых значениях коэффициента трения F.

Вариационное неравенство (3) называется задачей с заданным трением. Она эквивалентна следующей задаче минимизации недифференцируемого функционала:

$$\begin{cases} I(v) = \frac{1}{2}a(v,v) + \int\limits_{\Gamma_2} g^k|v_\tau|\, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} f \cdot v\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_1} p \cdot v\, d\Gamma \to \min, \\ v \in K. \end{cases} \tag{4}$$

Минимизируемый функционал не является сильно выпуклым в $[H^1(\Omega)]^2$, поэтому вспомогательная задача является полукоэрцитивной. Однако из условия

$$\int\limits_{\Omega} f_1\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_1} p_1\, d\Gamma > 0$$

следует

$$I(v) \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\|_{[H^1(\Omega)]^2} \to \infty \quad \forall\ v \in K,$$

т.е. имеет место коэрцитивность функционала на множестве K, что означает существование решения v^* задачи.

Для решения (4) используется двойственный метод, позволяющий снять ограничения вида неравенств на искомое решение. Определим на множестве $V \times L_2(\Gamma_2)$ классический функционал Лагранжа

$$L(v,l) = I(v) + \int\limits_{\Gamma_2} l v_n\, d\Gamma.$$

Обозначим $(L_2(\Gamma_2))^+$ как множество неотрицательных функций на Γ_2, интегрируемых со своим квадратом.

Определение 1. *Пара* $(v^*,l^*) \in V \times (L_2(\Gamma_2))^+$ *называется седловой точкой функционала Лагранжа* $L(v,l)$, *если выполнено двустороннее неравенство*

$$L(v^*,l) \leq L(v^*,l^*) \leq L(v,l^*) \quad \forall\ (v,l) \in V \times (L_2(\Gamma_2))^+.$$

Если решение $\overline{u}$ вспомогательной задачи с заданным трением (4) принадлежит пространству $[H^2(\Omega)]^2$ и $\mathrm{meas}\{x \in \Gamma_2 : \sigma_n(\overline{u}) < 0\} > 0$, то $\overline{u}$ является единственным решением задачи (4), а пара $(\overline{u}, -\sigma_n(\overline{u}))$ – единственной седловой точкой функционала Лагранжа $L(v,l)$.

Поэтому заменяя вспомогательную задачу (4) задачей поиска седловой точки функционала Лагранжа, мы находим решение u^k и значение нормального напряжения в зоне контакта в явном виде. Этот факт позволяет нам на последующем шаге метода последовательных приближений вычислить новое значение силы трения, что является удобным при реализации численных алгоритмов.

Однако применение алгоритмов с классическим функционалом Лагранжа $L(v,l)$ в полукоэрцитивном случае не приводит к сходимости к седловой точке итерационного процесса. Это объясняется тем, что сходимость по прямой переменной v имеет место только при условии положительной определённости квадратичной формы функционала экстремальной задачи. При этом шаг сдвига по двойственной переменной l должен быть согласован с константой положительной определённости формы. Однако в полукоэрцитивной задаче (4) квадратичная форма (2) является лишь неотрицательно определённой.

Для устранения данного затруднения был рассмотрен модифицированный функционал Лагранжа $M(v,l)$ на пространстве $V \times L_2(\Gamma_2)$ следующего вида:

$$M(v,l) = I(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_2} \left\{ \left[(l + rv_n)^+\right]^2 - l^2 \right\} d\Omega,$$

где $(l + rv_n)^+ \equiv \max\{0, l + rv_n\}$, $r > 0$ – const.

Определение 2. *Пара* $(v^*,l^*) \in V \times L_2(\Gamma_2)$ *называется седловой точкой модифицированного функционала Лагранжа* $M(v,l)$, *если выполнено двустороннее неравенство*

$$M(v^*,l) \leq M(v^*,l^*) \leq M(v,l^*) \quad \forall (v,l) \in V \times L_2(\Gamma_2).$$

Известно, что множества седловых точек классического и модифицированного функционалов Лагранжа совпадают.

Для отыскания седловой точки модифицированного функционала $M(v,l)$ применяется метод, основанный на комбинировании метода Удзавы и итеративной prox-регуляризации. Алгоритм вырабатывает последовательность $\{(u^m, l^m)\}$ по следующему правилу.

1. Зададим начальное приближение $(u^0, l^0) \in V \times H^{1/2}(\Gamma_2)$.
2. Найдём u^{m+1} из критерия

$$\|u^{m+1} - \overline{u}^{m+1}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq \delta_m, \tag{5}$$

где

$$\overline{u}^{m+1} = \arg\min_{v \in V} \left\{ M(v,l^m) + \frac{1}{2}\|v - u^m\|^2_{[L_2(\Omega)]^2} \right\}, \tag{6}$$

$$\delta_m > 0,\ \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m < \infty.$$

3. Вычислим следующее приближение двойственной переменной

$$l^{m+1} = (l^m + r u_n^{m+1})^+. \tag{7}$$

Критерий (5) означает, что вместо точного решения $\overline{u}^{m+1}$ берётся его приближенное значение u^{m+1}, получаемое при численном решении задачи (6) методом конечных элементов.

Регуляризирующая добавка $\frac{1}{2}\|v - u^m\|^2_{[L_2(\Omega)]^2}$ обеспечивает коэрцитивность в V минимизируемых функционалов (6), откуда вытекает единственность решения вспомогательных задач с заданным трением.

Приближенное решение задачи (4) осложняется тем, что минимизируемый функционал не является дифференцируемым по переменной v. Для преодоления этого затруднения рассматривается модифицированный функционал Лагранжа с двумя множителями, позволяющий сгладить функционал задачи. Это позволяет перейти в итерационном процессе к задаче безусловной минимизации дифференцируемого функционала.

Перепишем задачу (4) следующим образом:

$$\begin{cases} I(v,w) = \frac{1}{2}a(v,v) - \int\limits_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_1} p \cdot v \, d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_2} g^k |v_\tau - w| \, d\Gamma \to \min, \\ v \in K,\ w \in L_2(\Gamma_2),\ w = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_2. \end{cases} \tag{8}$$

На пространстве $V \times [L_2(\Gamma_2)]^3$ определим модифицированный функционал Лагранжа:

$$M(v,w,l_1,l_2) = I(v,w) + \frac{1}{2r}\int\limits_{\Gamma_2} \left\{ \left[(l_1 + r v_n)^+\right]^2 - l_1^2 \right\} d\Gamma + \frac{1}{2r}\int\limits_{\Gamma_2} \left\{ l_2 w + \frac{r}{2} w^2 \right\} d\Gamma.$$

Тогда на шаге (6) метода Удзавы мы получаем следующую задачу минимизации

$$\min_{v,w} \left\{ M(v,w,l_1^m,l_2^m) + \frac{1}{2}\|v - u^m\|^2_{[L_2(\Omega)]^2} \right\},$$

которая сводится к задаче минимизации непрерывно дифференцируемого функционала следующего вида

$$\min_v \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \int\limits_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_1} p \cdot v \, d\Gamma + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_2} \left\{ \left[(l_1^m + r v_n)^+ \right]^2 - (l_1^m)^2 \right\} d\Omega + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Gamma_2} F(v_\tau) \, d\Gamma + \frac{1}{2} \|v - u^m\|^2_{[L_2(\Omega)]^2} \right\}.$$

Здесь $F(v_\tau) = \inf\limits_w \left(g^k |v_\tau - w| + l_2^m w + \frac{r}{2} w^2 \right)$ — непрерывно дифференцируемая выпуклая функция скалярного аргумента. Функция $F(v_\tau)$ и новое значение переменной $\overline{w}^{m+1}$ вычисляются в работе в явном виде. На третьем шаге метода Удзавы корректируем вторую двойственную переменную l_2 по формуле $l_2^{m+1} = l_2^m + r w^{m+1}$.

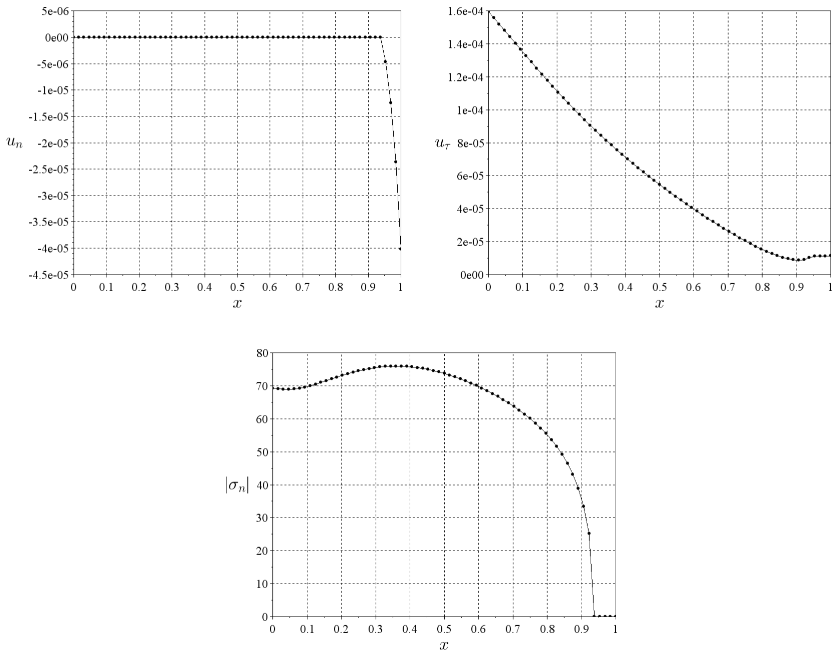


Рис. 2 — Значение функций u_n, u_τ, $|\sigma_n|$ на Γ_2 для $\mathbb{I}$ примера

В конце главы даётся описание алгоритма численного решения задачи с помощью метода конечных элементов. Значения параметров брались следующими: коэффициент трения $F = 0.3$, модуль упругости Юнга $E = 210000$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, константа $r = 10^8$, объёмные силы $f = (0,0)$. Рассматривалось два примера с разными боковыми усилиями: $\mathbb{I}$ пример: $p|_{\Gamma_1} = (90{,}0)$ МПа, $p|_{\Gamma_1} = (-100{,}0)$ МПа, $\mathbb{III}$ пример: $p|_{\Gamma_1} = (100{,}0)$ МПа, $p|_{\Gamma_1} = (-50{,}0)$ МПа.

На рисунке 2 изображены значения функций u_n, u_τ, $|\sigma_n|$ в зоне контакта упруго тела и абсолютно жёсткой опоры для $\mathbb{I}$ примера. На графиках u_n и $|\sigma_n|$ видно, что в вершине тупого угла происходит отлипание тела от жёсткой опоры. Это следует из того, что $u_n < 0$ и $|\sigma_n| = 0$ в этой точке.

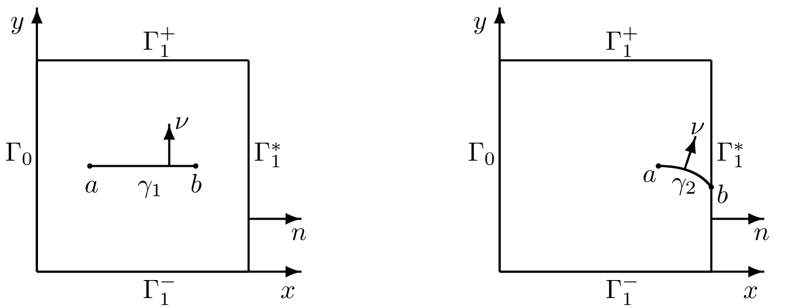
Расчёты показали, что численный метод решения задачи работает намного эффективней при больших значениях константы r. Этот факт объясняется тем, что компонента u_n прямой переменной близка к нулю. При $r = 10^8$ выполняется 15 внешних итераций метода последовательных приближений. Из таблицы 1 видно, что при решении возникающих вспомогательных задач с заданным трением требуется всего порядка 10 итераций по двойственной переменной. Также видно, что применение сглаживающего метода не влечёт за собой существенного увеличения количества итераций, причём решения, полученные с помощью разных подходов, совпадают.

Таблица 1 — Количество итераций по прямой и двойственной переменной.

h_m	1/8	1/16	1/32	1/64
без сглаживания				
$\mathbb{I}$ Кол-во итераций по t	132	990	4458	16862
$\mathbb{I}$ Кол-во итераций по l	5	6	8	10
$\mathbb{III}$ Кол-во итераций по t	1034	2430	11164	50426
$\mathbb{III}$ Кол-во итераций по l	6	7	10	14
со сглаживанием				
$\mathbb{I}$ Кол-во итераций по t	133	985	4465	16860
$\mathbb{I}$ Кол-во итераций по l	5	6	8	10
$\mathbb{III}$ Кол-во итераций по t	1034	2434	11182	50562
$\mathbb{III}$ Кол-во итераций по l	6	7	10	14

Вторая глава посвящена решению задачи о равновесии упругого тела с трещиной. Классический подход к описанию данных задач заключается в том, что на берегах трещины, как правило, задаются нулевые поверхностные силы. Это не исключает возможность проникания берегов трещины друг в друга, что с точки зрения механики является неестественным. Поэтому рассматривается нелинейная модель, в которой на берегах трещины ставятся условия вида неравенств, обеспечивающие условие взаимного непроникания. Приводится краевая постановка 2D задачи с трещиной внутри упругого тела и задачи с трещиной, выходящей на внешнюю границу под ненулевым углом.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - ограниченная область с липшицевой границей Γ, и $\gamma \subset \Omega$ - трещина в Ω. Предполагаем, что $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$, где Γ_0, Γ_1 - непустые открытые попарно непересекающиеся подмножества Γ. Обозначим через $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \overline{\gamma}$ (рисунок 3). На трещине γ выберем вектор единичной нормали ν. В этом случае можем говорить о положительном (верхнем) γ^+ и отрицательном (нижнем) γ^- берегах трещины γ соответственно. Рассмотрим вариационное неравенство, соответствующее задаче теории упругости с трещиной.



а) с трещиной γ_1 б) с трещиной γ_2

Рис. 3 — Упругое тело Ω с трещиной

Определим пространство

$$W = \left\{ v \in [H^1(\Omega_\gamma)]^2 : \ v = 0 \text{ на } \Gamma_0 \right\}$$

и множество допустимых перемещений

$$K = \left\{ v \in [H^1(\Omega_\gamma)]^2 : \ [v_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma, \, v = 0 \text{ на } \Gamma_0 \right\},$$

где, $[v_\nu] = v_\nu^+ - v_\nu^-$ - скачок функции $v_\nu = v \cdot \nu$ на γ. Условие $[v_\nu] \geq 0$ обеспечивает взаимное непроникание берегов трещины γ^+ и γ^- друг в друга.

Таким образом, необходимо найти:

$$u \in K : \ a(u, v-u) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f_i(v_i - u_i)\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_1} p_i(v_i - u_i)\, d\Gamma \geq 0 \quad \forall \ v \in K \ . \quad (9)$$

Известно, что решение $u \in K$ задачи (9) существует и единственно и удовлетворяет уравнениям равновесия и краевым условиям в смысле обобщённых функций.

Вариационная постановка задачи с трещиной, выходящей на внешнюю границу, имеет такой же вид. Однако для разрешимости задачи мы предполагаем, что трещина γ выходит на внешнюю границу под ненулевым углом. Данное предположение необходимо, так как при доказательстве разрешимости используется неравенство Корна, для выполнения которого необходимо располагать определённой гладкостью границы области.

Для решения поставленных задач строится и обосновывается общая схема двойственности, основанная на модифицированном функционале Лагранжа $M(v,l)$ на пространстве $W \times L_2(\gamma)$:

$$M(v,l) = J(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_{\gamma} \left\{ \left[(l - r[v_\nu])^+\right]^2 - l^2 \right\} d\Gamma,$$

где $J(v) = \dfrac{1}{2}a(v,v) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f_i v_i \, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_1} p_i v_i \, d\Gamma.$

Введём также модифицированный двойственный функционал

$$\underline{M}(l) = \inf_{v \in W} M(v,l).$$

и определим для него двойственную задачу

$$\begin{cases} \underline{M}(l) - \sup, \\ l \in L_2(\gamma). \end{cases} \qquad (10)$$

Отметим, что двойственная задача разрешима, если решение u исходной задачи принадлежит пространству $[H^2(\Omega_\gamma)]^2$.

Однако для задачи с трещиной предполагать большую регулярность решения, чем $[H^1(\Omega_\gamma)]^2$, является неестественным. В работе исследуется двойственный метод, в котором заранее не предполагается разрешимость двойственной задачи (10).

Используя свойства функционала чувствительности, можно показать что двойственный функционал $\underline{M}(l)$ непрерывен и дифференцируем по Гато в $L_2(\gamma)$, и его производная $\nabla \underline{M}(l)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\dfrac{1}{r}$, т.е. выполняется неравенство

$$\|\nabla \underline{M}(l^{'}) - \nabla \underline{M}(l^{''})\|_{L_2(\gamma)} \leq \frac{1}{r}\|l^{'} - l^{''}\|_{L_2(\gamma)} \quad \forall l^{'},l^{''} \in L_2(\gamma).$$

Причём можно показать, что $\nabla \underline{M}(l) = m(l) = \max\{-[u_\nu], -\dfrac{l}{r}\} \; \forall l \in L_2(\gamma)$.

Двойственная задача (10) решается градиентным методом

$$l^{k+1} = l^k + \theta_k m(l^k), \; k = 1,2,\cdots \qquad (11)$$

с любым стартовым значением $l^0 \in L_2(\gamma)$, $\theta_k \in [\beta, 2r - \beta]$, $\beta \in (0,r]$.

Градиентный метод (11) соответствует алгоритму Удзавы для решения задачи (4). На шаге $k = 0$ задаётся начальная функция $l^0 \in L_2(\gamma)$ и для каждого $k = 0,1,2,\ldots$ последовательно определяются:

$$(i) \quad u^{k+1} = \arg\min_{v \in W} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_{\gamma} \left\{ \left[(l^k - r[v_\nu])^+\right]^2 - (l^k)^2 \right\} d\Gamma \right\}; \qquad (12)$$

$$(ii) \qquad l^{k+1} = l^k + \theta_k \max\{-[u_\nu^{k+1}], -\frac{l^k}{r}\}, \, \theta_k \in [\beta, 2r-\beta], \, \beta \in (0,r]. \qquad (13)$$

Доказывается основное равенство двойственности.

Теорема 1. *Справедливо равенство двойственности*

$$\sup_{l \in L_2(\gamma)} \underline{M}(l) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Отметим, что при условии разрешимости двойственной задачи (10) можно доказать сходимость метода (12), (13) по функционалу задачи J, т.е.

$$\lim_{k \to \infty} \chi(m(l^k)) = \lim_{k \to \infty} J(u^{k+1}) = J(u),$$

где u - решение задачи (9). При этом последовательность $\{l^k\}$ слабо сходится к решению двойственной задачи (10).

Для решения задачи минимизации кусочно-квадратичного функционала, получаемого после дискретизации задачи с помощью МКЭ, используются метод покоординатного спуска и обобщенный метод Ньютона. Метод покоординатного спуска обладает теоретической сходимостью и является простым в реализации методом оптимизации, однако проблемой данного метода является сложность в его распараллеливании. В свою очередь, обобщенный метод Ньютона легко и хорошо поддаётся распараллеливанию и его основная вычислительная сложность заключается в нахождении обратной матрицы Гессе. Однако, так как функционал задачи является лишь непрерывно дифференцируемым, то в методе используется обобщённая матрица Гессе.

Численные эксперименты были проведены на гибридном вычислительном кластере ВЦ ДВО РАН на базе архитектуры OpenPOWER. Вариант с использованием метода покоординатного спуска считался на процессоре IBM POWER8 4.023 GHz. Вычисления для обобщённого метода Ньютона проводились на NVIDIA Tesla P100 GPU с использованием библиотеки cuBLAS. Это дало существенный прирост в скорости выполнения счета.

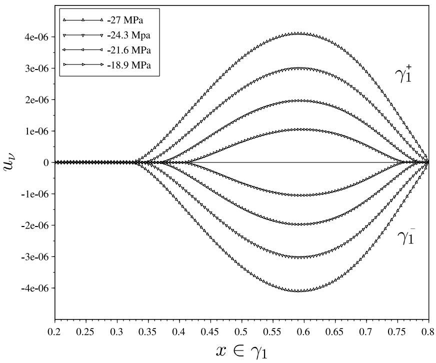
Значения параметров с внутренней трещиной брались следующими: $f = (0{,}0)$, поверхностное усилие с правой $p|_{\Gamma_1^*} = (g \cdot (1 - |2y-1|), 0)$, верхней $p|_{\Gamma_1^+} = (0, -1)$ МПа и нижней $p|_{\Gamma_1^-} = (0{,}1)$ МПа сторон, $E = 73000$ МПа, $\mu = 0.34$, $r = 10^8$, параметр триангуляции h на трещине равен 0.005.

В таблице 2 представлено среднее количество итераций по прямой переменной t и количество итераций по двойственной переменной α с использованием разных методов минимизации. Из неё видно, что обобщенный метод Ньютона сходится за небольшое количество итераций, причём разница между полученными решениями оказалась порядка 10^{-11}. Это говорит о близости полученных решений.

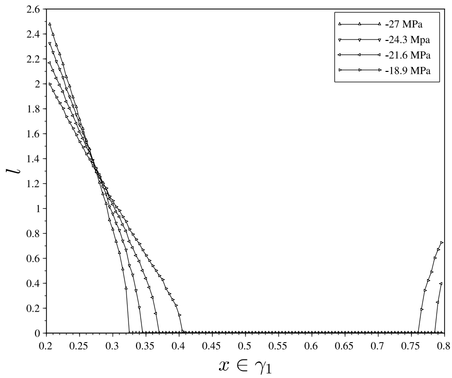
Таблица 2 — Результаты счета метода Удзавы

	Метод покоординатного спуска*		Обобщенный метод Ньютона**	
$-g$, МПа	Итер. по t	Итер. по α	Итер. по t	Итер. по α
27	32510	8	3	8
24.3	28353	8	3	8
21.6	21776	8	3	8
18.9	18723	8	3	8

На рисунке 4 представлены значения u_ν на берегах трещины $\gamma_1^\pm$ и значение двойственной переменной при разных боковых усилиях с правой стороны: g=$\{-27$ МПа;-24.3 МПа;-21.6 МПа;-18.9 МПа$\}$.



а) Значение функции u_ν на $\gamma_1^\pm$



б) Значение двойственной переменной

Рис. 4 — Результаты численного решения с внутренней трещиной

На рисунке 4а видно, что взаимное проникание берегов трещины друг в друга отсутствует, скачок функции $[u_\nu] \geq 0$ всюду на трещине. Помимо этого, на графиках 4б видно, что значение двойственной переменной больше нуля в зонах контакта берегов трещины. Это говорит о наличии нормального напряжения в этих узлах. Аналогично приводятся результаты численного решения для задачи с трещиной γ_2.

На примере 3D упругой задачи с трещиной приводится сравнение предложенного модифицированного метода двойственности с его классическим аналогом. Во-первых, его использование позволяет доказать теоретическую сходимость алгоритма Удзавы как по прямой, так и по двойственной переменной. А во-вторых, для нахождения второй компоненты седловой точки модифицированного функционала Лагранжа используется чисто градиентный метод, который имеет более высокую скорость сходимости, чем метод проекции градиента.

В конце главы приводятся результаты численного решения и зависимость количества итераций метода Удзавы от шага сдвига по двойственной переменной для классического и модифицированного методов (рисунок 5).

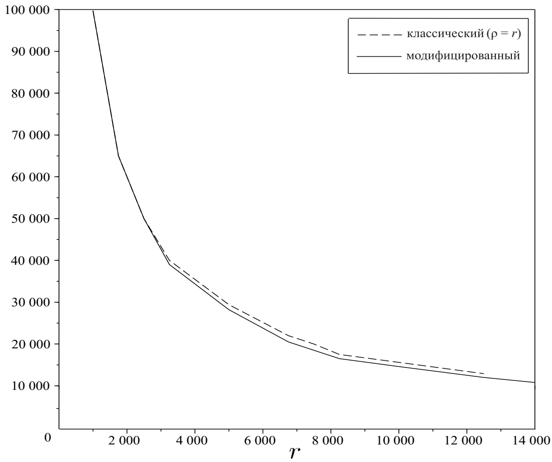


Рис. 5 — Количество итераций по двойственной переменной в зависимости от параметра r.

На рисунке 5 видно, что с увеличением параметра r, количество итераций по двойственной переменной уменьшается. Помимо этого, видно что алгоритм Удзавы с классическим функционалом Лагранжа перестаёт сходиться при $r > 13000$, в отличие от модифицированного аналога. Так как для модифицированного метода параметр $r > 0$ не ограничен сверху, то с увеличением параметра r количество итераций существенно уменьшается. Так при $r = 10^8$ требуется всего 9 итераций по двойственной переменной. Это подтверждает теоретические выводы, сделанные в главе.

В третьей главе получено решение контактной задачи теории упругости с отслоившимся жёстким включением. В начале главы приводится общее описание данной задачи и её краевая и вариационная постановки.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - ограниченная область с достаточно регулярной границей $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$, $\omega \subset \Omega$ - подобласть с достаточно регулярной границей Σ такая, что $\overline{\omega} \cap \Gamma = \varnothing$ (рисунок 6). Предполагаем, что Σ состоит из двух частей γ и $\Sigma \setminus \gamma$, $\operatorname{meas}(\Sigma \setminus \gamma) > 0$, где γ - гладкая линия, без самопересечений.

Обозначим через $\nu = (\nu_1,\nu_2)$ единичный вектор внешней нормали к Σ. Подобласть ω будет соответствовать жёсткому включению, а линия γ - трещине, расположенной на поверхности этого включения. Область $\Omega \setminus \overline{\omega}$ соответствует упругой части тела.

Термин "жёсткое включение" означает, что перемещения точек подобласти ω являются элементами пространства $R(\omega)$ инфинитезимальных жёстких перемещений, которое определяется следующим образом

$$R(\omega) = \{\rho = (\rho_1,\rho_2) : \rho(x) = Bx + C,\ x \in \omega\},$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},\ C = (c^1,c^2);\ b,c^1,c^2 - \text{произвольные постоянные.}$$

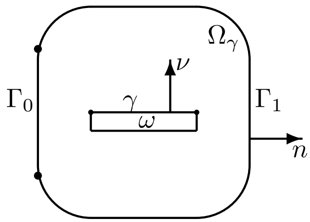


Рис. 6 — Упругое тело с отслоившимся жёстким включением

Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \overline{\gamma}$. Введём пространство

$$H^{1,\omega}_{\Gamma_0} = \left\{v = (v_1,v_2) \in [H^1(\Omega_\gamma)]^2 :\ v = \rho \text{ на } \omega;\ \rho \in R(\omega);\ v = 0 \text{ на } \Gamma_0\right\},$$

и определим множество допустимых перемещений

$$K_\omega = \left\{v \in H^{1,\omega}_{\Gamma_0} :\ (v-\rho)\nu \ge 0 \text{ на } \gamma^+\right\}.$$

Тогда постановка задачи в виде вариационного неравенства будет иметь следующий вид. Найти $u \in K_\omega$:

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v-u)\,d\Omega - \int\limits_{\Omega_\gamma} f_i(v_i-u_i)\,d\Omega - \int\limits_{\Gamma_1} p_i(v_i-u_i)\,d\Gamma \ge 0 \quad \forall\ v \in K_\omega.$$

Приводится метод решения с параметром λ, стремящимся к нулю, позволяющий рассматривать задачу с отслоившимся жёстким включением как предельную для семейства задач о равновесии упругих тел с трещиной, сформулированных в области Ω_γ. При этом, при $\lambda \to 0$ мы получаем жёсткое включение ω, так что каждая точка $x \in \omega$ имеет перемещение $\rho_0(x)$, $\rho_0 \in R(\omega)$. Дадим необходимое пояснение к сказанному.

Введем тензор $C^\lambda = \left\{c^\lambda_{ijkl}\right\}$, $i,j,k,l = 1,2$,

$$c^\lambda_{ijkl} = \begin{cases} c_{ijkl} & \text{в } \Omega\setminus\overline{\omega}, \\ \lambda^{-1}c_{ijkl} & \text{в } \omega \end{cases}$$

и рассмотрим следующее семейство задач с трещиной, подробно исследованных в Главе 2.

В области Ω_γ найти функцию $u^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda) \in K$, $i,j = 1,2$ такую, что:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}^\lambda(u^\lambda)\varepsilon_{ij}(v-u^\lambda)\,d\Omega - \int\limits_{\Omega_\gamma} f_i(v_i - u_i^\lambda)\,d\Omega - \int\limits_{\Gamma_1} p_i(v_i - u_i^\lambda)\,d\Gamma \geq 0 \quad \forall\, v \in K.$$

Можно доказать, что решения u^λ при $\lambda \to 0$ слабо сходятся в W к решению u вариационного неравенства.

Теорема 2. *Имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\lambda \to 0} J^\lambda(u^\lambda) = J(u).$$

Из теоремы 2 следует, что при $\lambda \to 0$ имеет место сходимость последовательности решений $\{u^\lambda\}$ к решению задачи u по функционалу задачи J. Для задачи с фиксированным λ применяется схема двойственности, исследованная во второй главе.

Для решения задачи с фиксированным параметром λ в конечно-элементном приближении применяется обобщённый метод Ньютона. При уменьшении параметра λ растёт число обусловленности матрицы жёсткости, что влечёт за собой увеличение количества итераций по прямой переменной. Вычисления проводились с точностью $\varepsilon_t = 10^{-14}$, $\varepsilon_\alpha = 10^{-8}$, с параметрами: $f = (0,0)$, поверхностное усилие с правой $p_1|_{\Gamma_1} = g(1 - |1-2x_2|)$, $p_2|_{\Gamma_1} = 0$ МПа, верхней $p_1|_{\Gamma_1} = 0$ МПа, $p_2|_{\Gamma_1} = -5$ МПа и нижней $p_1|_{\Gamma_1} = 0$ МПа, $p_2|_{\Gamma_1} = 2.5$ МПа сторон, $E = 210000$ МПа, $\mu = 0.3$, $r = 10^{10}$, $g = 90$ МПа.

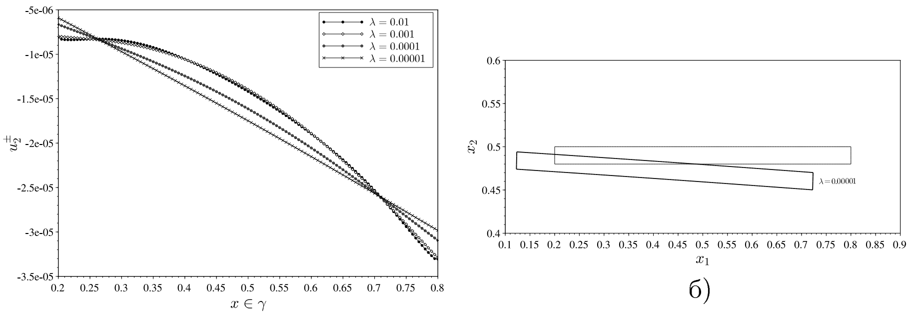
В таблице 3 приводится количество итераций по прямой и двойственной переменным при разных λ. Из неё видно, что обобщенный метод Ньютона сходится за небольшое количество итераций, причём, при уменьшении λ решение стабилизируется.

Таблица 3 — Результаты численного решения при разных λ

λ	Итер. по t	Итер. по α	$\|t\|_2$	$\|t^{**} - t^*\|_\infty$
0.01	3	4	0.00428	-
0.001	3	4	0.00415	$1 \cdot 10^{-5}$
0.0001	4	4	0.00413	$2.2 \cdot 10^{-6}$
0.00001	8	4	0.00413	$1.3 \cdot 10^{-6}$
0.000001	16	4	0.00413	$2 \cdot 10^{-7}$

$\|t^{**} - t^*\|_\infty$ - разница между ближайшими решениями при разных значениях параметра λ по норме ∞

Графики на рисунке 7а представляют значения $u_2^\pm$ на трещине при разных значениях $\lambda = \{0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001\}$. Расчёты показали, что скачок на трещине везде равен нулю, т.е. происходит слипание берегов трещины. На рисунке 7б показано перемещение включения ω с увеличивающим коэффициентом 1000 ($u \times 1000$) при $\lambda = 0.00001$.



а) б)

Рис. 7 — Значения $u_2^{\pm}$ на трещине и перемещение жёсткого включения

На рисунке 7 видно, что с уменьшением параметра λ область ω ведёт себя как жёсткое включение. Численные результаты показали, что предложенный метод эффективен при решении задач теории упругости с жёстким включением.

В заключении диссертации формулируются основные результаты работы, которые состоят в следующем.

1. Для решения квазивариационного неравенства Синьорини рассмотрен и исследован метод последовательных приближений. Построен и обоснован метод, основанный на комбинировании алгоритма Удзавы и итеративной prox-регуляризации модифицированного функционала Лагранжа, для решения полукоэрцитивных вспомогательных задач с заданным трением.

2. Построена и обоснована модифицированная схема двойственности для решения 2D и 3D задач теории упругости с трещиной. Доказано соотношение двойственности.

3. Для задачи с отслоившимся жёстким включением исследован и применён метод решения с параметром λ, стремящимся к нулю, позволяющий рассматривать данную задачу как предельную для семейства задач о равновесии упругих тел с трещиной.

4. Для рассмотренных задач разработаны алгоритмы на основе метода конечных элементов и программное обеспечение для численного решения. Проведены численные эксперименты, подтверждающие эффективность модифицированных методов двойственности.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на разработку эффективных методов двойственности, основанных на модифицированных функционалах Лагранжа, для решения трёхмерных задач теории упругости с жёсткими включениями, задач теории упругости с трением на трещине.

В приложении приводится исходный код программы для решения задачи с трещиной с использованием библиотеки cuBLAS для вычислений на GPU.

Основные публикации по теме диссертации

Публикации в изданиях, индексируемых в Web of Science

1. *Намм, Р. В.* Метод последовательных приближений для решения квазивариационного неравенства Синьорини / Р. В. Намм, Г. И. Цой // Известия вузов. Математика. — 2017. — № 1. — С. 44—52.
2. *Намм, Р. В.* Модифицированная схема двойственности для решения упругой задачи с трещиной / Р. В. Намм, Г. И. Цой // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2017. — Т. 20, № 1. — С. 47—58.
3. *Намм, Р. В.* Решение контактной задачи теории упругости с жестким включением / Р. В. Намм, Г. И. Цой // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 4. — С. 165—172.

Публикации в изданиях, индексируемых в Scopus

4. *Namm, R.* Solution of the Contact Elasticity Problem Based on an Iterative Proximal Regularization Method for Modified Lagrangian Functional / R. Namm, G. Tsoy // CEUR Workshop Proceedings. — 2016. — Vol. 1623. — P. 242—252.
5. *Namm, R. V.* A Modified Duality Method for Solving an Elasticity Problem with a Crack Extending to the Outer Boundary / R. V. Namm, G. I. Tsoy, E. M. Vikhtenko // Communications in Computer and Information Science. — 2019. — Vol. 974. — P. 35—48.
6. *Namm, R.* Modified Lagrange Functional for Solving Elastic Problem with a Crack in Continuum Mechanics / R. Namm, G. Tsoy, G. Woo // Communications of the Korean Mathematical Society. — 2019. — Vol. 34, no. 4.

Публикации в других изданиях

7. *Намм, Р. В.* Модифицированные методы двойственности для решения задачи теории упругости с трещиной / Р. В. Намм, Г. И. Цой // Международная школа-конференция «Соболевские чтения» (Новосибирск, 18-22 декабря 2016 г.): Тезисы докладов. — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2016. — С. 125—126.

8. *Намм, Р. В.* Метод двойственности для решения задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся жёстким включением / Р. В. Намм, Г. И. Цой // Информ. технологии и высокопроизводительныевычисления: Материалы IV Всероссийской науч.-практ. конф. — Хабаровск: издательство ТОГУ, 2017. — С. 210—212.

9. *Намм, Р. В.* Метод решения задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся жёстким включением / Р. В. Намм, Г. И. Цой // Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций: Материалы II Дальневосточной школы-семинара. — Комсомольск-на-Амуре: издательство КнАГТУ, 2017. — С. 96.

10. *Цой, Г. И.* Численное моделирование равновесия упругого тела с трещиной / Г. И. Цой // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твёрдого тела и прогрессивные технологии в машиностроении: Материалы V Дальневосточной конференции с международным участием. — Комсомольск-на-Амуре: издательство КнАГТУ, 2018. — С. 82—86.

11. *Namm, R.* Modified Duality Method for Solving an Elastic Problem with a Crack Extending to the Outer Boundary / R. Namm, G. Tsoy, V. E. // Book of abstracts of IX International Conference on Optimization Methods and Applications «OPTIMIZATION AND APPLICATIONS» (OPTIMA-2018). — Moscow, Dorodnicyn Computing Center of RAS, 2018. — P. 125.

12. *Цой, Г. И.* Контактная задача теории упругости с заданным трением / Г. И. Цой, Р. В. Намм // Научно-техническое и экономическое сотрудничество стран АТР в XXI веке. — 2014. — Т. 1. — С. 282—289.

Свидетельства о регистрации программ ЭВМ

13. *Цой, Г. И.* Свидетельство № 2018614876 от 19.04.2018 Российская Федерация. Численное решение контактной задачи теории упругости с трещиной с использованием модифицированной схемы двойственности: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Г. И. Цой, Э. М. Вихтенко. — заявитель и правообладатель ТОГУ. — 1 с.

14. *Цой, Г. И.* Свидетельство № 2018663520 от 30.10.2018 Российская Федерация. Программа для численного решения квазивариационного неравенства Синьорини: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Г. И. Цой. — заявитель и правообладатель ВЦ ДВО РАН. — 1 с.

Цой Георгий Ильич

Модифицированные методы двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________